TEOREMA SUBORDINASI UNTUK FUNGSI BAZILEVIC ORDER ALPHA

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
dalam bidang Matematika

oleh
RENY DWI YUANITA
135090401111024

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2017

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

TEOREMA SUBORDINASI UNTUK FUNGSI BAZILEVIC ORDER ALPHA

oleh

RENY DWI YUANITA
135090401111024

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji
pada tanggal 9 Agustus 2017
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam Bidang Matematika

Pembimbing

Prof. Dr. Marjono, M.Phil
NIP. 196211161988031004

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si, M.Si, Ph.D.
NIP. 197509082000031003

LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	**:**	**Reny Dwi Yuanita**
NIM	**:**	**135090401111024**
Jurusan	**:**	**Matematika**
Penulis Skripsi berjudul	**:**	**Teorema Subordinasi untuk Fungsi Bazilevic Order Alpha**

dengan ini menyatakan bahwa:

1. **Skripsi ini adalah hasil pemikiran saya, bukan hasil menjiplak dari tulisan orang lain. Rujukan-rujukan yang tercantum pada Daftar Pustaka hanya digunakan sebagai referensi.**

2. **Apabila di kemudian hari Skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala resiko dari keadaan tersebut.**

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 9 Agustus 2017
yang menyatakan,

RENY DWI YUANITA
NIM. 135090401111024

TEOREMA SUBORDINASI UNTUK FUNGSI BAZILEVIC ORDER ALPHA

ABSTRAK

Pada skripsi ini, dijelaskan fungsi Starlike, fungsi Konveks, fungsi Bazilevic sebagai subkelas fungsi univalen. Selanjutnya, akan dipelajari relasi antar subkelas fungsi univalen dan diperkenalkan tentang subordinasi fungsi analitik, serta aplikasi subordinasi pada fungsi Bazilevic.

Kata kunci: *Fungsi Univalen, Fungsi Bazilevic, Subordinasi.*

A SUBORDINATION THEOREM OF BAZILEVIC FUNCTION ORDER ALPHA

ABSTRACT

In this paper, described the Starlike function, Convex function, Bazilevic function as a subset of univalent functions. Next, we will study relation of inter subclass of univalent function and be introduced about the subordination of analytic function, as well as subordinate application in the Bazilevic function.

Keywords: *Univalent function, Bazilevic function, Subordination.*

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan Skripsi yang berjudul **Teorema Subordinasi untuk Fungsi Bazilevic Order Alpha** sebagai syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains dalam bidang matematika di Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Brawijaya.

Dalam proses pembuatan Skripsi ini penulis tidak lepas dari bantuan semua pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. Marjono, M.Phil selaku dosen pembimbing atas segala bimbingan, motivasi, saran, waktu, dan kesabaran yang telah diberikan selama pembuatan Skripsi ini.

2. Dr. Moch. Aruman Imron, Drs., M.Si dan Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si., M.Si., Ph.D., selaku dosen penguji atas segala kritik dan saran yang diberikan untuk perbaikan Skripsi ini.

3. Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si., M.Si., Ph.D., Dr. Isnani Darti, S.Si., M.Si., dan Marsudi, Drs. MS., selaku Ketua Jurusan Matematika, Ketua Program Studi Matematika, dan dosen pembimbing akademik.

4. Seluruh dosen Jurusan Matematika yang telah memberikan ilmu pengetahuannya kepada penulis, serta segenap staf dan karyawan TU Jurusan Matematika atas segala bantuannya.

5. Bapak, Ibu, dan keluarga tercinta yang selalu mendoakan, memberikan semangat, serta kasih sayangnya kepada penulis.

6. Sahabat tercinta Fitria Kusuma Dewi, Eka Rima Agustina, Anis Fitria, Dwi Wahyu Futhuhurrahman, serta Keluarga besar Matematika 2013 atas bantuan dan kebersamaannya selama ini.

7. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu per satu.

Semoga Allah SWT membalas setiap kebaikan yang telah diberikan oleh semua pihak kepada penulis dalam menyelesaikan Skripsi ini. Penulis menyadari bahwa dalam penulisan Skripsi ini masih terdapat banyak kekurangan. Untuk itu, kritik dan saran yang membangun sangat penulis harapkan sebagai perbaikan untuk penulisan selanjutnya. Harapan penulis semoga Skripsi ini dapat bermanfaat bagi pembaca dalam menambah wawasan keilmuan atau bahan informasi lainnya.

Malang, 9 Agustus 2017

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR NOTASI

z	: Variabel bilangan kompleks
x	: Bagian riil bilangan komplek
y	: Bagian imajiner bilangan kompleks
i	: $\sqrt{-1}$
r	: $\lvert z\rvert = \sqrt{x^2 + y^2}$
arg	: $\theta \in \mathbb{R}$ dengan $0 \leq \theta \leq 2\pi$
$\mathbb{C}$	: Himpunan semua bilangan kompleks
$\mathbb{R}$	: Himpunan semua bilangan riil
D	: $\{z : z \in \mathbb{C}, \lvert z\rvert < 1\}$
$\bar{D}$	: $\{z : z \in \mathbb{C}, \lvert z\rvert \leq 1\}$
$\in$	: Elemen/ Anggota
$\subset$	: Himpunan bagian
$\forall$	: Untuk setiap
$\prec$	: *Subordinate*
$\nprec$	: *Not subordinate*
$f(z)$	: Nilai fungsi di z
$f'(z)$	: Turunan pertama $f(z)$ terhadap z
$f''(z)$	: Turunan kedua $f(z)$ terhadap z
$F(z)$	: Integral $f(z)$ terhadap z
A	: Kelas fungsi $f(z)$ analitik di D
S	: Kelas fungsi $f(z)$ univalen di D
S^*	: Fungsi starlike
$S^*(\alpha)$	: Fungsi starlike order alpha pada sektor
A	: Kelas fungsi $f(z)$ analitik di D

