



**ANALISIS DINAMIK MODEL EPIDEMI DENGAN
PENGARUH RACUN**

SKRIPSI

oleh:

SIFA IZZA AFKARINA
165090401111015



JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG

2020



ANALISIS DINAMIK MODEL EPIDEMI DENGAN PENGARUH RACUN

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar

Sarjana Matematika

oleh:

SIFA IZZA AFKARINA

165090401111015



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2020**

**LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI****Analisis Dinamik Model Epidemik dengan Pengaruh Racun**

oleh:

Sifa Izza Afkarina**1650904011111015**Setelah dipertahankan di depan majelis penguji pada tanggal
8 Mei 2020dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Matematika**Pembimbing****Dra. Trisilowati, M.Sc., Ph.D.****NIP. 196309261989032001**Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya**Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si., M.Si., Ph.D.****NIP. 197509082000031003**



LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

nama : Sifa Izza Afkarina
NIM : 165090401111015
jurusan : Matematika
penulis Skripsi berjudul : Analisis Dinamik Model Epidemii dengan Pengaruh Racun

dengan ini menyatakan bahwa:

1. Skripsi yang saya buat adalah hasil dari pemikiran saya, bukan hasil menjiplak dari tulisan orang lain. Rujukan-rujukan yang tercantum pada Daftar Pustaka hanya digunakan sebagai acuan.
2. Apabila di kemudian hari skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala resiko akibat dari keadaan tersebut.

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

yang menyatakan,

Sifa Izza Afkarina
NIM. 165090401111015



ANALISIS DINAMIK MODEL EPIDEMI DENGAN PENGARUH RACUN

ABSTRAK

Pada skripsi ini dibahas konstruksi dan analisis dinamik model epidemi dengan pengaruh racun. Pada model dilakukan analisis dinamik yang meliputi penentuan titik kesetimbangan, angka reproduksi dasar R_0 , analisis kestabilan lokal titik kesetimbangan, dan analisis terjadinya bifurkasi *forward*. Hasil analisis dinamik menunjukkan bahwa model epidemi dengan pengaruh racun memiliki dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemi. Titik kesetimbangan bebas penyakit eksis tanpa syarat, sedangkan titik kesetimbangan endemi eksis jika $R_0 > 1$. Jika $R_0 < 1$ maka titik kesetimbangan bebas penyakit bersifat stabil asimtotik lokal. Titik kesetimbangan endemi bersifat stabil asimtotik lokal jika memenuhi kriteria Routh-Hurwitz. Bifurkasi *forward* terjadi di sekitar titik kesetimbangan bebas penyakit. Simulasi numerik dilakukan untuk mendukung hasil analisis dinamik yang diperoleh.

Kata Kunci: model epidemi menular, racun lingkungan, titik kesetimbangan, angka reproduksi dasar, analisis kestabilan lokal, bifurkasi *forward*.



DYNAMICAL ANALYSIS OF AN EPIDEMIC MODEL WITH IMPACT OF TOXINS

ABSTRACT

This final project discusses the construction and dynamical analysis of an epidemic model with impact of toxins. In the model, dynamical analysis is conducted to determine the equilibrium points, basic reproduction number R_0 , local stability analysis of equilibrium, and analysis of forward bifurcation. The dynamical analysis result shows that the epidemic model with impact of toxins has two equilibrium points namely disease-free equilibrium point and endemic equilibrium point. The disease-free equilibrium point exists unconditionally while the endemic equilibrium exists when $R_0 > 1$. If $R_0 < 1$ then the disease-free equilibrium point is local asymptotically stable. The endemic equilibrium points is locally asymptotically stable if it satisfies Routh-Hurwitz criteria. Forward bifurcation occurs around the disease-free equilibrium. Numerical simulation supports the analytical result.

Keywords: epidemic model, environmental toxin, equilibrium point, basic reproduction number, local stability, forward bifurcation.



KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa atas segala limpahan berkat dan kasih karunia-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul Analisis Dinamik Model Epidemologi dengan Pengaruh Racun.

Skripsi ini tidak dapat diselesaikan dengan baik tanpa bantuan, bimbingan, dan motivasi dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada

1. Dra. Trisilowati, M.Sc., Ph.D selaku dosen pembimbing skripsi atas segala bimbingan, motivasi, dan saran yang diberikan kepada penulis untuk menyelesaikan skripsi ini dengan baik dan benar.
2. Drs. Marsudi, MS dan Prof. Dr. Agus Suryanto, M.Sc selaku dosen penguji atas segala kritik dan saran yang diberikan untuk perbaikan skripsi ini.
3. Dra. Trisilowati, M.Sc., Ph.D selaku dosen pembimbing akademik.
4. Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si., M.Si., Ph.D selaku Ketua Jurusan Matematika, Dr.Dra. Wuryansari Muharini Kusumawinahyu, M.Si. selaku Ketua Program Studi Matematika, Bapak dan Ibu Dosen Jurusan Matematika atas ilmu yang telah diberikan kepada penulis.
5. Ayah, ibu, kakak, dan seluruh keluarga tercinta yang selalu mendoakan dan memberi dukungan dalam menyelesaikan skripsi ini.
6. Siti Muzayana, Riska Windya, Maghfira Rahmadiati, Lailia Anugrah Kusuma, Zein Rizky, Suyanti atas kebersamaan, dukungan, dan kerjasama selama proses perkuliahan.
7. Nabila Nur Afifah, Yuliana Putri, Afia Aqliyah, Galuh Adelia, Zaky Fuad, Kholil Mahmudi, dan Yuda ikhwanuddin atas motivasi dan kebersamaan ini.
8. Keluarga besar HIMMARIS yang selalu mendoakan, mensupport dan memberi dukungan dalam menyelesaikan skripsi ini juga terimakasih atas kebersamaannya selama berada di Malang.



9. Keluarga Besar Matematika 2016 atas kebersamaan dan dukungan selama menjalani proses perkuliahan. Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih banyak kekurangan. Oleh karena itu, kritik dan saran yang membangun sangat diharapkan. Kritik dan saran dapat dikirim melalui email syifaizza23@gmail.com, untuk perbaikan dimasa yang akan datang. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak yang membutuhkan.

Malang, 2020

Penulis



DAFTAR ISI

SKRIPSI	i
LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI	iii
LEMBAR PERNYATAAN	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR GAMBAR	xv
DAFTAR TABEL	xvii
DAFTAR LAMPIRAN	xix
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	2
1.3 Tujuan.....	2
BAB II DASAR TEORI	3
2.1 Persamaan Diferensial.....	3
2.2 Sistem Dinamik.....	4
2.2.1 Sistem <i>Autonomous</i>	4
2.2.2 Sistem <i>Autonomous</i> Linear.....	5
2.2.3 Sistem <i>Autonomous</i> Nonlinear.....	6
2.2.4 Kriteria Routh-Hurwitz.....	7
2.3 Angka Reproduksi Dasar.....	8
2.4 Matriks Generasi Selanjutnya.....	9
2.5 Bifurkasi.....	10
2.5.1 Bifurkasi Transkritikal.....	10
2.5.2 Bifurkasi <i>Forward</i> dan <i>Backward</i>	11
2.6 Teori <i>Center Manifold</i>	11
BAB III PEMBAHASAN	15
3.1 Konstruksi Model.....	15
3.2 Titik Kesetimbangan.....	19
3.3 Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan.....	23
3.4 Bifurkasi <i>Forward</i>	28
3.5 Simulasi Numerik.....	33
PENUTUP	39
4.1 Kesimpulan.....	39
4.2 Saran.....	40
DAFTAR PUSTAKA	41



DAFTAR GAMBAR

Halaman

Gambar 3.1 Diagram kompartemen model epidemi dengan pengaruh racun15

Gambar 3.2 Solusi sistem (3.4) untuk $R_0 < 1$ pada ruang dua dimensi.....34

Gambar 3.3 Potret fase solusi pada ruang (S, I, R) untuk $R_0 < 1$...35

Gambar 3.4 Solusi sistem (3.4) untuk $R_0 > 1$ pada ruang dua dimensi36

Gambar 3.5 Potret fase solusi pada ruang (S, I, R) untuk $R_0 > 1$...37



DAFTAR TABEL

Halaman

Tabel 3.1 Titik kesetimbangan, syarat eksistensi dan kestabilan....28
 Tabel 3.2 Nilai parameter.....33



DAFTAR LAMPIRAN

Halaman

Lampiran 1 Analisis kestabilan lokal titik kesetimbangan endemi...37

Lampiran 2 Perhitungan vektor eigen kanan \vec{W} dan vektor eigen kiri \vec{V}41



BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Polusi lingkungan adalah salah satu masalah paling serius yang dihadapi manusia. Suatu lingkungan hidup dikatakan tercemar apabila telah terjadi perubahan-perubahan dalam tatanan lingkungan sehingga tidak sama lagi dengan bentuk asalnya, sebagai akibat dari masuk dan atau dimasukkannya suatu zat atau benda asing ke dalamnya (Palar,1994). Polusi lingkungan didefinisikan sebagai kontaminasi komponen fisik dan biologis dari sistem bumi atau atmosfer sehingga dapat memengaruhi tatanan lingkungan.

Toksik adalah suatu bahan yang dapat memberikan efek yang merugikan, sedangkan racun merupakan istilah untuk toksik yang dalam jumlah sedikit (dosis rendah) dapat menyebabkan kematian atau penyakit. Zat toksik dapat berada dalam bentuk fisik (seperti radiasi), kimiawi (seperti arsen, sianida) maupun biologis (bisa ular). Juga terdapat dalam beragam wujud yaitu cair, padat dan gas (Candra, 2008). Zat toksik tersebut dapat dengan mudah masuk ke dalam tubuh dengan berbagai cara dan membahayakan bagi manusia dan makhluk lainnya. *International Agency for Research on Cancer* (IARC) yang merupakan bagian dari *World Health Organization* (WHO) menyatakan bahwa polusi udara dapat menyebabkan kanker paru-paru dan meningkatkan risiko kandung kemih.

Perkembangan ilmu pengetahuan di bidang matematika memiliki peran penting dalam pencegahan dan pengendalian penyebaran penyakit. Proses penyebaran penyakit dapat direpresentasikan ke dalam bentuk model matematika, salah satunya yaitu model epidemi dengan pengaruh racun. Banyak peneliti yang telah mengkaji dampak racun lingkungan pada berbagai spesies. Wang dan Ma (2004) mempelajari model epidemi *SIS* (*Susceptible, Infective, Susceptible*) dalam pencemaran lingkungan. Selain itu, Liu, dkk (2012) mengonstruksi model epidemi *SI* (*Susceptible, Infective*) dengan adanya pengaruh pencemaran lingkungan. Chauchan, dkk. (2015) mempelajari tentang pengaruh polusi pada model epidemi *SIR* (*Susceptible, Infective, Recover*) dengan adanya pengobatan. Huang, dkk. (2015) mengkaji pengaruh racun lingkungan pada model



predator-prey. Selanjutnya, Saha dan Samanta (2019) membahas tentang model epidemi dengan adanya pengaruh racun.

Skripsi ini, mengkaji kembali artikel Saha dan Samanta (2019) yang membahas tentang model epidemi dengan pengaruh racun. Analisis dinamik yang dilakukan pada model meliputi titik kesetimbangan, dan jenis kestabilannya. Eksistensi dan kestabilan lokal titik kesetimbangan ditentukan oleh angka reproduksi dasar dengan menggunakan metode matriks generasi selanjutnya. Menyelidiki adanya bifurkasi *forward*. Setelah itu, disimulasikan secara numerik untuk mengetahui perilaku model dengan Runge-Kutta Orde 4 dan menggunakan *software* MATLAB.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang, pokok permasalahan yang dikaji adalah sebagai berikut.

1. Bagaimana konstruksi model epidemi dengan pengaruh racun?
2. Bagaimana eksistensi titik kesetimbangan dan angka reproduksi dasar serta kestabilan titik kesetimbangan model?
3. Apakah terjadi bifurkasi *forward* pada model?
4. Bagaimana simulasi numerik pada model?

1.3 Tujuan

Tujuan penulisan skripsi adalah sebagai berikut.

1. Mengonstruksi model epidemi dengan pengaruh racun.
2. Menentukan titik kesetimbangan model dan angka reproduksi dasar serta kestabilan titik kesetimbangan model.
3. Menyelidiki terjadinya bifurkasi *forward* pada model.
4. Menyimulasikan hasil numerik pada model epidemi dengan pengaruh racun.



BAB II

DASAR TEORI

Dalam skripsi ini dibahas analisis dinamik model epidemi dengan pengaruh racun. Oleh karena itu, teori mengenai persamaan diferensial, sistem dinamik, angka reproduksi dasar, matriks generasi selanjutnya, bifurkasi *forward* dan *backward* serta teori *center manifold* diperlukan untuk membantu memahami persoalan dalam penulisan skripsi ini.

2.1 Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat satu atau lebih turunan dari suatu fungsi yang tidak diketahui. Persamaan diferensial biasa adalah persamaan diferensial yang hanya memuat satu variabel bebas. Tingkat dari turunan tertinggi dalam persamaan diferensial disebut orde. Secara umum persamaan

$$F(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n)}(t)) = 0, \quad (2.1)$$

adalah persamaan diferensial biasa orde n dengan variabel bebas t , variabel tak bebas x dan $x^{(n)}$ menyatakan turunan ke n terhadap t . Persamaan diferensial biasa dibedakan menjadi dua, yaitu persamaan diferensial biasa linear dan persamaan diferensial biasa nonlinear. Persamaan diferensial biasa dikatakan linear jika F pada persamaan (2.1) merupakan fungsi linear dari variabel $x, x', \dots, x^{(n)}$. Bentuk umum persamaan diferensial biasa linear orde n dapat dinyatakan

$$a_0(t)x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_n(t)x = g(t),$$

dengan $a_0 \neq 0$, variabel t dan x adalah variabel bebas dan tak bebas. Jika $g(t) = 0$ disebut persamaan diferensial biasa linear homogen, tetapi jika $g(t) \neq 0$ disebut persamaan diferensial biasa linear nonhomogen. Sementara itu, persamaan diferensial biasa dikatakan nonlinear jika memuat turunan atau variabel tak bebas berderajat lebih dari satu atau terdapat perkalian antara variabel tak bebas dengan turunannya.

(Boyce dan DiPrima, 2009)



2.2 Sistem Dinamik

Sistem dinamik adalah sistem yang bersifat dinamis (selalu berubah) dan dapat ditentukan kondisinya di masa yang akan datang jika diketahui kondisi masa sekarang atau masa lampau (Nagle, dkk. 2012).

