

BAB III PEMBAHASAN

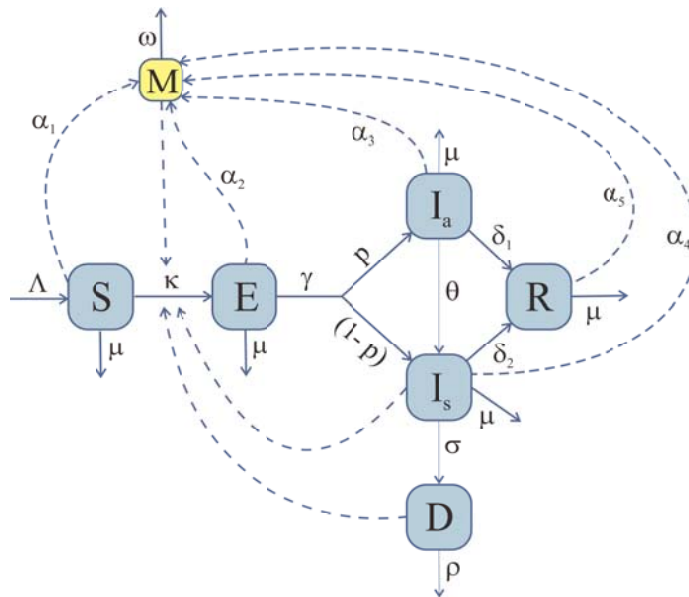
3.1 Formulasi Model

Sebuah model dengan enam kompartemen berisikan subpopulasi rentan (S), terpapar (E), terinfeksi tanpa gejala (I_a), terinfeksi dengan gejala (I_s), sembuh (R), dan mati (D) diformulasikan. Misalkan N adalah ukuran total populasi sehingga

$$N(t) = S(t) + E(t) + I_a(t) + I_s(t) + R(t) + D(t), \forall t \geq 0.$$

Diasumsikan adanya laju kematian alami konstan pada keseluruhan model. Kemudian $M(t)$ didefinisikan sebagai efektivitas informasi tentang virus Ebola yang dikirim oleh individu dari subpopulasi yang masih hidup dalam waktu t . Efektivitas informasi adalah kemampuan informasi terkirim menghasilkan hasil sesuai harapan atau berdampak positif.

Hubungan subpopulasi $S(t)$, $E(t)$, $I_a(t)$, $I_s(t)$, $R(t)$, dan $D(t)$ serta pengaruh media $M(t)$ diperlihatkan pada Gambar (3.1).



Gambar 3.1: Diagram kompartemen penyakit virus Ebola

3.1.1 Laju perubahan subpopulasi rentan (*susceptible*)

Laju individu pada subpopulasi rentan (S) dipengaruhi oleh kelahiran atau migrasi, kematian alami dan perubahan menjadi individu terpapar (E) setelah mengalami kontak dengan virus Ebola. Kelahiran atau migrasi mengakibatkan jumlah individu pada subpopulasi S bertambah dengan laju sebesar Λ yaitu

$$\frac{dS(t)}{dt} = \Lambda.$$

Kematian alami dapat mengakibatkan jumlah individu pada subpopulasi S berkurang dengan laju sebesar μ yaitu

$$\frac{dS(t)}{dt} = -\mu S(t).$$

Individu pada subpopulasi S dapat berubah menjadi E setelah mengalami kontak dengan virus Ebola. Hal ini mengakibatkan jumlah individu pada subpopulasi S berkurang, dinyatakan sebagai laju infeksi $\kappa(t)$ yaitu

$$\frac{dS(t)}{dt} = -\kappa(t)S(t).$$

Laju perubahan subpopulasi rentan terhadap waktu t dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{dS(t)}{dt} = \Lambda - (\mu + \kappa(t))S(t). \quad (3.1)$$

3.1.2 Laju perubahan subpopulasi terpapar (*exposed*)

Perubahan jumlah individu pada subpopulasi terpapar (E) dipengaruhi oleh perubahan individu rentan (S) menjadi terpapar setelah mengalami kontak dengan virus Ebola, kematian alami dan perubahan individu terpapar menjadi terinfeksi. Perubahan dari subpopulasi S menjadi E mengakibatkan jumlah individu pada subpopulasi E bertambah dengan laju sebesar $\kappa(t)S(t)$, yaitu

$$\frac{dE(t)}{dt} = \kappa(t)S(t).$$

Kematian alami dapat mengakibatkan jumlah individu pada subpopulasi E berkurang dengan laju sebesar μ yaitu

$$\frac{dE(t)}{dt} = -\mu E(t).$$

Perubahan individu terpapar (E) menjadi terinfeksi mengakibatkan jumlah individu pada subpopulasi E berkurang dengan laju sebesar γ yaitu

$$\frac{dE(t)}{dt} = -\gamma E(t).$$

Laju perubahan subpopulasi terpapar terhadap waktu t dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{dE(t)}{dt} = \kappa(t)S(t) - (\mu + \gamma)E(t). \quad (3.2)$$

3.1.3 Laju perubahan subpopulasi terinfeksi tanpa gejala (*infected asymptomatic*)

Perubahan jumlah individu pada subpopulasi terinfeksi tanpa gejala (I_a) dipengaruhi oleh perubahan individu terpapar (E) menjadi terinfeksi tanpa gejala, kematian alami, perubahan individu tanpa gejala menjadi bergejala dan perubahan individu terinfeksi tanpa gejala menjadi sembuh (R). Perubahan dari subpopulasi E menjadi I_a mengakibatkan jumlah individu pada subpopulasi I_a bertambah dengan laju sebesar $p\gamma E(t)$, yaitu

$$\frac{dI_a(t)}{dt} = p\gamma E(t).$$

Kematian alami dapat mengakibatkan jumlah individu pada subpopulasi I_a berkurang dengan laju sebesar μ yaitu

$$\frac{dI_a(t)}{dt} = -\mu I_a(t).$$

Perubahan individu terinfeksi tanpa gejala (I_a) menjadi terinfeksi dengan gejala mengakibatkan jumlah individu pada subpopulasi I_a berkurang dengan laju sebesar θ yaitu

$$\frac{dI_a(t)}{dt} = -\theta I_a(t).$$

Perubahan individu terinfeksi tanpa gejala (I_a) menjadi sembuh mengakibatkan jumlah individu pada subpopulasi I_a berkurang dengan laju sebesar δ_1 yaitu

$$\frac{dI_a(t)}{dt} = -\delta_1 I_a(t).$$

Laju perubahan subpopulasi terinfeksi tanpa gejala terhadap waktu t dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{dI_a(t)}{dt} = p\gamma E(t) - (\mu + \theta + \delta_1)I_a(t). \quad (3.3)$$

3.1.4 Laju perubahan subpopulasi terinfeksi dengan gejala (*infected symptomatic*)

Perubahan jumlah individu pada subpopulasi terinfeksi dengan gejala (I_s) dipengaruhi oleh perubahan individu terpapar (E) menjadi terinfeksi dengan gejala, perubahan individu tanpa gejala menjadi bergejala, kematian alami, perubahan individu terinfeksi dengan gejala menjadi sembuh (R) dan perubahan individu dengan gejala menjadi mati karena penyakit virus Ebola. Perubahan dari subpopulasi E menjadi I_s mengakibatkan jumlah individu pada subpopulasi I_s bertambah dengan laju sebesar $(1 - p)\gamma E(t)$, yaitu

$$\frac{dI_s(t)}{dt} = (1 - p)\gamma E(t).$$

Perubahan individu terinfeksi tanpa gejala (I_a) menjadi terinfeksi dengan gejala mengakibatkan jumlah individu pada subpopulasi I_s bertambah dengan laju sebesar $\theta I_a(t)$ yaitu

$$\frac{dI_s(t)}{dt} = \theta I_a(t).$$

Penyebab kematian pada subpopulasi I_s adalah kematian alami dan kematian karena penyakit virus Ebola. Jumlah individu pada subpopulasi I_s berkurang dengan laju sebesar μ karena kematian alami dan berkurang dengan laju sebesar σ karena penyakit virus Ebola dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{dI_s(t)}{dt} = -\mu I_s(t) - \sigma I_s(t).$$

Perubahan individu terinfeksi dengan gejala (I_s) menjadi sembuh mengakibatkan jumlah individu pada subpopulasi I_s berkurang dengan laju sebesar δ_2 yaitu

$$\frac{dI_s(t)}{dt} = -\delta_2 I_s(t).$$

Laju perubahan subpopulasi terinfeksi dengan gejala terhadap waktu t dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{dI_s(t)}{dt} = (1 - p)\gamma E(t) + \theta I_a(t) - (\mu + \sigma + \delta_2)I_s(t). \quad (3.4)$$