S	: Kelas fungsi $f(z)$ univalen di D
S^*	: Fungsi starlike
$S^*(\alpha)$	: Fungsi starlike order alpha pada sektor
$S_p(\lambda)$	: Fungsi λ- spirallike
$S_t(\alpha)$	: Fungsi starlike order alpha setengah bidang
C	: Fungsi konveks
$C(\alpha)$	: Fungsi konveks order alpha pada sektor
C_t	: *Close to Convex function*
$K(\alpha)$	: Fungsi konveks order alpha setengah bidang
B	: Fungsi Bazilevic
$B(\alpha,\beta)$	: Bazilevic order alpha tipe beta
$B_\lambda(\alpha,\beta)$	: Bazilevic λ order alpha tipe beta
$B(\alpha)$	: Bazilevic order alpha
$B_1(\alpha)$	: Bazilevic 1 order alpha
$P(z)$	: Pemisalan $B(\alpha)$
Re	: Real
Bidang-xy	: $\{(r,\theta)\|r \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$
Sektor setengah bidang	: $\{(r,\theta)\|r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \pi\}$

DAFTAR GAMBAR

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Analisis matematika merupakan salah satu cabang matematika yang mencakup geometri, fungsi, limit, turunan, deret, teori integral, dan ukuran. Bahasan pada analisis matematika mencakup variabel riil dan variabel kompleks yang memuat bilangan imajiner.

Peminat analisis matematika di jurusan matematika FMIPA UB sangat sedikit dibandingkan dengan peminat aljabar dan terapan matematika. Dari 96 mahasiswa Matematika Universitas Brawijaya selama dua periode terakhir, hanya tujuh mahasiswa yang memilih analisis matematika untuk penulisan skripsi. Hal ini disebabkan kurangnya minat mahasiswa terhadap pembuktian-pembuktian yang dilakukan pada analisis matematika. Oleh karena itu, perlu tekad untuk mempelajari atau bahkan mengembangkan analisis matematika, agar analisis matematika tidak tertinggal dengan cabang ilmu yang lain.

Pada skripsi ini, akan diperkenalkan topik tentang subordinasi fungsi analitik. Topik ini diprakarsai oleh Sanford S. Miller dan Petru T. Mocanu pada tahun 1981. Pada artikel tersebut, Miller dan Mocanu memberikan dasar-dasar dan terapan subordinasi. Pada tahun 2001, Marjono dan D.K. Thomas membahas tentang perumuman penyelesaian masalah untuk fungsi konveks dan fungsi starlike di sektor menggunakan Lemma Clunie-Jack dan Lemma Miller-Mocanu.

Pada tahun 2006, G. Murugusundaramoorthy dan N. Magesh membahas tentang subordinasi dan superordinasi menggunakan operator linear Dziok-Srivastava. Selanjutnya, Marjono pada tahun 2017 menggunakan Miller Mocanu Lemma pada subordinasi dan fungsi Bazilevic.

Pada skripsi ini, penulis memberikan relasi antar subkelas fungsi univalen dengan mengkaji kembali artikel Ram Singh pada tahun 1973 dan selanjutnya memperkenalkan prinsip subordinasi serta aplikasi subordinasi pada fungsi Bazilevic dengan mengkaji kembali artikel Marjono pada tahun 2017.

1.2 Rumusan Masalah

1. Bagaimana relasi antar subkelas pada fungsi univalen?
2. Bagaimana subordinasi pada fungsi Bazilevic?

1.3 Tujuan

1. Mempelajari subkelas terbesar dari fungsi analitik.
2. Menerapkan prinsip subordinasi menggunakan Lemma Miller-Mocanu pada fungsi Bazilevic.

BAB II
DASAR TEORI

2.1 Bilangan Kompleks

2.1.1 Bentuk bilangan kompleks

Jika z adalah suatu titik di bidang kompleks yang dikaitkan dengan bilangan kompleks (x, y) atau $x + iy$, maka dapat dilihat dari Gambar (2.1) bahwa

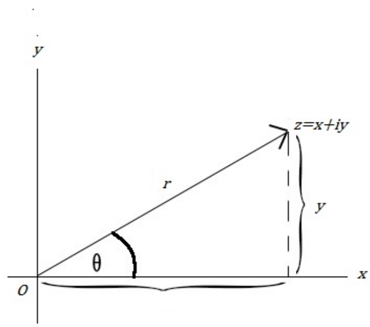
$$x = \cos\theta,$$

$$y = \sin\theta,$$

dimana $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |x + iy|$, dinyatakan sebagai *absolute value* atau $|z|$, dan θ dinamakan *argumen* dari $z = x + iy$ atau $\arg z$ sebagai sudut antara garis Oz dengan sumbu x positif. Hal ini mengakibatkan

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

yang dinamakan *bentuk kutub bilangan kompleks*, sedangkan r dan θ dinamakan *koordinat kutub* (Spiegel, 1987).



