



**ANALISIS DINAMIK MODEL SEIQR PADA PENYEBARAN
CORONAVIRUS DISEASE 2019 (COVID-19)**

SKRIPSI

oleh

HABIB HAFADZI TITO

175090401111034



**PROGRAM STUDI SARJANA MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2021**



**ANALISIS DINAMIK MODEL SEIQR PADA PENYEBARAN
CORONAVIRUS DISEASE 2019 (COVID-19)**

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Matematika

oleh

HABIB HAFADZI TITO

175090401111034



**PROGRAM STUDI SARJANA MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA**

MALANG

2021

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

Analisis Dinamik Model SEIQR Pada Penyebaran *Coronavirus Disease* 2019 (COVID-19)

oleh
Habib Hafadzi Tito
175090401111034

**Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Matematika
pada tanggal 27 Mei 2021**

Pembimbing



Dr. Isnani Darti, S.Si., M.Si.
NIP. 197312162002122001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya



Syaiful Anam, S.Si., MT., Ph.D.
NIP. 197801152002121003



LEMBAR PERNYATAAN
Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Habib Hafadzi Tito
NIM : 175090401111034
Jurusan : Matematika
Penulis Skripsi berjudul : Analisis Dinamik Model SEIQR
pada penyebaran *Coronavirus*
Disease 2019 (COVID-19)

dengan ini menyatakan bahwa:

1. Skripsi yang saya buat adalah hasil dari pemikiran saya, bukan hasil menjiplak dari tulisan orang lain. Rujukan-rujukan yang tercantum pada Daftar Pustaka hanya digunakan sebagai acuan.
2. Apabila di kemudian hari skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala risiko akibat dari keadaan tersebut.

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 27 Mei 2021
yang menyatakan,

Habib Hafadzi Tito
NIM. 175090401111034



ANALISIS DINAMIK MODEL SEIQR PADA PENYEBARAN CORONAVIRUS DISEASE 2019 (COVID-19)

ABSTRAK

Pada skripsi ini dibahas konstruksi dan analisis dinamik model SEIQR pada penyebaran COVID-19. Model ini terdiri dari lima subpopulasi yaitu subpopulasi rentan (S), terpapar (E), terinfeksi (I), terinfeksi yang dikarantina (Q), dan subpopulasi sembuh (R). Analisis dinamik yang dilakukan adalah menentukan titik kesetimbangan, mencari angka reproduksi dasar (\mathcal{R}_0), serta analisis kestabilan titik kesetimbangan. Hasil analisis dinamik menunjukkan model memiliki dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik. Titik kesetimbangan bebas penyakit bersifat stabil asimtotik lokal dan global jika $\mathcal{R}_0 < 1$. Titik kesetimbangan endemik bersifat stabil asimtotik lokal jika $\mathcal{R}_0 > 1$. Simulasi numerik yang dilakukan mendukung hasil analisis dinamik yang diperoleh.

Kata Kunci: Model SEIQR, COVID-19, titik kesetimbangan, angka reproduksi dasar, analisis kestabilan.



DYNAMICAL ANALYSIS OF SEIQR MODEL ON CORONAVIRUS DISEASE 2019 (COVID-19) SPREAD

ABSTRACT

This final project discusses the construction and dynamical analysis of SEIQR model on COVID-19 spread. This model consists of five subpopulations, namely susceptible (S), exposed (E), infected (I), isolated (Q), and recovered (R) subpopulation. Dynamical analysis performed by finding the equilibrium points, basic reproduction number (\mathcal{R}_0), also analyzing of stability of equilibrium points. Dynamical analysis shows that there are two equilibrium points, namely the disease-free equilibrium point and endemic equilibrium point. The disease-free equilibrium is asymptotically stable both locally and globally if $\mathcal{R}_0 < 1$. The endemic equilibrium is locally asymptotically stable if $\mathcal{R}_0 > 1$. Numerical simulation supports the results of the dynamical analysis.

Keywords: *SEIQR model, COVID-19, equilibrium points, basic reproduction number, stability analysis.*



DAFTAR ISI

	Halaman
JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI	iii
LEMBAR PERNYATAAN	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR GAMBAR	xv
DAFTAR TABEL	xvii
DAFTAR LAMPIRAN	xix
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	3
1.3 Tujuan.....	3
BAB II DASAR TEORI	5
2.1 Persamaan Diferensial	5
2.2 Sistem Persamaan Diferensial.....	5
2.3 Sistem Dinamik.....	6
2.3.1 Sistem <i>autonomous</i>	6
2.3.2 Sistem <i>autonomous</i> linear.....	7
2.3.3 Sistem <i>autonomous</i> nonlinear.....	9
2.4 Angka Reproduksi Dasar	10
2.5 Matriks Generasi Selanjutnya.....	10
2.6 Kriteria Routh-Hurwitz.....	11
2.7 Fungsi Lyapunov	12
2.8 Model Epidemik.....	13
2.9 Metode Runge Kutta Orde-4.....	14
BAB III PEMBAHASAN	15
3.1 Konstruksi Model	15
3.1.1 Laju perubahan subpopulasi rentan.....	16
3.1.2 Laju perubahan subpopulasi terpapar.....	16
3.1.3 Laju perubahan subpopulasi terinfeksi.....	17
3.1.4 Laju perubahan subpopulasi karantina.....	17
3.1.5 Laju perubahan subpopulasi sembuh.....	18



3.2	Titik Keseimbangan Model dan Angka Reproduksi Dasar	19
3.3	Analisis Kestabilan Lokal	24
3.3.1	Kestabilan lokal titik keseimbangan bebas penyakit	25
3.3.2	Kestabilan lokal titik keseimbangan endemik	28
3.4	Analisis Kestabilan Global Titik Keseimbangan Bebas Penyakit	30
3.5	Simulasi Numerik	30
3.5.1	Simulasi numerik I	31
3.5.2	Simulasi numerik II	33
BAB IV PENUTUP		35
4.1	Kesimpulan	35
4.2	Saran	35
DAFTAR PUSTAKA		37
LAMPIRAN		40



DAFTAR GAMBAR

Halaman

Gambar 2.1	Model kompartemen SIR COVID-19	13
Gambar 3.1	Diagram kompartemen model penyebaran COVID-19 dengan adanya subpopulasi yang dikarantina	15
Gambar 3.2	Grafik solusi untuk $\mathcal{R}_0 < 1$	32
Gambar 3.3	Potret fase untuk $\mathcal{R}_0 < 1$	33
Gambar 3.4	Grafik solusi untuk $\mathcal{R}_0 > 1$	34



DAFTAR TABEL

Tabel 3.1	Nilai parameter simulasi numerik I.....	31
Tabel 3.2	Nilai parameter simulasi numerik II.....	33

Halaman



DAFTAR LAMPIRAN

	Halaman
Lampiran 1 Perhitungan persamaan 3.14.....	40
Lampiran 2 Perhitungan persamaan 3.15.....	41
Lampiran 3 Perhitungan persamaan 3.16.....	42
Lampiran 4 Perhitungan persamaan karakteristik matriks $J(C^*)$	43
Lampiran 5 Perhitungan persamaan 3.25.....	45
Lampiran 6 <i>Source Code</i> program Matlab Model SEIQR pada penyebaran COVID-19.....	46



BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pada Desember 2019, serangkaian kasus pneumonia yang tidak diketahui penyebabnya muncul di Wuhan, Provinsi Hubei, China. Patogen penyebab pneumonia tersebut diidentifikasi sebagai RNA yang diselubungi *betacoronavirus* yang saat ini dinamakan *severe acute respiratory syndrome coronavirus 2* (SARS-Cov-2) (Guan, dkk., 2020). Virus yang menyebabkan *coronavirus disease 2019* (COVID-19) ditularkan terutama melalui tetesan kecil yang dihasilkan ketika orang yang terinfeksi batuk, bersin, atau menghembuskan nafas. Tetesan kecil ini terlalu berat untuk berada di udara dan segera jatuh ke lantai atau permukaan benda (Zeb, dkk., 2020).

World Health Organization (WHO) telah menyatakan *coronavirus disease 2019* (COVID-19) sebagai pandemi global (Cucinotta dan Vanelli, 2020). Hal ini dikarenakan tingginya angka penyebaran infeksi ke berbagai negara. Tidak terkecuali di Indonesia, kasus pertama COVID-19 dilaporkan pada 2 Maret 2020 dengan dua kasus positif di pulau Jawa (WHO, 2020a). Sejak pertama kali dilaporkan, konfirmasi kasus positif di Indonesia semakin meningkat dan dengan cepat menyebar ke pulau-pulau lainnya. Pada 1 November 2020 kasus positif COVID-19 di Indonesia telah tercatat sebanyak 410.088 dari total hampir 47 juta kasus secara global dan 1,2 juta orang di seluruh dunia harus kehilangan nyawa mereka akibat virus tersebut (WHO, 2020b).

Penelitian tentang COVID-19 telah dan masih terus dilakukan meskipun sudah ditemukannya vaksin. Cao, dkk. (2020) mempelajari gambaran klinis dari virus corona dan membahas hasil jangka pendek pasien COVID-19 dalam perawatan intensif. Pengamatan pertama dilakukan pada 18 pasien, selanjutnya pengamatan dilakukan pada 102 pasien. Nesteruk (2020) mengembangkan model epidemi SIR dan membahas secara statistik parameter yang digunakan pada model yang diusulkan dan menunjukkan bagaimana mengontrol infeksi. Prem, dkk. (2020) membahas efek dari *physical distancing* atau menjaga



jarak pada penyebaran kasus COVID-19 dengan menyimulasikan jalur wabah yang sedang berlangsung di Wuhan menggunakan model SEIR deterministik terstruktur untuk tindakan *physical distancing*. Wu, dkk. (2020) memperkenalkan model SEIR untuk menggambarkan dinamika penularan, dan memperkirakan penyebaran penyakit secara nasional dan global, berdasarkan data yang dilaporkan dari 31 Desember 2019 hingga 28 Januari 2020. Wu, dkk. (2020) juga memperkirakan bahwa angka reproduksi dasar untuk COVID-19 adalah sekitar 2.68. Hou, dkk. (2020) mengukur efektivitas dari karantina yang dilakukan di Kota Wuhan dengan menggunakan model *well-mixed* SEIR. Rayo, dkk. (2020) menggabungkan model Q-SEIR yaitu model SEIR dengan penambahan faktor karantina dengan pengelompokan populasi berdasarkan usia untuk meningkatkan keakuratan model.

Virus COVID-19 dapat dengan mudah menyebar di tempat keramaian. Kontak antar satu orang ke orang lain adalah penyebab utama penyebaran virus COVID-19. Oleh karena itu, mengkarantina atau melakukan isolasi orang yang tertular dapat mengurangi resiko penyebaran virus COVID-19. Zeb, dkk. (2020) mengonstruksi model penyebaran virus COVID-19 dengan menambahkan subpopulasi terinfeksi yang dikarantina. Model dibentuk dengan membagi populasi menjadi lima subpopulasi, yaitu subpopulasi rentan (S), terpapar (E), terinfeksi (I), terinfeksi yang dikarantina (Q), dan subpopulasi sembuh (R), sehingga dari lima subpopulasi tersebut terbentuk model SEIQR.

Pada skripsi ini akan dikaji ulang analisis dinamik model SEIQR pada penyebaran *coronavirus disease* 2019 (COVID-19) yang telah dibahas oleh Zeb, dkk. (2020). Analisis dinamik yang dilakukan pada model meliputi penentuan titik kesetimbangan, angka reproduksi dasar, dan analisis kestabilan pada titik kesetimbangan. Pada bagian akhir, dilakukan simulasi numerik menggunakan Runge-Kutta orde empat untuk mendukung hasil analisis dinamik.



1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, rumusan masalah yang dibahas sebagai berikut.

1. Bagaimana konstruksi model matematika *coronavirus disease* 2019 (COVID-19) dengan adanya subpopulasi terinfeksi yang dikarantina?
2. Bagaimana titik kesetimbangan model dan kestabilan titik kesetimbangan tersebut?
3. Bagaimana hasil simulasi numerik dan interpretasi dari simulasi tersebut?

1.3 Tujuan

Tujuan penulisan skripsi ini adalah sebagai berikut.

1. Menjelaskan konstruksi model matematika *coronavirus disease* 2019 (COVID-19) dengan adanya subpopulasi terinfeksi yang dikarantina.
2. Menentukan titik kesetimbangan model dan kestabilan titik kesetimbangan tersebut.
3. Melakukan simulasi numerik dan menginterpretasikannya untuk mendukung hasil analisis model.