Sistem dinamik dibedakan menjadi dua, yaitu sistem dinamik diskret dan sistem dinamik kontinu. Sistem dinamik diskret dinyatakan sebagai persamaan beda, yaitu

$$\vec{x}_{t+1} = \vec{f}(\vec{x}_t), t \in \mathbb{Z} \vee t \in \mathbb{N}, \vec{x} \in \mathbb{R}^n,$$

sementara itu sistem dinamik kontinu dinyatakan sebagai persamaan diferensial, yaitu

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(t, \vec{x}(t)), t \in \mathbb{R}, \vec{x} \in \mathbb{R}^n.$$

(Alligood, dkk. 2000)

Sistem dinamik kontinu dibedakan menjadi sistem *autonomous* dan sistem *nonautonomous*. Pada skripsi ini dibahas sistem *autonomous*.

2.2.1 Sistem *Autonomous*

Suatu sistem persamaan diferensial orde satu yang berbentuk

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{aligned} \quad (2.2)$$

dengan fungsi f_i untuk $i = 1, \dots, n$ merupakan fungsi kontinu yang tidak bergantung secara eksplisit terhadap variabel bebas t , disebut dengan sistem *autonomous*.

(Boyce dan DiPrima, 2012)

Definisi 2.2.1 (Titik Kesetimbangan Sistem *Autonomous*)

Titik $\vec{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ disebut titik kritis sistem (2.2) jika memenuhi $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \forall i = 1, 2, \dots, n$. Titik kritis \vec{x}^* merupakan solusi konstan karena $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{0}$. Keadaan yang memenuhi $\frac{dx_1}{dt} = \frac{dx_2}{dt} = \dots = \frac{dx_n}{dt} = 0$ disebut keadaan setimbang dan titik yang memenuhi disebut titik kesetimbangan, sehingga titik kritis \vec{x}^* disebut juga titik kesetimbangan.

(Boyce dan DiPrima, 2012)



Definisi 2.2.2 (Kestabilan Titik Kesetimbangan)

Titik kesetimbangan $\vec{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ sistem (2.2) dikatakan

1. stabil, jika $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap solusi $\vec{x}(t)$ sistem (2.2) ada, pada saat $t = 0$ memenuhi

$$\|\vec{x}(0) - \vec{x}^*\| < \delta,$$

untuk setiap $t > 0$ dan memenuhi

$$\|\vec{x}(t) - \vec{x}^*\| < \varepsilon, \forall t \geq 0,$$

2. stabil asimtotik, jika \vec{x}^* stabil dan $\exists \delta_0 > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap solusi $\vec{x}(t)$ untuk $t = 0$ memenuhi

$$\|\vec{x}(0) - \vec{x}^*\| < \delta_0,$$

maka berlaku

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{x}(t) = \vec{x}^*,$$

3. tidak stabil, jika tidak memenuhi kriteria stabil.

(Boyce dan Diprima, 2012)

2.2.2 Sistem *Autonomous Linear*

Perhatikan sistem *autonomous* linear berdimensi n berikut

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n,$$

(2.3)

$$\frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n,$$

dengan $a_{ij} \in \mathbb{R}, i, j = 1, \dots, n$. Sistem (2.3) dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}, \quad (2.4)$$

dengan $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$, dan $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

Jika $\det(A) \neq 0$, maka titik $\vec{x}^* = \vec{0}$ adalah satu-satunya titik kesetimbangan sistem *autonomous* linear (2.3). Kriteria kestabilan titik kesetimbangan sistem (2.3) dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen matriks A dalam teorema berikut.



Teorema 2.1 Kestabilan Sistem *Autonomous* Linear

Titik kesetimbangan $\vec{x}^* = \vec{0}$ sistem *autonomous* linear (2.3) bersifat

1. stabil, jika semua nilai eigen matriks A memiliki bagian real tak positif,
2. stabil asimtotik, jika semua nilai eigen matriks A memiliki bagian real negatif,
3. tidak stabil, jika terdapat nilai eigen matriks A yang memiliki bagian real positif.

(Boyce dan Dprima, 2012)

2.2.3 Sistem *Autonomous* Nonlinear

Perhatikan sistem *autonomous* nonlinear dengan n persamaan berikut.

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(\vec{x}); i = 1, 2, \dots, n, \tag{2.5}$$

dengan f_i memiliki turunan parsial yang kontinu di titik kesetimbangan \vec{x}^* . Sistem (2.5) dapat didekati oleh sistem *autonomous* linear dengan cara melakukan ekspansi deret Taylor fungsi f_i di sekitar titik kesetimbangan \vec{x}^* , sehingga fungsi f_i dapat dinyatakan sebagai

$$f_i(\vec{x}) = f_i(\vec{x}^*) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(\vec{x}^*)}{\partial x_j} (x_j - x_j^*) + \eta_i(\vec{x})$$

dengan $\eta_i(\vec{x})$ suku sisa untuk $i = 1, 2, \dots, n$. Suku sisa pada hampiran orde satu terhadap f_i memenuhi sifat

$$\lim_{(\vec{x}) \rightarrow (\vec{x}^*)} \frac{\eta_i(\vec{x})}{\|\vec{w}\|} = 0, i = 1, 2, \dots, n,$$

dengan $\vec{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ dan $w_i = (x_i - x_i^*)$ untuk $i = 1, 2, \dots, n$. Selanjutnya dengan menerapkan $f_i(\vec{x}) = \vec{0}$ dan $\frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d\vec{w}}{dt}$ pada sistem (2.5) maka diperoleh sistem berikut.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x}^*) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{x}^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\vec{x}^*) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\vec{x}^*) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ \eta_n(\vec{x}) \end{bmatrix}$$



atau dalam notasi vektor

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = J\vec{w} + \vec{\eta}, \quad (2.6)$$

dengan $J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x}_i^*) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{x}_i^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\vec{x}_i^*) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\vec{x}_i^*) \end{bmatrix}$ disebut matriks Jacobi dan

diasumsikan $\det(J) \neq 0$. Jika \vec{x} berada di persekitaran \vec{x}^* maka $\vec{\eta}$ bernilai sangat kecil, sehingga $\vec{\eta}$ dapat diabaikan dan sistem (2.6) menjadi

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = J\vec{w}. \quad (2.7)$$

Jika $\vec{x} - \vec{x}^* = 0$ maka diperoleh $(w_1^*, \dots, w_n^*) = (0, \dots, 0)$, sehingga titik kesetimbangan sistem (2.7) adalah $(w_1^*, \dots, w_n^*) = (0, \dots, 0)$ dan J berperan sebagai A pada sistem *autonomous* linear (2.4). Proses penghampiran sistem nonlinear (2.2) oleh sistem *autonomous* linear dinamakan proses linearisasi.

Teorema 2.2 Kestabilan Sistem *Autonomous Nonlinear*

Titik kesetimbangan \vec{x}^* sistem *autonomous* nonlinear (2.5) bersifat

1. stabil asimtotik, jika titik kesetimbangan sistem hasil linearisasi bersifat stabil asimtotik,
2. tidak stabil, jika titik kesetimbangan sistem hasil linearisasi tidak stabil.

(Finizio dan Lades, 1982)

2.2.4 Kriteria Routh-Hurwitz

Kestabilan titik kesetimbangan sistem linear bergantung pada akar persamaan karakteristik atau nilai eigen λ . Titik kesetimbangan dikatakan stabil asimtotik jika setiap nilai eigen $Re(\lambda) < 0$. Apabila suatu sistem memiliki persamaan karakteristik

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0, \quad (2.8)$$

dengan $a_n \neq 0$, maka kestabilan titik kesetimbangan ditentukan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz tanpa harus menentukan nilai eigen terlebih dahulu.



Teorema 2.3 Kriteria Routh-Hurwitz

Akar-akar persamaan karakteristik (2.8) memiliki bagian riil negatif jika dan hanya jika $a_n > 0$ dan

$$D_1 = a_1 > 0, D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} > 0, D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ 1 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0, \dots,$$

$$D_k = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & a_{2n-1} \\ 1 & a_2 & a_4 & \dots & a_{2n-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & a_{2n-3} \\ 0 & 1 & a_2 & \dots & a_{2n-4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_k \end{vmatrix} > 0, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

dengan $a_i = 0$ untuk $i > n$ dan a_i koefisien polinom pada persamaan (2.8). Matriks D_k disebut matriks Routh-Hurwitz. Jika $|D_k| > 0 \forall k$ maka titik kesetimbangan sistem tersebut bersifat stabil. (Murray, 2002)

Misal diberikan persamaan karakteristik berderajat empat sebagai berikut.

$$\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0, \quad (2.9)$$

akar persamaan karakteristik (2.9) memiliki bagian real negatif jika dan hanya jika

- i. $D_1 = |a_1| = a_1 > 0,$
- ii. $D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} = a_1a_2 - a_3 > 0,$
- iii. $D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ 1 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_1a_2a_3 - a_3^2 - a_1^2a_4 > 0,$
- iv. $D_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ 1 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & a_4 \end{vmatrix} = a_4(a_1a_2a_3 - a_3^2 - a_1^2a_4) > 0$
sehingga $a_4 > 0.$

2.3 Angka Reproduksi Dasar

Angka reproduksi dasar yang dinotasikan dengan \mathcal{R}_0 adalah angka rata-rata banyaknya infeksi baru yang disebabkan oleh satu individu terinfeksi selama proses infeksi dalam suatu populasi rentan. Angka tersebut merupakan parameter yang digunakan untuk



menentukan ada tidaknya wabah penyakit dalam suatu populasi. Jika $\mathcal{R}_0 < 1$ maka individu yang terinfeksi menghasilkan rata-rata kurang dari satu individu terinfeksi baru, dengan kata lain dapat diprediksi bahwa infeksi akan hilang dari populasi. Sebaliknya, jika $\mathcal{R}_0 > 1$ maka individu yang terinfeksi menghasilkan rata-rata lebih dari satu individu baru yang terinfeksi sehingga mengakibatkan terjadinya wabah penyakit dalam populasi.

(Heffernan, dkk. 2005)

2.4 Matriks Generasi Selanjutnya

Metode matriks generasi selanjutnya adalah suatu metode yang digunakan untuk menentukan angka reproduksi dasar (\mathcal{R}_0). Model kompartemen penyebaran penyakit dibagi menjadi dua kelompok, yaitu kompartemen terinfeksi dan kompartemen tidak terinfeksi. Misalkan terdapat $1, \dots, m, m+1, \dots, n$ kompartemen dengan kompartemen pertama sampai dengan m terdiri dari individu terinfeksi dan kompartemen $m+1$ sampai dengan n terdiri dari individu tidak terinfeksi. Model kompartemen individu yang terinfeksi dapat ditulis dalam bentuk

$$x_i' = F_i - V_i, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

dengan

x_i = jumlah individu pada setiap kompartemen i ,

F_i = komponen pembentuk matriks F , dengan komponen F_i merupakan infeksi baru yang masuk pada kompartemen ke i . Infeksi baru hanya dapat diperoleh dari individu rentan dan F_i tidak boleh negatif,

V_i = komponen pembentuk matriks V , dengan komponen V_i merupakan transfer keluar atau masuk dari kompartemen satu ke kompartemen yang lain. Jika transfer keluar, V_i bernilai positif dan jika transfer masuk, V_i bernilai negatif.

Didefinisikan DF dan DV adalah matriks $m \times m$ sebagai berikut

$$DF = \left[\frac{\partial F_i(P_0)}{\partial x_j} \right], \quad DV = \left[\frac{\partial V_i(P_0)}{\partial x_j} \right], \quad i, j = 1, \dots, m,$$



dengan P_0 merupakan titik kesetimbangan bebas penyakit. Matriks generasi selanjutnya didefinisikan sebagai berikut

$$K = (DF)(DV)^{-1},$$

dan angka reproduksi dasar diperoleh dari perhitungan matriks generasi selanjutnya yang dapat ditulis sebagai berikut

$$\mathcal{R}_0 = \rho(K),$$

dengan $\rho(K)$ adalah *spectral radius* matriks K yang merupakan modulus maksimum dari nilai eigen.

(Brauer dan Chaves, 2012)

2.5 Bifurkasi

Bifurkasi adalah perubahan sifat solusi dari suatu sistem dinamik seiring dengan perubahan nilai parameter (parameter bifurkasi).

(Castillo-Chaves dan Song, 2004)

2.5.1 Bifurkasi Transkritikal

Misal diberikan persamaan

$$\frac{dx}{dt} = rx - x^2, \quad (2.10)$$

titik tetap dari persamaan (2.10) adalah

$$x^* = 0 \text{ dan } x^* = r,$$

untuk $f(x; r) = rx - x^2$, maka

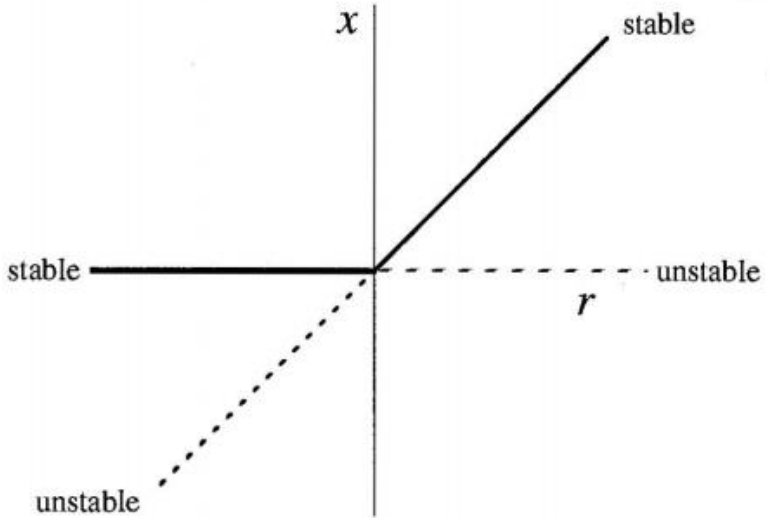
$$f'(x; r) = r - 2x, f'(0; r) = r, f'(r; r) = -r.$$

Titik kesetimbangan $x = 0$ bersifat stabil ketika $r < 0$ dan tidak stabil ketika $r > 0$, sedangkan titik kesetimbangan $x = r$ tidak stabil ketika $r < 0$ dan bersifat stabil ketika $r > 0$. Perubahan kestabilan terjadi saat $r = 0$.

(Kuznetsov, 2004)



Diagram kestabilan pada persamaan (2.10) ditunjukkan pada Gambar 2.1.



