RELASI ANTAR-TIPE DARI IDEAL (α, β)-*FUZZY* INTUISIONISTIK DALAM SEMIGRUP TERNARI

TESIS

Oleh

DAMARIAN PRAWIRA HUTAMA
166090400011007

PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
BIDANG MINAT ALJABAR

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
M A L A N G
2021

RELASI ANTAR-TIPE DARI IDEAL (α, β)-*FUZZY* INTUISIONISTIK DALAM SEMIGRUP TERNARI

TESIS

Untuk Memenuhi Persyaratan
Memperoleh Gelar Magister dalam Bidang Matematika

Oleh

DAMARIAN PRAWIRA HUTAMA
166090400011007

PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
BIDANG MINAT ALJABAR

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
M A L A N G
2021

TESIS

RELASI ANTAR-TIPE DARI IDEAL (α, β)-*FUZZY* INTUISIONISTIK DALAM SEMIGRUP TERNARI

Oleh:

DAMARIAN PRAWIRA HUTAMA
NIM. 166090400011007

Telah diseminarkan di depan Tim Penguji
pada tanggal 12 Juli 2021
dan dinyatakan **LULUS**

Menyetujui:
Tim Dosen Pembimbing

Dosen Pembimbing 1	Dosen Pembimbing 2
Dr. Noor Hidayat, M.Si.	Drs. Abdul Rouf Al-ghofari, M.Sc., Ph.D.
NIP. 196112041988021001	NIP. 196709071992031001

Mengetahui:

Ketua Jurusan Matematika	Ketua Program Studi Magister Matematika
Syaiful Anam, S,Si., M.T., Ph.D	Dr. Noor Hidayat, M.Si.
NIP. 197801152002121003	NIP. 196112041988021001

IDENTITAS TIM PENGUJI

Judul Proposal Tesis : **RELASI ANTAR-TIPE DARI IDEAL (α, β)-*FUZZY* INTUISIONISTIK DALAM SEMIGRUP TERNARI**

Nama : DAMARIAN PRAWIRA HUTAMA

NIM : 166090400011007

Program Studi : Magister Matematika

Bidang Minat : ALJABAR

TIM PENGUJI

Dosen Pembimbing 1 : Dr. Noor Hidayat, M.Si.

Dosen Pembimbing 2 : Drs. Abdul Rouf Al-ghofari, M.Sc., Ph.D.

Dosen Penguji 1 : Drs. M. Muslikh, M.Si., Ph.D.

Dosen Penguji 2 : Prof. Dr. Marjono, M.Phil.

Tanggal Ujian :

SK. Penguji :

PERNYATAAN ORISINALITAS

Saya menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa sepanjang pengetahuan saya, didalam naskah tesis ini tidak terdapat karya ilmiah yang pernah diajukan oleh orang lain untuk memperoleh gelar akademik di suatu perguruan tinggi dan tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain, kecuali yang secara tertulis dikutip dalam naskah ini dan disebutkan dalam sumber kutipan dan daftar pustaka.

Apabila ternyata di dalam naskah tesis ini dapat dibuktikan terdapat unsur-unsur jiplakan, saya bersedia diproses sesuai dengan peraturan perundang-undangan yang berlaku dan tesis dibatalkan.

Malang, 12 Juli 2021

SEPULUH RIBU RUPIAH
10000
METERAI TEMPEL
259D2AJX324342822

Damarian Prawira Hutama
NIM. 166090400011007

RINGKASAN

DAMARIAN PRAWIRA HUTAMA, Program Studi Magister Matematika FMIPA Universitas Brawijaya. Relasi Antar-Tipe dari Ideal (α,β)-*Fuzzy* Intuisionistik dalam Semigrup Ternari. Dosen Pembimbing 1: Noor Hidayat, Dosen Pembimbing 2: Abdul Rouf Al-ghofari.