Gambar 2.1: Grafik bilangan kompleks

2.1.2 Teorema De'Moivre

Jika

$$z_1 = x_1 + iy_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1),$$

$$z_2 = x_2 + iy_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2),$$

maka dapat ditunjukkan bahwa

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)), \tag{2.1}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)),$$

Persamaan (2.1) dapat dinyatakan sebagai

$$z_1 z_2 ... z_n = r_1 r_2 ... r_n[\cos(\theta_1 + \theta_2 + ... + \theta_n) + i\sin(\theta_1 + \theta_2 + ... + \theta_n)],$$

dan jika $z_1 = z_2 = ... = z_n = z$, maka

$$z^n = (r(\cos\theta + i\sin\theta))^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

(Spiegel, 1987).

2.2 Fungsi Kompleks

Fungsi kompleks f merupakan fungsi yang mengawankan setiap z anggota dari S himpunan bilangan kompleks dengan $w = f(z)$, dimana S sebagai domain dan z sebagai variabel kompleks.

Jika diberikan fungsi bernilai kompleks dari variabel kompleks $f(z)$, maka dapat dinyatakan sebagai $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ dengan u dan v fungsi bernilai real dari variabel real x dan y. Fungsi $u(x,y)$ dan $v(x,y)$ berturut-turut dinamakan bagian real dan bagian imajiner dari fungsi $f(z)$.

2.3 Fungsi Univalen

Suatu $f(z)$ dikatakan analitik di suatu D jika turunan $f'(z)$ ada di semua titik z dari suatu daerah D. Suatu $f(z)$ dikatakan analitik di suatu titik z_0 jika terdapat suatu lingkungan $|z - z_0| < \delta$ sehingga $f'(z)$ ada di setiap titik pada lingkungan tersebut.

Misalkan A adalah kelas fungsi $f(z)$ analitik di $D = \{z : z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ dan dapat dinyatakan sebagai

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Fungsi $f(z)$ dikatakan fungsi univalen ternormalisasi jika $z_0 = 0, a_0 = 0, a_1 = 1, a_n \in \mathbb{C}$ sehingga diperoleh

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n. \tag{2.2}$$

Fungsi f analitik pada domain D disebut univalen jika memenuhi kondisi $f(z_1) \neq f(z_2), \forall z_1, z_2 \in D$ dengan $z_1 \neq z_2$. Dengan kata lain, f pemetaan satu-satu (injektif) dari D pada domain lainnya.

2.4 Subkelas Fungsi Univalen

Misalkan $S, S^*, S_p(\lambda), C, C_t$ dinotasikan sebagai fungsi univalen, Starlike, λ-Spirallike, Konveks, *Close-to-Convex* di D secara berurutan.

Definisi konveks order α setengah bidang

Fungsi f analitik di D dengan $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ dan $0 \leq \alpha < 1$ jika

$$Re\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > \alpha$$

untuk $z \in D$, maka f dikatakan Konveks order α setengah bidang dan dinotasikan dengan $K(\alpha)$

(Marjono dan D. K Thomas, 2001).

Definisi starlike order α setengah bidang

Fungsi f analitik di D dengan $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ dan $0 \leq \alpha < 1$ jika

$$Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \alpha$$

untuk $z \in D$, maka f dikatakan Starlike order α setengah bidang dan dinotasikan dengan $S_t(\alpha)$

(Marjono dan D. K Thomas, 2001).

Kelas $K(\alpha)$ dan $S_t(\alpha)$ telah dipelajari dan telah didapatkan bentuk standar oleh Goodman, dan didefinisikan sebagai berikut:

Definisi konveks order α pada sektor

Fungsi f analitik di D dengan $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ dan $0 \leq \alpha < 1$ jika

$$\left|arg\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)\right| < \frac{\alpha\pi}{2}$$

untuk $z \in D$, maka f dikatakan Konveks order α pada sektor dan dinotasikan dengan $C(\alpha)$

(Marjono dan D. K Thomas, 2001).

Definisi starlike order α pada sektor

Fungsi f analitik di D dengan $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ dan $0 \leq \alpha < 1$ jika

$$\left|arg\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)\right| < \frac{\alpha\pi}{2}$$

untuk $z \in D$, maka f dikatakan Starlike order α pada sektor dan dinotasikan dengan $S^*(\alpha)$

(Marjono dan D. K Thomas, 2001).

Definisi fungsi Bazilevic (α, β)

Misalkan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ dengan $\alpha > 0$. Suatu fungsi $f \in A$ dikatakan fungsi Bazilevic (α, β) jika

$$f(z) = \left[\alpha + i\beta \int_0^z P(t)g(t)^\alpha t^{i\beta-1} dt\right]^{\frac{1}{\alpha+i\beta}} \tag{2.3}$$

(Ram Singh, 1973).

Kita notasikan $B(\alpha, \beta)$ sebagai kelas fungsi Bazilevic (α, β) dan merupakan subkelas dari S. Miller dan Mocanu pada tahun 1971 telah menunjukkan bahwa $C \subset S^* \subset K \subset B \subset S$, dan B merupakan subkelas terbesar dari S.

