

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

1.1 Matriks dan Operasi Matriks

Menurut Anton (1992), matriks adalah susunan bilangan atau fungsi dimana terdiri atas baris dan kolom yang di apit oleh dua kurung siku ([]). Bilangan atau fungsi tersebut sering di sebut dengan entri atau elemen matriks. Biasanya matriks di lambangkan dengan huruf besar sedangkan entri (elemen) di lambangkan dengan hiruf kecil. Matriks di bedakan menjadi beberapa jenis, yakni matriks bujur sangkar, matriks segitiga atas, matriks segitiga bawah, matriks diagonal, matriks satuan, matriks skalar, matriks nol, dan matriks invers.

Dalam matriks di kenal ordo atau ukuran matriks. Ordo suatu matriks di susun berdasarkan banyaknya baris dan kolom yang di tulis dengan mxn . Matriks secara umum dapat ditulis sebagai berikut:

$$A = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{matrix}$$

Matriks A merupakan matriks dengan entri entri a_{ij} . Matriks A juga dapat di tulis dengan $i=1,2,\dots,n$ dan $j=1,2,\dots,n$. Indeks (i) menyatakan letak baris elemen tersebut dan indeks (j) menyatakan letak kolom elemen.

2.2 Metode *Cut Off Point* (COP)

Menurut Tam dan Tummala (2001), metode *Cut Off Point* (COP) adalah suatu metode yang digunakan untuk memastikan derajat kriteria. Kriteria yang di peroleh dalam penyelesaian suatu masalah tidak selalu terbatas. Oleh karena itu, untuk memilih

kriteria-kriteria yang layak di gunakan sebagai alternatif pemilihan dalam suatu masalah dapat di tentukan derajat kebutuhannya dengan menggunakan metode COP. Untuk memperoleh penilaian hasil yang akurat di lakukan penilaian melalui kuisisioner, di bagi menjadi tiga, yaitu jika elemen di nilai sangat penting (*very important*) di beri bobot 3, cukup penting (*somewhat important*) di beri bobot 2, dan tidak penting (*not important*) di beri bobot 1. Seluruh kriteria yang telah di beri bobot nilai berdasarkan kuisisioner diurutkan dari nilai tertinggi ke nilai terendah , kemudian di tentukan nilai COP dengan rumus berikut.

$$\text{natural cut off point} = \frac{\text{maks } x_i + \text{min } x_i}{2} \tag{2.1}$$

Maks x_i = Nilai rata-rata maksimum

Min x_i = Nilai rata-rata minimum

2.3 Multiple Criteria Decision Making (MCDM)

Pengambilan keputusan terdiri dari beberapa langkah penyelesaian, diantaranya identifikasi masalah, menentukan kriteria pilihan, mengevaluasi alternatif, dan menetapkan kriteria terbaik. Pengambilan keputusan dengan hanya menggunakan satu kriteria problem akan memudahkan kita untuk menentukan pilihan terbaik dengan melihat penilaian tertinggi. Pengambilan keputusan dari beberapa alternatif dengan menambah jumlah kriteria, beberap masalah akan muncul, seperti bobot dari kriteria, ketergantungan penilaian, dan keterkaitan antar kriteria membuat masalah pengambilan keputusan menjadi lebih rumit dan membutuhkan metode yang lebih canggih untuk menyelesaikannya.

Hwang dan Yoon (1981), menyarankan untuk memfasilitasi penelitian lapang dari MCDM, MCDM di klasifikasikan menjadi dua kategori utama, yaitu MADM (*Multi-Attribute Decision Making*) dan MODM (*Multi-Objective Decision Making*) dengan perbedaan yang terletak pada maksud yang berbeda dan jenis data yang berbeda.