Semigrup ternari adalah sebuah struktur aljabar yang dilengkapi dengan operasi ternari dan bersifat tertutup dan asosiatif. Sebagaimana dalam konsep semigrup pada konsep semigrup ternari juga didefinisikan konsep ideal dalam semigrup ternari. Himpunan *fuzzy* adalah salah satu pendekatan matematis yang mengkaji konsep yang pendefinisian dan keakuratannya masih belum dapat dipastikan. Dalam konsep himpunan fuzzy, didefinisikan konsep *fuzzy point*, yang merupakan sebuah himpunan *fuzzy* dengan syarat tambahan tertentu. Relasi "keanggotaan" dan *"quasi-coincident with"* merupakan dua konsep digunakan untuk menghubungkan *fuzzy point* dengan himpunan *fuzzy*. Ideal (α,β)-*fuzzy* merupakan sebuah konsep ideal yang berhubungan dengan konsep *fuzzy*, yang mana didalamnya terdefinisi juga relasi "keanggotaan" dan *"quasi-coincident with"*. Kemudian, klasifikasi dari berbagai tipe ideal (α,β)-*fuzzy* dalam semigrup ternari telah didefinisikan dan relasi antar-tipe dari ideal ini telah ditelaah. Himpunan *Fuzzy* Intuisionistik (IFS) adalah sebuah konsep perluasan dari himpunan *fuzzy*. Pada IFS, tidak hanya terdapat derajat keanggotaan, tetapi juga terdapat derajat non-keanggotaan. Sebagaimana dalam himpunan *fuzzy*, konsep relasi "keanggotaan" dan *"quasi-coincident with"* juga dikembangkan dalam kajian IFS. Selanjutnya konsep Ideal (α,β)-Intuitionistic fuzzy dalam semigrup juga telah didefinisikan.

Penelitian ini dimulai dengan membandingkan beberapa definisi ideal (α,β)-*fuzzy* maupun ideal (α,β)-*fuzzy* intuisionistik untuk merumuskan konsep ideal (α,β)-*fuzzy* intuisionistik dalam semigrup ternari. Selanjutnya akan ditelaah relasi antar-tipe dari ideal-ideal ini. Pada tesis ini, $\alpha \in \{\epsilon, q, \epsilon \vee q\}$ dan $\beta \in \{\epsilon, q, \epsilon \vee q, \epsilon \wedge q\}$

Kata Kunci: Semigrup Ternari, Ideal *Fuzzy*, *Fuzzy Point,* Relasi "Keanggotaan" dan Relasi *"Quasi-Coincident with",* Klasifikasi Ideal (α,β)-Fuzzy dalam Semigrup Ternari, *Himpunan Fuzzy* Intuisionistik, Ideal (α,β)-*Fuzzy* Intuisionistik dalam Semigrup.

SUMMARY

DAMARIAN PRAWIRA HUTAMA, *Mathematics Master Study Program, Faculty of Mathematics and Natural Science*, *University of Brawijaya, Relations between each Types of* (α,β)*-Intuitionistic Fuzzy Ideals in Ternary Semigroup*, *Supervisor*: Noor Hidayat, *Co-Supervisor:* Abdul Rouf Al-ghofari.

Ternary semigroup is an algebraic structure that has closed and associative properties under ternary operation. As in semigroup, the concept of ideal is also defined in ternary semigroup. Fuzzy set is one of mathematical approach that is dealing with uncertainty and imprecise problem. Fuzzy point is defined here as a fuzzy set with some extra conditions. The concept of "belong to" relation and "quasi-coincident with" relation is defined as a way to connect fuzzy points and fuzzy set. (α,β)*-fuzzy ideal is defined as an ideal, in which the concept of "belong to" relation and "quasi-coincident with" relation is defined in it. Classification of* (α,β)*-fuzzy ideal is defined and relations between each type of these ideals are explored. Intuitionistic himpunan fuzzy is a generalization of fuzzy concept, in which also defined the degree of non-membership. As in fuzzy set, the concept of "belong to" and "quasi-coincident with" is defined here. Then the concept of* (α,β)*-Intuitionistic fuzzy ideal in semigroup had also been defined.*