Misalkan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ dan $-\frac{\pi}{2} < \lambda < \frac{\pi}{2}$. $f \in A$ mempunyai bentuk (2.3) dikatakan $f \in B_\lambda(\alpha, \beta)$, jika dan hanya jika

$$Re\left(e^{i\lambda} \frac{zf'(z)}{f(z)} \left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)^\alpha \left(\frac{f(z)}{z}\right)^{i\beta}\right) > 0 \tag{2.4}$$

untuk suatu $g(z) \in S^*$. Definisi $B(\alpha, \beta)$ dapat diperluas pada saat $\alpha \geq 0$, sehingga dapat diperoleh $B_0(0, 0) = S^*$, $B_\lambda(0, 0) = S_p(\lambda)$, $B(1, 0) = C_t$

(Yong Chan Kim dan Toshiyuki Sugawa, 2007).

Fungsi f analitik di D untuk $\alpha > 0, f \in B(\alpha)$ dan mempunyai bentuk (2.2) jika

$$Re\left(f'(z)\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\alpha-1}\left(\frac{g(z)}{z}\right)^{-\alpha}\right) > 0, z \in D$$

(Ram Singh, 1973).

dan dikatakan $f \in B_1(\alpha)$ jika $g(z) = z$. Sehingga diperoleh

$$Re\left(f'(z)\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\alpha-1}\right) > 0, z \in D \tag{2.5}$$

(Ram Singh, 1973).

Lemma 1

Jika $M(z)$ dan $N(z)$ analitik di D, $M(0) = N(0)$, $N(z)$ memetakan D ke setiap wilayah Starlike dan $Re\left(\frac{M'(z)}{N'(z)}\right) > 0$ di D, maka $Re\left(\frac{M(z)}{N(z)}\right) > 0$ di D

(Ram Singh, 1973).

Bukti.

Fungsi f analitik di D dengan $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ dan $0 \leq \alpha < 1$ jika

$$Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \alpha$$

Karena $M(z)$ dan $N(z)$ analitik di D, maka kita mempunyai

$$Re\left[z\frac{M'(z)/N'(z)}{M(z)/N(z)}\right] > 0$$

karena

$$Re\left(\frac{M'(z)}{N'(z)}\right) > 0$$

maka

$$Re\left(\frac{M(z)}{N(z)}\right) > 0.$$

Lemma 2

Jika $f(z) \in S^*$ dan α bilangan bulat positif, maka fungsi $F(z)$ didefinisikan dengan

$$F(z)^\alpha = \frac{\alpha+1}{z}\int_0^z f(t)^\alpha dt \tag{2.6}$$

juga termasuk S^*

(Ram Singh, 1973).

Bukti.

Karena $f(z) \in S^*$, maka

$$Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \alpha$$

sehingga, jika $F(z)^\alpha \in S^*$, maka

$$Re\left(\frac{z(F(z)^\alpha)'}{F(z)^\alpha}\right) > \alpha$$

Dari bentuk (2.6) kita mempunyai

$$\frac{z(F(z)^\alpha)'}{F(z)^\alpha} = \frac{\alpha z F'(z)}{F(z)}$$

$$\begin{aligned}
\frac{z(F(z)^\alpha)'}{F(z)^\alpha} &= z\left(\frac{\alpha+1}{z}\int_0^z f(t)^\alpha dt\right)' \Big/ \left(\frac{\alpha+1}{z}\int_0^z f(t)^\alpha dt\right) \\
&= z\left(-\frac{\alpha+1}{z^2}\int_0^z f(t)^\alpha dt + \frac{\alpha+1}{z} f(z)^\alpha\right) \Big/ \left(\frac{\alpha+1}{z}\int_0^z f(t)^\alpha dt\right) \\
&= z\left(-\frac{1}{z} + \frac{f(z)^\alpha}{\int_0^z f(t)^\alpha dt}\right) \\
&= \frac{zf(z)^\alpha - \int_0^z f(t)^\alpha dt}{\int_0^z f(t)^\alpha dt}
\end{aligned}$$

sehingga,

$$\frac{\alpha z F'(z)}{F(z)} = \frac{zf(z)^\alpha - \int_0^z f(t)^\alpha dt}{\int_0^z f(t)^\alpha dt} = \frac{M(z)}{N(z)}$$

dengan fungsi $(\alpha+1)$-valently Starlike di D, maka $F(z) \in S^*$.

Lemma 3

Jika $f(z) \in B_1(\alpha)$, dimana α bilangan bulat positif, maka

$$Re\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\alpha} > 0, z \in D$$

(Ram Singh, 1973).

Bukti.