Gambar 2.1 Diagram kestabilan bifurkasi transkritikal

2.5.2 Bifurkasi *Forward* dan *Backward*

Pada model epidemi, terdapat dua bifurkasi yang berbeda pada $\mathcal{R}_0 = 1$ yaitu bifurkasi *forward* (superkritikal) dan bifurkasi *backward* (subkritikal). Bifurkasi *forward* terjadi ketika $\mathcal{R}_0 > 1$, muncul titik kesetimbangan endemi positif besar yang stabil asimtotik sedangkan titik kesetimbangan bebas penyakit kehilangan kestabilan. Sementara itu, bifurkasi *backward* terjadi ketika $\mathcal{R}_0 < 1$, muncul titik kesetimbangan endemi positif kecil yang tidak stabil sedangkan titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemi positif besar stabil asimtotik lokal.

(Castillo-Chaves dan Song, 2004)

2.6 Teori *Center Manifold*

Untuk menentukan bifurkasi *forward* dan *backward* digunakan teori *center manifold*. Teori *center manifold* digunakan untuk menentukan kestabilan lokal dari titik kesetimbangan nonhiperbolik



(matriks linearisasi yang memiliki sekurang-kurangnya satu nilai eigen dengan bagian real bernilai nol). Teori ini tidak hanya dapat menentukan kestabilan lokal dari titik kesetimbangan nonhiperbolik tetapi juga menyelesaikan bifurkasi dari titik kesetimbangan nonhiperbolik.

Misal diberikan sistem persamaan diferensial biasa dengan parameter γ sebagai berikut

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}, \gamma), \quad (2.11)$$

dengan $\vec{0}$ adalah titik kesetimbangan dari sistem (2.11) dan $\vec{f}(\vec{0}, \gamma) = 0$ untuk setiap γ .

Teorema 2.6.1

Diasumsikan

- $J \equiv D_{\vec{x}}f(\vec{0}, 0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{0}, 0)\right)$ adalah matriks Jacobi dari sistem (2.10) di sekitar titik kesetimbangan dengan $\gamma = 0$. Nol adalah *simple eigenvalue* (hanya ada satu nilai eigen yang bernilai nol) dan nilai eigen yang lain adalah negatif pada bagian real,
- matriks J mempunyai vektor eigen kanan ω yang non-negatif dan eigen vektor kiri u yang non-negatif yang bersesuaian dengan nilai eigen nol.

Diketahui f_k adalah komponen ke k dari f dan

$$a = \sum_{k,i,j=1}^n v_k \omega_j \omega_k \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{0}, 0),$$

$$b = \sum_{k,l,j=1}^n v_k \omega_i \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_l \partial \varphi}(\vec{0}, 0),$$

maka kestabilan lokal dari sistem (2.10) di sekitar $\vec{0}$ ditentukan oleh a dan b sebagai berikut:

- $a > 0, b > 0$. Ketika $\gamma < 0$ dengan $|\gamma| \ll 1$, titik kesetimbangan $\vec{0}$ stabil asimtotik lokal, dan terdapat titik kesetimbangan positif yang



- tidak stabil. Ketika $0 < \gamma \ll 1$, titik kesetimbangan $\vec{0}$ tidak stabil dan terdapat titik kesetimbangan negatif yang stabil asimtotik lokal.
2. $a < 0, b < 0$. Ketika $\gamma < 0$ dengan $|\gamma| \ll 1$, titik kesetimbangan $\vec{0}$ tidak stabil. Ketika $0 < \gamma \ll 1$, titik kesetimbangan $\vec{0}$ stabil asimtotik lokal, dan terdapat titik kesetimbangan positif yang tidak stabil.
 3. $a > 0, b < 0$. Ketika $\gamma < 0$ dengan $|\gamma| \ll 1$, titik kesetimbangan $\vec{0}$ tidak stabil, dan terdapat titik kesetimbangan negatif yang stabil asimtotik lokal. Ketika $0 < \gamma \ll 1$, titik kesetimbangan $\vec{0}$ stabil dan muncul titik kesetimbangan positif yang tidak stabil.
 4. $a < 0, b > 0$. Ketika γ berubah dari negatif menjadi positif, maka kestabilan titik kesetimbangan $\vec{0}$ juga berubah dari stabil menjadi tidak stabil. Bersamaan dengan itu, titik kesetimbangan negatif yang tidak stabil menjadi titik kesetimbangan positif yang stabil asimtotik lokal.

(Castillo-Chaves dan Song, 2004)

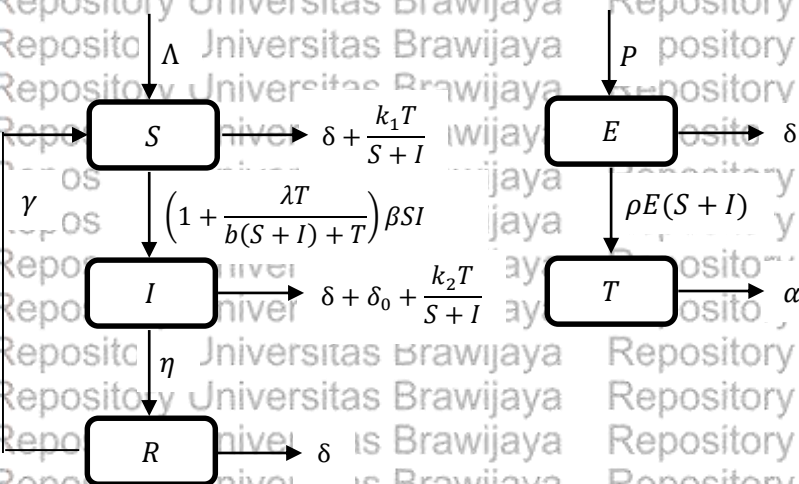


BAB III PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas konstruksi model epidemi dengan pengaruh racun. Selanjutnya dilakukan analisis dinamik model yang meliputi penentuan titik kesetimbangan, angka reproduksi dasar, analisis kestabilan lokal titik kesetimbangan, dan menyelidiki adanya bifurkasi *forward*. Pada bagian akhir dilakukan simulasi numerik dan interpretasinya.

3.1 Konstruksi Model

Dalam model epidemi, populasi dibagi menjadi 5 subpopulasi, yaitu subpopulasi rentan (S), subpopulasi terinfeksi (I), subpopulasi sembuh karena pengobatan (R), jumlah racun pada total populasi (T), jumlah racun dalam lingkungan (E). Model epidemi dengan pengaruh racun diilustrasikan dalam diagram kompartemen pada Gambar 3.1.



Gambar 3.1 Diagram kompartemen model epidemi dengan pengaruh racun.



Parameter-parameter pada model diasumsikan tak negatif dengan definisi sebagai berikut.

- Λ : Laju rekrutmen individu rentan.
- β : Laju infeksi dari kompartemen S ke I .
- δ : Laju kematian alami.
- δ_0 : Laju kematian karena penyakit.
- λ : Laju infeksi racun dari kompartemen S ke I .
- b : Laju kepadatan.
- k_1, k_2 : Laju pengaruh racun terhadap kematian.
- γ : Laju individu pulih dengan kekebalan sementara.
- η : Laju pemulihan karena pengobatan dari kompartemen I ke R .
- ρ : Tingkat penyerapan racun oleh lingkungan.
- α : Laju pembuangan racun akibat proses metabolisme.
- p : Laju masuknya racun eksogen ke dalam lingkungan (contoh, racun industri).
- σ : Laju pembuangan racun lingkungan.

Berdasarkan diagram kompartemen Gambar 3.1 konstruksi model epidemi dengan pengaruh racun dijelaskan secara rinci seperti berikut.

3.1.1 Laju Perubahan Subpopulasi Rentan (S)

Bertambahnya subpopulasi rentan (S) dipengaruhi oleh laju rekrutmen dengan laju Λ . Berkurangnya subpopulasi rentan dipengaruhi oleh adanya kontak langsung individu rentan dengan individu terinfeksi sebesar βSI . Subpopulasi rentan akan berkurang karena adanya laju infeksi sebesar $\frac{\lambda T}{b(S+I)+T} \beta SI$ yang menyatakan pengaruh hambatan yang ditimbulkan oleh perubahan perilaku individu rentan ketika jumlah racun pada total populasi meningkat. Selanjutnya, berkurangnya subpopulasi rentan disebabkan oleh kematian alami sebesar δS dan juga akan berkurang karena adanya kematian jenuh sebesar $\frac{k_1 T}{S+I}$ yang disebabkan oleh racun lingkungan.

Individu sembuh yang memperoleh kekebalan sementara dapat kembali menjadi individu rentan. Hal tersebut dapat menyebabkan bertambahnya subpopulasi rentan sebesar γR . Dengan demikian, laju perubahan subpopulasi rentan per satuan waktu adalah



$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - \left(1 + \frac{\lambda T}{b(S+I)+T}\right) \beta SI + \left(\delta + \frac{k_1 T}{S+I}\right) S + \gamma R. \quad (3.1)$$

3.1.2 Laju Perubahan Subpopulasi Terinfeksi (I)

Berdasarkan Gambar 3.1 perpindahan individu rentan menjadi terinfeksi mengakibatkan bertambahnya subpopulasi terinfeksi sebesar $\left(1 + \frac{\lambda T}{b(S+I)+T}\right) \beta SI$. Laju $\frac{\lambda T}{b(S+I)+T} \beta SI$ merupakan infeksi laju jenuh yang menyatakan pengaruh hambatan yang ditimbulkan oleh perubahan perilaku individu rentan ketika jumlah racun pada total populasi meningkat. Selanjutnya, laju berkurangnya subpopulasi terinfeksi dipengaruhi oleh kematian alami δI , kematian yang disebabkan oleh penyakit $\delta_0 I$ dan kematian yang disebabkan oleh pengaruh racun lingkungan dengan laju infeksi jenuh $\frac{k_2 T}{S+I} I$ yang merupakan pencegahan ketidakterbatasan laju kontak akibat besarnya kematian yang disebabkan oleh racun lingkungan. Selain itu, individu terinfeksi menjadi individu sembuh karena pengobatan juga menyebabkan berkurangnya subpopulasi terinfeksi sebesar ηI . Dengan demikian, laju perubahan subpopulasi terinfeksi per satuan waktu adalah

$$\frac{dI}{dt} = \left(1 + \frac{\lambda T}{b(S+I)+T}\right) \beta SI - \left(\delta + \frac{k_2 T}{S+I} + \delta_0\right) I - \eta I. \quad (3.2)$$

3.1.3 Laju Perubahan Subpopulasi Sembuh (R)

Berdasarkan Gambar 3.1 bertambahnya subpopulasi sembuh dipengaruhi oleh individu terinfeksi yang memperoleh pengobatan dengan laju sebesar ηI . Selanjutnya laju subpopulasi sembuh berkurang disebabkan oleh kematian alami δR dan perpindahan individu sembuh yang memperoleh kekebalan sementara ke individu rentan yaitu γR . Dengan demikian, laju perubahan subpopulasi sembuh per satuan waktu adalah

$$\frac{dR}{dt} = \eta I - \gamma R - \delta R$$

3.1.4 Laju Perubahan Racun dalam Total Populasi (T)

Berdasarkan Gambar 3.1 bertambahnya racun dalam total populasi dipengaruhi oleh laju masuknya racun lingkungan ke total



populasi (individu rentan dan individu terinfeksi) sebesar $\rho E(S + I)$, hal tersebut memiliki pengaruh besar terhadap racun dalam total populasi. Selanjutnya racun dalam total populasi berkurang disebabkan oleh pembuangan racun dalam tubuh akibat proses metabolisme dengan laju sebesar αT . Dengan demikian, laju perubahan racun dalam total populasi per satuan waktu adalah

$$\frac{dT}{dt} = \rho E(S + I) - \alpha T$$

3.1.5 Laju Perubahan Racun dalam Lingkungan (E)

Berdasarkan Gambar 3.1 bertambahnya racun dalam lingkungan dipengaruhi oleh masuknya eksogen (misalnya, pembuangan racun industri seperti limbah dll) ke dalam lingkungan dengan laju P . Selanjutnya racun dalam lingkungan berkurang disebabkan oleh proses penetralan dari lingkungan dengan laju sebesar σE dan masuknya racun lingkungan ke total populasi dengan laju sebesar $\rho E(S + I)$.

Dengan demikian, laju perubahan racun dalam lingkungan per satuan waktu adalah

$$\frac{dE}{dt} = P - \sigma E - \rho E(S + I). \quad (3.3)$$

Pada persamaan (3.3) laju keluarnya racun lingkungan ke total populasi ($\rho E(S + I)$) diasumsikan jauh lebih kecil dibanding laju masuknya racun ke lingkungan (eksogen/ P), sehingga ($\rho E(S + I)$) dapat diabaikan dan persamaan (3.3) menjadi

$$\frac{dE}{dt} = P - \sigma E.$$

Berdasarkan uraian tersebut, model epidemi dengan pengaruh racun berbentuk sistem autonomous nonlinear sebagai berikut

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - \left[1 + \frac{\lambda T}{b(S + I) + T} \right] \beta SI - \left(\delta + \frac{k_1 T}{S + I} \right) S + \gamma R$$

$$\frac{dI}{dt} = \left[1 + \frac{\lambda T}{b(S + I) + T} \right] \beta SI - \left(\delta + \frac{k_2 T}{S + I} + \delta_0 \right) I - \eta I,$$



$$\frac{dR}{dt} = \eta I - \gamma R - \delta R, \quad (3.4)$$

$$\frac{dT}{dt} = \rho E(S+I) - \alpha T,$$

$$\frac{dE}{dt} = P - \sigma E,$$

dengan kondisi awal

$$\begin{aligned} S(0) = S_0 > 0, & \quad R(0) = R_0 > 0, & \quad E(0) = E_0 > 0. \\ I(0) = I_0 > 0, & \quad T(0) = T_0 > 0. \end{aligned}$$

Selanjutnya, pada model ini diasumsikan $k_1 = k_2 = k$.

3.2 Titik Keseimbangan

Titik kesetimbangan sistem (3.4) diperoleh ketika

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dI}{dt} = \frac{dR}{dt} = \frac{dT}{dt} = \frac{dE}{dt} = 0,$$

sehingga diperoleh

$$\Lambda - \left[1 + \frac{\lambda T}{b(S+I)+T} \right] \beta SI - \left(\delta + \frac{kT}{S+I} \right) S + \gamma R = 0, \quad (3.4a)$$

$$\left[1 + \frac{\lambda T}{b(S+I)+T} \right] \beta SI - \left(\delta + \frac{kT}{S+I} + \delta_0 \right) I - \eta I = 0, \quad (3.4b)$$

$$\eta I - \gamma R - \delta R = 0, \quad (3.4c)$$

$$\rho E(S+I) - \alpha T = 0, \quad (3.4d)$$

$$P - \sigma E = 0, \quad (3.4e)$$

Dari persamaan (3.4e) diperoleh

$$E = \frac{P}{\sigma}. \quad (3.5)$$

Jika persamaan (3.5) disubstitusikan ke persamaan (3.4d), maka diperoleh



$$T = \frac{\rho P}{\sigma \alpha} (S + I). \quad (3.6)$$

Substitusi persamaan (3.6) ke persamaan (3.4b) menghasilkan

$$I \left(\left(1 + \frac{\rho P \lambda}{b \sigma \alpha + \rho P} \right) \beta S - \left(\delta + \frac{k \rho P}{\sigma \alpha} + \delta_0 \right) - \eta \right) = 0. \quad (3.7)$$

Berdasarkan persamaan (3.7) diperoleh dua kemungkinan, yaitu $I = 0$ atau $\left(1 + \frac{\rho P \lambda}{b \sigma \alpha + \rho P} \right) \beta S - \left(\delta + \frac{k \rho P}{\sigma \alpha} + \delta_0 \right) - \eta = 0$.