The research for this major thesis was conducted by comparing various definition of both (α,β) *fuzzy ideals and* (α,β)*-intuitionistic fuzzy ideals. Then, the definition of* (α,β)*- Intuitionistic fuzzy ideals in ternary semigroup would be formulated based on these comparison. Relations between each type of* (α,β)*-intuitionistic fuzzy ideals were also explored. By* (α,β) *here, it means that we refer to any two of* $\{\epsilon, q, \epsilon \vee q, \epsilon \wedge q\}$*, with* $\alpha \neq \epsilon \wedge q$*.*

Keyword: Ternary Semigroup, Fuzzy Ideals, Fuzzy Points, "Belong to" Relation and "Quasi-Coincident with" Relation, Classification of (α,β)*-Fuzzy Ideals in Ternary Semigroup, Intuitionistic Himpunan fuzzy,* (α,β)*-Intuitionistic Fuzzy Ideals in Semigroup.*

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR SIMBOL

$P = (\mu_P, \gamma_P)$	Himpunan *fuzzy* intuisionistik (himpunan IF) P dengan derajat keanggotaan μ_P dan derajat non-keanggotaan γ_P
$x_{(a,b)}$	*Fuzzy point* intuisionistik (IFP) dengan support x, derajat keanggotaan a dan derajat non-keanggotaan b
$[x; a]$	*Fuzzy point* (FP) dengan support x dan nilai a
$x_{(a,b)} \epsilon P$	IFP $x_{(a,b)}$ berelasi "anggota" dengan himpunan IF P
$x_{(a,b)} q P$	IFP $x_{(a,b)}$ berelasi *quasi-coincident* dengan himpunan IF P
$[x; a] \epsilon f$	FP $[x; a]$ berelasi "anggota" dengan himpunan *fuzzy* f
$[x; a] q f$	FP $[x; a]$ berelasi *quasi-coincident* dengan himpunan *fuzzy* f
$\wedge, \vee$	Operator irisan dan gabungan dalam himpunan fuzzy dan himpunan IF
$\setminus$	Operator selisih pada himpunan biasa
$\cup$	Operator gabungan pada himpunan biasa
$\cap$	Operator irisan pada himpunan biasa
$\in$	Elemen dari
$\notin$	Bukan elemen
$\forall$	Untuk setiap
$\exists$	Terdapat
$S \times S$	Hasil kali kartesius dari S dan S
$f: S \times S$	Pemetaan dari S ke S
$\blacksquare$	Akhir dari sebuah bukti

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Semigrup adalah struktur aljabar yang dilengkapi dengan sebuah operasi biner dan bersifat tertutup dan asosiatif. Pada tahun 1970, Naser-uddin mendeskripsikan operasi ternari sebagai pemetaan yang menghubungkan tiga buah elemen dalam sebuah himpunan ke sebuah elemen pada himpunan tertentu (Naser-uddin, 1970). Sebelumnya, pada tahun 1932, Lemher memberikan sebuah definisi formal mengenai semigrup ternari, yang kemudian oleh Banach, dibuktikan bahwa tidak semua semigrup ternari merupakan sebuah semigrup (Lehmer, 1932; Los, 1955). Salah satu contoh yang dipakai oleh Banach adalah $T = \{-i, 0, i\}$ yang merupakan sebuah semigrup ternari, namun bukan sebuah semigrup terhadap operasi pergandaan terhadap bilangan kompleks (Los, 1955). Kemudian pada tahun 2011, Kar dan Maity memberikan beberapa penjelasan tambahan mengenai ideal dalam semigrup ternari (Kar, et al., 2011).