2.4 Metode *Analytical Hierarchy Process* (AHP)

Menurut Saaty (1994), AHP merupakan salah satu dari sistem pendukung keputusan yang dikembangkan oleh Thomas L. Saaty pada tahun 1971. AHP dapat digunakan dalam pengambilan keputusan yang lebih efektif terhadap suatu masalah pengambilan keputusan yang kompleks. Secara khusus, metode ini sesuai digunakan dalam pengambilan keputusan yang melibatkan perbandingan dari beberapa kriteria-kriteria yang ada untuk memperoleh suatu alternatif terbaik

Model pendukung keputusan ini akan menguraikan masalah multi kriteria yang kompleks menjadi suatu hierarki. Dengan hierarki, suatu masalah yang kompleks dapat diuraikan kedalam kelompok-kelompoknya yang kemudian diatur menjadi suatu bentuk hierarki sehingga permasalahan yang kompleks akan terlihat lebih terstruktur dan sistematis.

Secara detail, terdapat empat prinsip dasar dalam metode AHP. Prinsip-prinsip dasar tersebut adalah sebagai berikut.

1. *Decomposition*

Setelah permasalahan didefinisikan, dilakukan *decomposition*, yaitu memecah permasalahan yang utuh menjadi unsur-unsurnya. Jika ingin mendapatkan hasil yang akurat, maka pemecahan unsur - unsur harus dilakukan hingga tidak memungkinkan dilakukan pemecahan lebih lanjut. Pemecahan tersebut akan menghasilkan beberapa tingkatan dari suatu persoalan. Oleh karena itu, proses ini disebut hirarki.

2. *Comparative judgment*

Prinsip ini membuat penilaian tentang kepentingan relatif dua elemen pada suatu tingkatan tertentu yang berkaitan dengan tingkay di atasnya. Langkah ini adalah inti dari penyelesaian metode AHP, karena sangat berpengaruh pada prioritas elemen-elemen dalam masalah yang akan diselesaikan. Hasil penilaian akan tampak lebih baik dan mudah dimengerti apabila disajikan dalam bentuk matriks perbandingan berpasangan.

3. *Synthesis of Priority*

Dari setiap matriks perbandingan berpasangan dapat ditentukan nilai vektor prioritas untuk memperoleh prioritas lokal. Prioritas local dapat diperoleh dengan melakukan sistesis diantara prioritas daerah. Prosedur melakukan sintesis berbeda menurut hierarki.

4. *Logical Consistency*

Logical consistency adalah karakteristik terpenting dalam AHP. Ini dapat dicapai dengan meregresikan seluruh vektor prioritas yang diperoleh dari berbagai tingkatan hierarki kemudian diperoleh urutan pengambilan keputusan.

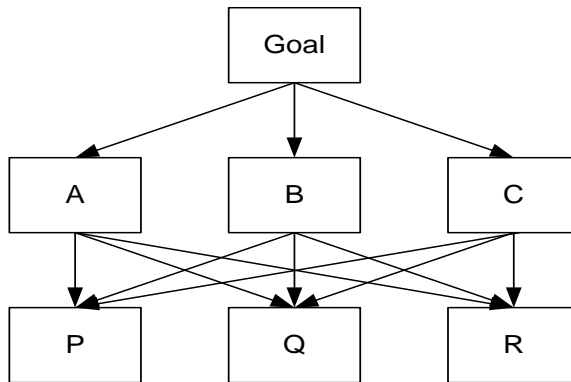
2.5 Langkah – langkah Metode AHP

2.5.1 Penyusunan Hierarki

Menurut Saaty (1994), hierarki atau struktur keputusan adalah gambaran dari suatu permasalahan yang kompleks dalam struktur banyak tingkat dimana tingkat paling atas adalah tujuan dan diikuti tingkat kriteria, sub kriteria dan seterusnya sampai tingkat paling rendah adalah tingkat alternatif. Hierarki dibagi menjadi dua, yaitu hierarki struktural dan fungsional. Hierarki struktural adalah penyusunan system yang kompleks ke dalam komponen-komponen pokoknya dalam urutan menurun menurut sikapnya. Oleh karena itu pada hierarki fungsional menguraikan system yang kompleks menjadi elemen-elemen pokok menurut hubungan esensialnya. Penguraian ini sangat membantu untuk membawa system ke tujuan yang diinginkan. Permasalahan yang multi kriteria akan dapat diuraikan menjadi suatu hierarki. Proses penyusunan meliputi pengelompokan elemen-elemen dalam komponen yang sifatnya homogen dan penyusunan komponen-komponen tersebut haruslah dalam level yang tepat.