BAB II DASAR TEORI

2.1 Persamaan Diferensial

Menurut Finizio dan Ladas (1982), persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat turunan satu atau beberapa fungsi yang tidak diketahui. Suatu persamaan diferensial biasa orde n adalah suatu persamaan yang dapat ditulis dalam bentuk

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

dengan $y, y', \dots, y^{(n)}$ adalah fungsi dari x .

Persamaan diferensial biasa dapat dibedakan menjadi persamaan diferensial biasa linear dan persamaan diferensial biasa nonlinear. Persamaan diferensial orde n linear memiliki bentuk umum

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = f(x), \quad (2.1)$$

dengan x adalah variabel bebas dan y adalah variabel tak bebas dan $a_0 \neq 0$. Jika $f(x) = 0$ maka Persamaan (2.1) disebut persamaan homogen dan jika $f(x) \neq 0$ maka Persamaan (2.1) adalah persamaan nonhomogen. Apabila variabel tak bebas atau turunannya berderajat lebih dari satu atau memuat perkalian antara variabel tak bebas dengan turunannya maka persamaan diferensial biasa tersebut adalah persamaan diferensial biasa nonlinear.

2.2 Sistem Persamaan Diferensial

Sistem persamaan diferensial adalah suatu sistem dari n persamaan diferensial dengan n fungsi yang tidak diketahui, dimana n merupakan bilangan bulat positif lebih besar sama dengan dua (Finizio dan Ladas, 1982). Bentuk umum dari suatu sistem persamaan diferensial orde pertama berdimensi n adalah sebagai berikut:



$$\frac{dx_1}{dt} = g_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$\frac{dx_2}{dt} = g_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$\vdots$$

$$\frac{dx_n}{dt} = g_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n),$$

dengan t adalah variabel bebas dan x_1, x_2, \dots, x_n adalah variabel terikat, sehingga $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \dots, x_n = x_n(t)$. Notasi $\frac{dx_n}{dt}$ merupakan derivatif fungsi x_n terhadap t , dan g_n adalah fungsi yang tergantung pada variabel x_1, x_2, \dots, x_n dan t (Neuhauser, 2004).

2.3 Sistem Dinamik

Sistem dinamik adalah suatu sistem yang selalu berubah dan dapat diketahui kondisinya di masa yang akan datang jika diketahui kondisi saat ini atau masa lampau (Nagle, dkk., 2012). Sistem dinamik dibedakan menjadi dua, yaitu sistem dinamik diskret dengan bentuk umum

$$\vec{x}_{t+1} = \vec{f}(\vec{x}_t), t \in \mathbb{Z}, \vec{x}_t \in \mathbb{R}^n, \quad (2.2)$$

dan sistem dinamik kontinu dengan bentuk umum

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}, t), t \in \mathbb{R}, \vec{x}_t \in \mathbb{R}^n. \quad (2.3)$$

Sistem dinamik kontinu dibedakan menjadi sistem *autonomous* dan sistem *nonautonomous* (Alligood, dkk., 2000).

2.3.1 Sistem *autonomous*

Sistem *autonomous* adalah suatu sistem persamaan diferensial biasa berdimensi n yang berbentuk

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}), \vec{x} \in \mathbb{R}^n \quad (2.4)$$

dengan fungsi $\vec{f}(\vec{x})$ merupakan fungsi kontinu yang tidak bergantung secara eksplisit terhadap variabel bebas t (Boyce dan DiPrima, 2012).



Definisi 2.3.1 (Titik Keseimbangan)

Titik \vec{x}^* yang memenuhi kondisi $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{0}$ disebut titik kritis sistem (2.4). Titik kritis \vec{x}^* merupakan solusi dari sistem (2.4) yang bernilai konstan karena $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{0}$. Keadaan yang menyebabkan $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{0}$ disebut dengan keadaan setimbang dan titik yang memenuhi disebut titik keseimbangan sehingga titik kritis disebut juga titik keseimbangan (Boyce dan DiPrima, 2012).

Definisi 2.3.2 (Kestabilan Titik Keseimbangan)

Titik keseimbangan \vec{x}^* pada sistem Persamaan (2.4) dikatakan

1. stabil, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap solusi $\vec{x}(t)$ sistem (2.4) yang ketika $t = 0$ yang memenuhi

$$\|\vec{x}(0) - \vec{x}^*\| < \delta$$

ada untuk setiap $t > 0$ dan memenuhi

$$\|\vec{x}(t) - \vec{x}^*\| < \varepsilon$$

untuk setiap $t \geq 0$,

2. stabil asimtotik, jika \vec{x}^* stabil dan terdapat $\delta_0 > 0$ sedemikian sehingga jika terdapat suatu solusi $\vec{x}(t)$ sistem (2.4) memenuhi

$$\|\vec{x}(0) - \vec{x}^*\| < \delta_0$$

maka berlaku

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{x}(t) = \vec{x}^*$$

3. tidak stabil, jika tidak memenuhi kriteria stabil.

(Boyce dan DiPrima, 2012)

2.3.2 Sistem *autonomous* linear

Secara umum sistem *autonomous* linear berdimensi n dapat dinyatakan dalam bentuk



$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n, \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n, \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Persamaan (2.5) dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = B\vec{x}, \quad (2.6)$$

dengan

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} \text{ dan } \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, b_{1j} \in \mathbb{R}.$$

Misalkan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ adalah nilai eigen matriks B dan $\det(B) \neq 0$, maka $\vec{x}^* = \vec{0}$ adalah satu-satunya titik kesetimbangan sistem (2.6). kestabilan titik kesetimbangan sistem (2.6) dapat ditentukan dengan teorema berikut.

Teorema 2.3.2 (Kestabilan Titik Kesetimbangan Sistem Autonomous Linear)

Misalkan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ adalah nilai eigen dari matriks koefisien B sistem (2.6) dengan $|B| \neq 0$, titik kesetimbangan $\vec{x}^* = \vec{0}$ pada sistem (2.6) bersifat

1. stabil, jika nilai eigen matriks B bernilai real negatif dan terdapat nilai eigen atau bagian realnya bernilai nol,
2. stabil asimtotik, jika seluruh nilai eigen matriks B bernilai real negatif atau bagian realnya negatif,
3. tidak stabil, jika setidaknya terdapat satu nilai eigen bernilai real positif atau bagian realnya positif.

(Finizio dan Ladaz, 1982)



2.3.3 Sistem *autonomous nonlinear*

Misal sistem (2.4) adalah sistem *autonomous nonlinear* dengan persamaan dan fungsi f_i merupakan fungsi nonlinear yang mempunyai turunan parsial yang kontinu di titik \vec{x}^* . Deret Taylor fungsi f_i di sekitar untuk \vec{x}^* untuk $i = 1, 2, \dots, n$ adalah

$$f_i(\vec{x}) = f_i(\vec{x}^*) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(\vec{x}^*)}{\partial x_j} (x_i - x_j^*) + \eta_i(\vec{x}^*), \quad (2.7)$$

dengan $\eta_i(\vec{x}^*)$ adalah suku sisa pada hampiran orde satu yang memenuhi sifat

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^*} \frac{\eta(\vec{x})}{\|\vec{w}\|} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

dengan $\vec{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n) = \vec{x} - \vec{x}^*$, sehingga diperoleh

$$\vec{w}' = (\vec{x} - \vec{x}^*)' = \vec{x}'.$$

Oleh karena $f_i(\vec{x}^*) = \vec{0}$ untuk $i = 1, 2, \dots, n$, maka sistem Persamaan (2.7) dapat ditulis sebagai

$$\vec{w}' = J\vec{w} + \vec{\eta}, \quad (2.8)$$

dengan

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

disebut matriks Jacobi, $\vec{\eta}$ bernilai sangat kecil untuk \vec{x} yang berada dekat dengan \vec{x}^* , sehingga $\|\vec{\eta}\| \ll \|\vec{w}\|$ atau $\vec{\eta} \rightarrow 0$. Oleh karena itu, nilai $\vec{\eta}$ dapat diabaikan dan sistem (2.8) dapat dihampiri oleh sistem linear

$$\vec{w}' = J\vec{w}. \quad (2.9)$$

Jika $\vec{x} = \vec{x}^*$, maka $\vec{w}^* = \vec{0}$, sehingga titik kesetimbangan sistem (2.9) adalah $\vec{w}^* = \vec{0}$. Proses ini dinamakan dengan linearisasi.



Kestabilan titik kesetimbangan sistem *autonomous* nonlinear bergantung pada kestabilan titik kesetimbangan sistem hasil linearisasi, seperti yang dinyatakan pada Teorema 2.3.3.

(Boyce dan DiPrima, 2012)

Teorema 2.3.3 (Kestabilan Titik Kesetimbangan Sistem *Autonomous* Nonlinear)

Titik kesetimbangan sistem *autonomous* nonlinear bersifat

1. stabil asimtotik, jika titik kesetimbangan sistem hasil linearisasi stabil asimtotik,
2. tak stabil, jika titik kesetimbangan sistem hasil linearisasi tak stabil.

(Boyce dan DiPrima, 2012)

2.4 Angka Reproduksi Dasar

Pada model epidemi, angka reproduksi dasar (\mathcal{R}_0) menyatakan rata-rata banyaknya individu baru yang terinfeksi oleh individu yang terinfeksi sebelumnya dalam populasi rentan. Angka reproduksi dasar (\mathcal{R}_0) digunakan untuk menentukan ada atau tidaknya penyebaran penyakit dalam suatu populasi. Jika $\mathcal{R}_0 < 1$ maka banyaknya individu baru yang tertular oleh satu individu yang terinfeksi berjumlah kurang dari satu individu, sehingga penyakit secara perlahan akan menghilang dari populasi tidak terjadi penyebaran penyakit. Jika $\mathcal{R}_0 > 1$ maka banyaknya individu yang tertular oleh satu individu yang terinfeksi berjumlah lebih dari satu individu, sehingga penyakit akan menyebar (Hefferman, dkk., 2005).

2.5 Matriks Generasi Selanjutnya

Matriks generasi selanjutnya (*Next Generation Matrix*) adalah pendekatan umum yang dapat digunakan untuk mencari angka reproduksi dasar (\mathcal{R}_0). Misalkan terdapat n kompartemen di mana m diantaranya adalah kompartemen terinfeksi. Didefinisikan

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

dengan x_i menyatakan banyaknya individu pada kompartemen ke- i . Misalkan $F_i(\vec{x})$ adalah tingkat kemunculan infeksi baru pada



kompartemen ke- i , dan $V_i(\vec{x}) = V_i^-(\vec{x}) - V_i^+(\vec{x})$ dengan $V_i^+(\vec{x})$ adalah tingkat perpindahan individu ke dalam kompartemen ke- i , dan $V_i^-(\vec{x})$ adalah tingkat perpindahan individu keluar kompartemen ke- i . $F_i(\vec{x}) - V_i(\vec{x})$ menyatakan tingkat perubahan dari x_i . Matriks generasi selanjutnya didefinisikan sebagai FV^{-1} dengan

$$F = \left[\frac{\partial F_i(x_0)}{\partial x_j} \right], V = \left[\frac{\partial V_i(x_0)}{\partial x_j} \right], \quad i, j = 1, 2, \dots, m,$$

dan x_0 adalah titik kesetimbangan bebas penyakit. Angka reproduksi dasar $\mathcal{R}_0 = \rho(FV^{-1})$ yaitu nilai absolut terbesar dari nilai eigen matriks FV^{-1} yang didefinisikan sebagai spektral radius dari matriks FV^{-1} .

(Hefferman, dkk., 2005)

2.6 Kriteria Routh-Hurwitz

Dalam beberapa kasus tertentu, sulit untuk menentukan akar-akar persamaan karakteristik. Salah satu cara mengetahui kestabilan titik kesetimbangan tanpa harus menentukan akar-akar persamaan karakteristiknya yaitu dengan memanfaatkan kriteria Routh Hurwitz. Kestabilan titik kesetimbangan sistem linear bergantung pada tanda akar persamaan karakteristik atau nilai eigen (λ) suatu matriks. Suatu sistem linear berderajat n mempunyai persamaan karakteristik

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_n = 0, \quad (2.10)$$

dengan koefisien $a_i, i = 1, 2, 3, \dots, n$ adalah bilangan real dan $a_n \neq 0$. Titik kesetimbangan sistem tersebut bersifat stabil asimtotik jika akar-akar persamaan karakteristiknya memiliki bagian real negatif.