Pada tahun 1965, Zadeh mendefinisikan konsep himpunan *fuzzy* sebagai suatu formula matematis untuk permasalahan yang pendefinisian dan keakuratannya masih belum dapat dipastikan (Zadeh, 1965). Selanjutnya, pada tahun 1980, Pu dan Liu memperkenalkan konsep relasi “keanggotaan” pada himpunan fuzzy (Pu, et al., 1980). Kemudian, pada tahun 2005, Morali memperkenalkan konsep *fuzzy point* yang menjadi “anggota” himpunan *fuzzy* di bawah sebuah relasi “anggota” (Morali, 2005). Konsep (α, β)-fuzzy subgrup kemudian diperkenalkan menggunakan konsep “keanggotaan” dan *“quasi-coincident with”* yang menghubungkan sebuah *fuzzy point* ke sebuah himpunan *fuzzy* (Bhakat, et al., 1996). Beberapa tahun kemudian, Davvas, et al. melakukan pembahasan mengenai konsep ideal (α,β)-*fuzzy* dalam semigrup ternari (Davvas, et al., 2013).

Selanjutnya, *Intuitionistic fuzzy set* atau himpunan *fuzzy* intuisionistik (himpunan IF) merupakan sebuah konsep yang diperkenalkan oleh Atanassov sebagai suatu perluasan dari himpunan *fuzzy*. Pada konsep himpunan IF, tidak hanya terdapat derajat keanggotaan, namun didefinisikan juga derajat non-keanggotaan di dalamnya (Atanassov, 1986). Himpunan *fuzzy* intuisionistik memiliki ketepatan yang lebih baik dibandingkan himpunan *fuzzy* dalam menyelesaikan masalah yang pendefinisiannya masih belum dapat dipastikan (Abdullah, et al., 2017). Pada tahun 2005, Kim, et al., mengkaji tentang bi-ideal fuzzy intuisionistik (bi-ideal IF) dalam semigrup (Kim, et al., 2005). Kemudian Abdullah, et al. mengenalkan konsep ideal (α,β) – IF dalam hemiring, dimana $\alpha \in \{\epsilon, q, \epsilon \vee q\}$ dan $\beta \in \{\epsilon, q, \epsilon \vee q, \epsilon \wedge q\}$ (Abdullah, et al., 2011). Konsep ini menggunakan relasi "keanggotaan" (∈) dan *"quasi-coincident with"* (q) sebagaimana yang terdapat pada konsep himpunan *fuzzy* (Bhakat, et al., 1996).

Pada tesis ini akan dirumuskan pendefinisian ideal (α,β)-IF dalam sebuah semigrup ternari, dimana $\alpha \in \{\epsilon, q, \epsilon \vee q\}$ dan $\beta \in \{\epsilon, q, \epsilon \vee q, \epsilon \wedge q\}$. Hal ini dilakukan dengan cara merumuskan pendefinisian ideal (α,β)-IF dalam sebuah semigrup ternari berdasarkan beberapa definisi ideal (α,β)-IF dan ideal (α,β)-*fuzzy* yang sudah ada sebelumnya. Selanjutnya, akan ditelaah relasi antar-tipe dari ideal (α,β)-IF dalam semigrup ternari tersebut.

1.2 Perumusan Masalah Penelitian

Berdasarkan latar belakang yang telah dipaparkan di atas, maka rumusan masalah dalam tesis ini adalah sebagai berikut.

(1) Bagaimana membangun struktur ideal (α, β)-IF dalam sebuah semigrup ternari?

(2) Bagaimana sifat-sifat dari relasi antar-tipe dari ideal (α, β)-IF dalam semigrup ternari?

1.3 Tujuan

Dari perumusan masalah di atas, maka tujuan penulisan tesis ini adalah sebagai berikut.

(1) Merumuskan definisi dan membuktikan sifat-sifat dari ideal (α, β)-IF dalam sebuah semigrup ternari.

(2) Membangun dan membuktikan relasi antar-tipe dari Ideal (α, β)-IF dalam semigrup ternari.

1.4 Manfaat

Sehubungan dengan pelaksanaan penulisan tesis ini, diharapkan dapat memberikan manfaat baik dalam bidang keilmuan, maupun dalam bidang aplikatif.