3.1.5 Laju perubahan subpopulasi sembuh (*recovered*)

Perubahan jumlah individu pada subpopulasi sembuh (R) dipengaruhi oleh perubahan individu terinfeksi tanpa gejala (I_a) dan terinfeksi dengan gejala (I_s) menjadi sembuh (R) serta kematian alami. Perubahan dari subpopulasi I_a dan I_s menjadi R mengakibatkan jumlah individu pada subpopulasi R bertambah dengan laju sebesar $\delta_1 I_a(t) + \delta_2 I_s(t)$, yaitu

$$\frac{dR(t)}{dt} = \delta_1 I_a(t) + \delta_2 I_s(t).$$

Kematian alami dapat mengakibatkan jumlah individu pada subpopulasi R berkurang dengan laju sebesar μ yaitu

$$\frac{dR(t)}{dt} = -\mu R(t).$$

Laju perubahan subpopulasi sembuh terhadap waktu t dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{dR(t)}{dt} = \delta_1 I_a(t) + \delta_2 I_s(t) - \mu R(t). \quad (3.5)$$

3.1.6 Laju perubahan subpopulasi mati (*deceased*)

Perubahan jumlah individu pada subpopulasi mati (D) dipengaruhi oleh perubahan individu terinfeksi dengan gejala (I_s) menjadi mati (D) serta penguburan jenazah. Perubahan dari subpopulasi I_s menjadi D mengakibatkan jumlah individu pada subpopulasi D bertambah dengan laju sebesar $\sigma I_s(t)$, yaitu

$$\frac{dD(t)}{dt} = \sigma I_s(t).$$

Penguburan dapat mengakibatkan jumlah individu pada subpopulasi D berkurang dengan laju sebesar ρ yaitu

$$\frac{dD(t)}{dt} = -\rho D(t).$$

Laju perubahan subpopulasi mati terhadap waktu t dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{dD(t)}{dt} = \sigma I_s(t) - \rho D(t). \quad (3.6)$$

3.1.7 Laju pengaruh media informasi

Individu pada subpopulasi S , E , I_a , I_s , dan R masing-masing memiliki kesempatan yang sama untuk mengirimkan informasi mengenai virus Ebola melalui media dengan laju sebesar α_i dengan $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Hubungan jumlah individu yang memberikan informasi dengan laju pengiriman informasi tentang virus Ebola pada media dapat dituliskan sebagai

$$\frac{dM(t)}{dt} = \alpha_1 S(t) + \alpha_2 E(t) + \alpha_3 I_a(t) + \alpha_4 I_s(t) + \alpha_5 R(t).$$

Diantara informasi tentang virus Ebola di media terdapat informasi yang telah tertimbun atau kadaluwarsa. Laju informasi yang kadaluwarsa adalah sebesar ω atau dapat dituliskan sebagai

$$\frac{dM(t)}{dt} = -\omega M(t).$$

Laju pengaruh media informasi terhadap waktu t dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{dM(t)}{dt} = \alpha_1 S(t) + \alpha_2 E(t) + \alpha_3 I_a(t) + \alpha_4 I_s(t) + \alpha_5 R(t) - \omega M(t). \quad (3.7)$$

3.1.8 Laju infeksi virus Ebola

Diasumsikan bahwa penularan virus Ebola merupakan hasil kontak langsung dengan pasien yang terinfeksi dengan gejala atau cairan mereka sedangkan individu yang terinfeksi tanpa gejala tidak menularkan virus.

Pengaruh dari media $M(t)$ merupakan faktor reduksi yang dinotasikan

$$f(t) = (1 - M(t)), 0 < M(t) \leq 1, \forall t \geq 0.$$

Berikut laju infeksi virus Ebola terhadap waktu

$$\kappa(t) = \frac{c\beta(1 - M(t))(I_s(t) + \eta D(t))}{N(t)},$$

dengan c menyatakan jumlah kontak individu rentan dengan terinfeksi, β menyatakan kemungkinan kontak akan menghasilkan infeksi dan η menyatakan tingkat penularan jenazah.

Berdasarkan persamaan (3.1)-(3.7), model pengaruh media informasi pada dinamika penularan virus Ebola adalah

$$\begin{aligned} \frac{dS(t)}{dt} &= \Lambda - (\mu + \kappa(t))S(t), \\ \frac{dE(t)}{dt} &= \kappa(t)S(t) - (\mu + \gamma)E(t), \\ \frac{dI_a(t)}{dt} &= p\gamma E(t) - (\mu + \theta + \delta_1)I_a(t), \\ \frac{dI_s(t)}{dt} &= (1 - p)\gamma E(t) + \theta I_a(t) - (\mu + \sigma + \delta_2)I_s(t), \\ \frac{dR(t)}{dt} &= \delta_1 I_a(t) + \delta_2 I_s(t) - \mu R(t), \\ \frac{dD(t)}{dt} &= \sigma I_s(t) - \rho D(t), \\ \frac{dM(t)}{dt} &= \alpha_1 S(t) + \alpha_2 E(t) + \alpha_3 I_a(t) + \alpha_4 I_s(t) + \alpha_5 R(t) - \omega M(t). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Diasumsikan nilai awal masing-masing variabel tetap S , E , I_a , I_s , R , D , dan M adalah positif sehingga $S(0) > 0$, $E(0) \geq 0$, $I_a(0) \geq 0$, $I_s(0) \geq 0$, $R(0) \geq 0$, $D(0) \geq 0$, dan $M(0) \geq 0$.

3.2 Sifat-sifat Model

Model matematika diformulasi menyesuaikan dengan fakta secara biologi sehingga perlu dipenuhi beberapa sifat yang membuatnya sesuai dengan keadaan sebenarnya. Semua variabel dari

model haruslah nonnegatif karena mewakili status penyakit manusia yang berbeda dan pengaruh dari media terhadap penularan penyakit. Eksistensi dan ketunggalan serta kepositifan solusi merupakan sifat-sifat yang perlu dibuktikan untuk menunjukkan model tersebut dapat diaplikasikan.

3.2.1 Eksistensi dan ketunggalan solusi

Berdasarkan Teorema (2.1.1), dengan nilai awal yang diberikan, suatu sistem memiliki solusi dan solusi tersebut tunggal. Pada bagian ini akan ditunjukkan bahwa sistem persamaan (3.8) invarian positif dan memiliki daya tarik.

Teorema 3.2.1. Sistem persamaan (3.8) masuk akal secara biologis pada domain

$$\Omega = \{(S(t), E(t), I_a(t), I_s(t), R(t), D(t), M(t)) \in \mathbb{R}^7 \\ : N(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu}, 0 < M(t) \leq 1\}$$

yang memiliki daya tarik dan invarian positif.

Bukti.

i) Akan ditunjukkan $N(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu}$

Dengan menjumlahkan persamaan (3.1)-(3.6) diperoleh

$$\frac{dN(t)}{dt} = \Lambda - \mu S(t) - \mu E(t) - \mu I_a(t) - \mu I_s(t) - \mu R(t) - \rho D(t).$$

Diasumsikan $\rho > \mu$, asumsi ini masuk akal karena angka kematian akibat penyakit virus Ebola lebih tinggi dari angka kematian alami selama epidemi berlangsung, sehingga

$$\frac{dN(t)}{dt} \leq \Lambda - \mu N(t).$$

Kemudian dengan menggunakan Akibat (2.1.2) diperoleh

$$N(t) \leq N(0) \exp \left[\int_0^t -\mu \, du \right] + \int_0^t \Lambda \exp \left[\int_z^t -\mu \, dv \right] dz$$

$$N(t) \leq N(0) \exp [-\mu t + 0] + \int_0^t \Lambda \exp [-\mu t + \mu z] dz$$

$$N(t) \leq N(0) \exp[-\mu t] + \left[\frac{\Lambda}{\mu} \exp[-\mu t + \mu z] \right] \Big|_0^t$$

$$N(t) \leq N(0) \exp[-\mu t] + \frac{\Lambda}{\mu} - \frac{\Lambda}{\mu} \exp[-\mu t]$$

$$N(t) \leq \left[N(0) - \frac{\Lambda}{\mu} \right] \exp[-\mu t] + \frac{\Lambda}{\mu}, \quad \forall t \geq 0.$$

Ketika $N(0) \leq \frac{\Lambda}{\mu}$ diperoleh $N(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu}$.

Ketika $N(0) \geq \frac{\Lambda}{\mu}$ dan $t \rightarrow \infty$ diperoleh $N(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu}$.

sehingga $N(t)$ adalah fungsi yang terbatas atau $N(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu}$.

ii) Akan ditunjukkan $M(t)$ terbatas

Pada awal epidemi, diasumsikan bahwa informasi dikirim melalui media sejak $t = 0$, setidaknya untuk tujuan pencegahan sehingga $0 < M(t) \leq 1$. Diasumsikan juga bahwa belum terdapat virus yang menjangkit dalam populasi sehingga dari persamaan (3.7) diperoleh

$$\frac{dM(t)}{dt} \geq \alpha_1 S(t) - \omega M(t).$$

Dengan menggunakan Akibat (2.1.2) diperoleh

$$M(t) \geq M(0) \exp \left[\int_0^t -\omega du \right] + \int_0^t \alpha_1 S(t) \exp \left[\int_z^t -\omega dv \right] dz$$

$$M(t) \geq M(0) \exp[-\omega t + 0] + \int_0^t \alpha_1 S(t) \exp[-\omega t + \omega z] dz$$

$$M(t) \geq M(0) \exp[-\omega t] + \left[\frac{\alpha_1 S(t)}{\omega} \exp[-\omega t + \omega z] \right] \Big|_0^t$$

$$M(t) \geq M(0) \exp[-\omega t] + \frac{\alpha_1 S(t)}{\omega} - \frac{\alpha_1 S(t)}{\omega} \exp[-\omega t]$$

$$M(t) \geq \left[M(0) - \frac{\alpha_1 S(t)}{\omega} \right] \exp[-\omega t] + \frac{\alpha_1 S(t)}{\omega}, \quad \forall t \geq 0.$$