Teorema 2.6 (Kriteria Routh-Hurwitz)

Akar-akar Persamaan (2.10) mempunyai bagian real negatif jika dan hanya jika

1. $D_1 = |a_1| > 0,$
2. $D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} = a_1a_2 - a_3 > 0,$
3. $D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ 1 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_1a_2a_3 - a_3^2 - a_1^2 - a_4 > 0,$



$$4. D_k = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & a_{2k-1} \\ 1 & a_2 & a_4 & \dots & a_{2k-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & a_{2k-3} \\ 0 & 1 & a_2 & \dots & a_{2k-4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_k \end{vmatrix} > 0, k = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Misalkan diberikan persamaan karakteristik berderajat tiga sebagai berikut.

$$P(\lambda) = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0, \quad (2.11)$$

Akar Persamaan (2.11) memiliki bagian real negatif jika dan hanya jika

$$1. D_1 = |a_1| > 0,$$

$$2. D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} = a_1a_2 - a_3 > 0,$$

$$3. D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ 1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_1a_2a_3 - a_3^2 > 0, \text{ sehingga } a_3 > 0.$$

(Murray, 2002)

2.7 Fungsi Lyapunov

Kestabilan titik kesetimbangan dibedakan menjadi kestabilan lokal dan global. Kestabilan lokal titik kesetimbangan sistem *autonomous* nonlinear dapat ditentukan dengan melakukan linearisasi, sedangkan kestabilan global titik kesetimbangan dapat ditentukan dengan menggunakan fungsi Lyapunov. Misalkan \vec{x}^* adalah suatu titik kesetimbangan persamaan diferensial $\frac{d\vec{x}}{dt} = f(\vec{x})$ dan misalkan suatu fungsi $\mathcal{L}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Selanjutnya didefinisikan fungsi Lyapunov lemah dan fungsi Lyapunov kuat.

Definisi 2.7.1 (Fungsi Lyapunov Lemah)

Fungsi \mathcal{L} disebut fungsi Lyapunov lemah untuk \vec{x}^* jika terdapat suatu persekitaran $W \in \mathbb{R}^n$ pada \vec{x}^* yang memenuhi kondisi sebagai berikut.



1. $\mathcal{L}(\vec{x}^*) = 0$ dan $\mathcal{L}(\vec{x}) > 0, \forall \vec{x} \neq \vec{x}^* \in W$.
2. $\mathcal{L}'(\vec{x}) \leq 0, \forall \vec{x} \in W$.

(Alligood, dkk., 2000)

Definisi 2.7.2 (Fungsi Lyapunov Kuat)

Fungsi \mathcal{L} disebut fungsi Lyapunov kuat untuk \vec{x}^* jika terdapat suatu persekitaran $W \in \mathbb{R}^n$ pada \vec{x}^* yang memenuhi kondisi sebagai berikut.

1. $\mathcal{L}(\vec{x}^*) = 0$ dan $\mathcal{L}(\vec{x}) > 0, \forall \vec{x} \neq \vec{x}^* \in W$.
2. $\mathcal{L}'(\vec{x}) < 0, \forall \vec{x} \neq \vec{x}^* \in W$.

(Alligood, dkk., 2000)

Teorema 2.7 Kestabilan Global dengan Fungsi Lyapunov

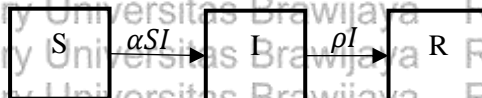
Misalkan \vec{x}^* adalah suatu titik kesetimbangan persamaan diferensial $\frac{d\vec{x}}{dt} = f(\vec{x})$, titik kesetimbangan \vec{x}^* bersifat sebagai berikut.

1. stabil global, jika terdapat suatu fungsi Lyapunov lemah untuk \vec{x}^* .
2. stabil asimtotik global, jika terdapat suatu fungsi Lyapunov kuat untuk \vec{x}^* .

(Alligood, dkk., 2000)

2.8 Model Epidem

Model matematika penyebaran penyakit secara umum dimulai dari membagi populasi menjadi beberapa subpopulasi. Salah satunya adalah model *SIR*. Model *SIR* membagi populasi menjadi tiga subpopulasi yaitu subpopulasi rentan (*S*), terinfeksi (*I*), dan sembuh (*R*). Nesteruk (2020) menggunakan model *SIR* untuk mengetahui laju perpindahan penyakit COVID-19 di China. Diasumsikan populasi $N = S + I + R$ konstan, dengan model kompartemen seperti ditunjukkan pada Gambar 2.1.



Gambar 2.1 Model kompartemen SIR COVID-19



Model tersebut memiliki dua parameter yaitu parameter ρ dan α . Parameter ρ menyatakan laju perpindahan dari subpopulasi terinfeksi ke subpopulasi sembuh, dan parameter α menyatakan laju perpindahan dari subpopulasi rentan ke subpopulasi terinfeksi. Berdasarkan diagram kompartemen pada Gambar 2.1 diperoleh persamaan model sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = -\alpha SI,$$

$$\frac{dI}{dt} = \alpha SI - \rho I,$$

$$\frac{dR}{dt} = \rho I.$$

2.9 Metode Runge Kutta Orde-4

Metode Runge-Kutta Orde-4 adalah metode numerik yang digunakan untuk mengaproksimasi solusi masalah nilai awal order pertama. Metode ini memberikan hasil ketelitian yang lebih besar dibandingkan metode lain dengan *error* $O(h^4)$. Bentuk umum dari metode Runge-Kutta Orde-4 sebagai berikut.

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

dengan

$$k_1 = f(x_i, y_i),$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1h\right)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2h\right)$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + k_3h).$$

(Chapra dan Canale, 2010)

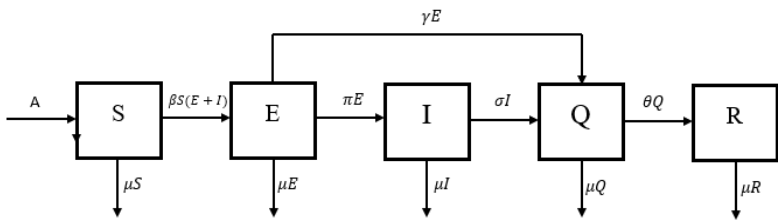


BAB III PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas konstruksi model penyebaran virus COVID-19 dengan adanya subpopulasi yang dikarantina. Selanjutnya, dilakukan analisis dinamik pada model yang meliputi penentuan titik kesetimbangan, kestabilan lokal, dan kestabilan global titik kesetimbangan bebas penyakit. Pada bagian akhir dilakukan simulasi numerik dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat untuk mendukung hasil analisis yang diperoleh.

3.1 Konstruksi Model

Model dibentuk dengan membagi populasi menjadi lima subpopulasi, yaitu subpopulasi rentan (S), terpapar (E), terinfeksi (I), terinfeksi yang dikarantina (Q), dan subpopulasi sembuh (R). Diasumsikan bahwa penyakit ini memberikan kekebalan permanen kepada penderitanya sehingga bagi individu yang telah tertular dan sembuh tidak akan tertular kembali. Pada model ini tidak dibedakan antara kematian dikarenakan COVID-19 atau dikarenakan kematian alami. Model penyebaran COVID-19 dengan adanya subpopulasi yang dikarantina disajikan dalam diagram kompartemen pada Gambar 3.1.



Gambar 3.1. Diagram kompartemen model penyebaran COVID-19 dengan adanya subpopulasi yang dikarantina

Model matematika penyebaran COVID-19 diperoleh dengan mendeskripsikan Gambar 3.1. Terdapat tujuh parameter yang mempengaruhi laju masing-masing subpopulasi. Parameter A sebagai laju bertambahnya individu ke dalam subpopulasi rentan. Parameter π



menyatakan laju perpindahan subpopulasi terpapar ke subpopulasi terinfeksi. Parameter γ menyatakan laju perpindahan subpopulasi terpapar ke subpopulasi karantina. Selanjutnya, laju perpindahan subpopulasi terinfeksi ke subpopulasi karantina dinyatakan dengan parameter σ . Laju perpindahan subpopulasi karantina ke subpopulasi sembuh dinyatakan dengan parameter θ . Parameter A menyatakan laju kelahiran dan parameter μ menyatakan laju kematian.

3.1.1 Laju perubahan subpopulasi rentan

Perubahan jumlah individu pada subpopulasi rentan (S) dipengaruhi oleh laju bertambahnya individu ke dalam subpopulasi rentan, laju kematian, perubahan individu yang rentan (S) menjadi individu yang terinfeksi (I), dan perubahan individu yang rentan (S) menjadi individu yang terpapar (E). Masuknya individu baru ke dalam subpopulasi S mengakibatkan jumlah individu pada subpopulasi S bertambah dengan laju sebesar A . Individu pada subpopulasi S terinfeksi virus COVID-19 ketika berinteraksi dengan subpopulasi I . Adanya interaksi tersebut menyebabkan individu pada subpopulasi S berkurang dengan laju sebesar βSI . Individu pada subpopulasi S terpapar ketika berinteraksi dengan subpopulasi E sehingga menyebabkan individu pada subpopulasi S berkurang dengan laju yang sama yaitu sebesar βSE . Jumlah individu pada subpopulasi S dapat berkurang karena kematian dengan laju sebesar μS . Dengan demikian, laju perubahan subpopulasi rentan (S) terhadap waktu t dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{dS}{dt} = A - \mu S - \beta S(E + I). \quad (3.1)$$

3.1.2 Laju perubahan subpopulasi terpapar

Interaksi antara individu pada subpopulasi S dengan individu pada subpopulasi E dan subpopulasi I menyebabkan jumlah individu pada subpopulasi E bertambah dengan laju sebesar $\beta S(E + I)$. Individu yang terpapar namun belum sepenuhnya terinfeksi selanjutnya akan dikarantina yang menyebabkan jumlah individu pada



subpopulasi E berkurang dengan laju sebesar γE . Individu yang terpapar dan dinyatakan terinfeksi akan menyebabkan jumlah individu pada subpopulasi E berkurang dengan laju sebesar πE . Jumlah individu pada subpopulasi E dapat berkurang karena kematian dengan laju sebesar μE . Dengan demikian, laju perubahan subpopulasi terpapar (E) terhadap waktu t dapat dinyatakan sebagai (3.2)

$$\frac{dE}{dt} = \beta S(E + I) - \gamma E - \pi E - \mu E.$$

3.1.3 Laju perubahan subpopulasi terinfeksi

Bertambahnya jumlah individu pada subpopulasi I disebabkan oleh adanya individu terpapar yang sepenuhnya terinfeksi dengan laju sebesar πE . Individu yang terinfeksi selanjutnya akan dikarantina yang menyebabkan jumlah individu pada subpopulasi E berkurang dengan laju sebesar σI . Jumlah individu pada subpopulasi I dapat berkurang karena kematian dengan laju sebesar μI . Dengan demikian, laju perubahan subpopulasi terinfeksi (I) terhadap waktu t dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{dI}{dt} = \pi E - \sigma I - \mu I. \quad (3.3)$$

3.1.4 Laju perubahan subpopulasi karantina

Bertambahnya jumlah individu pada subpopulasi Q disebabkan oleh adanya individu terpapar COVID-19 yang akan dikarantina dengan laju sebesar γE , ditambah dengan individu yang telah terinfeksi COVID-19 akan dikarantina dengan laju sebesar σI . Ketika individu pada subpopulasi karantina (Q) telah sembuh maka akan menyebabkan individu pada subpopulasi Q berkurang dengan laju sebesar θQ . Jumlah individu pada subpopulasi Q dapat berkurang karena kematian dengan laju sebesar μQ . Dengan demikian, laju perubahan subpopulasi karantina (Q) terhadap waktu t dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{dQ}{dt} = \gamma E + \sigma I - \theta Q - \mu Q. \quad (3.4)$$



3.1.5 Laju perubahan subpopulasi sembuh

Bertambahnya jumlah individu pada subpopulasi R disebabkan oleh adanya individu terpapar COVID-19 yang dikarantina telah sembuh dengan laju sebesar θQ . Kemudian, jumlah individu pada subpopulasi R dapat berkurang karena kematian dengan laju sebesar μR . Dengan demikian, laju perubahan subpopulasi karantina (Q) terhadap waktu t dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{dR}{dt} = \theta Q - \mu R. \quad (3.5)$$