Karena $f(z) \in B_1(\alpha)$, kita mempunyai

$$\begin{aligned} Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)^{1-\alpha}z^{\alpha}}\right) =& Re\left(\frac{z^{1-\alpha}f'(z)}{f(z)^{1-\alpha}}\right) \\ =& Re\left(\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\alpha-1} f'(z)\right) \\ =& Re\left(\frac{\alpha f(z)^{\alpha-1}f'(z)}{\alpha z^{\alpha-1}}\right) \\ =& Re\left(\frac{d(f(z))^{\alpha}/dz}{d(z^{\alpha})/dz}\right) \\ =& Re\left(\frac{(f(z)^{\alpha})'}{(z^{\alpha})'}\right) > 0, z \in D \end{aligned}$$

Karena

$$Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)^{1-\alpha}z^{\alpha}}\right) = Re\left(\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\alpha}\right)' > 0, z \in D$$

maka

$$Re\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\alpha} > 0, z \in D.$$

Lemma 4 [Miller-Mocanu]

Misalkan p analitik di $\bar{D}$ dan q analitik dan univalen di D, dengan $p(0) = q(0)$. Jika $p \not\prec q$, maka terdapat $z_0 \in D$ dan $\zeta_0 \in \partial D$ seperti $p(|z| < |z_0|) \subset q(D)$ dan $p(z_0) = q(z_0) = q(\zeta_0)$ dan

$$z_0 p'(z_0) = k(\zeta_0) q'(\zeta_0), k \geq 1$$

(Marjono, 2017).

Subordinasi Fungsi Analitik

Misalkan fungsi $f(z)$ dan $g(z)$ analitik di D. Fungsi $f(z)$ dikatakan subordinasi ke $g(z)$, dinotasikan $f(z) \prec g(z)$, jika terdapat fungsi $\omega(z)$ analitik di D, dengan $\omega(0) = 0$ dan $|\omega(z)| \leq 1$, maka $f(z) = g(\omega(z))$. Jika $g(z)$ univalen, maka $f(z) \prec g(z)$ ekuivalen dengan $f(0) = g(0)$ dan $f(D) \subset g(D)$.

BAB III
METODOLOGI

Penelitian ini menggunakan metode studi literatur untuk mencari informasi tambahan, dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Mengumpulkan beberapa sumber tertulis.
2. Mengidentifikasi definisi, lemma, dan teorema yang berhubungan dengan subordinasi fungsi analitik.
3. Membahas relasi antar subkelas fungsi univalen.
4. Membahas Teorema Subordinasi pada Fungsi Bazilevic Order Alpha.

Dalam membahas teorema subordinasi pada fungsi Bazilevic order alpha, diperlukan beberapa dasar teori, antara lain bilangan kompleks, fungsi kompleks, fungsi univalen, subkelas fungsi univalen, subordinasi fungsi analitik, serta lemma Miller-Mocanu.

BAB IV
PEMBAHASAN

4.1 Relasi Antar Subkelas pada Fungsi Univalen

Teorema 1

Himpunan semua titik $log\left(\frac{z^{1-\alpha}f'(z)}{f(z)^{1-\alpha}}\right)$, untuk $\alpha > 0$, $z \in D$ dan hasil dari $f(z)$ berada pada $B(\alpha)$, merupakan konveks

(Ram Singh, 1973).

Bukti.

Jika $f(z) \in B(\alpha)$, maka dapat dituliskan

$$\left(\frac{zf'(z)}{f(z)^{1-\alpha}g(z)^{\alpha}}\right) = P(z)$$

untuk suatu $g(z) \in S^*$ dan $P(z) \in A$, dengan demikian kita mempunyai

$$\begin{aligned} log\left(\frac{z^{1-\alpha}f'(z)}{f(z)^{1-\alpha}}\right) =& log\left(\frac{zf'(z)}{f(z)^{1-\alpha}g(z)^{\alpha}}\frac{g(z)^{\alpha}}{z^{\alpha}}\right) \\ =& log(P(z)) + \alpha log\left(\frac{g(z)}{z}\right). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Hal ini teruji untuk $z \in D$, $logP(z)$ berada pada A, merupakan himpunan konveks. Demikian pula, untuk $z \in D$, $log(\frac{g(z)}{z})$, $g(z)$ berada pada S^*, merupakan himpunan Konveks. Dari keterangan tersebut dan dari bentuk (4.1), untuk $\alpha = 0$ dan $\alpha = 1$ mengakibatkan

1. Himpunan semua titik $log(\frac{zf'(z)}{f(z)^{\alpha}})$, untuk $z \in D$ dan $f(z)$ berada pada S^*, merupakan konveks.

2. Himpunan semua titik $log(f'(z))$, untuk $z \in D$ dan $f(z)$ berada pada C_t, merupakan konveks.

Teorema 2

Jika $f(z) \in B(\alpha)$, dimana α merupakan bilangan bulat positif, maka fungsi $F(z)$ didefinisikan dengan (2.6) juga termasuk $B(\alpha)$

(Ram Singh, 1973).

Bukti.

Dari bentuk $F(z)$, kita peroleh

$$\frac{\alpha z F'(z)}{F(z)^{1-\alpha}} = \frac{\alpha+1}{z}\left(zf(z)^{\alpha} - \int_0^z f(t)^{\alpha} dt\right) \tag{4.2}$$

karena $f(z) \in B(\alpha)$, maka

$$Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)^{1-\alpha} g(z)^{\alpha}}\right) > 0, z \in D \tag{4.3}$$

dengan $g(z) \in S^*$. Jika kita definisikan $G(z)$ dengan

$$G(z)^{\alpha} = \frac{\alpha+1}{z}\int_0^z g(t)^{\alpha} dt, \tag{4.4}$$

maka dari Lemma 2 menunjukkan bahwa $G(z) \in S^*$.