Sebelum virus menyebar diasumsikan $M(t)$ stabil sehingga $M(0) = \frac{\alpha_1 S(t)}{\omega}$ dimana $M(0) = M^*$ (M^* adalah titik

kesetimbangan bebas penyakit untuk M yang akan ditunjukkan kemudian), diperoleh

$$M(t) \geq \frac{\alpha_1 S(t)}{\omega}$$

$$M(t) \geq M^*.$$

Dengan asumsi sebelumnya $0 < M(t) \leq 1$, diperoleh

$$M^* \leq M(t) \leq 1.$$

Dari (i) dan (ii) dapat disimpulkan bahwa Ω terbatas dan $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \frac{\Lambda}{\mu}$. Selain itu, jumlah atau selisih variabel dalam Ω dengan nilai awal positif akan tetap berada pada Ω atau persekitarannya. Jadi, Ω invarian positif dan memiliki daya tarik terhadap sistem (3.1)-(3.7). \square

3.2.2 Kepositifan solusi

Teorema 3.2.2. Solusi-solusi dari persamaan (3.1)-(3.7) seluruhnya adalah positif.

Bukti. Dari persamaan (3.1) diperoleh

$$\frac{dS(t)}{dt} \geq -(\mu + \kappa(t))S(t), \forall t \geq 0.$$

Jika kedua sisi pertidaksamaan diintegrasikan terhadap τ pada interval $[0, t]$ maka diperoleh

$$\int_0^t \frac{dS(\tau)}{S(\tau)} \geq \int_0^t -(\mu + \kappa(\tau))d\tau$$

$$\ln S(\tau) \Big|_0^t \geq -\mu t - \int_0^t \kappa(\tau)d\tau$$

$$\ln S(t) - \ln S(0) \geq -\mu t - \int_0^t \kappa(\tau)d\tau$$

$$\ln \frac{S(t)}{S(0)} \geq -\mu t - \int_0^t \kappa(\tau)d\tau$$

$$\frac{S(t)}{S(0)} \geq \exp \left[-\mu t - \int_0^t \kappa(\tau)d\tau \right]$$

$$S(t) \geq S(0) \exp \left[-\mu t - \int_0^t \kappa(\tau)d\tau \right],$$

yang menunjukkan bahwa $S(t)$ positif karena $S(0)$ positif. Dengan cara yang sama untuk persamaan (3.2)-(3.7) diperoleh

$$\begin{aligned} E(t) &\geq E(0) \exp [-(\mu + \gamma)t], \\ I_a(t) &\geq I_a(0) \exp [-(\mu + \theta + \delta_1)t], \\ I_s(t) &\geq I_s(0) \exp [-(\mu + \sigma + \delta_2)t], \\ R(t) &\geq R(0) \exp [-\mu t], \\ D(t) &\geq D(0) \exp [-\rho t], \\ M(t) &\geq M(0) \exp [-\omega t], \end{aligned}$$

yang menunjukkan bahwa $E(t), I_a(t), I_s(t), R(t), D(t)$, dan $M(t)$ bernilai positif untuk setiap nilai awal positif. Dengan demikian, setiap solusi dari persamaan (3.1)-(3.7) adalah positif. \square

3.3 Titik Kesetimbangan Model dan Angka Reproduksi Dasar

Model (3.8) memiliki dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit (E_0) yang menunjukkan ketidakadaan penyakit pada populasi dan titik kesetimbangan endemik (EE) yang muncul saat penyakit mewabah pada populasi.

3.3.1 Titik kesetimbangan bebas penyakit (E_0) dan angka reproduksi dasar (R_0)

Titik kesetimbangan bebas penyakit merupakan titik yang menggambarkan tidak adanya penyakit dalam populasi sehingga dapat diketahui bahwa nilai $E^* = I_a^* = I_s^* = R^* = D^* = 0$. Kemudian untuk nilai S^* dan M^* dapat dicari dengan menggunakan Definisi (2.2.1). Dari persamaan (3.1) diperoleh

$$\begin{aligned} 0 &= \Lambda - (\mu + \kappa)S \\ 0 &= \Lambda - \left(\mu + \frac{c\beta(1-M)(I_s + \eta D)}{N} \right) S \\ 0 &= \Lambda - \left(\mu + \frac{c\beta(1-M)(0)}{N} \right) S \\ 0 &= \Lambda - (\mu + 0) S \\ \mu S &= \Lambda \\ S^* &= \frac{\Lambda}{\mu}. \end{aligned}$$

Dari persamaan (3.7) diperoleh

$$\begin{aligned}
 0 &= \alpha_1 S + \alpha_2 E + \alpha_3 I_a + \alpha_4 I_s + \alpha_5 R - \omega M \\
 0 &= \alpha_1 S - \omega M \\
 \omega M &= \alpha_1 S \\
 M &= \frac{\alpha_1}{\omega} S \\
 M^* &= \frac{\alpha_1 \Lambda}{\omega \mu}.
 \end{aligned}$$

Titik kesetimbangan bebas penyakit dapat dituliskan sebagai

$$E_0 = (S^*, E^*, I_a^*, I_s^*, R^*, D^*, M^*) = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{\alpha_1 \Lambda}{\omega \mu} \right).$$

Angka reproduksi dasar R_0 dicari dengan menggunakan metode matriks generasi selanjutnya. Model kompartemen yang terinfeksi dari model (3.8) adalah

$$\begin{aligned}
 \frac{dE}{dt} &= \kappa S - (\mu + \gamma)E, \\
 \frac{dI_a}{dt} &= p\gamma E - (\mu + \theta + \delta_1)I_a, \\
 \frac{dI_s}{dt} &= (1-p)\gamma E + \theta I_a - (\mu + \sigma + \delta_2)I_s, \\
 \frac{dD}{dt} &= \sigma I_s - \rho D.
 \end{aligned}$$

Misalkan

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= \mu + \gamma, \\
 Q_2 &= \mu + \theta + \delta_1, \\
 Q_3 &= \mu + \sigma + \delta_2,
 \end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned}
 \dot{E} &= \kappa S - Q_1 E, \\
 \dot{I}_a &= p\gamma E - Q_2 I_a, \\
 \dot{I}_s &= (1-p)\gamma E + \theta I_a - Q_3 I_s, \\
 \dot{D} &= \sigma I_s - \rho D.
 \end{aligned}$$

Matriks F dan V dapat dituliskan sebagai berikut

$$F = \begin{bmatrix} \kappa S \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c\beta(1-M)(I_s + \eta D)}{N} S \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dan

$$V = \begin{bmatrix} Q_1 E \\ -p\gamma E + Q_2 I_a \\ (p-1)\gamma E - \theta I_a + Q_3 I_s \\ -\sigma I_s + \rho D \end{bmatrix}.$$

Turunan parsial matriks F dan V terhadap $E, I_a, I_s,$ dan D adalah

$$DF(E_0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c\beta(1-M^*) & c\beta\eta(1-M^*) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dan

$$DV(E_0) = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 & 0 & 0 \\ -p\gamma & Q_2 & 0 & 0 \\ (p-1)\gamma & -\theta & Q_3 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma & \rho \end{bmatrix}.$$

Invers matriks DV adalah

$$DV^{-1}(E_0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{Q_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{p\gamma}{Q_1 Q_2} & \frac{1}{Q_2} & 0 & 0 \\ \frac{(1-p)\gamma}{Q_1 Q_3} + \frac{\theta p\gamma}{Q_1 Q_2 Q_3} & \frac{\theta}{Q_2 Q_3} & \frac{1}{Q_3} & 0 \\ \frac{(1-p)\gamma\sigma}{\rho Q_1 Q_3} + \frac{\sigma\theta p\gamma}{\rho Q_1 Q_2 Q_3} & \frac{\sigma\theta}{\rho Q_2 Q_3} & \frac{\sigma}{\rho Q_3} & \frac{1}{\rho} \end{bmatrix}.$$

Pencarian Invers matriks DV dapat dilihat pada Lampiran 1. Perkalian matriks $DF(E_0)$ dan $DV^{-1}(E_0)$ dapat dilihat pada Lampiran 2. Nilai

eigen terbesar yang diperoleh dari $(DF(E_0))(DV^{-1}(E_0))$ adalah

$$\frac{c\beta\gamma(1 - M^*)}{\rho Q_1 Q_2 Q_3} (p\theta + (1 - p)Q_2)(\rho + \eta\sigma),$$

sehingga angka reproduksi dasar dari model (3.8) adalah

$$R_0 = \frac{c\beta\gamma(1 - M^*)}{\rho Q_1 Q_2 Q_3} (p\theta + (1 - p)Q_2)(\rho + \eta\sigma).$$