Berdasarkan uraian tersebut, diperoleh model penyebaran COVID-19 dengan subpopulasi karantina dalam bentuk sistem persamaan diferensial nonlinear sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= A - \mu S - \beta S(E + I), \\ \frac{dE}{dt} &= \beta S(E + I) - \gamma E - \pi E - \mu E, \\ \frac{dI}{dt} &= \pi E - \sigma I - \mu I, \\ \frac{dQ}{dt} &= \gamma E + \sigma I - \theta Q - \mu Q, \\ \frac{dR}{dt} &= \theta Q - \mu R. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Oleh karena $R(t)$ tidak berpengaruh pada empat persamaan pertama, maka untuk analisis dinamik model, sistem (3.6) dapat disederhanakan menjadi



$$\frac{dS}{dt} = A - \mu S - \beta S(E + I),$$

$$\frac{dE}{dt} = \beta S(E + I) - \gamma E - \pi E - \mu E, \quad (3.7)$$

$$\frac{dI}{dt} = \pi E - \sigma I - \mu I,$$

$$\frac{dQ}{dt} = \gamma E + \sigma I - \theta Q - \mu Q.$$

Selanjutnya dilakukan normalisasi terhadap sistem Persamaan (3.7) dengan memisalkan

$$N = \frac{A}{\mu}, s = \frac{S}{N}, e = \frac{E}{N}, i = \frac{I}{N}, q = \frac{Q}{N}$$

didapat

$$\frac{ds}{dt} = \mu - \mu s - \beta N s(e + i), \quad (3.8a)$$

$$\frac{de}{dt} = \beta N s(e + i) - \pi e - (\mu + \gamma)e, \quad (3.8b)$$

$$\frac{di}{dt} = \pi e - \sigma i - \mu i, \quad (3.8c)$$

$$\frac{dq}{dt} = \gamma e + \sigma i - \theta q - \mu q. \quad (3.8d)$$

dengan nilai awal

$$s(0) = s_0 \geq 0, e(0) = e_0 \geq 0, i(0) = i_0 \geq 0, q(0) = q_0 \geq 0.$$

3.2 Titik Kesetimbangan Model dan Angka Reproduksi Dasar

Berdasarkan Definisi 2.3.1, titik kesetimbangan sistem (3.8) diperoleh ketika



sehingga

$$\frac{ds}{dt} = \frac{de}{dt} = \frac{di}{dt} = \frac{dq}{dt} = 0, \quad (3.9a)$$

$$\beta Ns(e+i) - \pi e - (\mu + \gamma)e = 0, \quad (3.9b)$$

$$\pi e - \sigma i - \mu i = 0, \quad (3.9c)$$

$$\gamma e + \sigma i - \theta q - \mu q = 0. \quad (3.9d)$$

Jika $i = 0$, maka Persamaan (3.9c) menjadi

$$\begin{aligned} \pi e &= 0 \\ e &= 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Selanjutnya, $i = 0$ dan Persamaan (3.10) disubstitusikan ke Persamaan (3.9a) diperoleh

$$\begin{aligned} \mu - \mu s - \beta Ns(0+0) &= 0, \\ \mu - \mu s &= 0, \\ \mu &= \mu s, \\ s &= 1. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Berikutnya, $i = 0$ dan Persamaan (3.10) disubstitusikan ke Persamaan (3.9d) diperoleh

$$\begin{aligned} \gamma(0) + \sigma(0) - q(\theta + \mu) &= 0, \\ -q(\theta + \mu) &= 0, \\ q &= 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Berdasarkan perhitungan tersebut, diperoleh titik kesetimbangan pertama yaitu $C_0 = (s_0, e_0, i_0, q_0) = (1, 0, 0, 0)$. Titik



C_0 disebut titik kesetimbangan bebas penyakit (*disease-free equilibrium*) karena tidak ada individu yang menyebarkan virus.

Angka reproduksi dasar (\mathcal{R}_0) diperoleh dengan menggunakan matriks generasi selanjutnya. Dalam hal ini kompartemen yang terlibat adalah kompartemen terpapar dan terinfeksi yaitu kompartemen E dan kompartemen I . Dari Persamaan (3.8b) dan (3.8c) dibentuk matriks \mathcal{F} dan \mathcal{V} sebagai berikut

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} \beta N s(e+i) \\ 0 \end{pmatrix}$$

dan

$$\mathcal{V} = \begin{pmatrix} e(\pi + \mu + \gamma) \\ -\pi e + i(\sigma + \mu) \end{pmatrix}.$$

Selanjutnya dapat dibentuk matriks F yang merupakan matriks Jacobi dari \mathcal{F} sebagai berikut

$$F = \begin{pmatrix} \frac{d\mathcal{F}_1}{de} & \frac{d\mathcal{F}_1}{di} \\ \frac{d\mathcal{F}_2}{de} & \frac{d\mathcal{F}_2}{di} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta N s & \beta N s \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

dan diperoleh F pada titik C_0 , yaitu

$$F(C_0) = \begin{pmatrix} \beta N & \beta N \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Selanjutnya dibentuk matriks V yang merupakan matriks Jacobi dari \mathcal{V} sebagai berikut

$$V = \begin{pmatrix} \frac{d\mathcal{V}_1}{de} & \frac{d\mathcal{V}_1}{di} \\ \frac{d\mathcal{V}_2}{de} & \frac{d\mathcal{V}_2}{di} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi + \mu + \gamma & 0 \\ +\pi & \sigma + \mu \end{pmatrix}$$

dan diperoleh V pada titik C_0 , yaitu



$$V(C_0) = \begin{pmatrix} \pi + \mu + \gamma & 0 \\ -\pi & \sigma + \mu \end{pmatrix}.$$

Invers dari matriks V dapat ditentukan sebagai berikut

$$(V(C_0))^{-1} = \frac{1}{(\sigma + \mu)(\pi + \mu + \gamma)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pi & \pi + \mu + \gamma \end{pmatrix}$$

$$(V(C_0))^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{(\sigma + \mu)(\pi + \mu + \gamma)} & 0 \\ \frac{\pi}{(\sigma + \mu)(\pi + \mu + \gamma)} & \frac{1}{\sigma + \mu} \end{pmatrix}$$

Matriks generasi selanjutnya didefinisikan sebagai

$$K = F(C_0)(V(C_0))^{-1},$$

$$K = \begin{pmatrix} \beta N & \beta N \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\pi + \mu + \gamma} & 0 \\ \frac{\pi}{(\sigma + \mu)(\pi + \mu + \gamma)} & \frac{1}{\sigma + \mu} \end{pmatrix},$$

$$K = \begin{pmatrix} \frac{\beta N}{\pi + \mu + \gamma} + \frac{\beta N \pi}{(\sigma + \mu)(\pi + \mu + \gamma)} & \frac{\beta N}{\sigma + \mu} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nilai eigen matriks K diperoleh dengan menyelesaikan persamaan

$|K - \lambda I| = 0$, sebagai berikut

$$|K - \lambda I| = 0,$$

$$\left| \begin{pmatrix} \frac{\beta N}{\pi + \mu + \gamma} + \frac{\beta N \pi}{(\sigma + \mu)(\pi + \mu + \gamma)} - \lambda & \frac{\beta N}{\sigma + \mu} \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} \right| = 0,$$

$$\left| \begin{pmatrix} \frac{\beta N(\sigma + \mu) + \beta N \pi}{(\sigma + \mu)(\pi + \mu + \gamma)} - \lambda & \frac{\beta N}{\sigma + \mu} \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} \right| = 0.$$

Dari persamaan karakteristik, diperoleh nilai eigen matriks K adalah

$$\lambda_1 = 0 \text{ dan } \lambda_2 = \frac{\beta N(\sigma + \mu + \pi)}{(\sigma + \mu)(\pi + \mu + \gamma)}.$$



Angka reproduksi dasar \mathcal{R}_0 diperoleh dari spektral radius dari matriks K atau modulus nilai eigen terbesar dari matriks K , yaitu

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\beta N(\sigma + \mu + \pi)}{(\sigma + \mu)(\pi + \mu + \gamma)}$$

Selanjutnya, akan dicari titik kesetimbangan kedua yaitu ketika $i \neq 0$.

Jika $i \neq 0$ maka dari Persamaan (3.9d) didapat

$$\begin{aligned} \pi e - i(\sigma + \mu) &= 0, \\ \pi e &= i(\sigma + \mu), \\ e &= \frac{i(\sigma + \mu)}{\pi} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Persamaan (3.13) disubstitusikan ke Persamaan (3.9b) diperoleh

$$\beta N s \left(\frac{i(\sigma + \mu)}{\pi} + i \right) - \pi \frac{i(\sigma + \mu)}{\pi} - (\mu + \gamma) \frac{i(\sigma + \mu)}{\pi} = 0,$$

dan sesuai dengan perhitungan pada Lampiran 1 diperoleh

$$\begin{aligned} s &= \frac{(\sigma + \mu)(\mu + \gamma + \pi)}{\beta N(\sigma + \mu + \pi)}, \\ s &= \frac{1}{\mathcal{R}_0} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Persamaan (3.13) dan (3.14) disubstitusikan ke Persamaan (3.9a) diperoleh

$$\mu - \mu \frac{(\sigma + \mu)(\mu + \gamma + \pi)}{\beta N(\sigma + \mu + \pi)} - \beta N \frac{(\sigma + \mu)(\mu + \gamma + \pi)}{\beta N(\sigma + \mu + \pi)} \left(\frac{i(\sigma + \mu)}{\pi} + i \right) = 0,$$

dan sesuai dengan perhitungan pada Lampiran 2 diperoleh

$$i = \frac{\mu \pi (\mathcal{R}_0 - 1)}{\beta N(\sigma + \mu + \pi)}. \quad (3.15)$$

Berikutnya, Persamaan (3.13) dan (3.15) disubstitusikan ke Persamaan (3.9d) diperoleh

$$\gamma \frac{i(\sigma + \mu)}{\pi} + \sigma \frac{\mu\pi(\mathcal{R}_0 - 1)}{\beta N(\sigma + \mu + \pi)} - \theta q - \mu q = 0,$$

dan sesuai dengan perhitungan pada Lampiran 3 diperoleh

$$q = \frac{\gamma(\sigma + \mu) + \sigma\pi}{\pi(\theta + \mu)} i^*. \quad (3.16)$$

Berdasarkan Persamaan (3.13), (3.14), (3.15), dan (3.16) diperoleh $C^* = (s^*, e^*, i^*, q^*)$ dengan

$$s^* = \frac{(\sigma + \mu)(\mu + \gamma + \pi)}{\beta N(\sigma + \mu + \pi)} = \frac{1}{\mathcal{R}_0}, \quad (3.17a)$$

$$e^* = \frac{i(\sigma + \mu)}{\pi}, \quad (3.17b)$$

$$i^* = \frac{\mu\pi(\mathcal{R}_0 - 1)}{\beta N(\sigma + \mu + \pi)}, \quad (3.17c)$$

$$q = \frac{\gamma(\sigma + \mu) + \sigma\pi}{\pi(\theta + \mu)} i^*. \quad (3.17d)$$

dengan syarat eksistensi $\mathcal{R}_0 > 1$.

3.3 Analisis Kestabilan Lokal

Sistem (3.8) merupakan sistem *autonomous* nonlinear, sehingga sifat kestabilan lokal titik kesetimbangan model bergantung pada hasil linearisasi sistem. Berdasarkan langkah-langkah linearisasi pada Subbab 2.3.3 diperoleh matriks Jacobi sistem (3.8) sebagai berikut.

$$J = \begin{bmatrix} -\mu - \beta N(e + i) & -\beta Ns & -\beta Ns & 0 \\ \beta N(e + i) & \beta Ns - \pi - (\mu + \gamma) & \beta Ns & 0 \\ 0 & \pi & -(\sigma + \mu) & 0 \\ 0 & \gamma & \sigma & -(\theta + \mu) \end{bmatrix}$$





Berdasarkan matriks Jacobi tersebut dapat ditentukan kestabilan lokal titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik.