Tidak ada aturan yang pantang dilanggar dalam penyusunan hierarki. Rancangan dalam penyusunan hierarki bergantung pada jenis keputusan yang diambil. Bila elemen-elemen suatu tingkat sulit dibandingkan, suatu tingkat baru dengan perbedaan yang lebih halus harus diciptakan. Sifatnya harus fleksibel, selalu dapat diubah guna

menampung adanya kriteria baru yang muncul. Contoh struktur hierarki dapat dilihat pada Gambar 2.1.



Gambar 2.1 Struktur hierarki

A,B,C = Alternatif

P,Q,R = Kriteria

2.5.2 Penyusunan Prioritas

Menurut Saaty (1994), setiap kriteria yang terdapat dalam hierarki harus diketahui bobot relatifnya satu dengan lainnya. Hal ini bertujuan untuk mengetahui kepentingan pihak yang berkepentingan dalam permasalahan yang akan diselesaikan terhadap kriteria dan struktur hierarki atau system secara keseluruhan.

2.5.3 Penyusunan Matriks Perbandingan Berpasangan

Menurut Saaty (1994), hal pertama yang harus dilakukan dalam menentukan prioritas kriteria adalah menyusun matriks perbandingan berpasangan, yaitu membandingkan dalam bentuk berpasangan semua kriteria dalam system. Perbandingan tersebut kemudian ditransformasikan dalam bentuk matriks perbandingan berpasangan untuk analisis numerik. Matriks merupakan alat sederhana yang biasa digunakan dan memberi kerangka untuk menguji konsistensi.

Misalkan terdapat system hierarki dengan kriteria C sejumlah n kriteria, matriks perbandingan antar kriteria akan dibuat dalam bentuk matriks $n \times n$, seperti Tabel 2.1.

Tabel 2.1 Matriks perbandingan berpasangan berdasarkan kriteria C

C	A_1	A_2	...	A_n
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
\vdots	\vdots	\vdots		\vdots
A_n	a_{n2}	a_{n2}	...	a_{nn}

Nilai a_{nn} adalah nilai perbandingan dari elemen baris A_n baris terhadap A_n kolom yang menyatakan seberapa jauh tingkat kepentingan A_n pada kriteri C dibandingkan dengan A_n baris terhadap kolom dan seberapa jauh dominasi A_n baris terhadap A_n kolom. Nilai numeric yang dikenakan untuk seluruh perbandingan diperoleh dari skala 1 sampai 9. Setiap nilai yang diberikan memiliki definisi yang telah ditetapkan seperti pada Tabel 2.2 .

Tabel 2.2 Skala nilai perbandingan

Tingkat kepentingan	Definisi	Penjelasan
1	Sama pentingnya	Kedua elemen mempunyai pengaruh yang sama
3	Sedikit lebih penting	Penilaian lebih memihak salah satu elemen
5	Lebih penting	Penilaian sangat memihak salah satu elemen

7	Sangat penting	Satu elemen lebih disukai dibandingkan lainnya dan elemen tersebut sangat dominan
9	Mutlak lebih penting	Satu elemen terbukti mutlak lebih disukai dibandingkan dengan pasangannya, pada tingkat keyakinan tertinggi