Dari bentuk (4.2) dan (4.4), diperoleh

$$\frac{\alpha z F'(z)}{F(z)^{1-\alpha} G(z)^{\alpha}} = \frac{zf(z)^{\alpha} - \int_0^z f(t)^{\alpha} dt}{\int_0^z g(t)^{\alpha} dt} = \frac{M(z)}{N(z)}.$$

Seperti pada Lemma 2, kita tarik kesimpulan dari bentuk (4.3) bahwa

$$Re\left(\frac{\alpha z F'(z)}{F(z)^{1-\alpha} G(z)^{\alpha}}\right) > 0$$

di D, yang artinya bahwa $F(z) \in B(\alpha)$.

4.2 Subordinasi pada Fungsi Bazilevic

Teorema 3

f analitik di D, dengan $f(0) = f'(0) - 1 = 0$. Untuk $\alpha > 0, \gamma > 0$ dan $z \in D$. Jika

$$f'(z)\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\alpha-1} \prec \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\beta(\gamma)}$$

maka,

$$\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\alpha} \prec \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\gamma} \tag{4.5}$$

dimana,

$$\beta(\gamma) = \gamma + \frac{2}{\pi}\arctan(\frac{\gamma}{\alpha}) \tag{4.6}$$

dan $\beta(\gamma)$ adalah bilangan terbesar dari bentuk (4.5)

(Marjono, 2017).

Bukti.

Jika diberikan

$$p(z) = \left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\alpha}$$

dimana p analitik di D dan $p(0) = 1$, maka turunan pertama dari $p(z)$ adalah

$$\begin{aligned}
p'(z) =& \alpha\left(\frac{zf'(z) - f(z)}{z^2}\right)\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\alpha-1} \\
=& \alpha\left(\frac{f'(z)}{z} - \frac{f(z)}{z^2}\right)\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\alpha-1} \\
=& \alpha\left(\frac{f'(z)}{z} - \frac{1}{z}p(z)^{\frac{1}{\alpha}}\right)\left(p(z)p(z)^{-\frac{1}{\alpha}}\right) \\
=& \alpha\left(\left(\frac{f'(z)}{z}\right)\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\alpha-1} - \frac{1}{z}p(z)\right)
\end{aligned}$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
\frac{p'(z)}{\alpha} + \frac{1}{z}p(z) =& \left(\frac{f'(z)}{z}\right)\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\alpha-1} \\
z\frac{p'(z)}{\alpha} + p(z) =& f'(z)\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\alpha-1}.
\end{aligned}$$

Akan ditunjukkan bahwa

$$z\frac{p'(z)}{\alpha} + p(z) \prec \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\beta}$$

memenuhi

$$p(z) \prec \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\gamma}$$

dimana $\beta = \beta(\gamma)$ seperti pada bentuk (4.6).

Misalkan $h(z) = (\frac{1+z}{1-z})^{\beta}$ dan $q(z) = (\frac{1+z}{1-z})^{\gamma}$ untuk $z \in D$ maka $|\arg h(z)| < \frac{\beta\pi}{2}$ dan $|\arg q(z)| < \frac{\gamma\pi}{2}$.

Andaikan $p \not\prec q$, maka terdapat $z_0 \in D$ dan $\zeta_0 \in \partial D$, sehingga $p(z_0) = q(\zeta_0)$, $p(|z| < |z_0|) \subset q(D)$ dan $z_0 p'(z_0) = k\zeta_0 q'(\zeta_0)$, untuk $k \geq 1$.

Karena $p(z_0) = q(\zeta_0)$, maka $\zeta_0 \neq \pm 1$ dan kita definisikan $ri = \frac{1+\zeta_0}{1-\zeta_0}$, $r \neq 0$. Oleh karena itu, kita peroleh
$z_0\frac{p'(z_0)}{\alpha} + p(z_0) = \frac{k\zeta_0 q'(\zeta_0)}{\alpha} + q(\zeta_0), k \geq 1$
karena $ri = \frac{1+\zeta_0}{1-\zeta_0}$
$\zeta_0 = \frac{ri-1}{ri+1}$
$q'(z) = \gamma(\frac{1-z+1+z}{(1-z)^2})(\frac{1+z}{1-z})^{\gamma-1}$ sehingga

$$\begin{aligned}
z_0\frac{p'(z_0)}{\alpha} + p(z_0) =& \frac{k\zeta_0\gamma\big(\frac{2}{(1-\zeta_0)^2}\big)\big(\frac{1+\zeta_0}{1-\zeta_0}\big)^{\gamma-1}}{\alpha} + \left(\frac{1+\zeta_0}{1-\zeta_0}\right)^{\gamma} \\
=& \frac{k\gamma\big(\frac{ri-1}{ri+1}\big)\big(\frac{2}{1-(\frac{ri-1}{ri+1})^2}\big)(ri)^{\gamma-1}}{\alpha} + (ri)^{\gamma} \\
=& \frac{k\gamma\big(\frac{ri-1}{ri+1}\big)\big(\frac{2}{1-2(\frac{ri-1}{ri+1})+(\frac{ri-1}{ri+1})^2}\big)(ri)^{\gamma-1}}{\alpha} + (ri)^{\gamma} \\
=& \frac{k\gamma(\frac{ri-1}{ri+1})\big(\frac{(ri+1)^2}{2}\big)(ri)^{\gamma-1}}{\alpha} + (ri)^{\gamma} \\
=& \frac{k\gamma(-r^2-1)}{2\alpha}(ri)^{\gamma-1} + (ri)^{\gamma} \\
=& \left(ri - \frac{k\gamma(r^2+1)}{2\alpha}\right)(ri)^{\gamma-1} \\
=& \left(ri - \frac{k\gamma(r^2+1)}{2\alpha}\right)r^{\gamma-1}\left(\cos\frac{(\gamma-1)\pi}{2} + i\sin\frac{(\gamma-1)\pi}{2}\right),
\end{aligned}$$