3.3.1 Kestabilan lokal titik kesetimbangan bebas penyakit

Matriks Jacobi pada titik kesetimbangan bebas penyakit adalah sebagai berikut.

$$J(C_0) = \begin{bmatrix} -\mu & -\beta N & -\beta N & 0 \\ 0 & \beta N - \pi - (\mu + \gamma) & \beta N & 0 \\ 0 & \pi & -(\sigma + \mu) & 0 \\ 0 & \gamma & \sigma & -(\theta + \mu) \end{bmatrix}$$

Persamaan karakteristik matriks $J(C_0)$ diperoleh dengan menyelesaikan persamaan $|J(C_0) - \lambda I| = 0$ sebagai berikut.

$$\begin{vmatrix} -\mu - \lambda & -\beta N & -\beta N & 0 \\ 0 & \beta N - \pi - (\mu + \gamma) - \lambda & \beta N & 0 \\ 0 & \pi & -(\sigma + \mu) - \lambda & 0 \\ 0 & \gamma & \sigma & -(\theta + \mu) - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$(-\mu - \lambda)(-\theta - \mu - \lambda) \left| \begin{matrix} \beta N - \pi - \mu - \gamma - \lambda & \beta N \\ \sigma - \mu - \lambda \end{matrix} \right| = 0. \quad (3.18)$$

Berdasarkan Persamaan (3.18), diperoleh nilai eigen matriks $J(C_0)$ yaitu $\lambda_1 = -\mu$, $\lambda_2 = -\theta - \mu$, dan λ_3, λ_4 yang memenuhi persamaan kuadrat

$$(BN - \pi - \mu - \gamma - \lambda)(-\sigma - \mu - \lambda) - \beta N \pi = 0,$$

$$\lambda^2 + (-\beta N + \gamma + 2\mu + \pi + \sigma)\lambda - \beta N \mu - \beta N \pi - \beta N \sigma + \gamma \mu + \gamma \sigma + \mu^2 + \mu \pi + \mu \sigma + \pi \sigma = 0. \quad (3.19)$$

Selanjutnya, Persamaan (3.19) dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0,$$

dengan

$$a_1 = -\beta N + \gamma + 2\mu + \pi + \sigma,$$



$$a_2 = -\beta N\mu - \beta N\pi - \beta N\sigma + \gamma\mu + \gamma\sigma + \mu^2 + \mu\pi + \mu\sigma + \pi\sigma.$$

Akar akar Persamaan (3.19) adalah

$$\lambda_{3,4} = \frac{(-a_1 \pm \sqrt{D})}{2},$$

dengan $D = a_1^2 - 4a_2$.

Jika $a_1 > 0$ dan $a_2 > 0$ maka akar-akar persamaan λ_3 dan λ_4 memiliki bagian real negatif. Misalkan $a_1 > 0$ dan $a_2 > 0$.

i) Ketika $D > 0$ diperoleh Persamaan (3.19) yang memiliki dua akar real yang berbeda sehingga

a) $\lambda_3 + \lambda_4 = -a_1$,

b) $\lambda_3\lambda_4 = a_2$,

untuk memenuhi kondisi (a) dan (b) maka λ_3 dan λ_4 harus bernilai negatif

ii) Ketika $D = 0$ diperoleh Persamaan (3.19) yang memiliki akar kembar sehingga didapat $\lambda_3 = \lambda_4 = -\frac{a_1}{2}$. λ_3 dan λ_4 selalu bernilai negatif.

iii) Ketika $D < 0$ diperoleh Persamaan (3.19) yang memiliki dua akar kompleks berbeda. Didapat $\lambda_{3,4} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{-D}}{2}$ dengan $Re(\lambda_{3,4}) = \frac{-a_1}{2}$ yang selalu bernilai negatif.

Dengan demikian, akan diperoleh akar-akar persamaan λ_3 dan λ_4 yang bernilai negatif atau memiliki bagian real negatif jika $a_1 > 0$ dan $a_2 > 0$. Berikut akan dibuktikan apakah a_1 dan a_2 memenuhi syarat tersebut.

1. Diketahui $a_1 = -\beta N + \gamma + 2\mu + \pi + \sigma$.

Titik kesetimbangan bebas penyakit menunjukkan bahwa tidak ada individu yang menyebarkan virus atau dengan kata lain memenuhi kondisi $\mathcal{R}_0 < 1$. Jika $\mathcal{R}_0 < 1$ maka

$$\beta N < \frac{(\sigma + \mu)(\pi + \mu + \gamma)}{(\sigma + \mu + \pi)} \quad (3.20)$$



Oleh karena $\sigma + \mu < \sigma + \mu + \pi$,

maka dapat ditulis

$$\frac{\sigma + \mu}{\sigma + \mu + \pi} < 1,$$

$$\frac{\sigma + \mu}{\sigma + \mu + \pi} < \frac{\pi + \mu + \gamma}{\pi + \mu + \gamma},$$

$$\frac{(\sigma + \mu)(\pi + \mu + \gamma)}{(\sigma + \mu + \pi)(\pi + \mu + \gamma)} < \pi + \mu + \gamma. \quad (3.21)$$

Dari Persamaan (3.20) dan (3.21) diperoleh

$$\beta N < \frac{(\sigma + \mu)(\pi + \mu + \gamma)}{(\sigma + \mu + \pi)} < \pi + \mu + \gamma,$$

$$\beta N < \pi + \mu + \gamma < \pi + 2\mu + \gamma + \sigma,$$

$$0 < \pi + \mu + \gamma - \beta N < \pi + 2\mu + \gamma + \sigma - \beta N,$$

$$0 < -\beta N + \pi + 2\mu + \gamma + \sigma = a_1.$$

Dengan demikian, diperoleh $a_1 > 0$ jika $\mathcal{R}_0 < 1$.

2. Diketahui $a_2 = -\beta N\mu - \beta N\pi - \beta N\sigma + \gamma\mu + \gamma\sigma + \mu^2 + \mu\pi + \mu\sigma + \pi\sigma$.

a_2 dapat disederhanakan menjadi

$$a_2 = -\beta N(\sigma + \mu + \pi) + \mu(\sigma + \mu + \pi) + \mu\gamma + \sigma(\pi + \gamma),$$

$$a_2 = -\beta N(\sigma + \mu + \pi) \cdot \frac{(\sigma + \mu)(\pi + \mu + \gamma)}{(\sigma + \mu)(\pi + \mu + \gamma)} + \mu + (\mu + \pi) + \mu\gamma + \sigma(\pi + \mu + \gamma),$$

$$a_2 = \frac{-\beta N(\sigma + \mu + \pi)}{(\sigma + \mu)(\pi + \mu + \gamma)} \cdot (\sigma + \mu)(\pi + \mu + \gamma) + \mu(\mu + \pi + \gamma) + \sigma(\pi + \mu + \gamma),$$

$$a_2 = (\sigma + \mu)(\pi + \mu + \gamma)[1 - \mathcal{R}_0].$$

Dengan demikian, diperoleh bahwa $a_2 > 0$ jika $\mathcal{R}_0 < 1$.

Berdasarkan uraian tersebut, akar-akar persamaan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ dan λ_4 memiliki bagian real negatif jika $\mathcal{R}_0 < 1$, sehingga diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit yang bersifat stabil asimtotik lokal dengan syarat $\mathcal{R}_0 < 1$.



3.3.2 Kestabilan lokal titik kesetimbangan endemik

Matriks Jacobi di titik $C^* = (s^*, e^*, i^*, q^*)$ adalah

$$J(C^*) = \begin{bmatrix} -\mu - \beta N(e^* + i^*) & -\beta N s^* & -\beta N s^* & 0 \\ \beta N(e^* + i^*) & \beta N s^* - \pi - (\mu + \gamma) & \beta N s^* & 0 \\ 0 & \pi & -(\sigma + \mu) & 0 \\ 0 & \gamma & \sigma & -(\theta + \mu) \end{bmatrix}$$

Persamaan karakteristik matriks $J(C^*)$ diperoleh dengan menyelesaikan persamaan $|J(C^*) - \lambda I| = 0$ yaitu

$$(-\theta - \mu - \lambda) \begin{vmatrix} -\mu - \beta N(e^* + i^*) - \lambda & -\beta N s^* & -\beta N s^* \\ \beta N(e^* + i^*) & \beta N s^* - \pi - (\mu + \gamma) - \lambda & \beta N s^* \\ 0 & \pi & -(\sigma + \mu) - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

sesuai perhitungan pada Lampiran 4, diperoleh

$$\lambda_1 = -\theta - \mu,$$

dan $\lambda_2, \lambda_3,$ dan λ_4 yang memenuhi persamaan yang dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0, \quad (3.22)$$

dengan

$$a_1 = \beta N e^* + \beta N i^* - \beta N s^* + \pi + \gamma + 3\mu + \sigma,$$

$$a_2 = -\beta N s^* (2\mu + \pi + \sigma) + N \gamma \beta e^* + N \gamma \beta i^* + 2N \beta e^* \mu + N \beta e^* \pi \\ + N \beta e^* \sigma + 2N \beta i^* \mu + N \beta i^* \pi + N \beta i^* \sigma + 2\gamma \mu \\ + \gamma \sigma + 3\mu^2 + 2\mu \pi + 2\mu \sigma + \pi \sigma,$$

$$a_3 = -\beta N s^* (\mu \pi + \mu \sigma + \mu^2) + N \beta i^* \pi \sigma + N \beta i^* \mu \pi + N \beta e^* \pi \sigma \\ + N \beta e^* \mu \pi + N \beta i^* \mu \sigma + N \beta e^* \mu \sigma + \mu^2 \sigma + \gamma \mu^2 \\ + \gamma \mu \sigma + \mu^2 \pi + \mu^3 + \mu \pi \sigma + N \beta e^* \mu^2 + N \beta i^* \mu^2 \\ + N \gamma \beta i^* \sigma + N \gamma \beta i^* \mu + N \gamma \beta e^* \sigma + N \gamma \beta e^* \mu.$$

Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz, akar-akar Persamaan (3.22) memiliki bagian real negatif jika memenuhi syarat $a_1 > 0, a_3 > 0$ dan $a_1 a_2 - a_3 > 0$. Berikut akan dibuktikan apakah memenuhi kondisi tersebut.



1. Diketahui $a_1 = \sigma + 3\mu - \beta N s^* + \pi + \gamma + \beta N e^* + \beta N i^*$.

Dari Persamaan (3.9a) diketahui bahwa

$$\begin{aligned} \mu - \mu s - \beta N s(e + i) &= 0, \\ -\beta N s(e + i) &= \mu s - \mu, \\ -\beta N s^* &= \frac{\mu s^* - \mu}{e^* + i^*}. \end{aligned}$$

Oleh karena $\mu > 0, s^* > 0, e^* > 0$, dan $i^* > 0$ jika $\mathcal{R}_0 > 1$ maka diperoleh $-\beta N s^* > 0$ sehingga $a_1 > 0$ jika $\mathcal{R}_0 > 1$.

2. Diketahui

$$\begin{aligned} a_3 = & -\beta N s^*(\mu\pi + \mu\sigma + \mu^2) + N\beta i^*\pi\sigma + N\beta i^*\mu\pi + N\beta e^*\pi\sigma \\ & + N\beta e^*\mu\pi + N\beta i^*\mu\sigma + N\beta e^*\mu\sigma + \mu^2\sigma + \gamma\mu^2 \\ & + \gamma\mu\sigma + \mu^2\pi + \mu^3 + \mu\pi\sigma + N\beta e^*\mu^2 \\ & + N\beta i^*\mu^2 + N\gamma\beta i^*\sigma + N\gamma\beta i^*\mu + N\gamma\beta e^*\sigma \\ & + N\gamma\beta e^*\mu. \end{aligned}$$

Berdasarkan uraian (1) diperoleh $-\beta N s^* > 0$ jika $\mathcal{R}_0 > 1$ sehingga $a_3 > 0$ jika $\mathcal{R}_0 > 1$.

3. Diketahui

$$\begin{aligned} a_1 a_2 - a_3 = & \left(-\beta N s^*(-2\mu - \sigma \right. \\ & \left. - \pi)(\beta N s^*(2e^*\mu + 2i^*\mu + e^*\sigma + i^*\sigma + \pi e^* \right. \\ & \left. + \pi i^* + \gamma e^* + \gamma i^*)) \right) (-\beta N s^* + \beta N i^* + \beta N e^* \\ & + \mu + 3\mu + \gamma + \sigma) - \beta N s^*(\mu\pi + \mu\sigma + \mu^2) \\ & + N\beta i^*\pi\sigma + N\beta i^*\mu\pi + N\beta e^*\pi\sigma + N\beta e^*\mu\pi \\ & + N\beta i^*\mu\sigma + N\beta e^*\mu\sigma + \mu^2\sigma + \gamma\mu^2 + \gamma\mu\sigma \\ & + \mu^2\pi + \mu^3 + \mu\pi\sigma + N\beta e^*\mu^2 + N\beta i^*\mu^2 \\ & + N\gamma\beta i^*\sigma + N\gamma\beta i^*\mu + N\gamma\beta e^*\sigma + N\gamma\beta e^*\mu \end{aligned}$$

Berdasarkan uraian (1) diperoleh $-\beta N s^* > 0$ jika $\mathcal{R}_0 > 1$ sehingga $a_1 a_2 - a_3 > 0$ jika $\mathcal{R}_0 > 1$.