Untuk lebih memahami angka reproduksi dasar yang diperoleh, misalkan $v = \frac{\mu + \delta_1}{Q_2}$ sedemikian sehingga

$$\begin{aligned} R_0 &= \frac{c\beta\gamma(1 - M^*)}{\rho Q_1 Q_2 Q_3} (p\theta + (1 - p)Q_2)(\rho + \eta\sigma) \\ &= \frac{c\beta\gamma(1 - M^*)}{\rho Q_1 Q_2 Q_3} (p\theta + Q_2 - pQ_2)(\rho + \eta\sigma) \\ &= \frac{c\beta\gamma(1 - M^*)}{\rho Q_1 Q_2 Q_3} (p\theta + Q_2 - p\mu - p\theta - p\delta_1)(\rho + \eta\sigma) \\ &= \frac{c\beta\gamma(1 - M^*)}{\rho Q_1 Q_3} \frac{(Q_2 - p(\mu + \delta_1))}{Q_2} (\rho + \eta\sigma) \\ &= \frac{c\beta\gamma(1 - M^*)}{\rho Q_1 Q_3} (1 - pv)(\rho + \eta\sigma). \end{aligned}$$

R_0 dapat ditulis kembali sebagai $R_0 = R_1 + R_2$, dengan

$$\begin{aligned} R_1 &= c\beta(1 - M^*)(1 - pv) \left(\frac{\gamma}{Q_1} \right) \left(\frac{1}{Q_3} \right), \\ R_2 &= \frac{c\beta\eta(1 - M^*)}{\rho} (1 - pv) \left(\frac{\gamma}{Q_1} \right) \left(\frac{\sigma}{Q_3} \right). \end{aligned}$$

Dapat diketahui bahwa $\frac{\gamma}{Q_1}$ merupakan kemungkinan individu E berubah menjadi I_a atau I_s , $\frac{1}{Q_3}$ merupakan durasi tingkat infeksi I_s , dan $\frac{\sigma}{Q_3}$ merupakan proporsi individu I_s yang mati karena penyakit. Dengan demikian, angka reproduksi dasar R_0 adalah jumlah infeksi sekunder dari individu terinfeksi pada I_s dan D .

3.3.2 Eksistensi titik kesetimbangan endemik (EE)

Berdasarkan Definisi (2.2.1) titik kesetimbangan endemik model (3.8) diperoleh jika $\frac{dS}{dt} = 0, \frac{dE}{dt} = 0, \frac{dI_a}{dt} = 0, \frac{dI_s}{dt} = 0, \frac{dR}{dt} = 0, \frac{dD}{dt} = 0, \frac{dM}{dt} = 0$, yaitu

$$0 = \Lambda - (\mu + \kappa)S, \quad (3.9)$$

$$0 = \kappa S - Q_1 E, \quad (3.10)$$

$$0 = p\gamma E - Q_2 I_a, \quad (3.11)$$

$$0 = (1 - p)\gamma E + \theta I_a - Q_3 I_s, \quad (3.12)$$

$$0 = \delta_1 I_a + \delta_2 I_s - \mu R, \quad (3.13)$$

$$0 = \sigma I_s - \rho D, \quad (3.14)$$

$$0 = \alpha_1 S + \alpha_2 E + \alpha_3 I_a + \alpha_4 I_s + \alpha_5 R - \omega M. \quad (3.15)$$

Dari persamaan (3.9) diperoleh

$$\begin{aligned} 0 &= \Lambda - (\mu + \kappa)S \\ (\mu + \kappa)S &= \Lambda \\ S^{**} &= \frac{\Lambda}{\mu + \kappa^{**}}. \end{aligned}$$

Dari persamaan (3.10) diperoleh

$$\begin{aligned} 0 &= \kappa S - Q_1 E \\ Q_1 E &= \kappa S \\ E &= \frac{\kappa}{Q_1} \frac{\Lambda}{\mu + \kappa} \\ E^{**} &= \frac{\kappa^{**} \Lambda}{Q_1 (\mu + \kappa^{**})}. \end{aligned}$$

Dari persamaan (3.11) diperoleh

$$\begin{aligned} 0 &= p\gamma E - Q_2 I_a \\ Q_2 I_a &= p\gamma E \\ I_a &= \frac{p\gamma}{Q_2} \frac{\kappa \Lambda}{Q_1 (\mu + \kappa)} \\ I_a^{**} &= \frac{p\gamma \kappa^{**} \Lambda}{Q_1 Q_2 (\mu + \kappa^{**})}. \end{aligned}$$

Dari persamaan (3.12) diperoleh

$$\begin{aligned}
0 &= (1-p)\gamma E + \theta I_a - Q_3 I_s \\
Q_3 I_s &= (1-p)\gamma E + \theta I_a \\
Q_3 I_s &= (1-p)\gamma \frac{\kappa \Lambda}{Q_1(\mu + \kappa)} + \theta \frac{p\gamma \kappa \Lambda}{Q_1 Q_2(\mu + \kappa)} \\
I_s^{**} &= \frac{\gamma \kappa^{**} \Lambda (p\theta + (1-p)Q_2)}{Q_1 Q_2 Q_3 (\mu + \kappa^{**})}.
\end{aligned}$$

Dari persamaan (3.13) diperoleh

$$\begin{aligned}
0 &= \delta_1 I_a + \delta_2 I_s - \mu R \\
\mu R &= \delta_1 I_a + \delta_2 I_s \\
\mu R &= \delta_1 \frac{p\gamma \kappa \Lambda}{Q_1 Q_2(\mu + \kappa)} + \delta_2 \frac{\gamma \kappa \Lambda (p\theta + (1-p)Q_2)}{Q_1 Q_2 Q_3 (\mu + \kappa)} \\
R^{**} &= \frac{\gamma \kappa^{**} \Lambda (p\delta_1 Q_3 + \delta_2 (p\theta + (1-p)Q_2))}{\mu Q_1 Q_2 Q_3 (\mu + \kappa^{**})}.
\end{aligned}$$

Dari persamaan (3.14) diperoleh

$$\begin{aligned}
0 &= \sigma I_s - \rho D \\
\rho D &= \sigma I_s \\
\rho D &= \sigma \frac{\gamma \kappa \Lambda (p\theta + (1-p)Q_2)}{Q_1 Q_2 Q_3 (\mu + \kappa)} \\
D^{**} &= \frac{\sigma \gamma \kappa^{**} \Lambda (p\theta + (1-p)Q_2)}{\rho Q_1 Q_2 Q_3 (\mu + \kappa^{**})}.
\end{aligned}$$

Dari persamaan (3.15) diperoleh

$$\begin{aligned}
0 &= \alpha_1 S + \alpha_2 E + \alpha_3 I_a + \alpha_4 I_s + \alpha_5 R - \omega M \\
\omega M &= \alpha_1 S + \alpha_2 E + \alpha_3 I_a + \alpha_4 I_s + \alpha_5 R \\
M^{**} &= \frac{\Lambda}{\omega \mu Q_1 Q_2 Q_3 (\mu + \kappa^{**})} (m_1 + m_2 \kappa^{**}),
\end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned}
m_1 &= \alpha_1 Q_1 Q_2 Q_3 \mu, \\
m_2 &= Q_3 (\mu (\alpha_2 Q_2 + p\gamma \alpha_3) + \alpha_5 \gamma p \delta_1) + \gamma (\alpha_4 \mu + \alpha_5 \delta_2) \\
&\quad (p\theta + (1-p)Q_2).
\end{aligned}$$

Misalkan

$$P(\kappa^{**}) = \kappa^{**} - \frac{c\beta(1 - M^{**})(I_s^{**} + \eta D^{**})}{N^{**}},$$

substitusi M^{**} , I_s^{**} , D^{**} , dan N^{**} dengan menyatakan nilai-nilainya dalam fungsi κ^{**} . Perhitungan N^{**} dapat dilihat pada Lampiran 3. Misalkan

$$P(\kappa^{**}) = 0,$$

sehingga diperoleh persamaan polinom κ^{**} berderajat dua berikut

$$\kappa^{**} [v_2(\kappa^{**})^2 + v_1\kappa^{**} + v_0] = 0, \quad (3.16)$$

dengan

$$\begin{aligned} v_0 &= \rho\mu^2\omega Q_1^2 Q_2^2 Q_3^2 \Lambda(1 - R_0), \\ v_1 &= \mu\omega Q_1 Q_2 Q_3 \Lambda(\xi_1 + \xi_2) + \xi_3, \\ v_2 &= \omega Q_1 Q_2 Q_3 \Lambda(\rho Q_3(\mu Q_2 + p\gamma(\mu + \delta_1)) + \gamma(\mu(\rho + \sigma) + \rho\delta_2) \\ &\quad (p\theta + (1 - p)Q_2)), \end{aligned} \quad (3.17)$$

dimana

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \rho(Q_1 Q_2 Q_3 + \mu Q_2 Q_3 + p\gamma\mu Q_3 + p\gamma Q_3 \delta_1 \\ &\quad + \gamma\delta_2(p\theta + (1 - p)Q_2)), \\ \xi_2 &= (\gamma\sigma(\mu - c\beta\eta) + \rho(\gamma\mu - c\beta\gamma))(p\theta + (1 - p)Q_2), \\ \xi_3 &= c\beta\gamma\mu\Lambda^2(\rho + \eta\sigma)(p\theta + (1 - p)Q_2) \left[Q_3(\alpha_2 Q_2 + p\gamma\alpha_3) \right. \\ &\quad \left. + \alpha_4\gamma(p\theta + (1 - p)Q_2) + \alpha_5\gamma \left(\frac{pQ_3\delta_1}{\mu} + \frac{\delta_2}{\mu}(p\theta + (1 - p)Q_2) \right) \right]. \end{aligned}$$

Proses substitusi dapat dilihat pada Lampiran 4.