karena $\cos\frac{(\gamma-1)\pi}{2}=\sin\frac{\gamma\pi}{2}$ dan $\sin\frac{(\gamma-1)\pi}{2}=-\cos\frac{\gamma\pi}{2}$, diperoleh

$$
\begin{aligned}
&=\left(ri-\frac{k\gamma(r^2+1)}{2\alpha}\right)r^{\gamma-1}\left(\sin\frac{\gamma\pi}{2}-i\cos\frac{\gamma\pi}{2}\right)\\
&=r^{\gamma-1}\left(ri-\frac{k\gamma(r^2+1)}{2\alpha}\right)\left(\sin\frac{\gamma\pi}{2}-i\cos\frac{\gamma\pi}{2}\right)\\
&=r^{\gamma-1}\left(ri\sin\frac{\gamma\pi}{2}-\frac{k\gamma(r^2+1)}{2\alpha}\sin\frac{\gamma\pi}{2}+r\cos\frac{\gamma\pi}{2}+i\frac{k\gamma(r^2+1)}{2\alpha}\cos\frac{\gamma\pi}{2}\right)\\
&=r^{\gamma-1}\cos\frac{\gamma\pi}{2}\left((r-\frac{k\gamma(r^2+1)}{2\alpha}\tan\frac{\gamma\pi}{2})+i(\frac{k\gamma(r^2+1)}{2\alpha}+r\tan\frac{\gamma\pi}{2})\right)\\
&=\frac{r^{\gamma-1}}{2}\cos\frac{\gamma\pi}{2}\left((2r-\frac{k\gamma(r^2+1)}{\alpha}\tan\frac{\gamma\pi}{2})+i(\frac{k\gamma(r^2+1)}{\alpha}+2r\tan\frac{\gamma\pi}{2})\right)
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

jadi, argumen dari (4.7) adalah

$$
\begin{aligned}
arg\left(z_0\frac{p'(z_0)}{\alpha}+p(z_0)\right)&=\arctan\left(\frac{\frac{k\gamma(r^2+1)}{\alpha}+2r\tan\frac{\gamma\pi}{2}}{2r-\frac{k\gamma(r^2+1)}{\alpha}\tan\frac{\gamma\pi}{2}}\right)\\
&\geq\arctan\left(\frac{\frac{\gamma(r^2+1)}{\alpha}+2r\tan\frac{\gamma\pi}{2}}{2r-\frac{\gamma(r^2+1)}{\alpha}\tan\frac{\gamma\pi}{2}}\right)\\
&:=\phi(r).
\end{aligned}
$$

Misalkan $\phi(r) = \arctan \frac{U(r)}{V(r)}$, dimana
$U(r) = \left(\frac{\gamma(r^2+1)}{\alpha} + 2r \tan \frac{\gamma\pi}{2}\right)$ dan $V(r) = \left(2r - \frac{\gamma(r^2+1)}{\alpha} \tan \frac{\gamma\pi}{2}\right)$.
Maka, turunan pertama dari $\tan \phi(r) = \frac{U(r)}{V(r)}$ adalah

$$
\begin{aligned}
(\tan \phi(r))' =& \left(\frac{U(r)}{V(r)}\right)' \\
\phi'(r)\left(\frac{\sin \phi(r)}{\cos \phi(r)}\right)' =& \phi'(r)\left(\frac{\sin' \phi(r) \cos \phi(r) - \sin \phi(r) \cos' \phi(r)}{\cos^2 \phi(r)}\right) \\
=& \phi'(r)\left(\frac{\cos^2 \phi(r) + \sin^2 \phi(r)}{cos^2 \phi(r)}\right) \\
=& \phi'(r)\left(1 + \frac{\sin^2 \phi(r)}{cos^2 \phi(r)}\right) \\
=& \phi'(r)(1 + \tan^2 \phi(r)) \\
=& \phi'(r)\left(1 + \left(\frac{U(r)}{V(r)}\right)^2\right) \\
=& \phi'(r)\left(\frac{V^2(r) + U^2(r)}{V^2(r)}\right) \\
\phi'(r)(V^2(r) + U^2(r)) =& U'(r)V(r) - U(r)V'(r).
\end{aligned}
$$

Misalkan $r = 1$, maka $U'(r)V(r) - U(r)V'(r) = 0$. Dimana $\phi(r)$ mencapai minimum saat $r = 1$, sehingga

$$
\begin{aligned}
\phi(r) \geq& \phi(1) \\
=& \arctan \left(\frac{\alpha \tan \frac{\gamma\pi}{2} + \gamma}{\alpha - \gamma \tan \frac{\gamma\pi}{2}}\right) \\
=& \frac{\beta(\gamma)\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

Oleh karena itu,

$$
\frac{\beta(\gamma)\pi}{2} \leq \arg\left(p(z_0) + \frac{z_0 p'(z_0)}{\alpha}\right) \leq \frac{\pi}{2}
$$

kontradiksi dengan $|h(z)| < \frac{\beta(\gamma)\pi}{2}$ yang dinyatakan pada bentuk (4.5).
Jadi, teorema tersebut terbukti.