Dengan demikian, akar-akar persamaan karakteristik matriks $J(C^*)$ memenuhi kriteria Routh-Hurwitz dengan syarat $\mathcal{R}_0 > 1$ dan diperoleh titik kesetimbangan endemik C^* yang bersifat stabil asimtotik lokal.



3.4 Analisis Kestabilan Global Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Analisis kestabilan global titik kesetimbangan bebas penyakit dilakukan dengan menggunakan fungsi Lyapunov sebagai berikut.

Didefinisikan fungsi Lyapunov

$$L = (e - e_0) + \frac{\beta N}{\sigma + \mu} (i - i_0). \quad (3.23)$$

Akan dibuktikan fungsi L merupakan fungsi Lyapunov lemah atau kuat berdasarkan definisi pada Subbab 2.7.

Fungsi L diturunkan terhadap t didapat

$$L' = e' + \frac{\beta N}{(\sigma + \mu)} i'. \quad (3.24)$$

Persamaan (3.8b) dan (3.8c) disubstitusikan ke Persamaan (3.24) diperoleh

$$L' = \beta N s e - \beta N s i - (\pi + \mu + \gamma) e + \frac{\beta N}{\sigma + \mu} (\pi e) - \frac{\beta N}{\sigma + \mu} (\sigma + \mu) i,$$

dan sesuai dengan perhitungan pada Lampiran 5, didapat

$$L' \leq [\mathcal{R}_0 - 1](\pi + \mu + \gamma)e. \quad (3.25)$$

Oleh karena itu, jika $\mathcal{R}_0 < 1$ maka $L' < 0$. Dengan demikian, fungsi L adalah fungsi Lyapunov kuat, sehingga titik kesetimbangan bebas penyakit stabil asimtotik global untuk $\mathcal{R}_0 < 1$.

3.5 Simulasi Numerik

Pada subbab ini ditunjukkan simulasi numerik model SEIQR penyebaran virus COVID-19. Simulasi ini dilakukan dengan menggunakan *software* Matlab dengan metode Runge-Kutta orde empat. Beberapa nilai parameter yang digunakan untuk simulasi numerik merujuk pada artikel Youssef, dkk. (2020).



3.5.1 Simulasi numerik I

Pada simulasi ini digunakan nilai-nilai parameter yang disajikan pada Tabel 3.1.

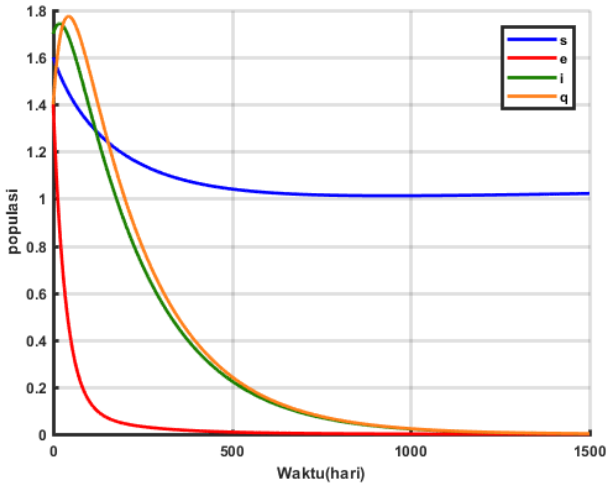
Tabel 3.1 Nilai parameter simulasi numerik I

Parameter	Simulasi I	Sumber
A	0,000067	Asumsi
β	0,0009	Asumsi
γ	0,02	Youssef, dkk. (2020)
π	0,01	Youssef, dkk. (2020)
σ	0,005	Youssef, dkk. (2020)
θ	0,01	Asumsi
μ	0,00003935	Asumsi

Dari nilai-nilai parameter tersebut diperoleh

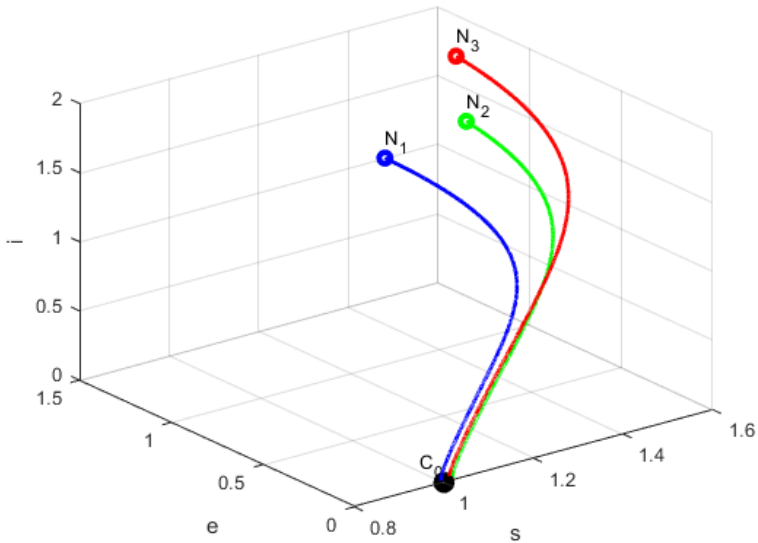
$$\mathcal{R}_0 = \frac{\beta N(\sigma + \mu + \pi)}{(\sigma + \mu)(\pi + \mu + \gamma)} = 0.3041 < 1.$$

Simulasi numerik yang dilakukan dengan nilai awal $s(0) = 1.4$, $e(0) = 1.3$, $i(0) = 1.2$, dan $q(0) = 1.1$ menunjukkan bahwa solusi sistem menuju titik kesetimbangan bebas penyakit $\mathcal{C}_0 = (1, 0, 0, 0)$, seperti ditunjukkan pada Gambar 3.2. Hasil simulasi numerik yang diperoleh mendukung hasil perhitungan secara analitik pada subbab 3.3.1 bahwa jika $\mathcal{R}_0 < 1$ maka titik kesetimbangan bebas penyakit bersifat stabil asimtotik lokal.



Gambar 3.2 Grafik solusi untuk $\mathcal{R}_0 < 1$

Untuk mengilustrasikan lebih lanjut mengenai kestabilan global, simulasi dilakukan dengan tiga nilai awal yang berbeda, yaitu $N_1 = (1.4, 1.3, 1.2, 1.1)$, $N_2 = (1.5, 1.1, 1.5, 1)$, dan $N_3 = (1.6, 1.4, 1.7, 1.4)$. Hasil simulasi numerik berupa potret fase pada ruang s, e, i yang disajikan pada Gambar 3.3, menunjukkan bahwa solusi sistem menuju titik kesetimbangan bebas penyakit $C_0 = (1, 0, 0, 0)$. Hal ini sesuai dengan hasil perhitungan secara analitik pada subbab 3.4 bahwa jika $\mathcal{R}_0 < 1$, maka titik kesetimbangan bebas penyakit C_0 bersifat stabil asimtotik global. Hal ini menunjukkan bahwa tidak terjadi penyebaran virus COVID-19 dalam jangka waktu yang relatif lama.



Gambar 3.3 Potret fase untuk $\mathcal{R}_0 < 1$

3.5.2 Simulasi numerik II

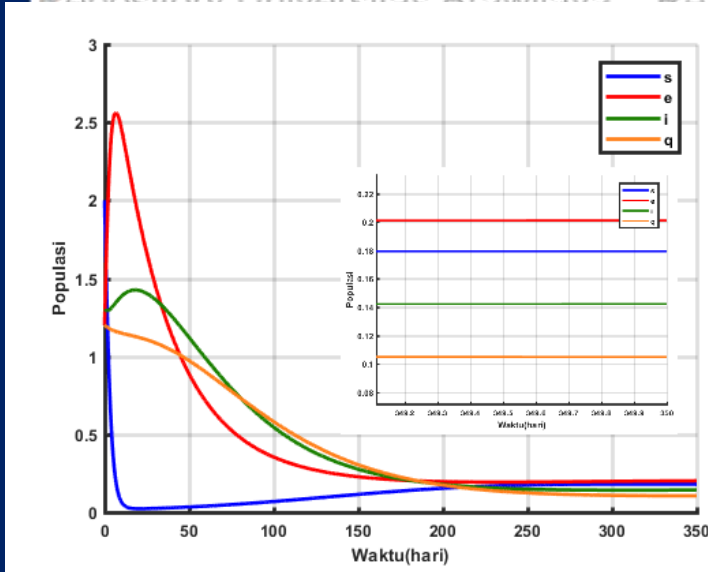
Pada simulasi ini digunakan nilai-nilai parameter yang disajikan pada Tabel 3.2.

Tabel 3.2 Nilai parameter simulasi numerik II

Parameter	Simulasi II	Sumber
A	0,0077	Asumsi
β	0,102	Asumsi
γ	0,003	Asumsi
π	0,02	Asumsi
σ	0,02	Asumsi
θ	0,025	Asumsi
μ	0,008035	Asumsi



Dari nilai-nilai parameter tersebut diperoleh $\mathcal{R}_0 = \frac{\beta N(\sigma + \mu + \pi)}{(\sigma + \mu)(\pi + \mu + \gamma)} = 5.3965 > 1$ dan titik kesetimbangan endemik $C^* = (0.1853, 0.2109, 0.1505, 0.1103)$. Simulasi numerik dilakukan dengan nilai awal $s(0) = 2, e(0) = 1.2, i(0) = 1.3,$ dan $q(0) = 1.2$.



Gambar 3.4 Grafik solusi untuk $\mathcal{R}_0 > 1$

Hasil simulasi numerik yang diperoleh, yang ditunjukkan pada Gambar 3.4 mendukung hasil perhitungan secara analitik pada subbab 3.3.2 yang menyatakan bahwa jika $\mathcal{R}_0 > 1$ maka titik kesetimbangan endemik $C^* = (s^*, e^*, i^*, q^*)$ yang bersifat stabil asimtotik lokal. Hal ini menunjukkan dengan nilai-nilai parameter tersebut, dalam jangka waktu lama, virus (COVID-19) akan selalu ada dalam populasi.



BAB IV PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan tujuan pembahasan skripsi ini dapat diambil kesimpulan sebagai berikut.

1. Model penyebaran virus COVID-19 dengan subpopulasi terinfeksi yang dikarantina berbentuk sistem persamaan diferensial nonlinear yang terdiri dari lima subpopulasi yaitu yaitu subpopulasi rentan (S), terpapar (E), terinfeksi (I), terinfeksi yang dikarantina (Q), dan subpopulasi sembuh (R).
2. Model penyebaran virus COVID-19 dengan dengan subpopulasi terinfeksi yang dikarantina memiliki dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik.
3. Berdasarkan analisis kestabilan titik kesetimbangan, titik kesetimbangan bebas penyakit bersifat stabil asimtotik lokal dan global jika $\mathcal{R}_0 < 1$. Titik kesetimbangan endemik bersifat stabil asimtotik lokal jika $\mathcal{R}_0 > 1$.
4. Hasil simulasi numerik menunjukkan hasil yang sesuai dengan hasil analisis yang telah dilakukan.

4.2 Saran

Seseorang yang telah sembuh dari COVID-19 dapat terjangkit kembali oleh virus tersebut, sehingga pada penelitian selanjutnya disarankan untuk memodifikasi model dengan mengasumsikan bahwa individu yang telah sembuh dapat kembali menjadi individu yang rentan terkena virus.