3.2.1 Titik Keseimbangan Bebas Penyakit

Jika $I = 0$ maka dari persamaan (3.4c) diperoleh

$$R = 0, \quad (3.8)$$

dengan mensubstitusi (3.6) dan (3.8) ke persamaan (3.4a) diperoleh

$$S = \frac{\Lambda \sigma \alpha}{\delta \sigma \alpha + k P \rho}, \quad (3.9)$$

Substitusi $I = 0$ dan persamaan (3.9) ke persamaan (3.6), menghasilkan

$$T = \frac{\rho P \Lambda}{\delta \sigma \alpha + k P \rho}; \quad (3.10)$$

Berdasarkan persamaan (3.5), (3.7), (3.8), (3.9), dan (3.10) diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit, yaitu

$$E_0 = (\tilde{S}, 0, 0, \tilde{T}, \tilde{E}), \\ = \left(\frac{\Lambda \sigma \alpha}{\delta \sigma \alpha + k P \rho}, 0, 0, \frac{\rho P \Lambda}{\delta \sigma \alpha + k P \rho}, \frac{P}{\sigma} \right).$$

Titik E_0 disebut titik kesetimbangan bebas penyakit karena tidak ada individu yang terinfeksi.



Sebelum membahas titik kesetimbangan endemi, terlebih dahulu dilakukan perhitungan angka reproduksi dasar karena pada titik kesetimbangan epidemi diperlukan angka reproduksi dasar.

3.2.2 Angka Reproduksi Dasar

Angka reproduksi dasar (\mathcal{R}_0) ditentukan dengan menggunakan matriks generasi selanjutnya. Berdasarkan persamaan (3.4) dibentuk matriks F dan V yang terdiri dari subpopulasi individu terinfeksi penyakit

$I' = F - V$,
dengan

$$F = \left(1 + \frac{\lambda T}{b(S+I)+T} \right) \beta SI,$$

$$V = \left(\delta + \frac{kT}{S+I} + \delta_0 + \eta \right) I.$$

Didefinisikan matriks DF dan DV adalah matriks Jacobi di titik kesetimbangan bebas penyakit $E_0 = (\tilde{S}, 0, 0, \tilde{T}, \tilde{E}) = \left(\frac{\Lambda\alpha}{\delta\alpha+k\rho\rho}, 0, 0, \frac{\rho P \Lambda}{\delta\alpha+k\rho\rho}, \frac{P}{\sigma} \right)$, yaitu

$$DF(E_0) = \beta \tilde{S} \left(1 + \frac{\lambda \tilde{T}}{b \tilde{S} + \tilde{T}} \right) = \frac{\beta \Lambda \sigma \alpha (b \sigma \alpha + \rho P + \rho \lambda P)}{(\delta \sigma \alpha + k \rho P)(b \sigma \alpha + \rho P)},$$

dan

$$DV(E_0) = \delta + \frac{k \tilde{T}}{\tilde{S}} + \delta_0 + \eta = \delta + \frac{k P \rho}{\sigma \alpha} + \delta_0 + \eta.$$

Invers matriks DV adalah

$$DV^{-1}(E_0) = \frac{1}{\delta + \frac{k P \rho}{\sigma \alpha} + \delta_0 + \eta}.$$

Berdasarkan matriks $DF(E_0)$ dan $DV^{-1}(E_0)$, maka dapat dibentuk matriks generasi selanjutnya $K = (DF(E_0))(DV^{-1}(E_0))$, yaitu

$$K = \frac{\beta \Lambda \left(b + \frac{\rho P}{\sigma \alpha} + \frac{\rho \lambda P}{\sigma \alpha} \right)}{\left(\delta + \frac{k \rho P}{\sigma \alpha} \right) \left(b + \frac{\rho P}{\sigma \alpha} \right) \left(\delta + \delta_0 + \eta + \frac{k \rho P}{\sigma \alpha} \right)}$$



Dengan menyelesaikan persamaan karakteristik

$$|K - \lambda I| = 0,$$

diperoleh nilai eigen sebagai berikut

$$\lambda = \frac{\beta \Lambda \left(b + \frac{\rho P}{\sigma \alpha} + \frac{\rho \lambda P}{\sigma \alpha} \right)}{\left(\delta + \frac{k \rho P}{\sigma \alpha} \right) \left(b + \frac{\rho P}{\sigma \alpha} \right) \left(\delta + \delta_0 + \eta + \frac{k \rho P}{\sigma \alpha} \right)}.$$

Angka reproduksi dasar (R_0) adalah

$$R_0 = \frac{\beta \Lambda \left(b + \frac{\rho P}{\sigma \alpha} + \frac{\rho \lambda P}{\sigma \alpha} \right)}{\left(\delta + \frac{k \rho P}{\sigma \alpha} \right) \left(b + \frac{\rho P}{\sigma \alpha} \right) \left(\delta + \delta_0 + \eta + \frac{k \rho P}{\sigma \alpha} \right)}.$$

3.2.3 Titik Kesetimbangan Endemi

Titik kesetimbangan endemi diperoleh ketika

$$\left(\left(1 + \frac{\rho P \lambda}{b \sigma \alpha + \rho P} \right) \beta S - \left(\delta + \frac{k \rho P}{\sigma \alpha} + \delta_0 \right) - \eta \right) = 0$$

$$S = \frac{\left(\delta + \frac{k \rho P}{\sigma \alpha} + \delta_0 + \eta \right)}{\beta \left(1 + \frac{\rho P \lambda}{b \sigma \alpha + \rho P} \right)} = \frac{\left(\delta + \frac{k \rho P}{\sigma \alpha} + \delta_0 + \eta \right)}{\beta \left(\frac{b \sigma \alpha + \rho P + \rho P \lambda}{b \sigma \alpha + \rho P} \right)}$$

$$= \frac{\left(\delta + \frac{k \rho P}{\sigma \alpha} + \delta_0 + \eta \right) \left(b + \frac{\rho P}{\sigma \alpha} \right)}{\beta \left(b + \frac{\rho P}{\sigma \alpha} + \frac{\rho P \lambda}{\sigma \alpha} \right)}$$

$$S = \frac{\Lambda}{R_0 \left(\delta + \frac{k \rho P}{\sigma \alpha} \right)} \quad (3.11)$$

dan dari persamaan (3.4c) didapat

$$R = \frac{\eta I}{(\gamma + \delta)} \quad (3.12)$$

substitusi persamaan (3.6), (3.11) dan (3.12) ke persamaan (3.4a)

dan berdasarkan perhitungan pada Lampiran 1 diperoleh



$$I = \frac{\Lambda(\gamma + \delta)}{\delta\eta + (\gamma + \delta)\left(\delta + \delta_0 + \frac{kP\rho}{\sigma\alpha}\right)} \left(1 - \frac{1}{R_0}\right), \quad (3.13)$$

selanjutnya, substitusi persamaan (3.13) ke persamaan (3.12) dan persamaan (3.11) dan (3.13) ke persamaan (3.6) menghasilkan

$$R = \frac{\eta\Lambda}{\delta\eta + (\gamma + \delta)\left(\delta + \delta_0 + \frac{kP\rho}{\sigma\alpha}\right)} \left(1 - \frac{1}{R_0}\right),$$

dan

$$T = \rho P \Lambda \left[\frac{1}{R_0(\delta\sigma\alpha + k\rho P)} + \frac{(\gamma + \delta)}{\sigma\alpha\delta\eta + (\gamma + \delta)(\sigma\alpha(\delta + \delta_0) + kP\rho)} \left(1 - \frac{1}{R_0}\right) \right]$$

Berdasarkan hasil perhitungan tersebut, diperoleh titik kesetimbangan endemi $E^* = (S_1, I_1, R_1, T_1, E_1)$ dengan

$$S_1 = \frac{\Lambda}{R_0\left(\delta + \frac{kP\rho}{\sigma\alpha}\right)},$$

$$I_1 = \frac{\Lambda(\gamma + \delta)}{\delta\eta + (\gamma + \delta)\left(\delta + \delta_0 + \frac{kP\rho}{\sigma\alpha}\right)} \left(1 - \frac{1}{R_0}\right),$$

$$R_1 = \frac{\eta\Lambda}{\delta\eta + (\gamma + \delta)\left(\delta + \delta_0 + \frac{kP\rho}{\sigma\alpha}\right)} \left(1 - \frac{1}{R_0}\right),$$

$$T_1 = \rho P \Lambda \left[\frac{1}{R_0(\delta\sigma\alpha + k\rho P)} + \frac{(\gamma + \delta)}{\sigma\alpha\delta\eta + (\gamma + \delta)(\sigma\alpha(\delta + \delta_0) + kP\rho)} \left(1 - \frac{1}{R_0}\right) \right],$$

$$E_1 = \frac{P}{\sigma}.$$

Jika $R_0 > 1$ maka S_1, I_1, R_1 dan T_1 bernilai positif. Akibatnya titik kesetimbangan endemi eksis jika $R_0 > 1$.

3.3 Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan

Analisis kestabilan titik kesetimbangan yang akan ditentukan yaitu analisis kestabilan lokal dari masing-masing titik kesetimbangan. Sistem (3.4) merupakan sistem nonlinear, maka kestabilan lokal titik kesetimbangan dilakukan dengan linearisasi sistem (3.4) di sekitar titik kesetimbangan. Berdasarkan langkah linearisasi pada subbab 2.2.3 diperoleh



$$J = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \gamma & a_{14} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & a_{24} & 0 \\ 0 & \eta & -(\gamma + \delta) & 0 & 0 \\ \rho E & \rho E & 0 & -\alpha & \rho(S+I) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sigma \end{bmatrix}$$

dengan

$$a_{11} = -\beta I - \frac{\beta \lambda IT(bI + T)}{(b(S+I) + T)^2} - \delta - \frac{kTI}{(S+I)^2},$$

$$a_{12} = -\beta S - \frac{\beta \lambda ST(bS + T)}{(b(S+I) + T)^2} + \frac{kST}{(S+I)^2},$$

$$a_{14} = \frac{\beta \lambda bSI(S+I)}{(b(S+I) + T)^2} - \frac{kS}{S+I},$$

$$a_{21} = \beta I + \frac{\beta \lambda IT(bI + T)}{(b(S+I) + T)^2} + \frac{kIT}{(S+I)^2},$$

$$a_{22} = \beta S + \frac{\beta \lambda ST(bS + T)}{(b(S+I) + T)^2} - \frac{kTS}{(S+I)^2},$$

$$a_{24} = \frac{\beta \lambda bSI(S+I)}{(b(S+I) + T)^2} - \frac{kI}{S+I}$$

3.3.1 Analisis kestabilan lokal titik kesetimbangan bebas penyakit

Matriks Jacobi di titik kesetimbangan $E_0 = (\bar{S}, 0, 0, \bar{T}, \bar{E})$ adalah

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} -\delta & b_{12} & \gamma & -k & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta & -(\gamma + \delta) & 0 & 0 \\ \rho \bar{E} & \rho \bar{E} & 0 & -\alpha & \rho \bar{S} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sigma \end{pmatrix},$$

dengan $b_{12} = -\beta \bar{S} - \frac{\lambda \bar{T} \beta \bar{S}}{b \bar{S} + \bar{T}} + \frac{k \bar{T}}{\bar{S}},$



$$b_{22} = \beta\tilde{S} + \frac{\lambda\tilde{T}\beta\tilde{S}}{b\tilde{S} + \tilde{T}} - \left(\delta + \delta_0 + \eta + \frac{k\tilde{T}}{\tilde{S}} \right).$$

Persamaan karakteristik matriks $J(E_0)$ dapat diperoleh dengan menyelesaikan persamaan

$$|J(E_0) - rI| = 0,$$

$$\begin{vmatrix} -(\delta + r) & b_{12} & \gamma & -k & 0 \\ 0 & b_{22} - r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta & -(\gamma + \delta + r) & 0 & 0 \\ \rho\tilde{E} & \rho\tilde{E} & 0 & -(\alpha + r) & \rho\tilde{S} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(\sigma + r) \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} -(\delta + r) & b_{12} & \gamma & -k \\ 0 & b_{22} - r & 0 & 0 \\ -(\sigma + r) & 0 & \eta & -(\gamma + \delta + r) \\ \rho\tilde{E} & \rho\tilde{E} & 0 & -(\alpha + r) \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} -(\delta + r) & \gamma & -k \\ 0 & -(\gamma + \delta + r) & 0 \\ -(\sigma + r)(b_{22} - r) & \rho\tilde{E} & -(\alpha + r) \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} -(\delta + r) & k \\ 0 & -(\alpha + r) \end{vmatrix} = 0,$$

$$(\sigma + r)(b_{22} - r)(\gamma + \delta + r) | -(\delta + r) \quad \rho\tilde{E} \quad -(\alpha + r) | = 0,$$

$$(\sigma + r)(b_{22} - r)(\gamma + \delta + r)[(\delta + r)(\alpha + r) + \rho\tilde{E}k] = 0,$$

dengan demikian diperoleh akar-akar karakteristik

$$r_1 = -\sigma,$$

$$r_2 = b_{22} = \beta\tilde{S} + \frac{\lambda\tilde{T}\beta\tilde{S}}{b\tilde{S} + \tilde{T}} - \left(\delta + \delta_0 + \eta + \frac{k\tilde{T}}{\tilde{S}} \right),$$

berdasarkan perhitungan pada Lampiran 3 diperoleh

$$= (R_0 - 1) \left(\delta + \delta_0 + \eta + \frac{k\rho P}{\sigma\alpha} \right), \text{ jika } R_0 < 1 \text{ maka } r_2 < 0,$$

$$r_3 = -(\gamma + \delta),$$

sedangkan r_4 dan r_5 diperoleh dari akar persamaan

$$r^2 + A_1 r + A_2 = 0, \quad (3.14)$$

dengan

$$A_1 = (\alpha + \delta) > 0,$$

$$A_2 = \left(\alpha\delta + \frac{\rho P k}{\sigma} \right) > 0.$$

Akar-akar persamaan (3.14) adalah

$$r_{4,5} = \frac{-A_1 \pm \sqrt{A_1^2 - 4A_2}}{2},$$

dengan $A_1 > 0$ dan $A_2 > 0$ maka didapatkan nilai eigen r_4 dan r_5 yang memiliki bagian real bernilai negatif seperti berikut

- i. Jika $A_1^2 - 4A_2 > 0$, maka $r_{4,5} < 0$ jika $A_1 > 0$ dan $A_2 > 0$,
- ii. Jika $A_1^2 - 4A_2 < 0$, maka $r_{4,5}$ bernilai real negatif jika $A_1 > 0$ dan $A_2 > 0$.

