BAB II
DASAR TEORI

2.1 Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang memuat satu atau lebih turunan dari fungsi yang tidak diketahui. Persamaan diferensial dibagi menjadi dua berdasarkan banyaknya variabel bebas, yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial. Persamaan diferensial biasa adalah persamaan yang hanya memuat satu variabel bebas sedangkan persamaan diferensial parsial adalah persamaan yang memuat lebih dari satu variabel bebas.

Orde persamaan diferensial ditentukan oleh orde tertinggi yang mucul dalam suatu persamaan. Secara umum, persamaan

$$F\left[t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n)}(t)\right] = 0,$$

adalah persamaan diferensial biasa orde n dengan t adalah variabel bebas, $x(t)$ adalah variabel tak bebas. Persamaan diferensial biasa orde n disebut linear apabila F merupakan fungsi linear dari variabel $x, x', \dots, x^{(n)}$. Bentuk umum persamaan diferensial biasa linear adalah

$$a_0(t)x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)x = g(t), \qquad (2.1)$$

dengan $a_0 \neq 0$, t adalah variabel bebas, dan x variabel tak bebas. Jika $g(t) = 0$ maka persamaan (2.1) disebut persamaan homogen dan jika $g(t) \neq 0$ maka persamaan (2.1) disebut persamaan non homogen. Persamaan diferensial biasa dikatakan nonlinear apabila variabel tak bebas atau turunannya berderajat lebih dari satu atau memuat perkalian antara variabel dengan turunannya (Boyce dan DiPrima, 2013).

2.2 Sistem Dinamik

Sistem dinamik merupakan sistem yang selalu berubah dan dapat diketahui kondisinya di masa yang akan datang jika diketahui kondisinya saat ini atau di masa lalu. Sistem dinamik dibagi menjadi dua yaitu, sistem dinamik diskret dan sistem dinamik kontinu.

Sistem dinamik diskret memiliki bentuk umum yaitu

$$\vec{x}_{t+1} = f(\vec{x}_t),\ t \in \mathbb{Z} \text{ atau } \mathbb{N}, \vec{x} \in \mathbb{R}^n$$

dan sistem dinamik kontinu memiliki bentuk umum yaitu

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = f(\vec{x}, t), \text{ dengan } \vec{x} \in \mathbb{R}^n$$

(Alligood dkk., 2000).

2.2.1 Sistem otonomus

Sistem otonomus merupakan sistem persamaan diferensial.

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, x_3, x_4),\\
\frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, x_3, x_4),\\
\frac{dx_3}{dt} &= f_3(x_1, x_2, x_3, x_4),\\
\frac{dx_4}{dt} &= f_4(x_1, x_2, x_3, x_4).
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Persamaan (2.2) merupakan sistem otonomus dengan empat variabel tak bebas. Fungsi $\vec{f}$ adalah fungsi kontinu dan tidak bergantung pada variabel bebas t secara eksplisit, melainkan bergantung pada variabel tak bebas $\vec{x}$

(Boyce dan DiPrima, 2013).

2.2.2 Titik kesetimbangan

Sistem otonomus (2.2) dapat ditulis dalam bentuk

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}).$$

Titik $\vec{x}$ yang memenuhi $\vec{f}(\vec{x}) = 0$ disebut titik kesetimbangan

(Nagle dan Saff, 2000).

2.2.3 Kestabilan titik kesetimbangan

Misalkan $\vec{x}^*$ merupakan titik kesetimbangan pada sistem (2.2). Titik kesetimbangan $\vec{x}^*$ dikatakan

a. **Stabil** jika untuk setiap $\epsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap solusi sistem $\vec{x}(t)$ yang pada $t = 0$ memenuhi

$$\|\vec{x}(0) - \vec{x}^*\| < \delta,$$

ada, untuk setiap $t > 0$ dan memenuhi

$$\|\vec{x}(t) - \vec{x}^*\| < \epsilon$$

untuk setiap $t \geq 0$.

b. **Tidak stabil** jika titik tersebut tidak memenuhi kriteria (a).

c. **Stabil asimtotik** jika $\vec{x}^*$ stabil dan jika terdapat $\delta_0 > 0$ sedemikian sehingga jika solusi $\vec{x}(t)$ memenuhi

$$\|\vec{x}(0) - \vec{x}^*\| < \delta_0$$

maka

$$\lim_{t \to \infty} \vec{x}(t) = \vec{x}^*$$

(Boyce dan DiPrima, 2013).