(1) Dalam bidang keilmuan aljabar

Dalam bidang aljabar, dengan pendefinisian ideal (α, β)-IF dalam semigrup ternari ini, diharapkan dapat membuka penelitian-penelitian baru terkait semigrup ternari, seperti *cartesian product* dari ideal (α, β)-IF dalam semigrup ternari.

(2) Dalam bidang aplikatif.

Dengan terlaksananya penulisan tesis ini, maka dapat membuka kesempatan bagi penelitian-penelitian di bidang aplikatif lain, khususnya dalam masalah pengambilan keputusan (*decision making problem*). Salah satu pengembangan di bidang aplikatif yang dimaksud adalah dapat dirumuskannya pendekatan komputasi berbasis ideal (α,β)-*fuzzy* intuisionistik untuk masalah pengambilan keputusan grup.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Himpunan *Fuzzy*

Himpunan *fuzzy* (himpunan bagian *fuzzy*) adalah sebuah himpunan yang setiap elemennya memiliki derajat keanggotaan tertentu. Nilai derajat keanggotaan dari elemen himpunan *fuzzy* terletak pada bilangan riil dalam interval $[0,1]$. Pada subbab kali ini akan dipaparkan definisi-definisi terkait himpunan *fuzzy*. Definisi himpunan *fuzzy* yang akan dipaparkan di sini dirujuk dari Zadeh (1965). Selanjutnya, untuk definisi *fuzzy point* dan operasi *pada* himpunan *fuzzy* dijelaskan sesuai dengan yang dipaparkan oleh Davvas, et al. (2013).

Definisi 2.1.1 (Himpunan *Fuzzy*) Misalkan X merupakan suatu himpunan tak kosong. Himpunan *fuzzy* A atas X didefinisikan sebagai:

$$A = \{(x, f(x)) \mid x \in X\},$$

dimana $f: X \to [0,1]$ disebut fungsi keanggotaan dan $f(x)$ disebut derajat keanggotaan dari x pada himpunan *fuzzy* A.

Contoh 2.1.2 Diberikan himpunan tidak kosong $X = \{0,1,2,3,4,5\}$ dan definisikan himpunan *fuzzy* A dengan fungsi keanggotaannya sebagai berikut.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 5 \\ 0.8, & x = 4 \\ 0.7, & x = 3 \\ 0.5, & x = 2 \\ 0.4, & x = 1 \\ 0.3, & x = 0 \end{cases}$$

Himpunan *fuzzy* A atas X adalah himpunan pasangan terurut dari fungsi keanggotaan yang definisikan pada halaman sebelumnya, yakni:

$$A = \{(0, 0.3), (1, 0.4), (2, 0.5), (3, 0.7), (4, 0.8), (5, 1)\}$$

Definisi 2.1.3 (*Fuzzy Point*) Sebuah himpunan *fuzzy* A atas X dengan fungsi keanggotaan f sebagai berikut:

$$f : X \to [0,1], y \mapsto f_x(y) = \begin{cases} t \in (0,1] & if\ y = x \\ 0 & y \neq x \end{cases}$$

$$[x; t] = \left\{(y, d) \middle| \begin{array}{r} y \in X, jika\ y = x, maka\ d = t, \\ jika\ y \neq x, maka\ d = 0, \end{array} \right\}$$

disebut *fuzzy point* dengan *support* x dan nilai t, dituliskan $[x; t]$.

Misalkan $[x; t]$ adalah sebuah *fuzzy point*, A adalah sebuah himpunan *fuzzy* dan $\alpha \in \{\epsilon, q, \epsilon \vee q, \epsilon \wedge q\}$. Akan didefinisikan $[x; t]\alpha A$ sebagai berikut.