DAFTAR PUSTAKA

- Alligood, K. T., T. D. Sauer, dan J. A. Yorke. 2000. *CHAOS: An Introduction to Dynamical Systems*. Springer-Verlag. New York.
- Boyce, W. E. dan R. C. DiPrima. 2012. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. Tenth Edition. John Wiley Sons Inc. United State of America.
- Cao, J., X. Hu, W. Cheng, L. Yu, W. J. Tu, dan Q. Liu. 2020. Clinical features and short-term outcomes of 18 patients with corona virus disease 2019 in intensive care unit. *Intensive care medicine*. Vol.46 No.5. Hal. 851–853.
- Chapra, C. S. dan R. P. Canale. 2010. *Numerical Methods for Engineers. Sixth Edition*. McGrawHill. New York.
- Cucinotta, D. dan M. Vanelli. 2020. WHO Declares COVID-19 a Pandemic. *Acta Bio Medica Atenei Parmensis*. Vol. 91 No.1. Hal 157-160.
- Finizio, N. dan G. Ladas. 1982. *An Introduction to Differential Equation: with Difference Equation, Fourier Series, and Partial Differential Equation*. Wadsworth Inc. California.
- Guan W.J., Z. Y. Ni, dan Y. Hu. 2020. Clinical Characteristics of Coronavirus Disease 2019 in China. *The New England journal of medicine*. Vol 382 No.18. Hal. 1708–1720.
- Hefferman, J. M., R. J. Smith, dan L. M. Wahl. 2005. Perspectives on the Basic Reproduction Ratio. *Journal of the Royal Society Interface*. Vol. 2, Hal. 281-293.
- Hou, C., C. Jiabin, Y. Zhou, L. Hua, J. Yuan, S. He, Y. Guo, S. Zhang, Q. Jia, C. Zhao, J. Zhang, G. Xu, E. Jia. The effectiveness of quarantine of Wuhan city against the Corona Virus Disease 2019 (COVID-19): A well-mixed SEIR model analysis. *Journal of Medical Virology*. Vol. 92, Hal. 841-848.
- Murray, J. D. 2002. *Mathematical Biology: An Introduction*. Third Edition. Springer-Verlag. New York.
- Nagle, R. K., E. B. Saff, dan A. D. Snider. 2012. *Fundamentals of Differential Equations*. Eighth Edition. Pearson Education, Inc. Boston.



Nesteruk, I. 2020. Statistics based predictions of Coronavirus 2019-nCoV spreading in mainland China. *Innovative Biosystems and Bioengineering*. Vol. 4, No. 1. Hal 13-18.

Neuhauser, C. 2004. *Calculus for Biology and Medicine*. New Jersey: Pearson. Education.

Prem, K., Y. Liu, T. W. Russell, A J. Kucharski, R. M. Eggo, N. Davies, S. Flasche, S. Clifford, C. A. B. Pearson, J. D. Munday, S. Abbott, H. Gibbs, A. Rosello, B. J. Quilty, T. Jombart, F. Sun, C. Diamond, A. Gimma, K. van Zandvoort, S. Funk, C. I. Jarvis, W. J. Edmunds, N. I. Bosse, J. Hellewell, M. Jit, dan P. Klepac. 2020. The effect of control strategies to reduce social mixing on outcomes of the COVID-19 epidemic in Wuhan, China: a modelling study. *The Lancet Public Health*. Vol. 5 No. 5. Hal. e261–e270. doi: 10.1016/S2468-2667(20)30073-6.

Rayo, J. F., R. D. Castro, J. E. Sevilleja, V. P. Boñgolan. Modeling the dynamics of COVID-19 using Q-SEIR model with age-stratified infection probability. *medRxiv preprint*. doi: <https://doi.org/10.1101/2020.05.20.20095406>. Diakses 9 Mei 2021.

World Health Organization. 2020a. COVID-19 Weekly Epidemiological Update. https://www.who.int/docs/default-source/coronaviruse/situation-reports/weekly-epi-update-12.pdf?sfvrsn=c5d1b6fc_2&download=true. Diakses 11 November 2020.

World Health Organization. 2020b. Coronavirus disease 2019 (COVID-19) Situation Report – 42. https://www.who.int/docs/default-source/coronaviruse/situation-reports/20200302-sitrep-42-COVID-19.pdf?sfvrsn=224c1add_2. Diakses 11 November 2020.

Wu, J. T., K. Leung, dan G. M. Leung. 2020. Nowcasting and forecasting the potential domestic and international spread of the 2019-nCoV outbreak originating in Wuhan, China: a modelling study. *Lancet*. Vol. 395 No. 10225. Hal 689–697. [https://doi.org/10.1016/S0140-6736\(20\)30260-9](https://doi.org/10.1016/S0140-6736(20)30260-9).



Youssef, H., N. Alghamdi, M. A. Ezzat, A. A. El-Bary, dan A. M. Shawky. 2020. A New Dynamical Modelling of the Epidemic Diseases to Assessing the Rates of Spread of COVID-19 in Saudi Arabia: SEIQR Model. *Research Square preprint*. <https://doi.org/10.21203/rs.3.rs-77792/v1>.

Zeb, A., E. Alzahrani, V. S. Erturk, dan G. Zaman. 2020. Mathematical Model for Coronavirus Disease 2019 (COVID-19) Containing Isolation Class. *BioMed Research International*. Vol 2020.

LAMPIRAN

Lampiran 1 Perhitungan persamaan 3.14

$$\beta N s \left(\frac{i(\sigma + \mu)}{\pi} + i \right) - \pi \frac{i(\sigma + \mu)}{\pi} - (\mu + \gamma) \frac{i(\sigma + \mu)}{\pi} = 0,$$

$$\beta N s \left(\frac{i(\sigma + \mu)}{\pi} + i \right) - (\mu + \gamma + \pi) \left(\frac{i(\sigma + \mu)}{\pi} \right) = 0,$$

$$\beta N s \left(\frac{i(\sigma + \mu + \pi)}{\pi} \right) - \left(\frac{i(\sigma + \mu)(\mu + \gamma + \pi)}{\pi} \right) = 0,$$

$$\beta N s \left(\frac{i(\sigma + \mu + \pi)}{\pi} \right) = \left(\frac{i(\sigma + \mu)(\mu + \gamma + \pi)}{\pi} \right),$$

$$\beta N s = \frac{i(\sigma + \mu)(\mu + \gamma + \pi)}{\pi} \frac{\pi}{i(\sigma + \mu + \pi)},$$

$$\beta N s = \frac{(\sigma + \mu)(\mu + \gamma + \pi)}{(\sigma + \mu + \pi)},$$

$$s = \frac{(\sigma + \mu)(\mu + \gamma + \pi)}{\beta N (\sigma + \mu + \pi)},$$

$$s = \frac{1}{\mathcal{R}_0}$$





Lampiran 2 Perhitungan persamaan 3.15

$$\mu - \mu \frac{(\sigma + \mu)(\mu + \gamma + \pi)}{\beta N(\sigma + \mu + \pi)} - \beta N \frac{(\sigma + \mu)(\mu + \gamma + \pi)}{\beta N(\sigma + \mu + \pi)} \left(\frac{i(\sigma + \mu)}{\pi} + i \right) = 0,$$

$$\mu - \mu \frac{(\sigma + \mu)(\mu + \gamma + \pi)}{\beta N(\sigma + \mu + \pi)} - \frac{(\sigma + \mu)(\mu + \gamma + \pi)}{(\sigma + \mu + \pi)} \left(\frac{i(\sigma + \mu + \pi)}{\pi} \right) = 0,$$

$$\frac{(\sigma + \mu)(\mu + \gamma + \pi)}{(\sigma + \mu + \pi)} \left(\frac{i(\sigma + \mu + \pi)}{\pi} \right) = \mu - \mu \frac{(\sigma + \mu)(\mu + \gamma + \pi)}{\beta N(\sigma + \mu + \pi)},$$

$$\frac{i(\sigma + \mu + \pi)}{\pi} = \left(\mu - \mu \frac{(\sigma + \mu)(\mu + \gamma + \pi)}{\beta N(\sigma + \mu + \pi)} \right) \left(\frac{(\sigma + \mu + \pi)}{(\sigma + \mu)(\mu + \gamma + \pi)} \right),$$

$$\frac{i(\sigma + \mu + \pi)}{\pi} = \left(\frac{\mu(\beta N(\sigma + \mu + \pi)) - \mu(\sigma + \mu)(\mu + \gamma + \pi)}{\beta N(\sigma + \mu + \pi)} \right) \left(\frac{(\sigma + \mu + \pi)}{(\sigma + \mu)(\mu + \gamma + \pi)} \right),$$

$$\frac{i(\sigma + \mu + \pi)}{\pi} = \left(\frac{\mu(\beta N(\sigma + \mu + \pi)) - \mu(\sigma + \mu)(\mu + \gamma + \pi)}{\beta N(\sigma + \mu)(\mu + \gamma + \pi)} \right),$$

$$i = \left(\frac{\mu(\beta N(\sigma + \mu + \pi)) - \mu(\sigma + \mu)(\mu + \gamma + \pi)}{\beta N(\sigma + \mu)(\mu + \gamma + \pi)} \right) \left(\frac{\pi}{(\sigma + \mu + \pi)} \right),$$

$$i = \left(\frac{\mu\pi[(\beta N(\sigma + \mu + \pi)) - (\sigma + \mu)(\mu + \gamma + \pi)]}{\beta N(\sigma + \mu)(\mu + \gamma + \pi)} \right),$$

$$i = \frac{\mu\pi \left[\frac{(\beta N(\sigma + \mu + \pi))}{(\sigma + \mu)(\mu + \gamma + \pi)} - \frac{(\sigma + \mu)(\mu + \gamma + \pi)}{(\sigma + \mu)(\mu + \gamma + \pi)} \right]}{\beta N(\mu + \gamma + \pi)},$$

$$i = \frac{\mu\pi(\mathcal{R}_0 - 1)}{\beta N(\sigma + \mu + \pi)}.$$



Lampiran 3 Perhitungan persamaan 3.16

$$\gamma \frac{i(\sigma + \mu)}{\pi} + \sigma \frac{\mu\pi(\mathcal{R}_0 - 1)}{\beta N(\sigma + \mu + \pi)} - \theta q - \mu q = 0,$$

$$\gamma \left[\frac{\mu\pi(\mathcal{R}_0 - 1)(\sigma + \mu)}{\beta N\pi(\sigma + \mu + \pi)} \right] + \sigma \frac{\mu\pi(\mathcal{R}_0 - 1)}{\beta N(\sigma + \mu + \pi)} - q(\theta + \mu) = 0,$$

$$\frac{\gamma\mu\pi(\mathcal{R}_0 - 1)(\sigma + \mu)}{\beta N\pi(\sigma + \mu + \pi)} + \frac{\sigma\mu\pi(\mathcal{R}_0 - 1)}{\beta N(\sigma + \mu + \pi)} - q(\theta + \mu) = 0,$$

$$\frac{\gamma\mu\pi(\mathcal{R}_0 - 1)(\sigma + \mu) + \sigma\mu\pi^2(\mathcal{R}_0 - 1)}{\beta N\pi(\sigma + \mu + \pi)} - q(\theta + \mu) = 0,$$

$$\frac{\mu\pi(\mathcal{R}_0 - 1)(\gamma(\sigma + \mu) + \sigma\pi)}{\beta N\pi(\sigma + \mu + \pi)} - q(\theta + \mu) = 0,$$

$$\frac{\mu\pi(\mathcal{R}_0 - 1)}{\beta N(\sigma + \mu + \pi)} \cdot \frac{(\gamma(\sigma + \mu) + \sigma\pi)}{\pi} - q(\theta + \mu) = 0,$$

$$i^* \cdot \frac{\gamma(\sigma + \mu) + \sigma\pi}{\pi} - q(\theta + \mu) = 0,$$

$$q(\theta + \mu) = \frac{\gamma(\sigma + \mu) + \sigma\pi}{\pi} \cdot i^*$$

$$q = \frac{\gamma(\sigma + \mu) + \sigma\pi}{\pi(\theta + \mu)} \cdot i^*.$$



Lampiran 4 Perhitungan persamaan karakteristik matriks $J(C^*)$

$$J(C^*) - \lambda I = 0,$$

$$(-\theta - \mu - \lambda) \begin{vmatrix} -\mu + \beta N(e^* + i^*) - \lambda & -\beta N s^* & -\beta N s^* \\ \beta N(e^* + i^*) & \beta N s^* - \pi - (\mu + \gamma) - \lambda & \beta N s^* \\ 0 & \pi & -(\sigma + \mu) - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$(-\theta - \mu - \lambda) [\mu \pi \sigma - (-\beta N e^* - \beta N i^* + \beta N s^* - \pi - \gamma - 3\mu - \sigma) \lambda^2 - \beta N \mu^2 s^* + \beta N e^* \mu^2 + \beta N i^* \mu^2 - N^2 \beta^2 e^* s^* \sigma - N^2 \beta^2 e^* \mu s^* + N \gamma \beta i^* \sigma + N \gamma \beta i^* \mu + N \gamma \beta e^* \sigma + N^2 (e^* + i^*) \beta^2 s^* \sigma + N \gamma \beta e^* \mu - (N^2 \beta^2 e^* s^* + N^2 \beta^2 i^* s^* - \beta^2 N (e^* + i^*) N s^* - N \gamma \beta e^* - N \gamma \beta i^* - 2 N \beta e^* \mu - N \beta e^* \pi - N \beta e^* \sigma - 2 N \beta i^* \mu - N \beta i^* \pi - N \beta i^* \sigma + 2 N \beta \mu s^* + \pi \beta N s^* + N \beta s^* \sigma - 2 \gamma \mu - \gamma \sigma - 3 \mu^2 - 2 \mu \pi - 2 \mu \sigma - \pi \sigma) \lambda + \mu^2 \pi + \mu^3 + \lambda^3 + N^2 (e^* + i^*) \beta^2 \pi s^* - N \beta \mu \pi s^* + N \beta i^* \pi \sigma + N \beta i^* \mu \pi + N \beta e^* \pi \sigma + N \beta e^* \mu \pi - N^2 \beta^2 i^* \pi s^* + N^2 (e^* + i^*) \beta^2 \mu s^* - N \beta \mu s^* \sigma + N \beta i^* \mu \sigma + N \beta e^* \mu \sigma - N^2 \beta^2 i^* s^* \sigma - N^2 \beta^2 i^* \mu s^* - N^2 \beta^2 e^* \pi s^* + \mu^2 \sigma + \gamma \mu^2 + \gamma \mu \sigma] = 0,$$