2.3 Sistem Otonomus Linear

Perhatikan sistem otonomus linear dengan empat variabel tak bebas berikut

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4,\\
\frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4,\\
\frac{dx_3}{dt} &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4,\\
\frac{dx_4}{dt} &= a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Bentuk vektor dari sistem (2.3) adalah

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x},$$

dengan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \text{ dan } \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

Penentuan tipe kestabilan titik kesetimbangan, bergantung pada nilai eigen atau akar persamaan karakteristik sistem. Persamaan karakteristik sistem (2.3) adalah $|A - \lambda I| = 0$

(Boyce dan DiPrima, 2013).

Teorema 2.1

Misalkan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ adalah nilai eigen matriks koefisien A sistem otonomus linear (2.3) dengan $|A| \neq 0$. Titik kesetimbangan $\vec{x}^*$ bersifat

1. **stabil asimtotik** jika bagian riil nilai eigen negatif,
2. **stabil** tetapi buka asimtotik jika semua nilai eigen memiliki bagian riil tak positif,
3. **tidak stabil** jika terdapat minimal satu nilai eigen memiliki bagian riil yang positif.

(Finizio dan Ladas, 1982).

2.4 Sistem Otonomus Nonlinear

Diberikan sistem otonomus nonlinear dengan empat variabel tak bebas berikut

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, x_3, x_4), \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, x_3, x_4), \\ \frac{dx_3}{dt} &= f_3(x_1, x_2, x_3, x_4), \\ \frac{dx_4}{dt} &= f_4(x_1, x_2, x_3, x_4), \end{aligned} \tag{2.4}$$

dengan f_1, f_2, f_3, f_4 adalah fungsi nonlinear yang mempunyai turunan parsial yang kontinu di titik kesetimbangan $\vec{x}^*$. Sistem linear hampiran sistem (2.4) diperoleh dari ekspansi deret Taylor di sekitar titik $\vec{x}^*$ sehingga fungsi $\vec{f}(\vec{x})$ dapat ditulis sebagai berikut

$$
\begin{aligned}
f_1(\vec{x}) = f_1(\vec{x}^*) &+ \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_1}(x_1 - x_1{}^*) + \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_2}(x_2 - x_2{}^*) \\
&+ \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_3}(x_3 - x_3{}^*) + \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_4}(x_4 - x_4{}^*) + \eta_1(\vec{x}), \\
f_2(\vec{x}) = f_2(\vec{x}^*) &+ \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_1}(x_1 - x_1{}^*) + \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_2}(x_2 - x_2{}^*) \\
&+ \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_3}(x_3 - x_3{}^*) + \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_4}(x_4 - x_4{}^*) + \eta_2(\vec{x}), \\
f_3(\vec{x}) = f_3(\vec{x}^*) &+ \frac{\partial f_3(\vec{x}^*)}{\partial x_1}(x_1 - x_1{}^*) + \frac{\partial f_3(\vec{x}^*)}{\partial x_2}(x_2 - x_2{}^*) \\
&+ \frac{\partial f_3(\vec{x}^*)}{\partial x_3}(x_3 - x_3{}^*) + \frac{\partial f_3(\vec{x}^*)}{\partial x_4}(x_4 - x_4{}^*) + \eta_3(\vec{x}), \\
f_4(\vec{x}) = f_4(\vec{x}^*) &+ \frac{\partial f_4(\vec{x}^*)}{\partial x_1}(x_1 - x_1{}^*) + \frac{\partial f_4(\vec{x}^*)}{\partial x_2}(x_2 - x_2{}^*) \\
&+ \frac{\partial f_4(\vec{x}^*)}{\partial x_3}(x_3 - x_3{}^*) + \frac{\partial f_4(\vec{x}^*)}{\partial x_4}(x_4 - x_4{}^*) + \eta_4(\vec{x}),
\end{aligned}
$$