(1) $[x; t] \epsilon A$ berarti $f(x) \geq t$, dan disebut $[x; t]$ adalah anggota A,

(2) $[x; t]qA$ berarti $f(x) + t > 1$, dan $[x; t]$ dikatakan *"quasi-coincident"* dengan A,

(3) $[x; t] \epsilon \vee qA$ berarti $[x; t] \epsilon A$ atau $[x; t]qA$,

(4) $[x; t] \epsilon \wedge qA$ berarti $[x; t] \epsilon A$ dan $[x; t]qA$,

(5) $[x; t]\bar{\alpha}A$ berarti $[x; t]\alpha A$ tidak berlaku.

Dalam hal ini, jika $f(x) \leq 0.5$ untuk semua $x \in X$, maka himpunan $\{[x; t] | [x; t] \epsilon \wedge qA\}$ adalah himpunan kosong. Pada tesis ini, akan dibahas khusus mengenai (α, β) dimana $\alpha \in \{\epsilon, q, \epsilon \vee q\}\ dan\, \beta \in \{\epsilon, q, \epsilon \vee q, \epsilon \wedge q\}$.

Contoh 2.1.4 Berdasarkan Contoh 2.1.2, diberikan *fuzzy point* (FP) berikut:

(1) $[2; 0.1] = \{(0,0), (1,0), (2, 0.1), (3, 0), (4, 0), (5, 0)\}$

(2) [3; 0.4] = $\{(0,0), (1,0), (2, 0), (3, 0.4), (4, 0), (5, 0)\}$

Dari kedua FP tersebut dapat disimpulkan bahwa:

(1) $[2: 0.1]\, \epsilon\, A$ sebab $f(2) = 0.5 \geq 0.1$, tetapi [2; $0.1]\bar{q}A$ sebab $f(2) + 0.1 \leq 1$. Dengan demikian $[2, 0.1]\, \epsilon \vee qA$

(2) $[3: 0.4]\, \epsilon\, A$ sebab $f(3) = 0.7 \geq 0.4$, dan $[3; 0.4]qA$ sebab $f(3) + 0.4 > 1$, maka $[3: 0.4]\, \epsilon \wedge qA$

Definisi 2.1.5 (operator ∨, ∧ untuk Himpunan *Fuzzy*) Misalkan A, B dan C adalah himpunan-himpunan *fuzzy* atas sebuah himpunan X, dimana f, g dan h secara berturut-turut adalah fungsi keanggotaan dari A, B dan C. $A \wedge B \wedge C$ dan $A \vee B \vee C$ adalah himpunan-himpunan *fuzzy*, dimana untuk semua $x \in X$, berlaku sebagai berikut.

$$(A \wedge B \wedge C)(x) = f(x) \wedge g(x) \wedge h(x) = \min\{f(x), g(x), h(x)\}$$

$$(A \vee B \vee C)(x) = f(x) \vee g(x) \vee h(x) = \text{maks}\{f(x), g(x), h(x)\}$$

Dengan kata lain, $A \wedge B \wedge C$ dan $A \vee B \vee C$ adalah:

$$(A \wedge B \wedge C)(x) = \{x, \min\{f(x), g(x), h(x)\} | x \in X\},$$

$$(A \vee B \vee C)(x) = \{\text{x}, \text{maks}\{f(x), g(x), h(x)\} | x \in X\}.$$

Contoh 2.1.6 Diberikan himpunan tidak kosong $X = \{0,1,2,3,4,5\}$ dan definisikan himpunan *fuzzy* A, B *dan* C atas X dengan fungsi keanggotaannya secara berturut-turut f, g dan h sebagai berikut.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 5 \\ 0.8, & x = 4 \\ 0.7, & x = 3 \\ 0.5, & x = 2 \\ 0.4, & x = 1 \\ 0.3, & x = 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0.9, & x = 5 \\ 0.7, & x = 4 \\ 0.6, & x = 3 \\ 0.4, & x = 2 \\ 0.3, & x = 1 \\ 0.1, & x = 0 \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} 0.8, & x = 5 \\ 0.6, & x = 4 \\ 0.5, & x = 3 \\ 0.3, & x = 2 \\ 0.2, & x = 1 \\ 0.1, & x = 0, \end{cases}$$