Dari persamaan (3.16) diperoleh $\kappa^{**} = 0$ bersesuaian dengan adanya titik kesetimbangan bebas penyakit yang dibahas pada subbab sebelumnya. Solusi persamaan kuadrat

$$v_2(\kappa^{**})^2 + v_1\kappa^{**} + v_0 = 0 \quad (3.18)$$

adalah

$$\kappa_{\pm}^{**} = \frac{-v_1 \pm \sqrt{v_1^2 - 4v_2v_0}}{2v_2}.$$

κ^{**} haruslah suatu bilangan real positif. κ^{**} bernilai real jika $v_1^2 - 4v_2v_0 = 0$ atau $v_1^2 - 4v_2v_0 > 0$ dengan $v_2 > 0$ sehingga dilakukan analisis pada kedua kasus tersebut.

Kasus 1. $v_1^2 - 4v_2v_0 = 0$.

Dalam kasus ini terdapat dua akar kembar, yaitu

$$\kappa^{**} = -\frac{v_1}{2v_2}.$$

$\kappa^{**} > 0$ apabila $v_1 < 0$.

Kasus 2. $v_1^2 - 4v_2v_0 > 0$.

Kasus 2.1. $v_1 > 0$ dan $v_0 > 0$.

Perhatikan bahwa $-4v_2v_0 < 0$ sehingga $\sqrt{v_1^2 - 4v_2v_0} < v_1$.

Hal ini berakibat $\kappa_{\pm}^{**} < 0$.

Kasus 2.2. $v_1 > 0$ dan $v_0 < 0$.

Perhatikan bahwa $-4v_2v_0 > 0$ sehingga $\sqrt{v_1^2 - 4v_2v_0} > v_1$.

Hal ini berakibat $\kappa_+^{**} > 0$ dan $\kappa_-^{**} < 0$.

Kasus 2.3. $v_1 < 0$ dan $v_0 > 0$.

Perhatikan bahwa $-v_1 > 0$ dan $\sqrt{v_1^2 - 4v_2v_0} > 0$.

Hal ini berakibat $\kappa_{\pm}^{**} > 0$.

Kasus 2.4. $v_1 < 0$ dan $v_0 < 0$.

Perhatikan bahwa $-4v_2v_0 > 0$ sehingga $\sqrt{v_1^2 - 4v_2v_0} > -v_1$.

Hal ini berakibat $\kappa_+^{**} > 0$ dan $\kappa_-^{**} < 0$.

Misalkan $\kappa_+^{**} = \kappa_1^{**}$ dan $\kappa_-^{**} = \kappa_2^{**}$. Tanda akar-akar persamaan (3.18) diberikan pada Tabel (3.1).

Tabel 3.1: Tanda akar-akar persamaan (3.18)

	$v_2 > 0$			
	$v_1 > 0$		$v_1 < 0$	
	$v_0 > 0$ ($R_0 < 1$)	$v_0 < 0$ ($R_0 > 1$)	$v_0 > 0$ ($R_0 < 1$)	$v_0 < 0$ ($R_0 > 1$)
κ_1^{**}	-	+	+	+
κ_2^{**}	-	-	+	-

Dari Tabel (3.1) dapat disimpulkan bahwa titik kesetimbangan endemik eksis dan tunggal ketika $v_0 < 0$ atau $R_0 > 1$. Ketika $v_1 < 0$ dan $R_0 < 1$ terdapat dua titik kesetimbangan endemik bersamaan dengan titik kesetimbangan bebas penyakit. Misalkan terdapat nilai kritis R_0 dinotasikan R_0^c , nilai diskriminan (Δ) persamaan (3.18) sama dengan nol pada saat $R_0 = R_0^c$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
0 &= v_1^2 - 4v_2v_0 \\
0 &= v_1^2 - 4v_2(\rho\mu^2\omega Q_1^2 Q_2^2 Q_3^2 \Lambda(1 - R_0^c)) \\
v_1^2 &= 4v_2(\rho\mu^2\omega Q_1^2 Q_2^2 Q_3^2 \Lambda(1 - R_0^c)) \\
1 - R_0^c &= \frac{v_1^2}{4v_2\psi} \\
R_0^c &= 1 - \frac{v_1^2}{4v_2\psi}
\end{aligned}$$

dengan $\psi = \rho\mu^2\omega Q_1^2 Q_2^2 Q_3^2 \Lambda$. Persamaan (3.18) tidak memiliki solusi real ketika $R_0 < R_0^c$ ($\Delta < 0$) dan memiliki dua solusi real ketika $R_0^c < R_0 < 1$ ($\Delta > 0$). Berdasarkan uraian tersebut diperoleh Teorema (3.3.1) mengenai eksistensi titik kesetimbangan endemik.

Teorema 3.3.1. Eksistensi Titik Kesetimbangan Endemik

1. Jika $R_0 > 1$, persamaan (3.18) memiliki satu solusi positif dan sistem persamaan (3.8) memiliki titik kesetimbangan endemik tunggal.
2. Jika $R_0^c < R_0 < 1$ dan $v_1 < 0$ akar-akar κ_1^* dan κ_2^* keduanya positif dan sistem persamaan (3.8) memiliki dua titik kesetimbangan endemik.
3. Jika $R_0^c = R_0$ maka persamaan (3.18) memiliki akar positif kembar dan sistem persamaan (3.8) memiliki titik kesetimbangan endemik tunggal.
4. Jika $0 < R_0 < R_0^c$ sistem persamaan (3.8) tidak memiliki titik kesetimbangan endemik dan hanya memiliki titik kesetimbangan bebas penyakit.

3.4 Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan

Sistem persamaan (3.8) merupakan sistem otonomus nonlinear, sehingga untuk menentukan kestabilan titik kesetimbangan dilakukan proses linearisasi. Proses linearisasi sistem persamaan (3.8) diperoleh dengan menentukan matriks Jacobi (J).

3.4.1 Kestabilan lokal dan global titik kesetimbangan bebas penyakit (E_0)

Titik kesetimbangan bebas penyakit (E_0) disubstitusikan ke dalam matriks Jacobi sehingga diperoleh

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} -\mu & 0 & 0 & -c\beta(1-M^*) & 0 & -c\beta\eta(1-M^*) & 0 \\ 0 & -Q_1 & 0 & c\beta(1-M^*) & 0 & c\beta\eta(1-M^*) & 0 \\ 0 & p\gamma & -Q_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-p)\gamma & \theta & -Q_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_1 & \delta_2 & -\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma & 0 & -\rho & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & 0 & -\omega \end{bmatrix}.$$

Untuk mengetahui kestabilan lokal E_0 , ditunjukkan matriks Jacobi sistem persamaan (3.8) pada E_0 memiliki nilai eigen negatif. Pencarian persamaan karakteristik matriks $J(E_0)$ dipaparkan pada Lampiran 5. Nilai-nilai eigen dari matriks $J(E_0)$ adalah $-\mu$, $-\mu$, $-\omega$, dan akar-akar persamaan (3.19) berikut

$$\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0 \quad (3.19)$$

dengan

$$\begin{aligned} a_1 &= \rho + Q_1 + Q_2 + Q_3, \\ a_2 &= \rho(Q_1 + Q_2 + Q_3) + Q_1Q_2 + Q_1Q_3 + Q_2Q_3 \\ &\quad - c\beta\gamma(1-M^*)(1-p) \\ &= \rho(Q_1 + Q_2 + Q_3) + Q_1Q_2 + Q_2Q_3 + Q_1Q_3(1-R_{1b}), \\ a_3 &= \rho(Q_1Q_2 + Q_1Q_3 + Q_2Q_3) + Q_1Q_2Q_3 - c\beta\gamma(1-M^*) \\ &\quad (p\theta + (1-p)(\rho + Q_2 + \eta\sigma)) \\ &= \rho(Q_1Q_2 + Q_1Q_3 + Q_2Q_3) + Q_1Q_2Q_3 - c\beta\gamma(1-M^*) \\ &\quad (p\theta + (1-p)Q_2) - c\beta\gamma(1-M^*)(1-p)(\rho + \eta\sigma) \\ &= \rho(Q_1Q_2 + Q_2Q_3) + Q_1Q_2Q_3(1-R_1) + \rho Q_1Q_3(1-R_4), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_4 &= \rho Q_1 Q_2 Q_3 - (c\beta(1 - M^*))p\theta\gamma\rho - (c\beta(1 - M^*))(1 - p)\gamma\rho Q_2 \\
&\quad - (c\beta\eta(1 - M^*))p\theta\gamma\sigma - (c\beta\eta(1 - M^*))(1 - p)\gamma\sigma Q_2 \\
&= \rho Q_1 Q_2 Q_3 \left[1 - \frac{c\beta\gamma(1 - M^*)}{\rho Q_1 Q_2 Q_3} (p\theta + (1 - p)Q_2)(\rho + \eta\sigma) \right] \\
&= \rho Q_1 Q_2 Q_3 (1 - R_0).
\end{aligned}$$