$\eta_i(\vec{x})$, $\forall i = 1, \dots, 4$ adalah suku sisa. Hampiran orde satu terhadap f_1, f_2, f_3, f_4 menghasilkan suku sisa yang memenuhi sifat

$$\frac{\eta_i(\vec{x})}{\|\vec{w}\|} \to 0$$

untuk $(\vec{x}) \to (\vec{x}^*)$ dan $\vec{w} = (x_i - x_i{}^*)$, $\forall i = 1, \dots, 4$.
Dengan menerapkan $\frac{dx_1}{dt} = \frac{d(x_1 - x_1{}^*)}{dt}, \cdots, \frac{dx_4}{dt} = \frac{d(x_4 - x_4{}^*)}{dt}$ terhadap sistem (2.4), diperoleh matriks

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 - {x_1}^* \\ x_2 - {x_2}^* \\ x_3 - {x_3}^* \\ x_4 - {x_4}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\vec{x}^*) \\ f_2(\vec{x}^*) \\ f_3(\vec{x}^*) \\ f_4(\vec{x}^*) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_3(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3(\vec{x}^*)}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3(\vec{x}^*)}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_4(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_4(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_4(\vec{x}^*)}{\partial x_3} & \frac{\partial f_4(\vec{x}^*)}{\partial x_4} \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} x_1 - {x_1}^* \\ x_2 - {x_2}^* \\ x_3 - {x_3}^* \\ x_4 - {x_4}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1(\vec{x}) \\ \eta_2(\vec{x}) \\ \eta_3(\vec{x}) \\ \eta_4(\vec{x}) \end{bmatrix}. \qquad (2.5)$$

Misalkan $w_1 = (x_1 - {x_1}^*)$, $w_2 = (x_2 - {x_2}^*)$, $w_3 = (x_3 - {x_3}^*)$, $w_4 = (x_4 - {x_4}^*)$, sehingga $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3, w_4)^T$ dan mengingat bahwa $f_1(\vec{x}^*) = f_2(\vec{x}^*) = f_3(\vec{x}^*) = f_4(\vec{x}^*) = 0$, persamaan (2.5) dapat ditulis sebagai

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_3(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3(\vec{x}^*)}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3(\vec{x}^*)}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_4(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_4(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_4(\vec{x}^*)}{\partial x_3} & \frac{\partial f_4(\vec{x}^*)}{\partial x_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1(\vec{x}) \\ \eta_2(\vec{x}) \\ \eta_3(\vec{x}) \\ \eta_4(\vec{x}) \end{bmatrix}$$

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = J\vec{w} + \vec{\eta} \qquad (2.6)$$

dengan J adalah matriks Jacobi.

Nilai $\vec{w}$ sangat kecil untuk $(\vec{x})$ yang berada cukup dekat dengan $(\vec{x}^*)$, sehingga $\|\vec{\eta}\| \ll \|\vec{w}\|$. Oleh karena itu, $\vec{\eta}$ dapat diabaikan dan sistem nonlinear (2.4) dapat dihampiri oleh sistem linear

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = J\vec{w} \qquad (2.7)$$

Jika $\vec{x} = \vec{x}^*$, maka $\vec{w} = \vec{0}$, sehingga sistem linear (2.7) memiliki titik kesetimbangan $\vec{w}^* = \vec{0}$

(Boyce dan DiPrima, 2013).

Teorema 2.2

Titik kesetimbangan sistem otonomus nonlinear (2.5) bersifat

1. **stabil asimtotik**, jika titik kesetimbangan sistem hasil linearisasi (2.7) stabil asimtotik,
2. **tak stabil**, jika titik kesetimbangan sistem hasil linearisasi (2.7) tak stabil

(Finizio dan Ladas, 1982).