maka:

$$\begin{aligned} (A \wedge B \wedge C)(x) &= \{x, \min\{f(x), g(x), h(x)\} | x \in X\} \\ &= \{(0,0.1), (1,02), (2, 0.3), (3, 0.5), (4, 0.6), (5, 0.8)\} \\ (A \vee B \vee C)(x) &= \{x, \text{maks}\{f(x), g(x), h(x)\} | x \in X\} \\ &= \{(0,0.3), (1,0.4), (2, 0.5), (3, 0.7), (4, 0.8), (5, 1)\}. \end{aligned}$$

2.2 Himpunan *Fuzzy* Intuisionistik

Intutionistic fuzzy set atau himpunan *fuzzy* intuisionistik (himpunan IF) adalah sebuah perluasan dari konsep himpunan *fuzzy*. Dalam himpunan IF tidak hanya terdapat derajat keanggotaan, namun juga terdapat derajat non-keanggotaan. Pada subbab ini, akan dipaparkan definisi himpunan IF menurut Atanassov (1986). Selanjutnya, akan dipaparkan konsep terkait *intutionistic fuzzy point* menurut Abdullah, et al. (2017).

Definisi 2.2.1 (Himpunan *Fuzzy* Intuisionistik) Misalkan X merupakan sebuah himpunan tak kosong. *Intuitionistic fuzzy set* atau himpunan *fuzzy* intuisionistik (disingkat himpunan IF) adalah sebuah objek sebagai berikut:

$$A = \{\, (x, \mu_A(x), \gamma_A(x)) |\, x \in X\},$$

dimana fungsi $\mu_A : X \to [0,1]$ dan $\gamma_A : X \to [0,1]$ secara berturut-turut merupakan derajat keanggotaan dan derajat non keanggotaan setiap elemen $x \in X$ pada himpunan A dan $\mu_A(x) + \gamma_A(x) \leq 1$ untuk semua $x \in S$.

Untuk menyederhanakan penulisan, simbol $A = (\mu_A, \gamma_A)$ akan dinotasikan untuk himpunan IF $A = \{(x, \mu_A(x), \gamma_A(x)) |\, x \in X\}$.

Contoh 2.2.2 Diberikan himpunan tidak kosong $X = \{0,1,2,3,4,5\}$ dan definisikan himpunan IF $A = (\mu_A, \gamma_A)$ dengan fungsi keanggotaan dan non keanggotaan sebagai berikut.

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & x = 5 \\ 0.8, & x = 4 \\ 0.7, & x = 3 \\ 0.5, & x = 2 \\ 0.4, & x = 1 \\ 0.3, & x = 0 \end{cases} \qquad \gamma_A(x) = \begin{cases} 0, & x = 5 \\ 0.1, & x = 4 \\ 0.2, & x = 3 \\ 0.3, & x = 2 \\ 0.4, & x = 1 \\ 0.6, & x = 0 \end{cases}$$

Himpunan *fuzzy* intuisionistik $A = (\mu_A, \gamma_A)$ di X adalah himpunan pasangan terurut dari fungsi keanggotaan yang definisikan di atas, yaitu:

$$A = \{(0, 0.3, 0.6), (1, 0.4, 0.4), (2, 0.5, 0.3), (3, 0.7, 0.2), (4, 0.8, 0.1), (5, 1, 0)\}.$$

Definisi 2.2.3 (*Fuzzy Point* Intuisionistik) Misalkan c merupakan sebuah titik (*point)* dalam sebuah himpunan tak kosong X dan $a \in (0,1]$, $b \in [0,1)$ adalah dua bilangan riil sedemikian sehingga $0 \leq a + b \leq 1$. Sebuah himpunan IF atas X berikut, dimana untuk semua $x \in X$ berlaku:

$$c_{(a,b)}(x) = \begin{cases} (a,b) & jika\ x = c \\ (0,1) & jika\ x \neq c. \end{cases}$$

$$c_{(a,b)} = \left\{ (x,p,q) \middle| \begin{matrix} x \in X, jika\ x = c, maka\ p = a, q = b \\ jika\ x \neq c, maka\ p = 0, q = 1 \end{matrix} \right\}$$

disebut *intuitionstic fuzzy point* (IFP) atau *fuzzy point* Intuisionistik, dimana a dan b berturut-turut merupakan derajat keanggotaan dan derajat non-keanggotaan dari $c_{(a,b)}$, serta $c \in X$ adalah *support* dari $c_{(a,b)}$.