Untuk menunjukkan bahwa bentuk (4.5) merupakan bilangan terbesar dari bentuk (4.6). Kita misalkan

$$p(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\gamma},$$

maka dari bentuk prinsip modulus minimum untuk fungsi harmonik,

$$\inf_{|z|<1} \arg\left(p(z) + \frac{zp'(z)}{\alpha}\right)$$

mencapai beberapa titik $z = e^{i\theta}$, untuk $0 < \theta < 2\pi$. Dengan demikian,

$$\frac{p(z) + \frac{zp'(z)}{\alpha}}{\left(\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\right)^{\gamma-1}} = \frac{\cos\frac{\gamma\pi}{2}}{1-\cos\theta}\left(\sin\theta - \frac{\gamma}{\alpha}\arctan\frac{\gamma\pi}{2} + i\big(\sin\theta\tan\frac{\gamma\pi}{2} + \frac{\gamma}{\alpha}\big)\right).$$

Argumen dari persamaan diatas adalah

$$\arg\left(p(z) + \frac{zp'(z)}{\alpha}\right) = \arctan\left(\frac{\alpha\sin\theta\tan\frac{\gamma\pi}{2} + \gamma}{\alpha\sin\theta - \gamma\tan\frac{\gamma\pi}{2}}\right).$$

Hasil minimum dari sisi kanan didapatkan ketika $\sin\theta = 1$. Dengan demikian,

$$\begin{aligned}\arg\left(p(z) + \frac{zp'(z)}{\alpha}\right) &\geq \arctan\left(\frac{\alpha\tan\frac{\gamma\pi}{2} + \gamma}{\alpha - \gamma\tan\frac{\gamma\pi}{2}}\right)\\ &= \frac{\beta(\gamma)\pi}{2}.\end{aligned}$$

diperoleh $B(\gamma) \leq \arg\left(p(z) + \frac{zp'(z)}{\alpha}\right)$, jadi $\beta(\gamma)$ terbukti merupakan bilangan terbesar.

BAB V
KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

A adalah kelas fungsi $f(z)$ analitik di $D = \{z : z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$. Kita tahu bahwa $C \subset S^* \subset K \subset B \subset S$, dimana S merupakan kelas fungsi $f(z)$ univalen di $D = \{z : z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$. Fungsi f analitik di D untuk $\alpha \geq 0, f \in B(\alpha)$ dan mempunyai bentuk (2.2) jika dan hanya jika

$$Re\left(f'(z)\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\alpha-1}\left(\frac{g(z)}{z}\right)^{-\alpha}\right) > 0, z \in D.$$

Berdasarkan dari hasil dan pembahasan, dapat disimpulkan bahwa:

1. $B(\alpha)$ merupakan subkelas terbesar dari fungsi univalen dengan menunjukkan

   (a) Himpunan semua titik $log\left(\frac{z^{1-\alpha}f'(z)}{f(z)^{1-\alpha}}\right)$, untuk $z \in D$ dan $f(z)$ berada pada $B(\alpha)$, merupakan konveks.

   (b) $f(z) \in B(\alpha)$, dimana α merupakan bilangan bulat positif, maka fungsi $F(z)$ didefinisikan dengan (2.6) juga termasuk $B(\alpha)$.

2. Dengan menggunakan Lemma Miller-Mocanu, terbukti bahwa

$$f'(z)\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\alpha-1} \prec \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\beta(\gamma)}$$

   dengan $\beta(\gamma)$ merupakan bilangan terbesar.

5.2 Saran

Pada skripsi ini, penulis hanya mempelajari relasi antar subkelas fungsi univalen dan memperkenalkan subordinasi pada fungsi Bazilevic. Diharapkan pada penelitian selanjutnya, diberikan perbandingan antar subkelas fungsi univalen, baik berupa contoh maupun grafik setiap subkelas fungsi univalen.

DAFTAR PUSTAKA

Kim Y. C dan T. Sugawa. 2007. *A note Bazilevic Function*. Yeungnam University.

Marjono dan D. K. Thomas. 2001. *Subordination on Convex Functions in a Sector*. Honam Mathematical J. 23 (2001). 41-50.

Marjono. 2017. *A Subordination Theorem for Analytic Function*. The Australian Journal of Mathematical Analysis and Application. 14 (2017). 1-5.

Miller, S. S dan P. T. Mocanu. 1981. *Differential Subordinations and Univalent Function*. Michigan Math J. 28 (1981).

Murugusundaramoorthy, G dan N. Magesh. 2006. *Differential Subordinations and Superordinations For Analytic Functions Defined by The Dziok-Srivastava Linear Operator*. Faculty of Sciences and Mathematics. University of Nis. Serbia. 31:1 (2017). 5360.

Singh, R. 1973. *On Bazilevic Function*. American Mathematical Society. 38 (1973).

Spiegel, M. R. 1994. *Theory and Problems of Complex Variabel*. Erlangga.