2.5 Pertaksamaan Gronwall

Lemma 2.1

Misalkan $m \in C^1[R_+, R_+], v, h \in C[R_+, R_+]$

$$m'(t) \leq v(t)m(t) + h(t), \;\; m(t_0) = c \geq 0, t \geq t_0.$$

maka

$$m(t) \leq c\exp\left[\int_{t_0}^{t} v(s)ds\right] + \int_{t_0}^{t} h(s)\exp\left[\int_{s}^{t} v(\sigma)d\sigma\right]ds, t \geq 0$$

(Lakshmikantham dkk., 1989).

2.6 Angka Reproduksi Dasar

Bilangan reproduksi dasar ($\mathcal{R}_0$) didefinisikan sebagai jumlah rata-rata kasus sekunder yang disebabkan oleh satu individu terinfeksi selama masa terinfeksinya dalam keseluruhan populasi rentan. Jika $\mathcal{R}_0 < 1$ maka satu individu yang terinfeksi tidak akan menginfeksi lebih dari satu individu rentan sehingga individu yang terinfeksi tidak ada dalam populasi. Sebaliknya, jika $\mathcal{R}_0 > 1$ maka individu yang terinfeksi akan menginfeksi lebih dari satu individu yang rentan sehingga individu yang terinfeksi akan mempengaruhi populasi lain

(Drieschee dan Watmough, 2002).

2.7 Matriks Generasi Selanjutnya

Metode matriks generasi selanjutnya adalah suatu metode yang digunakan untuk menentukan angka reproduksi dasar $(\mathcal{R}_0)$. Model kompartemen penyebaran penyakit dibagi menjadi dua kelompok, yaitu kompartemen terinfeksi dan kompartemen tidak terinfeksi. Suatu kompartemen disebut kompartemen terinfeksi jika terdapat individu-individu terinfeksi. Misalkan terdapat $1,\cdots,m,m+1,\cdots,n$ kompartemen dengan kompartemen pertama sampai dengan m terdiri dari individu terinfeksi dan kompartemen $m+1$ sampai dengan n terdiri dari individu tidak terinfeksi. Model kompartemen yang terinfeksi dapat ditulis dalam bentuk

$$x_i' = \mathcal{F}_i - \mathcal{V}_i, \qquad\qquad i = 1,2,\cdots,m$$

dengan,

x_i = Jumlah individu pada setiap kompartemen i.

$\mathcal{F}_i$ = Komponen pembentuk matriks F dengan komponen $\mathcal{F}_i$ merupakan infeksi baru yang masuk pada kompartemen ke i.Infeksi baru hanya dapat diperoleh dari individu rentan dan F_i tidak boleh negatif.

$\mathcal{V}_i$ = Komponen pembentuk matriks V, dengan komponen V_i merupakan transfer keluar atau masuk dari kompartemen satu ke yang lain. Jika transfer keluar, maka V_i bernilai positif dan jika transfer masuk maka V_i bernilai negatif.

Didefinisikan DF dan DV adalah matriks $m \times m$ sebagai berikut

$$DF = \left[\frac{\partial F_{i(\varepsilon_0)}}{\partial x_j}\right] \quad DV = \left[\frac{\partial V_i(\varepsilon_0)}{\partial x_j}\right], \qquad i,j = 1,\cdots,m.$$

ε_0 merupakan titik keseimbangan bebas penyakit. Matriks generasi selanjutnya didefinisikan sebagai berikut

$$K = (DF)(DV)^{-1}$$

dan angka reproduksi dasar diperoleh dari perhitungan matriks generasi selanjutnya dapat ditulis sebagai berikut

$$\mathcal{R}_0 = \rho(K),$$

dengan $\rho(K)$ adalah nilai eigen matriks K yang merupakan nilai eigen terbesar

(Brauer dan Chaves, 2012).