Dengan demikian, titik kesetimbangan bebas penyakit E_0 bersifat stabil asimtotik lokal jika $R_0 < 1$.

Untuk selanjutnya, sifat kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit E_0 akan ditunjukkan dengan simulasi numerik.

3.3.2 Analisis kestabilan lokal titik kesetimbangan endemi

Matriks Jacobi pada titik kesetimbangan endemi $E^* = (S_1, I_1, R_1, T_1, E_1)$ adalah

$$J = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & a_{24} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} \end{pmatrix},$$



dengan

$$a_{11} = -\beta I_1 - \frac{\beta \lambda I_1 T_1 (b I_1 + T_1)}{(b(S_1 + I_1) + T_1)^2} - \delta - \frac{k T_1 I_1}{(S_1 + I_1)^2},$$

$$a_{12} = -\beta S_1 - \frac{\beta \lambda S_1 T_1 (b S_1 + T_1)}{(b(S_1 + I_1) + T_1)^2} + \frac{k S_1 T_1}{(S_1 + I_1)^2},$$

$$a_{13} = \gamma,$$

$$a_{14} = -\frac{\beta \lambda b S_1 I_1 (S_1 + I_1)}{(b(S_1 + I_1) + T_1)^2} - \frac{k S_1}{S_1 + I_1},$$

$$a_{21} = \beta I_1 + \frac{\beta \lambda I_1 T_1 (b I_1 + T_1)}{(b(S_1 + I_1) + T_1)^2} + \frac{k I_1 T_1}{(S_1 + I_1)^2},$$

$$a_{22} = \beta S_1 + \frac{\beta \lambda S_1 T_1 (b S_1 + T_1)}{(b(S_1 + I_1) + T_1)^2} - \left(\delta + \delta_0 + \eta + \frac{k T_1 S_1}{(S_1 + I_1)^2} \right),$$

$$a_{24} = \frac{\beta \lambda b S_1 I_1 (S_1 + I_1)}{(b(S_1 + I_1) + T_1)^2} - \frac{k I_1}{S_1 + I_1},$$

$$a_{32} = \eta,$$

$$a_{33} = -(\gamma + \delta),$$

$$a_{41} = a_{42} = \rho E_1,$$

$$a_{44} = -\alpha,$$

$$a_{45} = \rho(S_1 + I_1),$$

$$a_{55} = -\sigma.$$

Berdasarkan perhitungan pada Lampiran 2 diperoleh nilai eigen matriks yaitu r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 yang memenuhi persamaan

$$(r - a_{55})(r^4 + C_1 r^3 + C_2 r^2 + C_3 r + C_4) = 0, \quad (3.15)$$

dengan

$$r = a_{55}, \text{ dan}$$

$$C_1 = -(a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44}),$$

$$\begin{aligned} C_2 &= a_{11} a_{33} + a_{22} a_{33} + a_{44} a_{33} + a_{11} a_{22} + a_{11} a_{44} + a_{22} a_{44} - \\ & a_{24} a_{42} - a_{12} a_{21} - a_{14} a_{41}, \\ &= (a_{11} + a_{33})(a_{22} + a_{44}) + a_{11} a_{33} + a_{22} a_{44} - a_{12} a_{21} - \\ & a_{24} a_{42} - a_{14} a_{41}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_3 &= a_{12} a_{21} a_{33} + a_{14} a_{41} a_{33} + a_{11} a_{24} a_{42} + a_{12} a_{21} a_{44} + \\ & a_{14} a_{41} a_{22} + a_{24} a_{42} a_{33} - a_{13} a_{32} a_{21} - a_{11} a_{22} a_{33} - \\ & - a_{11} a_{44} a_{33} - a_{22} a_{33} a_{44} - a_{11} a_{22} a_{44} - a_{12} a_{24} a_{41} - \\ & a_{14} a_{21} a_{42}, \end{aligned}$$



$$= -(a_{11} + a_{33})(a_{22}a_{44} - a_{24}a_{42}) - a_{11}a_{33}(a_{22} + a_{44}) + a_{12}a_{21}(a_{33} + a_{44}) - a_{12}a_{24}a_{41} - a_{13}a_{32}a_{21} - a_{14}a_{21}a_{42} + a_{14}a_{41}(a_{22} + a_{33}),$$

$$C_4 = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + a_{12}a_{24}a_{41}a_{33} + a_{14}a_{21}a_{42}a_{33} + a_{13}a_{32}a_{21}a_{44} - a_{13}a_{32}a_{24}a_{41} - a_{11}a_{33}a_{24}a_{42} - a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} - a_{14}a_{41}a_{22}a_{33},$$

$$= a_{11}a_{33}(a_{22}a_{44} - a_{24}a_{42}) - a_{12}a_{33}(a_{21}a_{44} - a_{24}a_{41}) - a_{13}a_{32}(a_{24}a_{41} - a_{21}a_{44}) - a_{14}a_{33}(a_{41}a_{22} - a_{21}a_{42}),$$

Tidak mudah untuk menentukan nilai akar persamaan karakteristik (3.15). oleh karena itu, sifat kestabilan titik kesetimbangan E^* diperoleh menggunakan kriteria Routh-Hurwitz. Akibatnya, titik kesetimbangan endemi E^* bersifat stabil asimtotik lokal jika dan hanya jika

- i. $C_1, C_4 > 0,$
- ii. $D_2 = C_1C_2 - C_3 > 0,$
- iii. $D_3 = (C_1C_2 - C_3)C_3 - C_1^2C_4 > 0,$

Untuk selanjutnya, sifat kestabilan titik kesetimbangan endemi E^* akan ditunjukkan dengan simulasi numerik.

Syarat eksistensi titik kesetimbangan sistem persamaan (3.4) dirangkum pada Tabel 3.1

Tabel 3.1 Titik kesetimbangan, syarat eksistensi, dan kestabilan

Titik Kesetimbangan	Syarat Eksistensi	Jenis Kestabilan	Syarat Kestabilan
E_0	Tidak ada	Stabil Asimtotik Lokal	$R_0 < 1$
E^*	$R_0 > 1$	Stabil Asimtotik Lokal	Kriteria Routh-Hurwitz

3.4 Bifurkasi *Forward*

Pada titik kesetimbangan bebas penyakit ketika $R_0 = 1$ menyebabkan nilai eigen $r_2 = 0$ sehingga sistem (3.4) tidak dapat



ditentukan kestabilannya. Selanjutnya akan diselidiki adanya bifurkasi *forward* ketika $R_0 = 1$.

Didefinisikan $S = x_1$, $I = x_2$, $R = x_3$, $T = x_4$, $E = x_5$, maka persamaan (3.4) menjadi

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= \Lambda - \left[1 + \frac{\lambda x_4}{b(x_1 + x_2) + x_4} \right] \beta x_1 x_2 - \left(\delta + \frac{k x_4}{x_1 + x_2} \right) x_1 + \gamma x_3 \\ \frac{dx_2}{dt} &= \left[1 + \frac{\lambda x_4}{b(x_1 + x_2) + x_4} \right] \beta x_1 x_2 - \left(\delta + \frac{k x_4}{x_1 + x_2} + \delta_0 \right) x_2 - \eta x_2, \\ \frac{dx_3}{dt} &= \eta x_2 - \gamma x_3 - \delta x_3, \\ \frac{dx_4}{dt} &= \rho x_5 (x_1 + x_2) - \alpha x_4, \\ \frac{dx_5}{dt} &= P - \sigma x_5.\end{aligned}\quad (3.16)$$

Misal λ adalah parameter bifurkasi pada saat $R_0 = 1$, diperoleh

$$\lambda^* = \frac{\sigma \alpha}{\rho \rho} \left[\frac{(\delta + \delta_0 + \eta + \frac{k \rho \rho}{\sigma \alpha})(\delta + \frac{k \rho \rho}{\sigma \alpha})(b + \frac{\rho \rho}{\sigma \alpha})}{\beta \Lambda} - b - \frac{\rho \rho}{\sigma \alpha} \right]$$

Matriks Jacobi di titik

kesetimbangan $E_0 = (\tilde{S}, 0, 0, \tilde{T}, \tilde{E})$ dengan parameter λ^* adalah

$$J(E_0, \lambda^*) = \begin{pmatrix} -\delta & b_{12} & \gamma & -k & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta & -(\gamma + \delta) & 0 & 0 \\ \rho \tilde{E} & \rho \tilde{E} & 0 & -\alpha & \rho \tilde{S} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sigma \end{pmatrix},$$

$$\text{dengan } b_{12} = -\beta \tilde{S} - \frac{\lambda^* \tilde{T} \beta \tilde{S}}{b \tilde{S} + \tilde{T}} + \frac{k \tilde{T}}{\tilde{S}},$$

$$\begin{aligned}b_{22} &= \beta \tilde{S} + \frac{\lambda^* \tilde{T} \beta \tilde{S}}{b \tilde{S} + \tilde{T}} - \left(\delta + \delta_0 + \eta + \frac{k \tilde{T}}{\tilde{S}} \right), \\ &= (R_0 - 1) \left(\delta + \delta_0 + \eta + \frac{k \rho \rho}{\sigma \alpha} \right).\end{aligned}$$

Nilai eigen dari matriks $J(E_0, \lambda^*)$ dapat diperoleh dengan menyelesaikan persamaan

$$|J(E_0, \lambda^*) - rI| = 0,$$



$$\begin{vmatrix} -(\delta+r) & b_{12} & \gamma & -k & 0 \\ 0 & b_{22}-r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta & -(\gamma+\delta+r) & 0 & 0 \\ \rho\tilde{E} & \rho\tilde{E} & 0 & -(\alpha+r) & \rho\tilde{S} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(\sigma+r) \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} -(\delta+r) & b_{12} & \gamma & -k \\ 0 & b_{22}-r & 0 & 0 \\ 0 & \eta & -(\gamma+\delta+r) & 0 \\ \rho\tilde{E} & \rho\tilde{E} & 0 & -(\alpha+r) \end{vmatrix} = 0,$$

$$-(\sigma+r)(b_{22}-r) \begin{vmatrix} -(\delta+r) & \gamma & -k \\ 0 & -(\gamma+\delta+r) & 0 \\ \rho\tilde{E} & 0 & -(\alpha+r) \end{vmatrix} = 0,$$

$$(\sigma+r)(b_{22}-r)(\gamma+\delta+r) \begin{vmatrix} -(\delta+r) & -k \\ \rho\tilde{E} & -(\alpha+r) \end{vmatrix} = 0,$$

$$(\sigma+r)(b_{22}-r)(\gamma+\delta+r)[(\delta+r)(\alpha+r) + \rho\tilde{E}k] = 0,$$

$$(\sigma+r)(b_{22}-r)(\gamma+\delta+r)[r^2 + r(\alpha+\delta) + (\alpha\delta + \rho\tilde{E}k)] = 0,$$

dengan demikian diperoleh nilai eigen

$$r_1 = -\sigma,$$

$$r_2 = b_{22} = \beta\tilde{S} + \frac{\lambda^* \tilde{T} \beta \tilde{S}}{b\tilde{S} + \tilde{T}} - \left(\delta + \delta_0 + \eta + \frac{k\tilde{T}}{\tilde{S}} \right),$$

$$= \frac{\beta\Lambda\sigma\alpha}{(\delta\sigma\alpha + k\rho P)} \left(1 + \frac{\lambda^* \rho P}{b\sigma\alpha + P\rho} \right) - \left(\delta + \delta_0 + \eta + \frac{k\rho P}{\sigma\alpha} \right),$$

$$= (R_0 - 1) \left(\delta + \delta_0 + \eta + \frac{k\rho P}{\sigma\alpha} \right), \text{ jika } R_0 = 1 \text{ maka } r_2 = 0,$$

$$r_3 = -(\gamma + \delta),$$



sedangkan r_4 dan r_5 diperoleh dari akar persamaan

$$r^2 + A_1 r + A_2 = 0, \quad (3.17)$$

dengan

$$A_1 = (\alpha + \delta) > 0$$

$$A_2 = \left(\alpha\delta + \frac{\rho Pk}{\sigma} \right) > 0.$$

Akar-akar persamaan (3.17) adalah

$$r_{4,5} = \frac{-A_1 \pm \sqrt{A_1^2 - 4A_2}}{2},$$

dengan $A_1 > 0$ dan $A_2 > 0$ maka didapatkan nilai eigen r_4 dan r_5 yang memiliki bagian real bernilai negatif seperti berikut

- i. Jika $A_1^2 - 4A_2 > 0$, maka $r_{1,2} < 0$ jika $A_1 > 0$ dan $A_2 > 0$,
- ii. Jika $A_1^2 - 4A_2 < 0$, maka $r_{1,2}$ bernilai real negatif jika $A_1 > 0$ dan $A_2 > 0$.

Berdasarkan uraian tersebut, matriks Jacobi $J(E_0, \lambda^*)$ hanya mempunyai satu nilai eigen yang bernilai nol dan nilai eigen yang lain bernilai negatif.