$$(-\theta - \mu - \lambda) [\lambda^3 + (\beta N e^* + \beta N i^* - \beta N s^* + \pi + \gamma + 3\mu + \sigma) \lambda^2 + (N \gamma \beta e^* + N \gamma \beta i^* + 2 N \beta e^* \mu + N \beta e^* \pi + N \beta e^* \sigma + 2 N \beta i^* \mu + N \beta i^* \pi + N \beta i^* \sigma - 2 N \beta \mu s^* - \pi \beta N s^* - N \beta s^* \sigma + 2 \gamma \mu + \gamma \sigma + 3 \mu^2 + 2 \mu \pi + 2 \mu \sigma + \pi \sigma) \lambda + N^2 (e^* + i^*) \beta^2 \pi s^* - N \beta \mu \pi s^* + N \beta i^* \pi \sigma + N \beta i^* \mu \pi + N \beta e^* \pi \sigma + N \beta e^* \mu \pi - N^2 \beta^2 i^* \pi s^* + N^2 (e^* + i^*) \beta^2 \mu s^* - N \beta \mu s^* \sigma + N \beta i^* \mu \sigma + N \beta e^* \mu \sigma - N^2 \beta^2 i^* s^* \sigma - N^2 \beta^2 i^* \mu s^* - N^2 \beta^2 e^* \pi s^* + \mu^2 \sigma + \gamma \mu^2 + \gamma \mu \sigma + \mu^2 \pi + \mu^3 + \mu \pi \sigma - N \beta \mu^2 s^* + N \beta e^* \mu^2 + N \beta i^* \mu^2 - N^2 \beta^2 e^* s^* \sigma - N^2 \beta^2 e^* \mu s^* + N \gamma \beta i^* \sigma + N \gamma \beta i^* \mu + N \gamma \beta e^* \sigma + N^2 (e^* + i^*) \beta^2 s^* \sigma + N \gamma \beta e^* \mu] = 0,$$



$$\begin{aligned}
 &(-\theta - \mu - \lambda)[\lambda^3 + (\beta N e^* + \beta N i^* - \beta N s^* + \pi + \gamma + 3\mu + \sigma)\lambda^2 + (N\gamma\beta e^* + N\gamma\beta i^* + 2N\beta e^*\mu + N\beta e^*\pi + \\
 &N\beta e^*\sigma + 2N\beta i^*\mu + N\beta i^*\pi + N\beta i^*\sigma - \beta N s^*(2\mu + \pi + \sigma) + 2\gamma\mu + \gamma\sigma + 3\mu^2 + 2\mu\pi + 2\mu\sigma + \pi\sigma)\lambda - \\
 &\beta N s^*(\mu\pi + \mu\sigma + \mu^2) + N\beta i^*\pi\sigma + N\beta i^*\mu\pi + N\beta e^*\pi\sigma + N\beta e^*\mu\pi + N\beta i^*\mu\sigma + N\beta e^*\mu\sigma + \mu^2\sigma + \gamma\mu^2 + \gamma\mu\sigma + \\
 &\mu^2\pi + \mu^3 + \mu\pi\sigma + N\beta e^*\mu^2 + N\beta i^*\mu^2 + N\gamma\beta i^*\sigma + N\gamma\beta i^*\mu + N\gamma\beta e^*\sigma + N\gamma\beta e^*\mu] = 0,
 \end{aligned}$$



Lampiran 5 Perhitungan persamaan 3.25

$$L' = e' + \frac{\beta N}{(\sigma + \mu)} i,$$

$$L' = \beta N s e - \beta N s i - (\pi + \mu + \gamma) e + \frac{\beta N}{\sigma + \mu} (\pi e) - \frac{\beta N}{\sigma + \mu} (\sigma + \mu) i,$$

karena $0 \leq s < 1$, maka didapat

$$L' = \beta N s e + \beta N s i - (\pi + \mu + \gamma) e + \frac{\beta N}{\sigma + \mu} (\pi e) - \beta N i,$$

$$\leq \beta N e - (\pi + \mu + \gamma) e + \frac{\beta N}{\sigma + \mu} (\pi e),$$

$$\leq \left(\beta N + \frac{\beta N \pi}{\sigma + \mu} - (\pi + \mu + \gamma) \right) e,$$

$$\leq \left[\beta N \left(1 + \frac{\pi}{\sigma + \mu} \right) - (\pi + \mu + \gamma) \right] e,$$

$$\leq \left[\beta N \left(\frac{\sigma + \mu + \pi}{\sigma + \mu} \right) - (\pi + \mu + \gamma) \right] e,$$

$$\leq \left[\frac{\beta N (\sigma + \mu + \pi)}{\sigma + \mu} \cdot \frac{(\pi + \mu + \gamma)}{(\pi + \mu + \gamma)} - (\pi + \mu + \gamma) \right] e,$$

$$\leq [\mathcal{R}_0 (\pi + \mu + \gamma) - (\pi + \mu + \gamma)] e,$$

$$\leq [\mathcal{R}_0 - 1] (\pi + \mu + \gamma) e.$$



Lampiran 6 *Source Code* program Matlab Model SEIQR pada penyebaran COVID-19

```

function
dy=fungsi2(y,A,n,K,alpha,mu,beta_h,beta_b,gamma,sig
ma,epsilon,d)
x(1)=A+alpha*y(3)-
((beta_h*y(2))/n+(beta_b*y(4))/(K+y(4))+mu)*y(1);
x(2)=((beta_h*y(2))/n+(beta_b*y(4))/(K+y(4)))*y(1)-
(mu+gamma+d)*y(2);
x(3)=gamma*y(2)-(mu+alpha)*y(3);
x(4)=epsilon*y(2)-sigma*y(4);
dy=[x(1) x(2) x(3) x(4)];

clear all;
close all;

clc;
A=7.7e-3;
btheta=10.2e-2;
gamma=0.003;
pi=0.02;
sigma=0.02;
theta=0.025;
mu=8.035e-3;
% S0=1;E0=0;I0=0;Q0=0;R0=0;
S0=2;E0=1.2;I0=1.3;Q0=1.2;R0=0;
% M=A/mu;
% s0=S0/M;e0=E0/M;i0=I0/M;q0=Q0/M;

h=0.01;
t=0:h:350;
N=length(t);
S=zeros(N,1);So=zeros(N,1);
E=zeros(N,1);Eo=zeros(N,1);
I=zeros(N,1);Io=zeros(N,1);
Q=zeros(N,1);Qo=zeros(N,1);
R=zeros(N,1);Ro=zeros(N,1);
tes=1;
it=0;
S(1)=S0; E(1)=E0; I(1)=I0; Q(1)=Q0; R(1)=R0;
% S(1)=s0; E(1)=e0; I(1)=i0; Q(1)=q0;

```




```

for i=1:N-1
    y=[S(i) E(i) I(i) O(i) R(i)]';
    j1=fungsi2(y,A,mu,bheta,pi,gamma,sigma,theta);
    j2=fungsi2(y+0.5*h*j1,A,mu,bheta,pi,gamma,sigma,theta);
    j3=fungsi2(y+0.5*h*j2,A,mu,bheta,pi,gamma,sigma,theta);
    j4=fungsi2(y+h*j3,A,mu,bheta,pi,gamma,sigma,theta);
    y=y+(h/6)*(j1+2*j2+2*j3+j4);
    S(i+1)=y(1);
    E(i+1)=y(2);
    I(i+1)=y(3);
    O(i+1)=y(4);
    R(i+1)=y(5);
end
if it==0
    figure()
    grid on; hold on;
    plot(t,S,'b-',t,E,'r-','linewidth',2);
    plot(t,I,'color',[0.1,0.5,0],'linewidth',2);
    plot(t,O,'color',[1,0.5,0.1],'linewidth',2);
    set(gca,'FontSize',9,'fontweight','bold','linewidth',2);
    xlabel('Waktu(hari)','fontweight','bold');
    ylabel('Populasi','fontweight','bold');
    legend('s','e','i','o');
end
a1=bheta*A*(sigma+mu+pi);
a2=mu*(sigma+mu)*(pi+mu+gamma);
r0=a1/a2
s=1/r0
i=(mu*pi*(r0-1))/(bheta*(A/mu)*(sigma+mu+pi))
e=(i*(sigma+mu))/pi
q=((gamma*(sigma+mu)+sigma*pi)/(pi*(theta+mu)))*i

```



```

%Program Utama
%RO<1
clc;
clear all;
%Nilai Awal
S=1.4;E=1.3;I=1.2;Q=1.1;R=0;
z(1,:)=[S,E,I,Q];
S_1=1.5;E_1=1.1;I_1=1.5;Q_1=1;R_1=0;
z1(1,:)=[S_1,E_1,I_1,Q_1];
S_2=1.6;E_2=1.4;I_2=1.7;Q_2=1.4;R_2=0;
z2(1,:)=[S_2,E_2,I_2,Q_2];
h=0.1;
t=0:10000;
M=length(t)-1;
for i=1:M
    k1=h*fun1(t(i),z(i,:));
    k2=h*fun1(t(i)+(h/2),z(i,:)+k1/2);
    k3=h*fun1(t(i)+(h/2),z(i,:)+k2/2);
    k4=h*fun1(t(i)+h,z(i,:)+k3);
    z(i+1,:)=z(i,:)+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
    k11=h*fun2(t(i),z1(i,:));
    k21=h*fun2(t(i)+(h/2),z1(i,:)+k11/2);
    k31=h*fun2(t(i)+(h/2),z1(i,:)+k21/2);
    k41=h*fun2(t(i)+h,z1(i,:)+k31);
    z1(i+1,:)=z1(i,:)+(k11+2*k21+2*k31+k41)/6;
    k12=h*fun3(t(i),z2(i,:));
    k22=h*fun3(t(i)+(h/2),z2(i,:)+k12/2);
    k32=h*fun3(t(i)+(h/2),z2(i,:)+k22/2);
    k42=h*fun3(t(i)+h,z2(i,:)+k32);
    z2(i+1,:)=z2(i,:)+(k12+2*k22+2*k32+k42)/6;
end
y=z;
y1=z1;
48

```



```

y2=z2;
figure;
plot3(y(:,1),y(:,2),y(:,3),'b',y1(:,1),y1(:,2),y1(:,3),'g',y2(:,1),y2(:,2),y2(:,3),'r','LineWidth',2);
%orbit solusi
hold on;
%nilaititikbebasendemik
plot3(1,0,0,'oblack','LineWidth',5)
text(1,0,0,'\color{black}E_0','HorizontalAlignment','right','VerticalAlignment','bottom')
plot3(1.4,1.3,1.2,'ob','LineWidth',3)
text(1.4,1.3,1.2,'\color{black}N_1','HorizontalAlignment','left','VerticalAlignment','bottom')
plot3(1.5,1.1,1.5,'og','LineWidth',3)
text(1.5,1.1,1.5,'\color{black}N_2','HorizontalAlignment','left','VerticalAlignment','bottom')
plot3(1.6,1.4,1.7,'or','LineWidth',3)
text(1.6,1.4,1.7,'\color{black}N_3','HorizontalAlignment','left','VerticalAlignment','bottom')
xlabel('s');
ylabel('e');
zlabel('i');
grid on

```