Jika misalkan

$$\begin{aligned}
R_1 &= \frac{c\beta\gamma(1 - M^*)}{Q_1 Q_2 Q_3} (p\theta + (1 - p)Q_2), \\
R_{1a} &= \frac{c\beta\gamma(1 - M^*)}{Q_1 Q_2 Q_3} p\theta, \\
R_{1b} &= \frac{c\beta\gamma(1 - M^*)}{Q_1 Q_3} (1 - p), \\
R_2 &= \frac{c\beta\gamma(1 - M^*)}{\rho Q_1 Q_2 Q_3} (p\theta + (1 - p)Q_2)\eta\sigma, \\
R_3 &= \frac{c\beta\gamma(1 - M^*)}{\rho Q_1 Q_2 Q_3} (p\theta)(\rho + \eta\sigma), \\
R_4 &= \frac{c\beta\gamma(1 - M^*)}{\rho Q_1 Q_3} (1 - p)(\rho + \eta\sigma),
\end{aligned}$$

maka R_0 dapat ditulis $R_0 = R_1 + R_2 = R_3 + R_4$ dan $R_1 = R_{1a} + R_{1b}$. Diketahui $M^* \leq M(t) \leq 1$ dan $0 < (1 - p) < 1$ sehingga $(1 - M^*)$ dan $(1 - p)$ selalu bernilai positif. Akibatnya $0 < R_{1b} < R_1 < R_0$ dan $0 < R_{1b} < R_4 < R_0$.

Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz, persamaan (3.19) memiliki nilai eigen negatif jika dan hanya jika

- i. $a_1 > 0$, a_1 jelas bernilai positif.
- ii. $a_3 > 0$, a_3 bernilai positif ketika $R_0 < 1$.
- iii. $a_4 > 0$, a_4 bernilai positif ketika $R_0 < 1$.
- iv. $a_1 a_2 - a_3 > 0$, diperoleh

$$\begin{aligned}
a_1 a_2 - a_3 &= (\rho + Q_1 + Q_2 + Q_3)(\rho(Q_1 + Q_2 + Q_3) + Q_1 Q_2 \\
&\quad + Q_2 Q_3 + Q_1 Q_3(1 - R_{1b})) - (\rho(Q_1 Q_2 + Q_2 Q_3) \\
&\quad + Q_1 Q_2 Q_3(1 - R_1) + \rho Q_1 Q_3(1 - R_4))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \rho^2(Q_1 + Q_2 + Q_3) + 2\rho(Q_1Q_2 + Q_1Q_3 + Q_2Q_3) \\
&\quad + \rho(Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2) + Q_1^2Q_2 + Q_1Q_2^2 + Q_2Q_3^2 + Q_2^2Q_3 \\
&\quad + 2Q_1Q_2Q_3 + \rho Q_1Q_3(1 - R_{1b}) + Q_1^2Q_3(1 - R_{1b}) \\
&\quad + Q_1Q_2Q_3(1 - R_{1b}) + Q_1Q_3^2(1 - R_{1b}) \\
&\quad - Q_1Q_2Q_3(1 - R_1) - \rho Q_1Q_3(1 - R_4) \\
&= \rho^2(Q_1 + Q_2 + Q_3) + 2\rho(Q_1Q_2 + Q_1Q_3 + Q_2Q_3) \\
&\quad + \rho(Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2) + Q_1^2Q_2 + Q_1Q_2^2 + Q_2Q_3^2 + Q_2^2Q_3 \\
&\quad + 2Q_1Q_2Q_3 + \rho Q_1Q_3(R_4 - R_{1b}) + Q_1^2Q_3(1 - R_{1b}) \\
&\quad + Q_1Q_2Q_3(R_1 - R_{1b}) + Q_1Q_3^2(1 - R_{1b}),
\end{aligned}$$

jelas bahwa $a_1a_2 - a_3$ bernilai positif jika $R_0 < 1$.

- v. $a_3(a_1a_2 - a_3) - a_1^2a_4 > 0$, nilai $a_3(a_1a_2 - a_3) - a_1^2a_4$ yang perhitungannya dipaparkan pada Lampiran 6, bernilai positif jika $R_0 < 1$.

Dari uraian tersebut dapat disimpulkan kestabilan lokal E_0 yaitu stabil asimtotik lokal ketika $R_0 < 1$ dan tak stabil ketika $R_0 > 1$. Selanjutnya akan ditunjukkan kestabilan global E_0 .

Teorema 3.4.1. Kestabilan Global E_0

Titik kesetimbangan bebas penyakit (E_0) stabil asimtotik global ketika $R_0 < R(M(t)) < 1$. Ketika $R_0 < 1$, E_0 stabil lokal.

Bukti. Didefinisikan $V(t) = E(t) + I_a(t) + I_s(t) + D(t)$ sebagai fungsi Lyapunov, $W \subseteq R^7$. Akan ditunjukkan $V(t)$ merupakan fungsi Lyapunov kuat yang memenuhi kondisi

- i. $V(\vec{x}^*) = 0$,
- ii. $V(\vec{x}) > 0, \forall \vec{x} \neq \vec{x}^* \in W$, dan
- iii. $\dot{V}(\vec{x}) < 0, \forall \vec{x} \neq \vec{x}^*$ dengan $\vec{x} \in W$.

Diketahui $E_0 = (E^*, I_a^*, I_s^*, D^*) = (0, 0, 0, 0)$.

- i. Jelas bahwa pada saat E_0 , diperoleh $V(E_0) = 0$.
- ii. Jelas ketika $E(t) > 0, I_a(t) > 0, I_s(t) > 0$, dan $D(t) > 0, \forall t > 0, \forall \vec{x} \neq \vec{0}$ diperoleh $V(\vec{x}) = E(t) + I_a(t) + I_s(t) + D(t) > 0$.

iii. Turunan dari V adalah

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= \dot{E} + \dot{I}_a + \dot{I}_s + \dot{D} \\
&= \kappa S - Q_1 E + p\gamma E - Q_2 I_a + (1-p)\gamma E + \theta I_a - Q_3 I_s \\
&\quad + \sigma I_s - \rho D \\
&= \frac{c\beta(1-M)(I_s + \eta D)}{N} S - Q_1 E + p\gamma E - Q_2 I_a \\
&\quad + (1-p)\gamma E + \theta I_a - Q_3 I_s + \sigma I_s - \rho D \\
&= \frac{c\beta(1-M)(I_s + \eta D)}{N} S + (\gamma - Q_1)E + (\theta - Q_2)I_a \\
&\quad + (\sigma - Q_3)I_s - \rho D.
\end{aligned}$$

Karena $S \leq N$, $\frac{S}{N} \leq 1$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
\dot{V} &\leq c\beta(1-M)(I_s + \eta D) + (\gamma - Q_1)E + (\theta - Q_2)I_a \\
&\quad + (\sigma - Q_3)I_s - \rho D.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Dari persamaan (3.11) diperoleh

$$\begin{aligned}
0 &= p\gamma E - Q_2 I_a \\
p\gamma E &= Q_2 I_a \\
E &= \frac{Q_2}{p\gamma} I_a.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Dari persamaan (3.12) diperoleh

$$\begin{aligned}
0 &= (1-p)\gamma E + \theta I_a - Q_3 I_s \\
Q_3 I_s &= (1-p)\gamma E + \theta I_a \\
Q_3 I_s &= (1-p)\gamma \frac{Q_2}{p\gamma} I_a + \theta I_a \\
I_s &= \frac{p\theta + (1-p)Q_2}{pQ_3} I_a.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Dari persamaan (3.14) diperoleh

$$\begin{aligned}
0 &= \sigma I_s - \rho D \\
\rho D &= \sigma I_s \\
D &= \frac{\sigma}{\rho} I_s.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Substitusi persamaan (3.21), (3.22), dan (3.23) ke pertidaksamaan (3.20) diperoleh

$$\dot{V} \leq \frac{Q_1 Q_2 Q_3}{\gamma(p\theta + (1-p)Q_2)} (R(M(t)) - 1) I_s,$$

dengan

$$R(M(t)) = \frac{c\beta\gamma(1 - M(t))}{\rho Q_1 Q_2 Q_3} (p\theta + (1-p)Q_2)(\rho + \eta\sigma).$$

Proses substitusi dapat dilihat pada Lampiran 7.

Dengan demikian, $\dot{V} \leq 0$ ketika $R(M(t)) \leq 1$.