2.4.3 Nilai Eigen dan Vektor Prioritas

Menurut Anton (1992), Definisi 2.1 : Jika A adalah matriks $n \times n$ maka vektor tak nol x di dalam R^n disebut vektor eigen dari A jika Ax kelipatan skalar x , yakni

$$\begin{aligned}
 Ax &= \lambda x \\
 Ax &= \frac{\lambda}{x} \quad x \neq 0 \\
 A - \lambda I &= 0
 \end{aligned}
 \tag{2.2}$$

Persamaan (2.2) mempunyai suatu penyelesaian jika dan hanya jika:

$$A - \lambda I = 0 \tag{2.3}$$

Persamaan (2.3) dinamakan persamaan karakteristik untuk A dan memiliki n akar. Akar-akar tersebut dinotasikan dalam $\lambda_i, i = 1, 2, 3, \dots, n$, inilah yang disebut dengan nilai eigen dari A . Untuk nilai $x \neq 0$ yang memenuhi persamaan (2.3) disebut vektor eigen dari A .
Tabel 2.3 Matriks perbandingan berpasangan dan jumlah nilai tiap kolom

C	A_1	A_2	\dots	A_n
A_1	a_{11}	a_{12}	\dots	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	\dots	a_{2n}
\vdots	\vdots	\vdots		\vdots

A_n	a_{n2}	a_{n2}	...	a_{nn}
Σ	w_1	w_2	...	w_n

Dengan membagi unsur tiap kolom dengan jumlah yang kolom tersebut, maka diperoleh bobot relatif yang dinormalkan. Nilai vektor prioritas dihasilkan dari rata-rata bobot relatif untuk setiap baris.

Tabel 2.4 Matriks faktor pembobotan dan vektor prioritas

C	A_1	A_2	...	A_n	Vektor Prioritas
A_1	$\frac{a_{11}}{w_1}$	$\frac{a_{12}}{w_2}$...	$\frac{a_{1n}}{w_n}$	$v_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{a_{1i}}{w_i}$
A_2	$\frac{a_{21}}{w_1}$	$\frac{a_{22}}{w_2}$...	$\frac{a_{2n}}{w_n}$	$v_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{a_{2i}}{w_i}$
\vdots	\vdots	\vdots		\vdots	\vdots
A_n	$\frac{a_{n1}}{w_1}$	$\frac{a_{n1}}{w_2}$...	$\frac{a_{nn}}{w_n}$	$v_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{a_{ni}}{w_i}$

Nilai eigen maksimum (t) didapat dengan menjumlahkan hasil perkalian jumlah kolom dengan vektor prioritas yang bersesuaian.

$$t = w_1 \times v_1 + w_2 \times v_2 + \dots + (w_n \times v_m) \quad (2.4)$$

Persamaan (2.4) adalah nilai eigen maksimum yang dapat digunakan dalam uji konsistensi matriks tersebut untuk memperoleh rasio konsistensi yang menyatakan kekonsistensian matriks tersebut.

2.5.4 Uji Konsistensi dan Indeks Ratio

Menurut Saaty (1994), metode AHP memakai pandangan dari pembuat keputusan sebagai *input* utamanya. Oleh karena itu, tingkat konsistensinya rendah, terutama karena keterbatasan penilaian pandangan pengambil keputusan dan banyaknya kriteria yang

dibandingkan. Berdasarkan kondisi ini pembuat keputusan dapat menyatakan pandangannya tersebut akan konsisten atau tidak. Tingkat konsistensi ini dapat di hitung dengan persamaan berikut.

$$C_I = \frac{(t-n)}{(n-1)} \quad (2.5)$$

C_I = Consistency Index

t = Nilai eigen maksimum

n = Ordo matriks

Apabila CI bernilai nol, maka matriks perbandingan berpasangan dari kriteria tersebut konsisten. Batas ketidakkonsisten (*inconsistency*) yang telah ditetapkan Saaty ditentukan dengan persamaan Rasio Konsistensi (*Consistency Ratio*), yaitu perbandingan indeks konsistensi dengan nilai *Random Index (RI)* yang diperoleh dari hasil eksperimen Oak Ridge National Laboratory yang kemudian dikembangkan Wharton School dapat dilihat pada Tabel 2.5