Vektor eigen kanan yang bersesuaian dengan nilai eigen $r_2 = 0$ untuk matriks $J(E_0, \lambda^*)$ adalah

$$\begin{pmatrix} -\delta & b_{12} & \gamma & -k & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta & -(\gamma + \delta) & 0 & 0 \\ \rho\tilde{E} & \rho\tilde{E} & 0 & -\alpha & \rho\tilde{S} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

berdasarkan perhitungan pada Lampiran 3 diperoleh vektor eigen kanan \vec{w} adalah



$$\vec{W} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma\alpha(b_{12}(\gamma + \delta) + \eta\gamma) - \rho Pk(\gamma + \delta)}{(\rho Pk + \delta\sigma\alpha)(\gamma + \delta)} \\ 1 \\ \frac{\eta}{(\gamma + \delta)} \\ \frac{\rho P}{\sigma\alpha}(w_1 + 1) \\ 0 \end{pmatrix}$$

dan vektor eigen kiri yang bersesuaian dengan nilai eigen $r_2 = 0$ untuk matriks $J(E_0, \lambda^*)$

$$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\delta & b_{12} & \gamma & -k & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta & -(\gamma + \delta) & 0 & 0 \\ \rho E & \rho E & 0 & -\alpha & \rho S \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

berdasarkan perhitungan pada Lampiran 2 diperoleh vektor eigen kiri \vec{V} adalah

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya akan ditentukan nilai a dan b berdasarkan Teorema

2.6.1 yaitu

$$\begin{aligned} a &= \sum_{k,l,j=1}^n v_k w_i w_j \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j}(E_0, \lambda^*) = v_2 \sum_{i,j=1}^5 w_i w_j \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_i \partial x_j}(E_0, \lambda^*), \\ &= w_1 w_2 \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_2}(E_0, \lambda^*) + w_2 w_1 \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2 \partial x_1}(E_0, \lambda^*) + \\ & \quad w_2 w_4 \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2 \partial x_4}(E_0, \lambda^*) + w_4 w_2 \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_4 \partial x_2}(E_0, \lambda^*) + 2w_2^2 \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2}(E_0, \lambda^*), \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= 2w_1w_2 \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_2}(E_0, \lambda^*) + 2w_2w_4 \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2 \partial x_4}(E_0, \lambda^*) + 2w_2^2 \frac{\partial^2 f_2}{\partial^2 x_2}(E_0, \lambda^*), \\
 &= 2w_1w_2 \left[\beta + \frac{k\tilde{T}}{\tilde{S}^2} + \frac{\lambda^* \beta \tilde{T}^2}{(b\tilde{S} + \tilde{T})^2} \right] + 2w_2w_4 \left[\frac{b\lambda^* \beta \tilde{S}^2}{(b\tilde{S} + \tilde{T})^2} - \frac{k}{\tilde{S}} \right] + \\
 &\quad 2w_2^2 \left[\frac{k\tilde{T}}{\tilde{S}^2} - \frac{b\lambda^* \beta \tilde{S} \tilde{T}}{(b\tilde{S} + \tilde{T})^2} \right], \\
 b &= \sum_{k,i=1}^n v_k w_i \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial \lambda^*}(E_0, \lambda^*) = v_2 \sum_{k,i=1}^5 w_i \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_i \partial \lambda^*}(E_0, \lambda^*), \\
 &= w_2 \frac{\beta \tilde{S} \tilde{T}}{b\tilde{S} + \tilde{T}} > 0.
 \end{aligned}$$

Berdasarkan nilai vektor eigen kanan dan vektor eigen kiri jika $\alpha < 0$ maka sistem (3.4) mengalami bifurkasi *forward*. Jadi, sistem (3.4) mengalami bifurkasi *forward* karena hanya terdapat satu titik kesetimbangan endemi positif besar ketika $R_0 > 1$ dengan kestabilannya memenuhi kriteria ke-4 dari Teorema 2.6.1 dengan parameter λ .

3.5 Simulasi Numerik

Pada bagian ini disajikan hasil simulasi numerik dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat yang mengacu pada hasil analisis kestabilan titik kesetimbangan. Untuk memperlihatkan kestabilan dari semua titik kesetimbangan, beberapa nilai parameter diambil tetap untuk semua simulasi yang dilakukan. Beberapa nilai parameter yang diambil tetap disajikan pada Tabel 3.2.

Tabel 3.2 Nilai parameter

Parameter	Nilai	Parameter	Nilai
Λ	4×10^4	δ_0	0.1
b	0.4	η	0.2
δ	0.2	P	3
k	0.01	ρ	0.3
γ	0.006	σ	0.5
β	3×10^{-12}	α	0.3

Simulasi numerik untuk menunjukkan kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit menggunakan nilai parameter $\lambda = 50$.

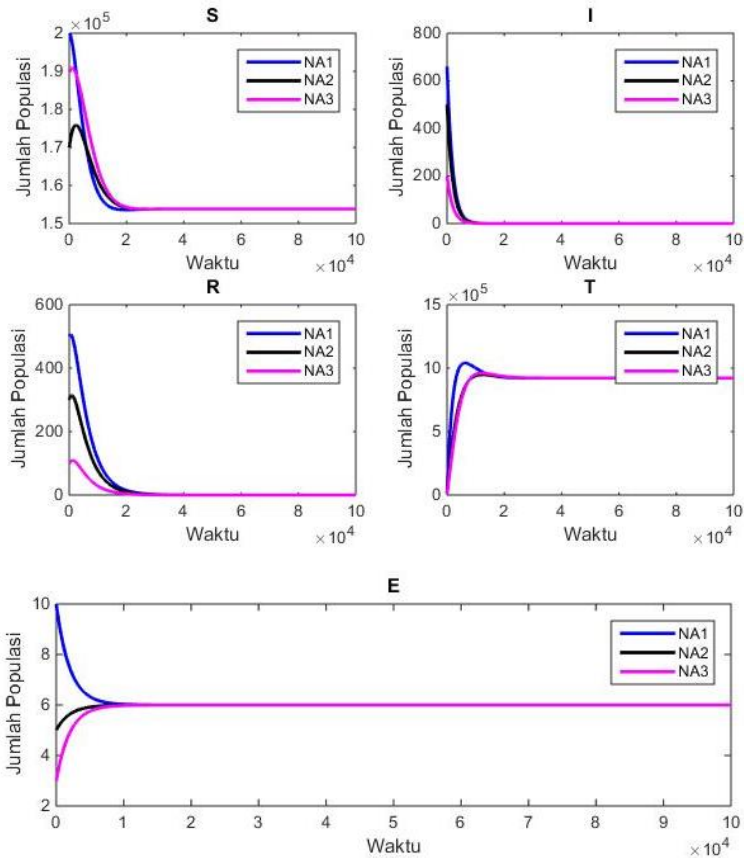


Berdasarkan nilai parameter tersebut diperoleh $E_0 = (153846.1538, 0, 0, 923076.9231, 6)$ dan

$$R_0 = \frac{\beta \Lambda \left(b + \frac{\rho P}{\sigma \alpha} + \frac{\rho \Lambda P}{\sigma \alpha} \right)}{\left(\delta + \frac{k \rho P}{\sigma \alpha} \right) \left(b + \frac{\rho P}{\sigma \alpha} \right) \left(\delta + \delta_0 + \eta + \frac{k \rho P}{\sigma \alpha} \right)} = 0.3945741758 \times 10^{-4} < 1.$$

Diambil tiga nilai awal yang berbeda, yaitu $N_1 = (200000, 660, 500)$, $N_2 = (170000, 500, 300)$, dan $N_3 = (190000, 200, 100)$ untuk menunjukkan simulasi numerik sistem (3.4) dan potret fase solusi pada ruang tiga dimensi.

Solusi numerik sistem (3.4) dengan nilai awal tersebut dapat dilihat pada Gambar 3.2

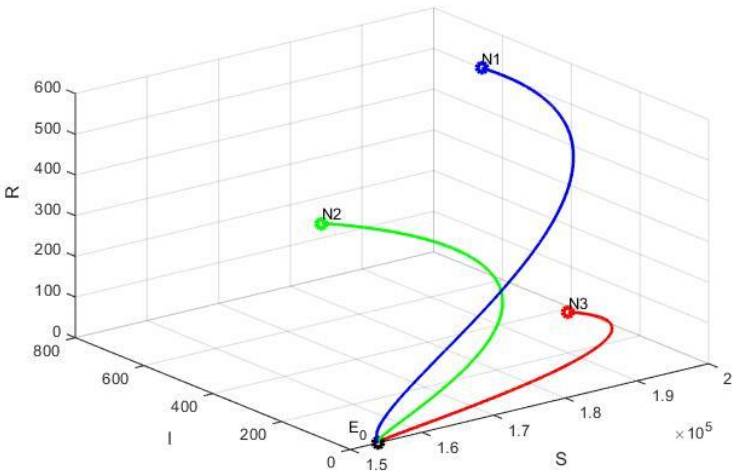


Gambar 3.2 Solusi sistem (3.4) untuk $R_0 < 1$ pada ruang dua dimensi.



Gambar 3.2 menunjukkan seiring dengan berjalannya waktu, jumlah individu pada subpopulasi terinfeksi (I) semakin menurun menuju ke 0, akibatnya jumlah individu sembuh karena pengobatan juga menurun menuju ke 0. Hal ini dapat disimpulkan bahwa tidak terjadi penyebaran penyakit sehingga tidak ada individu sembuh karena pengobatan.

Selanjutnya, potret fase solusi pada ruang dimensi (S, I, R) dengan tiga nilai awal tersebut dapat dilihat pada Gambar 3.3



Gambar 3.3 Potret fase solusi pada ruang (S, I, R) untuk $R_0 < 1$.

Perilaku solusi sistem (3.4) yang disajikan pada Gambar 3.3 menunjukkan bahwa orbit solusi dari tiga nilai awal tersebut menuju ke titik kesetimbangan bebas penyakit E_0 . Hal ini sesuai dengan hasil perhitungan analisis yang menunjukkan bahwa titik kesetimbangan E_0 bersifat stabil asimtotik lokal jika $R_0 < 1$.

Selanjutnya untuk menunjukkan kestabilan titik kesetimbangan E^* diambil nilai parameter $\lambda = 8 \times 10^6$ sedangkan nilai parameter yang lain sama dengan Tabel 3.2, sehingga diperoleh

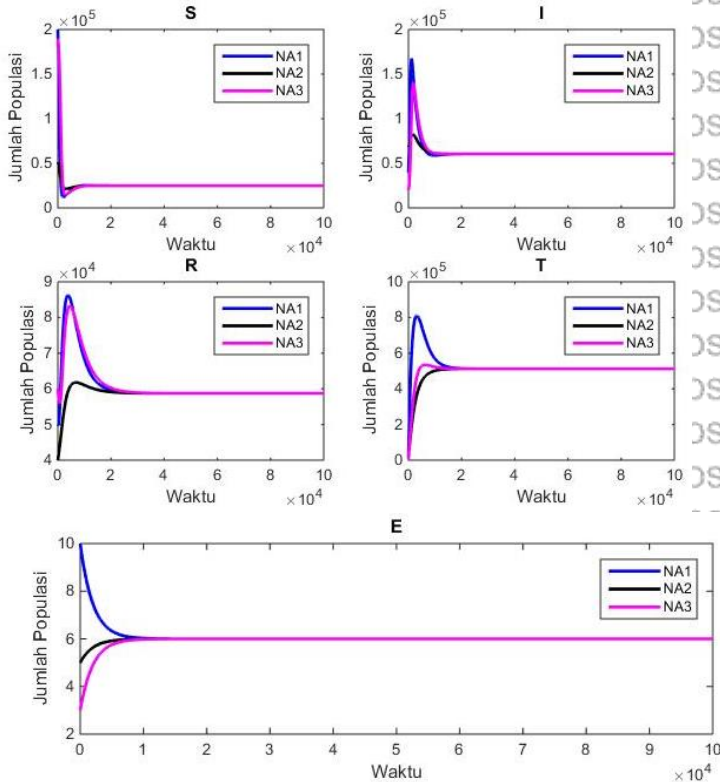
$$R_0 = \frac{\beta \Lambda \left(b + \frac{\rho P}{\sigma \alpha} + \frac{\rho \lambda P}{\sigma \alpha} \right)}{\left(\delta + \frac{k \rho P}{\sigma \alpha} \right) \left(b + \frac{\rho P}{\sigma \alpha} \right) \left(\delta + \delta_0 + \eta + \frac{k \rho P}{\sigma \alpha} \right)} = 6.181319508 > 1.$$



Berdasarkan nilai parameter tersebut, diperoleh dua buah titik kesetimbangan yang eksis yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit yang bersifat tidak stabil dan titik kesetimbangan endemi $E^* = (24388.88556, 60399.14236, 58925.99254, 511728.1677, 6)$.

Selain itu, diperoleh nilai $C_1 = 2.567303652 > 0$, $C_5 = 0.02331096374 > 0$, $D_2 = 5.401429355 > 0$, $D_3 = 4.88116609 > 0$, dan $D_4 = 1.078139304 > 0$ sehingga kriteria Routh-Hurwitz terpenuhi.

Untuk menunjukkan solusi numerik sistem (3.4) dan potret fase pada ruang dimensi (S, I, R) diambil tiga nilai awal yang berbeda yaitu $N_1 = (200000, 40000, 50000)$, $N_2 = (50000, 70000, 90000)$ dan $N_3 = (190000, 20000, 60000)$. Solusi numerik sistem (3.4) dengan nilai awal tersebut dapat dilihat pada Gambar 3.4

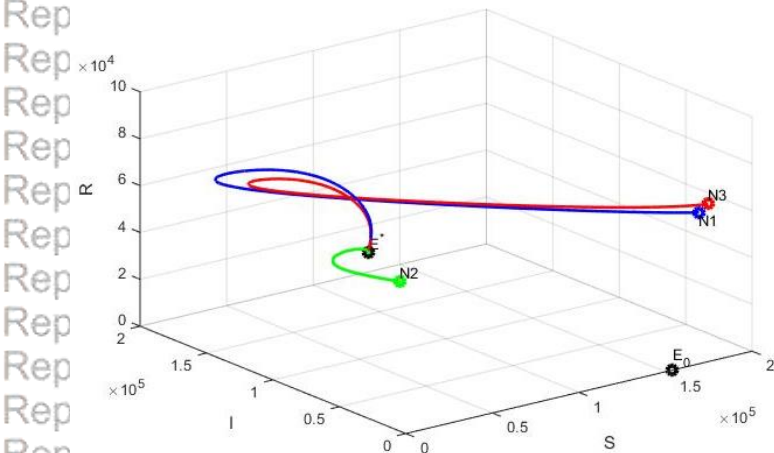


Gambar 3.4 Solusi sistem (3.4) untuk $R_0 > 1$ pada ruang dua dimensi



Gambar 3.4 menunjukkan bahwa seiring berjalannya waktu, jumlah individu subpopulasi terinfeksi menuju titik 60399.14236, dan individu subpopulasi sembuh karena pengobatan menuju titik 58925.99254. Hal tersebut dapat disimpulkan bahwa individu yang terinfeksi penyakit selalu ada, sehingga selalu terjadi penyebaran penyakit.

Selanjutnya, potret solusi tiga dimensi pada ruang (S, I, R) dengan tiga nilai yang berbeda dapat dilihat pada Gambar 3.5.



Gambar 3.5 Potret fase solusi pada ruang (S, I, R) untuk $R_0 > 1$.

Perilaku solusi pada Gambar 3.5 menunjukkan bahwa orbit solusi menuju ke titik kesetimbangan endemi E^* . Hal ini sesuai dengan perhitungan analisis yang menyatakan bahwa titik kesetimbangan E^* bersifat stabil asimtotik lokal jika $R_0 > 1$.