Dari (i), (ii), dan (iii) dapat disimpulkan kestabilan global dari titik kesetimbangan bebas penyakit. $\dot{V} \leq 0$ ketika $R(M(t)) \leq 1$ dan secara khusus $\dot{V} = 0$ hanya jika $E^* = I_a^* = I_s^* = D^* = 0$, sehingga $V(t)$ merupakan fungsi Lyapunov kuat. Dengan menggunakan Teorema (2.6.5) diketahui E_0 stabil asimtotik global ketika $R(M(t)) < 1$. Pada Teorema (3.2.1) telah dibuktikan bahwa $M(t) \geq M^*, \forall t > 0$ sedemikian sehingga $R_0 < R(M(t))$, diperoleh kestabilan global E_0 yaitu $R_0 < R(M(t)) < 1$. \square

3.4.2 Kestabilan lokal titik kesetimbangan endemik (EE)

Misalkan $\phi = c\beta(1 - M^*)$ sehingga untuk $R_0 = 1$ diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{c\beta\gamma(1 - M^*)}{\rho Q_1 Q_2 Q_3} (p\theta + (1-p)Q_2)(\rho + \eta\sigma) &= 1 \\ \frac{\phi\gamma}{\rho Q_1 Q_2 Q_3} (p\theta + (1-p)Q_2)(\rho + \eta\sigma) &= 1 \\ \phi\gamma(p\theta + (1-p)Q_2)(\rho + \eta\sigma) &= \rho Q_1 Q_2 Q_3 \\ \phi = \phi^* &= \frac{\rho Q_1 Q_2 Q_3}{\gamma(p\theta + (1-p)Q_2)(\rho + \eta\sigma)}. \end{aligned}$$

Untuk menentukan kestabilan titik kesetimbangan endemik, digunakan Teorema (2.6.1) dan Remark (2.6.2).

Teorema 3.4.2. Titik kesetimbangan endemik tunggal yang stabil asimtotik lokal eksis ketika $R_0 > 1$.

Bukti. Pertama, misalkan

$$S = x_1, E = x_2, I_a = x_3, I_s = x_4, R = x_5, D = x_6, M = x_7,$$

dan

$$\dot{S} = f_1, \dot{E} = f_2, \dot{I}_a = f_3, \dot{I}_s = f_4, \dot{R} = f_5, \dot{D} = f_6, \dot{M} = f_7.$$

Titik kesetimbangan daya tarik pada sistem persamaan (3.8) adalah titik kesetimbangan bebas penyakit yang dinotasikan $E_0 = (S^*, 0, 0, 0, 0, 0, M^*)$. Linearisasi matriks A dari sistem persamaan (3.8) pada (E_0, ϕ^*) adalah

$$A = \begin{bmatrix} -\mu & 0 & 0 & -\phi^* & 0 & -\eta\phi^* & 0 \\ 0 & -Q_1 & 0 & \phi^* & 0 & \eta\phi^* & 0 \\ 0 & p\gamma & -Q_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-p)\gamma & \theta & -Q_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_1 & \delta_2 & -\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma & 0 & -\rho & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & 0 & -\omega \end{bmatrix}.$$

Dilakukan perhitungan seperti pada Lampiran 5, dengan $c\beta(1 - M^*) = \phi^*$, diperoleh persamaan karakteristik matriks A yaitu

$$\begin{aligned} H(\lambda) = & (-\mu - \lambda)^2(-\omega - \lambda)[\lambda^4 + (\rho + Q_1 + Q_2 + Q_3)\lambda^3 + (\rho Q_1 \\ & + \rho Q_2 + \rho Q_3 + Q_1 Q_2 + Q_1 Q_3 + Q_2 Q_3 - \phi^* \gamma(1 - p))\lambda^2 \\ & + (\rho Q_1 Q_2 + \rho Q_1 Q_3 + \rho Q_2 Q_3 + Q_1 Q_2 Q_3 \\ & - \phi^* \gamma(p\theta + (1 - p)(\rho + Q_2 + \eta\sigma)))\lambda + \rho Q_1 Q_2 Q_3 \\ & - \phi^* p\theta\gamma\rho - \phi^*(1 - p)\gamma\rho Q_2 - \phi^* \eta p\theta\gamma\sigma \\ & - \phi^* \eta(1 - p)\gamma\sigma Q_2]. \end{aligned}$$

Berdasarkan Teorema (2.6.1) nilai ϕ^* dianggap 0 sehingga diperoleh nilai-nilai eigen dari matriks A adalah $-\mu, -\mu, -\omega, 0$, dan akar-akar persamaan (3.24) berikut

$$\lambda^3 + d_0\lambda^2 + d_1\lambda + d_2 = 0, \quad (3.24)$$

dengan

$$\begin{aligned} d_0 &= \rho + Q_1 + Q_2 + Q_3, \\ d_1 &= \rho(Q_1 + Q_2 + Q_3) + Q_1(Q_2 + Q_3) + Q_2 Q_3, \\ d_2 &= \rho(Q_1(Q_2 + Q_3) + Q_2 Q_3) + Q_1 Q_2 Q_3. \end{aligned}$$

Linearisasi matriks A menghasilkan nol sebagai nilai eigen sederhana, sehingga pernyataan (A1) terpenuhi. Selanjutnya, akan ditunjukkan pernyataan (A2) dipenuhi.

Vektor eigen kanan $W = [w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7]$ dan vektor eigen kiri $V = [v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7]$ bersesuaian dengan nilai eigen nol sedemikian sehingga $VW = 1$ adalah solusi dari

$$\begin{aligned} AW &= [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]', \\ VA &= [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], \\ VW &= 1. \end{aligned}$$

Setelah dilakukan perhitungan, diperoleh

$$\begin{aligned} w_1 &= -\frac{\rho Q_1 Q_2 Q_3}{\mu \psi_1}, \\ w_2 &= \frac{\rho Q_2 Q_3}{\psi_1}, \\ w_3 &= \frac{p \gamma \rho Q_3}{\psi_1}, \\ w_4 &= \frac{\rho}{\sigma}, \\ w_5 &= \frac{1}{\mu} \left[\frac{p \gamma \rho Q_3 \delta_1}{\psi_1} + \frac{\rho \delta_2}{\sigma} \right], \\ w_6 &= 1, \\ w_7 &= \frac{\psi_2}{\mu \psi_1 \omega}, \\ v_1 &= 0, \\ v_2 &= \frac{\psi_1 (p \theta + (1 - p) Q_2) (\rho + \eta \sigma)}{\psi_3}, \\ v_3 &= \frac{\theta Q_1 \psi_1 (\rho + \eta \sigma)}{\gamma \psi_3}, \\ v_4 &= \frac{Q_1 Q_2 \psi_1 (\rho + \eta \sigma)}{\gamma \psi_3}, \\ v_5 &= 0, \\ v_6 &= \frac{\eta Q_1 Q_2 Q_3 \psi_1}{\gamma \psi_3}, \\ v_7 &= 0, \end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \gamma\sigma(p\theta + (1-p)Q_2), \\ \psi_2 &= \rho Q_2 Q_3 (\alpha_2 \mu - \alpha_1 Q_1) + p\gamma [\rho Q_3 (\alpha_3 \mu + \alpha_5 \delta_1) + (\alpha_4 \mu + \alpha_5 \delta_2) \\ &\quad (p\theta + (1-p)Q_2)], \\ \psi_3 &= \rho(\rho + \eta\sigma) \left[\frac{Q_2 Q_3 \psi_1}{\gamma\sigma} + p\theta Q_1 Q_3 \right] + (\rho^2 + \eta\sigma(\rho + Q_3)) \\ &\quad (Q_1 Q_2)(p\theta + (1-p)Q_2).\end{aligned}$$

Perhitungan vektor eigen kanan W dan vektor eigen kiri V dapat dilihat pada Lampiran 8.

Diketahui bahwa

$$\begin{aligned}E_0(x_2) &= 0, w_2 > 0, \\ E_0(x_3) &= 0, w_3 > 0, \\ E_0(x_4) &= 0, w_4 > 0, \\ E_0(x_5) &= 0, w_5 > 0, \\ E_0(x_6) &= 0, w_6 > 0.\end{aligned}$$

Karena $E_0(x_1)$ dan $E_0(x_7)$ positif, berdasarkan Remark (2.6.2), w_1 dan w_7 tidak perlu positif sehingga (A2) terpenuhi.

Rumus konstanta a dan b adalah

$$\begin{aligned}a &= \sum_{k,i,j=1}^n v_k w_i w_j \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{0}, 0), \\ b &= \sum_{k,i=1}^n v_k w_i \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial \phi}(\vec{0}, 0).\end{aligned}$$

Setelah dilakukan perhitungan diperoleh

$$\begin{aligned}a &= \frac{\psi_4}{\Lambda \psi_3 \gamma \sigma}, \\ b &= \frac{\gamma(p\theta + (1-p)Q_2)^2 (\rho + \eta\sigma)^2}{\psi_3},\end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned}\psi_4 &= -2\rho Q_1 Q_2 Q_3 (\rho + \eta\sigma) (\rho(\mu(Q_2 Q_3 + \rho Q_3) + \gamma(\mu + \delta_2) \\ &\quad (p\theta + (1-p)Q_2)) + \psi_1 \mu + \rho Q_3 \delta_1 \gamma).\end{aligned}$$

Perhitungan konstanta a dan b dapat dilihat pada Lampiran 9.