Tabel 2.5 Nilai Indeks Random

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
R_I	0	0	0,58	0,90	1,12	1,24	1,32	1,41	1,45	1,49

dengan persamaan Rasio Konsistensi adalah sebagai berikut :

$$C_R = \frac{C_I}{R_I} \quad (2.6)$$

C_R = Rasio Konsistensi (*Consistency Ratio*)

R_I = Indeks Random (*Random Index*)

matriks perbandingan berpasangan dengan nilai $CR \leq 0,1$ maka ketidakkonsistenan dari pengambil keputusan masih dapat diterima dan jika tidak, maka penilaian perlu diulang.

2.6 Pengambilan Keputusan

Menurut Saaty (1994), pengambilan keputusan dilakukan dengan menggabungkan prioritas lokal yang berupa vektor bobot berdasarkan masing-masing kriteria maupun subkriteria menjadi prioritas global. Penggabungan dilakukan dengan melakukan perkalian prioritas local elemen alternatif dengan prioritas local satu tingkat di atasnya, sesuai dengan hierarki yang digunakan. Alternatif dengan nilai tertinggi merupakan prioritas alternatif yang diperoleh dari perhitungan AHP.

2.7 Metode TOPSIS

Menurut Ishizaka dan Memery (2013), metode *Technique for Others Reference by Similarity to Ideal Solution* (TOPSIS) adalah salah satu metode pengambilan keputusan multikriteria yang pertama kali diperkenalkan oleh Yonn dan Hwang, ide dasarnya adalah alternatif yang dipilih memiliki jarak terdekat dengan solusi ideal positif dan memiliki jarak terjauh dari solusi ideal negatif. Metode ini dapat digunakan dalam sistem pengambilan keputusan dalam beberapa model MADM (*Multy Atribute Dicision Making*) dengan efisien. Dalam metode TOPSIS, digunakan pula matriks bujur sangkar yang biasa disebut sebagai matriks keputusan. Adapun di bawah ini adalah sebuah matriks keputusan beserta alternatif dan kriterianya:

$$W = \begin{matrix} & B_1 & B_2 & B_3 & \cdots & B_n \\ \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ A_i \\ \vdots \\ A_m \end{matrix} & \begin{matrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{i1} \\ \vdots \\ x_{m1} \end{matrix} & \begin{matrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{12} \\ \vdots \\ x_{m2} \end{matrix} & \begin{matrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ x_{ij} \\ \vdots \\ \cdots \end{matrix} & \begin{matrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ x_{3n} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{matrix} \end{matrix}$$

dimana:

W = matriks keputusan awal

A = alternatif

B = kriteria

- $i = 1,2,3,\dots,m$
- $j = 1,2,3,\dots,n$
- $m =$ banyaknya alternatif
- $n =$ banyaknya kriteria
- x_{ij} = nilai elemen pada alternatif ke- i dan kriteria ke- j tertentu.

2.7.1 Prosedur TOPSIS

Menurut Menurut Ishizaka dan Memery (2013), metode *Technique for Others Reference by Similarity to Ideal Solution* (TOPSIS) langkah-langkah nya adalah sebagai berikut:

1. Normalisasi matriks keputusan

Untuk membangun matriks keputusan yang ternormalisasi di gunakan persamaan ,yaitu sebagai berikut:

$$r_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sqrt{\sum_i^m x_{ij}^2}} \tag{2.7}$$

dimana:

r_{ij} = hasil dari normalisasi matriks keputusan alternatif ke- i terhadap kriteria ke- j

x_{ij} = nilai elemen pada alternative ke - i dan kriteria ke - j

i = alternatif ($i=1,2,3,\dots,m$)

j = kriteria ($j=1,2,3,\dots,n$)

m = banyaknya alternatif

2. Menentukan pembobotan Matriks Ternormalisasi

Diberikan bobot $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ sehingga di peroleh matriks ternormalisasi yang di definisikan sebagai berikut:

$$y_{ij} = w_j r_{ij} \tag{2.8}$$

sehingga didapat sebuah matriks :

$$w = \begin{matrix} & w_1 r_{11} & w_2 r_{12} & \dots & w_m r_{1n} \\ w = & w_1 r_{21} & w_2 r_{21} & \dots & w_m r_{2n} \\ & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & w_{11} r_{m1} & w_2 r_{m2} & \dots & w_m r_{mn} \end{matrix} \tag{2.9}$$

dimana:

y_{ij} = matriks normalisasi terbobot

$i = 1, 2, 3, \dots, m$

$j = 1, 2, 3, \dots, n$

W_j = vektor bobot.

3. Menentukan solusi ideal positif dan solusi ideal negatif

Solusi ideal positif dinotasikan dengan (A^+) dan solusi ideal negatif dinotasikan (A^-) ,

$$A^+ = \{(\max v_{ij} \mid j \in J)(\min v_{ij} \mid j \in J'), i = 1, 2, 3, \dots, m\} = \{v_1^+, v_2^+, \dots, v_m^+\} \quad (2.10)$$

$$A^- = \{(\max v_{ij} \mid j \in J)(\min v_{ij} \mid j \in J'), i = 1, 2, 3, \dots, m\} = \{v_1^-, v_2^-, \dots, v_m^-\} \quad (2.11)$$

di mana,

v_{ij} = elemen matriks V baris ke- i dan kolom ke- j ,

$J = \{j = 1, 2, 3, \dots, n \text{ dan } j \text{ berhubungan dengan } \textit{benefit criteria}\}$,

$J' = \{j = 1, 2, 3, \dots, n \text{ dan } j \text{ berhubungan dengan } \textit{cost criteria}\}$.

1. Menghitung *separation measure*.

Merupakan pengukuran jarak nilai setiap alternatif dengan solusi ideal positif dan jarak nilai setiap alternatif dengan solusi ideal negatif. Jarak antara nilai alternatif dan solusi ideal positif dapat di rumuskan sebagai berikut:

$$S_i^+ = \sqrt{\sum_{j=1}^n (v_j^+ - v_{ij})^2} \quad (2.12)$$

dengan

$i = 1, 2, 3, \dots, m$

dimana:

S_i^+ = jarak alternatif ke- i dengan solusi ideal positif.

Jarak antara nilai alternatif dengan solusi ideal negatif dapat dirumuskan sebagai berikut :

$$S_i^- = \frac{\sum_{j=1}^n (v_j^- - v_{ij})^2}{n} \quad (2.13)$$

dengan

$$i = 1, 2, 3, \dots, n$$

dimana:

S_i^- = jarak alternatif ke- i dengan solusi ideal negative

2. Menghitung kedekatan relatif terhadap solusi ideal
Kedekatan relatif A^+ dengan A^- adalah sebagai berikut :

$$A_i = \frac{S_i^-}{S_i^- + S_i^+} \quad (2.14)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, m ; 0 < A_i < 1$$

3. Mengurutkan nilai preferensi atau ranking masing masing alternatif. Nilai preferensi atau ranking di dapatkan berdasarkan nilai A_i . Nilai yang terbesar merupakan keputusan yang terbaik.

2.8 Rumus Slovin

Menurut Sugiyono (2013), Slovin adalah salah satu metode yang di gunakan untuk menentukan jumlah sampel dalam suatu populasi. Secara matematis rumus Slovin dapat ditulliskan sebagai berikut:

$$n = \frac{N}{1 + Ne^2} \quad (2.15)$$

dengan:

N = Jumlah Populasi

n = Jumlah Sampel

e = batas toleransi kesalahan (*error*)