Berdasarkan nilai parameter pada Tabel 3.2 diperoleh nilai parameter bifurkasi *forward* $\lambda^* = 1.29 \times 10^6$. Jika diambil $\lambda = 50 < \lambda^*$ maka terdapat titik kesetimbangan bebas penyakit yang eksis dan bersifat stabil asimtotik lokal, sedangkan jika $\lambda = 8 \times 10^6 > \lambda^*$ titik kesetimbangan bebas penyakit tidak stabil dan muncul titik kesetimbangan endemi yang bersifat stabil asimtotik lokal.



BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan tujuan pembahasan, dapat diambil kesimpulan sebagai berikut.

1. Model epidemi dengan pengaruh racun berbentuk sistem persamaan diferensial nonlinear dengan lima subpopulasi, yaitu subpopulasi rentan (S), subpopulasi terinfeksi (I), subpopulasi sembuh karena pengobatan (R), jumlah racun dalam total populasi (T), dan jumlah racun dalam lingkungan (E).
2. Model epidemi dengan pengaruh racun memiliki dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemi. Eksistensi titik kesetimbangan dipengaruhi oleh R_0 . Jika $R_0 < 1$ maka hanya terdapat satu titik kesetimbangan yang eksis, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit. Jika $R_0 > 1$ maka terdapat dua titik kesetimbangan yang eksis, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemi. Titik kesetimbangan bebas penyakit eksis tanpa syarat dan bersifat stabil asimtotik lokal jika $R_0 < 1$, sedangkan titik kesetimbangan endemi eksis ketika $R_0 > 1$ dan bersifat stabil asimtotik lokal jika memenuhi kriteria Routh-Hurwitz.
3. Titik kesetimbangan bebas penyakit mengalami perubahan kestabilan ketika $R_0 = 1$ dengan λ^* adalah parameter bifurkasi. Jika diambil $\lambda < \lambda^*$ maka terdapat titik kesetimbangan bebas penyakit yang eksis dan bersifat stabil asimtotik lokal, sedangkan jika $\lambda > \lambda^*$ titik kesetimbangan bebas penyakit tidak stabil dan muncul titik kesetimbangan endemi yang bersifat stabil asimtotik lokal.
4. Simulasi numerik yang dilakukan menunjukkan hasil yang sesuai dengan hasil analisis.

Saran

Pada penelitian selanjutnya disarankan dilakukan analisis kestabilan global titik kesetimbangan dan dilakukan kontrol optimal pada model.





DAFTAR PUSTAKA

- Alligood, K. T., T. D. Sauer, dan J. A. Yorke. 2000. *An Introduction to Dynamical System*. Springer-Verlag, New York.
- Boyce, W. E. dan R. C. Diprima. 2012. *Elementary Differential Equation*. Ninth Edition. John Wiley & Sons, Inc. United State of America.
- Brauer, F. dan C. C. Chavez. 2012. *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*. Second Edition. Texts in Applied Mathematics. Springer-Verlag, New York.
- Castillo-Chaves, C. dan B. Song. 2004. Dynamical Models of Tuberculosis and Their Applications. *Mathematical Biosciences and Engineering*. 1(2):361-404.
- Chauhan S, S. K. Bhatia dan S. Gupta. 2015. Effect of Pollution on Dynamics of SIR Model with Treatment. *International Journal of Biomathematics*. 8(6):1-20.
- Finizio, N. dan G. Lades. 1982. *An Introduction to Differential Equation*. Sixth Edition. Perason Education, Inc. New Jersey.
- Heffernan, J. M., R. J. Smith, dan L. M. Wahl. 2005. Perspective on the Basic Reproductive Rasio. *Journal of the Royal Society Interface*. 2:281-293.
- Kuznetsov, Y. A. 2004. *Introduction to Dynamical System*. In: Elements of Applied Bifurcation Theory. Applied Mathematical Science. 112: 17-34.
- Liu, B, Y. Duan, dan S. Luan. 2012. Dynamics of an SI Epidemic Model with External Effects in a Polluted Environment. *Nonlinear Analysis*. 13: 27-38.
- Murray, J. D. 2002. *Mathematical Biology I: An Introduction*. Third Edition. Springer-Verlag, New York.



Nagle, R. K., E. B. Saff, dan A. D. Snider. 2012. *Fundamentals of Differential Equation*. Eight Edition. Person Education, Inc. Boston.

Panvilov, A. 2000. *Qualitative Analysis of Differential Equation*. Uterecht University. Uterecht.

Saha, S. dan G. P. Samanta. 2019. Dynamics of an Epidemic with Impact of Toxins. *Physica A*. 527: 121-152.

Wang, F. dan Z. Ma. 2004. Persistence and Periodic Orbits for an SIS Model in a Polluted Environment. *Computers and Mathematics with Applications*. 47: 779-792.



LAMPIRAN

Lampiran 1. Perhitungan titik kesetimbangan endemi I_1

Substitusi persamaan (3.6), (3.11) dan (3.12) ke persamaan (3.4a), menghasilkan

$$\Lambda - \left(\frac{b\sigma\alpha + \rho P + \rho P\lambda}{b\sigma\alpha + \rho P} \right) \left(\frac{\Lambda}{R_0 \left(\delta + \frac{kP\rho}{\sigma\alpha} \right)} \right) \beta I - \frac{\Lambda}{R_0} + \frac{\gamma\eta I}{(\gamma + \delta)} = 0,$$

$$\beta I \left(\frac{b\sigma\alpha + \rho P + \rho P\lambda}{b\sigma\alpha + \rho P} \right) \left(\frac{\Lambda}{R_0 \left(\delta + \frac{kP\rho}{\sigma\alpha} \right)} \right) - \frac{\gamma\eta I}{(\gamma + \delta)} = \Lambda - \frac{\Lambda}{R_0},$$

$$\beta I \left(\frac{b + \frac{\rho P}{\sigma\alpha} + \frac{\rho P\lambda}{\sigma\alpha}}{b + \frac{\rho P}{\sigma\alpha}} \right) \left(\frac{\Lambda}{R_0 \left(\delta + \frac{kP\rho}{\sigma\alpha} \right)} \right) - \frac{\gamma\eta I}{(\gamma + \delta)} = \Lambda - \frac{\Lambda}{R_0},$$

$$I \left(\frac{R_0(\delta + \delta_0 + \eta + \frac{kP\rho}{\sigma\alpha})(\delta + \frac{kP\rho}{\sigma\alpha})}{\Lambda} \right) \left(\frac{\Lambda}{R_0 \left(\delta + \frac{kP\rho}{\sigma\alpha} \right)} \right) - \frac{\gamma\eta I}{(\gamma + \delta)} = \Lambda \left(1 - \frac{1}{R_0} \right),$$

$$I \left(\frac{(\delta + \delta_0 + \eta + \frac{kP\rho}{\sigma\alpha})(\gamma + \delta) - \gamma\eta}{(\gamma + \delta)} \right) = \Lambda \left(1 - \frac{1}{R_0} \right),$$



$$\begin{aligned}
 I & \left(\frac{(\gamma + \delta) \left(\delta + \delta_0 + \frac{kP\rho}{\sigma\alpha} \right) + \eta(\gamma + \delta) - \gamma\eta}{(\gamma + \delta)} \right) = \Lambda \left(1 - \frac{1}{R_0} \right), \\
 I & \left(\gamma\eta + \delta\eta + (\gamma + \delta) \left(\delta + \delta_0 + \frac{kP\rho}{\sigma\alpha} \right) - \gamma\eta \right) = \Lambda(\gamma + \delta) \left(1 - \frac{1}{R_0} \right), \\
 I & = \frac{\Lambda(\gamma + \delta)}{\delta\eta + (\gamma + \delta) \left(\delta + \delta_0 + \frac{kP\rho}{\sigma\alpha} \right)} \left(1 - \frac{1}{R_0} \right). \quad (3.13)
 \end{aligned}$$



Lampiran 2. Analisis kestabilan lokal titik kesetimbangan endemi

Matriks Jacobi sistem (3.4) di titik kesetimbangan $E^* = (S_1, I_1, R_1, T_1, E_1)$ adalah

$$J(E^*) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & a_{24} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} \end{pmatrix}$$

Berdasarkan matriks $J(E^*)$, persamaan karakteristik dapat diperoleh dengan menyelesaikan persamaan

$$|J(E^*) - rI| = 0,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} - r & a_{12} & a_{13} & a_{14} & 0 \\ a_{21} & a_{22} - r & 0 & a_{24} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} - r & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & a_{44} - r & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} - r \end{vmatrix} = 0,$$

$$(a_{55} - r) \begin{vmatrix} a_{11} - r & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} - r & 0 & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} - r & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & a_{44} - r \end{vmatrix} = 0,$$



$$(a_{55} - r) \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} - r & a_{24} \\ (a_{13}) \begin{pmatrix} 0 & a_{32} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} - r \end{pmatrix} \end{pmatrix} + (a_{33} - r) \begin{pmatrix} a_{11} - r & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} - r & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} - r \end{pmatrix} = 0,$$

$$(a_{55} - r)(a_{13}a_{32}(a_{21}(a_{44} - r) - a_{24}a_{41}) + (a_{33} - r)((a_{11} - r)((a_{22} - r)(a_{44} - r) - a_{24}a_{42}) - a_{12}(a_{21}(a_{44} - r) - a_{24}a_{41}) + a_{14}(a_{21}a_{42} - a_{41}(a_{22} - r)))) = 0,$$

$$(a_{55} - r)(a_{13}a_{32}(a_{21}a_{44} - a_{21}r - a_{24}a_{41}) + (a_{33} - r)((a_{11} - r)(a_{22}a_{44} - a_{24}a_{42} - r(a_{22} + a_{44}) + r^2) - a_{12}(a_{21}a_{44} - a_{24}a_{41} - a_{21}r) + a_{14}(a_{21}a_{42} - a_{41}a_{22} + a_{41}r))) = 0,$$

$$(a_{55} - r)(a_{13}a_{32}(a_{21}a_{44} - a_{21}r - a_{24}a_{41}) + (a_{33} - r)((a_{11}a_{22}a_{44} - a_{11}a_{24}a_{42} - r(a_{11}a_{22} + a_{11}a_{44} + a_{22}a_{44} - a_{24}a_{42}) + r^2(a_{11} + a_{22} + a_{44}) - r^3) - (a_{12}a_{21}a_{44} - a_{12}a_{24}a_{41} - a_{12}a_{21}r) + (a_{14}a_{21}a_{42} - a_{14}a_{41}a_{22} + a_{14}a_{41}r))) = 0,$$

$$(a_{55} - r)(a_{13}a_{32}a_{21}a_{44} - a_{13}a_{32}a_{21}r - a_{13}a_{32}a_{24}a_{41} + a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}a_{33}a_{24}a_{42} - r(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{11}a_{44}a_{33} + a_{22}a_{33}a_{44} - a_{24}a_{42}a_{33}) + r^2(a_{11}a_{33} + a_{22}a_{33} + a_{44}a_{33}) - a_{33}r^3 - a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} + a_{12}a_{21}a_{33}r + a_{12}a_{24}a_{41}a_{33} + a_{14}a_{21}a_{42}a_{33} - a_{14}a_{41}a_{22}a_{33} + a_{14}a_{41}a_{33}r - a_{11}a_{22}a_{44}r + a_{11}a_{24}a_{42}r + r^2(a_{11}a_{22} + a_{11}a_{44} + a_{22}a_{44} - a_{24}a_{42}) - r^3(a_{11} + a_{22} + a_{44}) + r^4 + a_{12}a_{21}a_{44}r - a_{12}a_{24}a_{41}r - a_{12}a_{21}r^2 - a_{14}a_{21}a_{42}r + a_{14}a_{41}a_{22}r - a_{14}a_{41}r^2) = 0,$$



$$\begin{aligned} & (a_{55} - r)(r^4 - r^3(a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44}) + r^2(a_{11}a_{33} + a_{22}a_{33} + a_{44}a_{33} + a_{11}a_{22} + a_{11}a_{44} + a_{22}a_{44} - \\ & a_{24}a_{42} - a_{12}a_{21} - a_{14}a_{41}) + r(a_{12}a_{21}a_{33} + a_{14}a_{41}a_{33} + a_{11}a_{24}a_{42} + a_{12}a_{21}a_{44} + a_{14}a_{41}a_{22} + a_{24}a_{42}a_{33} - \\ & a_{13}a_{32}a_{21} - a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{44}a_{33} - a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}a_{22}a_{44} - a_{12}a_{24}a_{41} - a_{14}a_{21}a_{42}) + (a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + \\ & a_{12}a_{24}a_{41}a_{33} + a_{14}a_{21}a_{42}a_{33} + a_{13}a_{32}a_{21}a_{44} - a_{13}a_{32}a_{24}a_{41} - a_{11}a_{33}a_{24}a_{42} - a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} - \\ & a_{14}a_{41}a_{22}a_{33})) = 0. \end{aligned}$$

Dari uraian di atas diperoleh persamaan $(a_{55} - r)(r^4 + C_1r^3 + C_2r^2 + C_3r + C_4) = 0$,
dengan

$r = a_{55}$ dan

$$C_1 = -(a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44}),$$

$$\begin{aligned} C_2 &= a_{11}a_{33} + a_{22}a_{33} + a_{44}a_{33} + a_{11}a_{22} + a_{11}a_{44} + a_{22}a_{44} - a_{24}a_{42} - a_{12}a_{21} - a_{14}a_{41}, \\ &= (a_{11} + a_{33})(a_{22} + a_{44}) + a_{11}a_{33} + a_{22}a_{44} - a_{12}a_{21} - a_{24}a_{42} - a_{14}a_{41}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_3 &= a_{12}a_{21}a_{33} + a_{14}a_{41}a_{33} + a_{11}a_{24}a_{42} + a_{12}a_{21}a_{44} + a_{14}a_{41}a_{22} + a_{24}a_{42}a_{33} - a_{13}a_{32}a_{21} - a_{11}a_{22}a_{33} \\ & - a_{11}a_{44}a_{33} - a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}a_{22}a_{44} - a_{12}a_{24}a_{41} - a_{14}a_{21}a_{42}, \\ &= -(a_{11} + a_{33})(a_{22}a_{44} - a_{24}a_{42}) - a_{11}a_{33}(a_{22} + a_{44}) + a_{12}a_{21}(a_{33} + a_{44}) - a_{12}a_{24}a_{41} - a_{13}a_{32}a_{21} \\ & - a_{14}a_{21}a_{42} + a_{14}a_{41}(a_{22} + a_{33}), \end{aligned}$$

$$C_4 = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + a_{12}a_{24}a_{41}a_{33} + a_{14}a_{21}a_{42}a_{33} + a_{13}a_{32}a_{21}a_{44} - a_{13}a_{32}a_{24}a_{41} - a_{11}a_{33}a_{24}a_{42}$$



$$\begin{aligned}
 & -a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} - a_{14}a_{41}a_{22}a_{33}, \\
 = & a_{11}a_{33}(a_{22}a_{44} - a_{24}a_{42}) - a_{12}a_{33}(a_{21}a_{44} - a_{24}a_{41}) - a_{13}a_{32}(a_{24}a_{41} - a_{21}a_{44}) - a_{14}a_{33}(a_{41}a_{22}, \\
 & -a_{21}a_{42}).
 \end{aligned}$$