Karena $a < 0$ dan $b > 0$, dengan menggunakan pernyataan keempat Teorema (2.6.1) dapat disimpulkan bahwa ketika ϕ^* berubah dari negatif menjadi positif, E_0 berubah kestabilannya dari stabil menjadi tak stabil. Kemudian, titik kesetimbangan endemik negatif tak stabil berubah menjadi positif dan stabil asimtotik lokal. Dengan kata lain, ketika $R_0 > 1$ titik kesetimbangan endemik tunggal eksis dan stabil asimtotik lokal. \square

3.5 Simulasi Numerik

Pada bagian ini, dilakukan simulasi numerik menggunakan metode Runge-Kutta orde 4 pada *software* MATLAB R2015a. Divariasikan nilai-nilai parameter untuk mengetahui pengaruh angka reproduksi dasar pada pencegahan dan penularan penyakit virus Ebola. Penting untuk diketahui bahwa angka yang dipilih hanya untuk tujuan ilustrasi dan memverifikasi hasil analisis.

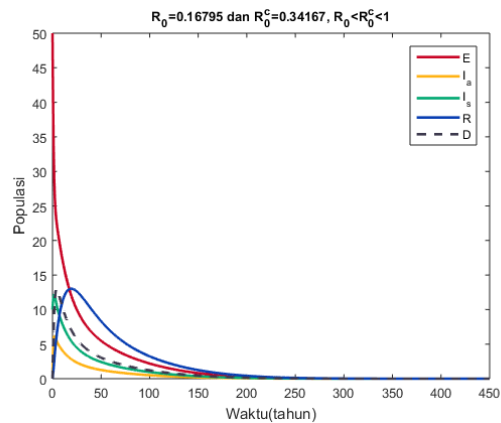
Laju kesembuhan individu terinfeksi tanpa gejala diasumsikan lebih besar karena memiliki ketahanan yang lebih kuat terhadap virus Ebola daripada individu terinfeksi dengan gejala ($\delta_1 > \delta_2$). Diasumsikan bahwa individu dapat mengirim informasi terkait virus Ebola melalui media terlepas dari status penyakit yang dialami. Pada awal epidemi, tidak ada individu sembuh atau individu yang terinfeksi tanpa gejala karena hanya individu dengan gejala yang menularkan penyakit, selain itu belum ada individu yang mati akibat penyakit virus Ebola. Diasumsikan juga bahwa informasi dikirim melalui media pada waktu $t = 0$, setidaknya untuk tujuan pencegahan. Tingkat infektivitas jenazah diasumsikan bernilai konstan ($\eta = 1.5$). Dengan total populasi 260, berikut nilai awal yang digunakan

$$S_0 = 200, E_0 = 50, I_{a0} = 0, I_{s0} = 10, R_0 = 0, D_0 = 0, M_0 = 0.4.$$

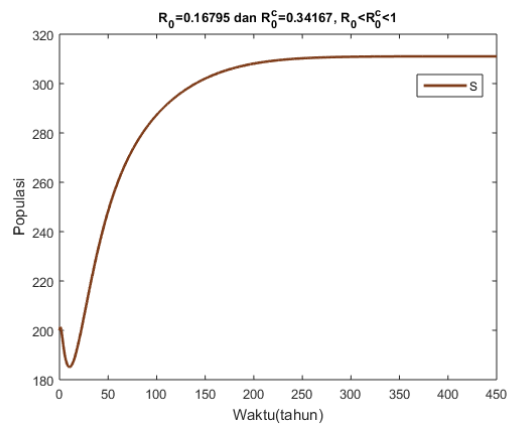
3.5.1 Simulasi numerik 1

Pada simulasi ini, nilai parameter yang digunakan $\Lambda = 20$, $\mu = 0.0643$, $\omega = 0.0058$, $\alpha_1 = 0.00001$, $p = 0.459$, $\theta = 0.73$, $\sigma = 0.8$, $\rho = 0.6559$, $\delta_1 = 0.123$, $\delta_2 = 0.09$, $\alpha_2 = 0.0000649$, $\alpha_3 = 0.0000212$, $\alpha_4 = 0.0000453$, $\alpha_5 = 0.00002$, $\eta = 1.5$, $c = 4$, $\beta = 0.19$, dan $\gamma = 0.45$. Nilai parameter tersebut memenuhi $R_0 < R_0^c < 1$.

Gambar (3.2) menunjukkan tidak terdapat individu yang terinfeksi penyakit virus Ebola pada saat $R_0 < R_0^c < 1$. Hal ini sesuai dengan Teorema (3.3.1) poin 4 yang menyatakan bahwa sistem persamaan (3.8) tidak memiliki titik kesetimbangan endemik dan hanya memiliki titik kesetimbangan bebas penyakit yang stabil. Subpopulasi rentan divisualisasikan secara terpisah pada Gambar (3.3).



Gambar 3.2: Ukuran subpopulasi terinfeksi dan sembuh ketika $R_0 < R_0^c < 1$

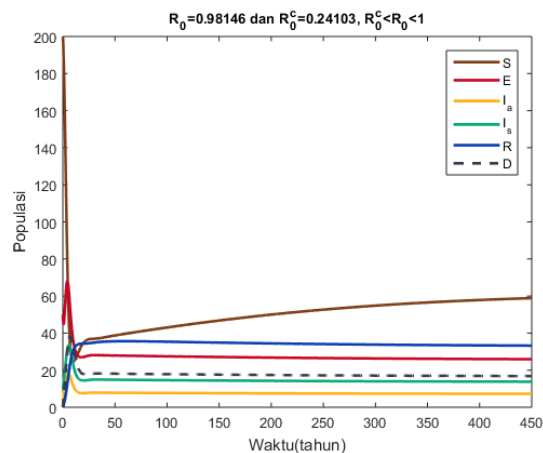


Gambar 3.3: Ukuran subpopulasi rentan ketika $R_0 < R_0^c < 1$

3.5.2 Simulasi numerik 2

Pada simulasi ini, nilai parameter yang digunakan $\Lambda = 20$, $\mu = 0.0643$, $\omega = 0.0058$, $\alpha_1 = 0.00001$, $p = 0.459$, $\theta = 0.73$, $\sigma = 0.8$, $\rho = 0.6559$, $\delta_1 = 0.123$, $\delta_2 = 0.09$, $\alpha_2 = 0.0000649$, $\alpha_3 = 0.0000212$, $\alpha_4 = 0.0000453$, $\alpha_5 = 0.00002$, $\eta = 1.5$, $c = 6$, $\beta = 0.49$, dan $\gamma = 0.56$. Nilai parameter tersebut memenuhi $R_0^c < R_0 < 1$.

Gambar (3.4) menunjukkan meskipun $R_0 < 1$, masih terdapat individu yang terjangkit penyakit virus Ebola. Hal tersebut mengindikasikan bahwa mengurangi R_0 menjadi kurang dari satu tidak cukup untuk memberantas virus Ebola secara total. Dari hasil analisis, diketahui ketika $R_0^c < R_0 < 1$ terdapat satu titik kesetimbangan bebas penyakit yang stabil bersamaan dengan dua titik kesetimbangan endemik dimana yang satu stabil dan yang lain tidak. Adanya dua titik kesetimbangan yang stabil menunjukkan konvergensi solusi bergantung pada nilai awal yang diberikan. Jika nilai awal semakin dekat dengan titik kesetimbangan bebas penyakit maka titik bebas penyakit menjadi stabil sedangkan jika nilai awal semakin dekat dengan titik kesetimbangan endemik maka titik endemik yang stabil. Pada Gambar (3.4) titik kesetimbangan endemik yang bersifat stabil.

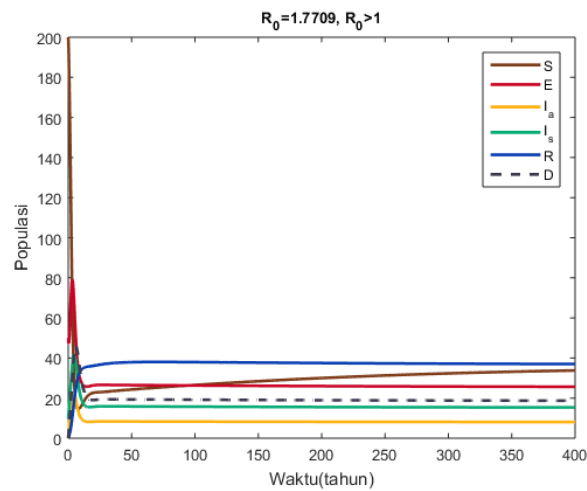


Gambar 3.4: Ukuran populasi ketika $R_0^c < R_0 < 1$

3.5.3 Simulasi numerik 3

Pada simulasi ini, nilai parameter yang digunakan $\Lambda = 20$, $\mu = 0.0643$, $\omega = 0.0058$, $\alpha_1 = 0.00001$, $p = 0.459$, $\theta = 0.73$, $\sigma = 0.8$, $\rho = 0.6559$, $\delta_1 = 0.123$, $\delta_2 = 0.09$, $\alpha_2 = 0.0000649$, $\alpha_3 = 0.0000212$, $\alpha_4 = 0.0000453$, $\alpha_5 = 0.00002$, $\eta = 1.5$, $c = 8$, $\beta = 0.53$, dan $\gamma = 0.63$. Nilai parameter tersebut memenuhi $R_0 > 1$.

Gambar (3.5) menunjukkan penyakit virus Ebola mewabah dalam populasi. Hal ini sesuai dengan hasil analisis bahwa titik kesetimbangan endemik stabil ketika $R_0 > 1$.



Gambar 3.5: Ukuran populasi ketika $R_0 > 1$