Contoh:

Diberikan model matematika penyebaran penyakit sebagai berikut

$$\begin{aligned} S' &= -\beta S(I + \varepsilon E), \\ E' &= \beta S(I + \varepsilon E) - kE, \\ I' &= kE - \alpha I, \\ R' &= \alpha I. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Dengan $S(t), E(t), I(t), R(t)$ masing-masing menyatakan jumlah individu rentan, individu terpapar, terinfeksi, dan sembuh. Titik kesetimbangan bebas penyakit dari persamaan (2.8) adalah $E^0 = (1,0,0)$. Matriks generasi selanjutnya diperoleh dari kompartemen terinfeksi yaitu, kompartemen E dan kompartemen I. Berdasarkan matriks F dan V dapat dibentuk menjadi matriks Jacobi di titik kesetimbangan $E^0 = (1,0,0)$, yaitu

$$DF = \begin{bmatrix} \varepsilon\beta S & \beta S \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ dengan } F = \begin{bmatrix} \beta S(I + \varepsilon E) \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$DV = \begin{bmatrix} k & 0 \\ -k & \alpha \end{bmatrix}, \text{ dengan } V = \begin{bmatrix} kE \\ -kE + \alpha I \end{bmatrix}.$$

Invers dari matriks DVadalah

$$(DV)^{-1} = \frac{1}{k\alpha}\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ k & k \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{k} & 0 \\ \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\alpha} \end{bmatrix}.$$

Matriks generasi selanjutnya didefinisikan sebagai berikut

$$
\begin{aligned}
K &= (DF)(DV)^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} \varepsilon\beta & \beta \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{k} & 0 \\ \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\alpha} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon\beta}{k} + \frac{\beta}{\alpha} & \frac{\beta}{\alpha} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Nilai eigen dari K adalah

$$
\begin{gathered}
|K - \lambda I| = 0 \\
\begin{vmatrix} \frac{\varepsilon\beta}{k} + \frac{\beta}{\alpha} - \lambda & \frac{\beta}{\alpha} \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \\
-\lambda\left(\frac{\varepsilon\beta}{k} + \frac{\beta}{\alpha} - \lambda\right) = 0,
\end{gathered}
$$

sehingga diperoleh

$$\lambda_1 = 0 \text{ atau } \lambda_2 = \frac{\varepsilon\beta}{k} + \frac{\beta}{\alpha}.$$

Angka reproduksi dasar ($\mathcal{R}_0$) diperoleh dari nilai eigen terbesar dari matriks generasi selanjutnya (K), yaitu $\mathcal{R}_0 = \rho\{K\}$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}_0 &= \rho\{K\} \\
\mathcal{R}_0 &= \rho\left\{0, \frac{\varepsilon\beta}{k} + \frac{\beta}{\alpha}\right\} \\
\mathcal{R}_0 &= max\left\{0, \frac{\varepsilon\beta}{k} + \frac{\beta}{\alpha}\right\} \\
\mathcal{R}_0 &= \frac{\varepsilon\beta}{k} + \frac{\beta}{\alpha}
\end{aligned}
$$

(Braurer dan Chaves, 2012).

2.8 Analisis Kestabilan Global

Fungsi Lyapunov digunakan dalam menentukan kestabilan global sebuah titik kesetimbangan $\vec{x}^*$. Misalkan $\vec{x}^*$ adalah titik kesetimbangan dari fungsi $\frac{d\vec{x}}{dt} = f(\vec{x})$. Jika terdapat suatu fungsi Lyapunov $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ yang memenuhi kondisi $L(\vec{x}^*) = 0$, $L(\vec{x}) > 0$ dan $L'(\vec{x}) \leq 0$ untuk setiap $\vec{x} \neq \vec{x}^*$ maka L disebut Lyapunov lemah dan titik kesetimbangan $\vec{x}^*$ stabil global dan jika terdapat $L'(\vec{x}) < 0$ untuk setiap $\vec{x} \neq \vec{x}^*$ maka L disebut Lyapunov kuat dan titik kesetimbangan $\vec{x}^*$ stabil asimtotik global

(Alligood dkk., 2000).

2.9 Pertaksamaan Aritmatika dan Geometri

Misalkan $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$. Rata-rata aritmatika yang diberikan adalah

$$AM(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

Jika setiap bilangan adalah bernilai positif, maka rata-rata geometri yang diberikan adalah

$$GM(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 . a_2 . \cdots . a_n}$$

(Peter, 2014).