Lampiran 3. Perhitungan vektor eigen kanan \vec{W} dan vektor eigen kiri \vec{V}

Vektor eigen kanan yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_2 = 0$ untuk matriks $J(E_0, \lambda^*)$ adalah

$$\begin{pmatrix} -\delta & b_{12} & \gamma & -k & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta & -(\gamma + \delta) & 0 & 0 \\ \frac{\rho P}{\sigma} & \frac{\rho P}{\sigma} & 0 & -\alpha & \frac{\rho \Lambda \sigma \alpha}{\delta \sigma \alpha + k P \rho} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (L.3.1)$$

dengan $b_{12} = -\beta \tilde{S} - \frac{\lambda^* \tilde{T} \beta \tilde{S}}{b \tilde{S} + \tilde{T}} + \frac{k \tilde{T}}{\tilde{S}}$,

$$b_{22} = \beta \tilde{S} + \frac{\lambda^* \tilde{T} \beta \tilde{S}}{b \tilde{S} + \tilde{T}} - \left(\delta + \delta_0 + \eta + \frac{k \tilde{T}}{\tilde{S}} \right),$$

$$= \frac{\beta \Lambda \sigma \alpha}{(\delta \sigma \alpha + k P \rho)} + \frac{\lambda^* P \Lambda \rho}{(\delta \sigma \alpha + k P \rho)} \frac{\beta \Lambda \sigma \alpha}{(\delta \sigma \alpha + k P \rho)} - \left(\delta + \delta_0 + \eta + \frac{k P \Lambda \rho}{\Lambda \sigma} \frac{(\delta \sigma \alpha + k P \rho)}{(\delta \sigma \alpha + k P \rho)} \right),$$

$$= \frac{\beta \Lambda \sigma \alpha}{(\delta \sigma \alpha + k P \rho)} + \frac{\lambda^* P \Lambda \rho \beta \Lambda \sigma \alpha}{(\delta \sigma \alpha + k P \rho)^2} \frac{(\delta \sigma \alpha + k P \rho)}{(b \Lambda \sigma \alpha + P \Lambda \rho)} - \left(\delta + \delta_0 + \eta + \frac{k P \rho}{\sigma \alpha} \right),$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{\beta\Lambda\sigma\alpha}{(\delta\sigma\alpha + kP\rho)} + \frac{\lambda^*P\Lambda\rho\beta\sigma\alpha}{(\delta\sigma\alpha + kP\rho)(b\sigma\alpha + P\rho)} - \left(\delta + \delta_0 + \eta + \frac{kP\rho}{\sigma\alpha}\right), \\
 &= \frac{\beta\Lambda\sigma\alpha}{(\delta\sigma\alpha + kP\rho)} \left(1 + \frac{P\lambda^*\rho}{(b\sigma\alpha + kP\rho)}\right) - \left(\delta + \delta_0 + \eta + \frac{kP\rho}{\sigma\alpha}\right), \\
 &= \frac{\beta\Lambda\sigma\alpha}{(\delta\sigma\alpha + kP\rho)} \left(\frac{b\sigma\alpha + kP\rho + P\lambda^*\rho}{(b\sigma\alpha + kP\rho)}\right) - \left(\delta + \delta_0 + \eta + \frac{kP\rho}{\sigma\alpha}\right), \\
 &= \frac{\beta\Lambda}{\left(\delta + \frac{kP\rho}{\sigma\alpha}\right)} \left(\frac{b + \frac{kP\rho}{\sigma\alpha} + \frac{P\lambda^*\rho}{\sigma\alpha}}{\left(b + \frac{kP\rho}{\sigma\alpha}\right)}\right) - \left(\delta + \delta_0 + \eta + \frac{kP\rho}{\sigma\alpha}\right), \\
 &= \left(\frac{R_0 \left(\delta + \delta_0 + \eta + \frac{kP\rho}{\sigma\alpha}\right) \left(b + \frac{kP\rho}{\sigma\alpha}\right)}{b + \frac{kP\rho}{\sigma\alpha} + \frac{P\lambda^*\rho}{\sigma\alpha}}\right) \left(\frac{b + \frac{kP\rho}{\sigma\alpha} + \frac{P\lambda^*\rho}{\sigma\alpha}}{\left(b + \frac{kP\rho}{\sigma\alpha}\right)}\right) - \left(\delta + \delta_0 + \eta + \frac{kP\rho}{\sigma\alpha}\right), \\
 &= R_0 \left(\delta + \delta_0 + \eta + \frac{kP\rho}{\sigma\alpha}\right) - \left(\delta + \delta_0 + \eta + \frac{kP\rho}{\sigma\alpha}\right) = (R_0 - 1) \left(\delta + \delta_0 + \eta + \frac{kP\rho}{\sigma\alpha}\right)
 \end{aligned}$$



Persamaan (L.3.1) dapat diuraikan menjadi

$$-\delta w_1 + b_{12}w_2 + \gamma w_3 - kw_4 = 0, \quad (L.3.1a)$$

$$b_{22}w_2 = 0, \quad (L.3.1b)$$

$$\eta w_2 - (\gamma + \delta)w_3 = 0, \quad (L.3.1c)$$

$$\frac{\rho P}{\sigma} w_1 + \frac{\rho P}{\sigma} w_2 - \alpha w_4 + \frac{\rho \Lambda \sigma \alpha}{\delta \sigma \alpha + k P \rho} w_5 = 0, \quad (L.3.1d)$$

$$-\sigma w_5 = 0. \quad (L.3.1e)$$

Dari persamaan (L.3.1c) dan (L.3.1d) diperoleh

$$w_3 = \frac{\eta w_2}{(\gamma + \delta)}, \quad (L.3.2)$$

$$w_5 = \frac{\delta \sigma \alpha + k P \rho}{\rho \Lambda \sigma \alpha} \left(\alpha w_4 - \frac{\rho P}{\sigma} w_1 - \frac{\rho P}{\sigma} w_2 \right), \quad (L.3.3)$$

substitusi persamaan (L.3.3) ke persamaan (L.3.1e) menghasilkan

$$-\sigma \left(\frac{\delta \sigma \alpha + k P \rho}{\rho \Lambda \sigma \alpha} \left(\alpha w_4 - \frac{\rho P}{\sigma} w_1 - \frac{\rho P}{\sigma} w_2 \right) \right) = 0,$$



$$\frac{\delta\sigma\alpha + kP\rho}{\rho\Lambda\alpha} \left(\alpha w_4 - \frac{\rho P}{\sigma} w_1 - \frac{\rho P}{\sigma} w_2 \right) = 0.$$

Oleh karena $\frac{\delta\sigma\alpha + kP\rho}{\rho\Lambda\alpha} \neq 0$, maka $\left(\alpha w_4 - \frac{\rho P}{\sigma} w_1 - \frac{\rho P}{\sigma} w_2 \right) = 0$, sehingga diperoleh

$$w_4 = \frac{\rho P}{\sigma\alpha} w_1 + \frac{\rho P}{\sigma\alpha} w_2. \quad (L.3.4)$$

Jika persamaan (L.3.2) disubstitusikan ke persamaan (L.3.1a) diperoleh

$$-\delta w_1 + b_{12} w_2 + \gamma \left(\frac{\eta w_2}{\gamma + \delta} \right) - k w_4 = 0,$$

$$w_2 \left(\frac{b_{12}(\gamma + \delta) + \gamma\eta}{(\gamma + \delta)} \right) = k w_4 + \delta w_1,$$

$$w_4 = \frac{-\delta}{k} w_1 + w_2 \left(\frac{b_{12}(\gamma + \delta) + \gamma\eta}{k(\gamma + \delta)} \right). \quad (L.3.5)$$

Dari persamaan (L.3.4) dan (L.3.5) diperoleh

$$\frac{\rho P}{\sigma\alpha} w_1 + \frac{\rho P}{\sigma\alpha} w_2 = \frac{-\delta}{k} w_1 + w_2 \left(\frac{b_{12}(\gamma + \delta) + \gamma\eta}{k(\gamma + \delta)} \right),$$



$$w_2 \left(\frac{b_{12}(\gamma + \delta) + \gamma\eta}{k(\gamma + \delta)} \right) - \frac{\rho P}{\sigma\alpha} w_2 = \frac{\rho P}{\sigma\alpha} w_1 + \frac{\delta}{k} w_1$$

$$w_2 \left(\frac{\sigma\alpha(b_{12}(\gamma + \delta) + \gamma\eta) - \rho Pk(\gamma + \delta)}{\sigma\alpha k(\gamma + \delta)} \right) = w_1 \left(\frac{\rho Pk + \delta\sigma\alpha}{\sigma\alpha k} \right)$$

$$w_2 \left(\frac{\sigma\alpha(b_{12}(\gamma + \delta) + \gamma\eta) - \rho Pk(\gamma + \delta)}{(\gamma + \delta)} \right) = w_1(\rho Pk + \delta\sigma\alpha),$$

$$w_2 = w_1 \frac{(\rho Pk + \delta\sigma\alpha)(\gamma + \delta)}{\sigma\alpha(b_{12}(\gamma + \delta) + \gamma\eta) - \rho Pk(\gamma + \delta)}$$

Ambil $w_1 = \frac{\sigma\alpha(b_{12}(\gamma + \delta) + \gamma\eta) - \rho Pk(\gamma + \delta)}{(\rho Pk + \delta\sigma\alpha)(\gamma + \delta)}$, akibatnya

$$w_2 = 1.$$

Selanjutnya, substitusi persamaan (L.3.6) ke persamaan (L.3.2) dan (L.3.4) menghasilkan

$$w_3 = \frac{\eta w_2}{(\gamma + \delta)} = \frac{\eta}{(\gamma + \delta)}, \quad (L.3.7)$$

dan

$$w_4 = \frac{\rho P}{\sigma\alpha} w_1 + \frac{\rho P}{\sigma\alpha} = \frac{\rho P}{\sigma\alpha} (w_1 + 1). \quad (L.3.8)$$



Jika persamaan (L. 3.6) dan (L. 3.8) disubstitusi ke persamaan (L. 3.3), maka diperoleh

$$w_5 = \frac{\delta\sigma\alpha + kP\rho}{\rho\Lambda\sigma\alpha} \left(\alpha w_4 - \frac{\rho P}{\sigma} w_1 - \frac{\rho P}{\sigma} w_2 \right),$$

$$w_5 = \frac{\delta\sigma\alpha + kP\rho}{\rho\Lambda\sigma\alpha} \left(\alpha \left(\frac{\rho P}{\sigma\alpha} w_1 + \frac{\rho P}{\sigma\alpha} \right) - \frac{\rho P}{\sigma} w_1 - \frac{\rho P}{\sigma} \right),$$

$$w_5 = \frac{\delta\sigma\alpha + kP\rho}{\rho\Lambda\sigma\alpha} \left(\frac{\rho P}{\sigma} w_1 + \frac{\rho P}{\sigma} - \frac{\rho P}{\sigma} w_1 - \frac{\rho P}{\sigma} \right),$$

$$w_5 = 0.$$

Dari penjelasan di atas diperoleh vektor eigen kanan \vec{W} yaitu

$$(w_1, w_2, w_3, w_4, w_5)^T = \left(\frac{\sigma\alpha(b_{12}(\gamma + \delta) + \eta\gamma) - \rho Pk(\gamma + \delta)}{(\rho Pk + \delta\sigma\alpha)(\gamma + \delta)}, 1, \frac{\eta}{(\gamma + \delta)}, \frac{\rho P}{\sigma\alpha} (w_1 + 1), 0 \right).$$



Vektor eigen kiri yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_2 = 0$ untuk matriks $J(E_0, \lambda^*)$ adalah

$$(v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4 \ v_5) \begin{pmatrix} -\delta & b_{12} & \gamma & -k & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta & -(\gamma + \delta) & 0 & 0 \\ \frac{\rho P}{\sigma} & \frac{\rho P}{\sigma} & 0 & -\alpha & \frac{\rho \Lambda \sigma \alpha}{\delta \sigma \alpha + k P \rho} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (L.3.9)$$

Jika persamaan (L.2.8) diuraikan, maka diperoleh

$$-\delta v_1 + \frac{\rho P}{\sigma} v_4 = 0, \quad (L.3.9a)$$

$$b_{12} v_1 + b_{22} v_2 + \eta v_3 + \frac{\rho P}{\sigma} v_4 = 0, \quad (L.3.9b)$$

$$\gamma v_1 - (\gamma + \delta) v_3 = 0, \quad (L.3.9c)$$

$$-k v_1 - \alpha v_4 = 0, \quad (L.3.9d)$$

$$\frac{\rho \Lambda \sigma \alpha}{\delta \sigma \alpha + k P \rho} v_4 - \sigma v_5 = 0. \quad (L.3.9e)$$



Dari persamaan (L.3.9a) diperoleh

$$v_4 = \frac{\delta\sigma}{\rho P} v_1. \quad (L.3.10)$$

Jika persamaan (L.3.10) disubstitusikan ke persamaan (L.3.9d), maka diperoleh

$$-kv_1 - \frac{\alpha\delta\sigma}{\rho P} v_1 = 0, \\ v_1 = 0, \quad (L.3.11)$$

dan jika persamaan (L.3.11) disubstitusikan ke persamaan (L.3.10) diperoleh

$$v_4 = 0. \quad (L.3.12)$$

Selanjutnya, substitusi persamaan (L.3.11) ke persamaan (L.3.9c) menghasilkan

$$v_3 = 0, \quad (L.3.13)$$

dan substitusi persamaan (L.3.12) ke persamaan (L.3.9e), mengakibatkan

$$v_5 = 0. \quad (L.3.14)$$



Jika persamaan (L. 3.11), (L. 3.12) dan (L. 3.13) disubstitusi ke persamaan (L. 3.9b), maka diperoleh

$$b_{22}v_2 = 0, \text{ atau}$$

$$(R_0 - 1) \left(\delta + \delta_0 + \eta + \frac{k\rho\rho}{\sigma\alpha} \right) v_2 = 0.$$

Jika $R_0 = 1$, maka $b_{22} = 0$, selanjutnya, ambil sembarang nilai untuk v_2 , yaitu $v_2 = 1$.

Dari uraian di atas diperoleh vektor eigen kiri \vec{V} adalah

$$(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)^T = (0, 1, 0, 0, 0).$$