Teorema 2.3 (Pertaksamaan Rata-rata Aritmatika dan Geometri)
Misalkan $a_1 a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R}^+$, dengan $n \geq 2$ maka

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 . a_2 . \cdots . a_n}. \qquad (2.9)$$

Pertaksaamaan (2.9) akan menjadi persamaan jika dan hanya jika $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

(Peter, 2014).

2.10 Model Epidemi HIV/AIDS dengan Pengobatan

Model epidemi HIV/AIDS dengan pengobatan dibagi menjadi empat subpopulasi yaitu, subpopulasi individu rentan *(S)*, subpopulasi individu terinfeksi tanpa gejala (asimtomatik) *(I)*, subpopulasi dengan gejala (simtomatik) *(J)*, dan subpopulasi individu yang sudah terkena AIDS *(A)*. Berikut ini merupakan model epidemi HIV/AIDS dengan pengobatan

$$\frac{dS}{dt} = \mu K - c\beta(I + bJ)S - \mu S$$
$$\frac{dI}{dt} = c\beta(I + bJ)S - (\mu + k_1)I + \alpha J$$
$$\frac{dJ}{dt} = k_1 I - (\mu + k_2 + \alpha)J$$
$$\frac{dA}{dt} = k_2 J - (\mu + d)A \qquad (2.10)$$

Parameter - parameter yang digunakan yaitu, μK menyatakan laju kelahiran dari individu rentan dan dengan K merupakan konstanta, μ merupakan laju kematian alami, $c\beta$ dan β menyatakan peluang penyebaran penyakit setiap berinteraksi dengan fase simtomatik (J) dan peluang penyebaran penyakit setiap berinteraksi dengan fase asimtomatik (I), k_1 dan k_2 merupakan laju perpindahan dari fase asimtomatik (I) ke fase simtomatik (J) dan laju perpindahan dari fase simtomatik (J) ke fase AIDS (A) , α merupakan laju pengobatan, d menyatakan laju kematian akibat penyakit AIDS, dan c menyatakan nilai rata – rata interaksi individual per unit dalam waktu

(Cai dkk., 2009).

2.11 Tingkat Kejadian

Dalam model epidemi, tingkat kejadian infeksi mempunyai peran yang sangat penting. Tingkat kejadian infeksi dalam model epidemi merupakan laju individu rentan menjadi individu terinfeksi. Pada model epidemi persamaan sistem (2.9) menggunakan tingkat kejadian bilinear.

Tingkat kejadian infeksi pada model epidemi dinotasikan oleh suatu fungsi $g(I)$ dengan $g(I)$ merupakan fungsi yang bergantung pada subpopulasi terinfeksi (I). Tingkat kejadian bilinear $g(I) = kSI$ dan tingkat kejadian standar $g(I) = \frac{kSI}{N}$ merupakan tingkat kejadian infeksi yang sering digunakan dalam model epidemi. Cappaso dan Serio (1978) menggunakan tingkat kejadian infeksi tersaturasi, yaitu $g(I) = \frac{kI}{1+\alpha I}$ dengan kI mengukur kekuatan infeksi dan $\frac{1}{1+\alpha I}$ menyatakan pengaruh penghambatan yang ditimbulkan oleh perubahan perilaku individu rentan ketika jumlah individu terinfeksi meningkat atau oleh pengaruh kepadatan individu terinfeksi. Model epidemi dengan tingkat kejadian bilinear, standar dan tersaturasi disebut dengan tingkat kejadian infeksi monoton karena nilai $g(I)$ selalu monoton naik.

Tingkat kejadian nonmonoton yaitu, $g(I) = \frac{kI}{1+\alpha I^2}$ dengan kI menunjukkan kekuatan infeksi penyakit dan $\frac{1}{1+\alpha I^2}$ menyatakan pengaruh psikologis perubahan perilaku individu rentan terhadap penyebaran penyakit pada saat jumlah individu terinfeksi meningkat. Pada skripsi ini digunakan bentuk tingkat kejadian secara umum yang dinotasikan oleh suatu fungsi $f(N)$ dengan N adalah total populasi

(Xiao dan Ruan, 2007).