Misalkan $c_{(a,b)}$ merupakan sebuah IFP dalam sebuah himpunan tak kosong X, $A = (\mu_A, \gamma_A)$ merupakan sebuah himpunan IF atas X dan $\alpha \in \{\epsilon, q, \epsilon \vee q, \epsilon \wedge q\}$, Akan didefinisikan $c_{(a,b)}\alpha A$ sebagai berikut.

(1) $c_{(a,b)}$ dikatakan 'anggota' A (*belong to* A), dinotasikan dengan $c_{(a,b)} \epsilon A$, jika $\mu_A(c) \geq a$ dan $\gamma_A(c) \leq b$.

(2) $c_{(a,b)}$ dikatakan "*quasi-coincident*" dengan A, disimbolkan dengan $c_{(a,b)}qA$, jika $\mu_A(c) + a > 1$ dan $\gamma_A(c) + b < 1$,

(3) $c_{(a,b)} \epsilon \vee qA$ berarti $c_{(a,b)} \epsilon A$ atau $c_{(a,b)}qA$,

(4) $c_{(a,b)} \epsilon \wedge qA$ berarti $c_{(a,b)} \epsilon A$ dan $c_{(a,b)}qA$,

(5) $c_{(a,b)}\bar{\alpha}A$ berarti $c_{(a,b)}\alpha A$ tidak berlaku.

Pada tesis ini, akan dibahas khusus mengenai (α, β) dimana $\alpha \in \{\epsilon, q, \epsilon \vee q\}$ dan $\beta \in \{\epsilon, q, \epsilon \vee q, \epsilon \wedge q\}$.

Contoh 2.2.4 Berdasarkan Contoh 2.2.2, diberikan *fuzzy point* intuisionistik (IFP) berikut:

(1) $2_{(0.1,0.8)} = \{(0,0,1),(1,0,1),(2,0.1,0.8),(3,0,1),(4,0,1),(5,0,1)\}$

(2) $3_{(0.4,0.2)} = \{(0,0,1),(1,0,1),(2,0,1),(3,0.4,0.2),(4,0,1),(5,0,1)\}$.

Dari kedua di IFP di atas dapat disimpulkan bahwa:

(1) $2_{(0.1,0.8)}\epsilon A$ sebab $\mu_A(2) = 0.5 \geq 0.1$ dan $\gamma_A(2) = 0.3 \leq 0.8$ tetapi $2_{(0.1,0.8)}\bar{q}A$ sebab $\mu_A(2) + 0.1 \leq 1$ dan $\gamma_A(2) + 0.8 \geq 1$. Dengan demikian $2_{(0.1,0.8)}\epsilon \vee qA$.

(2) $3_{(0.4,0.2)}\epsilon A$ sebab $\mu_A(3) = 0.7 \geq 0.4$, $\gamma_A(3) = 0.2 \leq 0.2$ dan $3_{(0.4,0.2)}qA$ sebab $\mu_A(3) + 0.4 > 1$, $\gamma_A(3) + 0.2 < 1$, maka $3_{(0.4,0.2)}\epsilon \wedge qA$.

Definisi 2.2.5 (Operator ∨, ∧ untuk Himpunan *Fuzzy* Intuisionistik) Misalkan $A = (\mu_A, \gamma_A)$, $B = (\mu_B, \gamma_B)$, $C = (\mu_C, \gamma_C)$ adalah himpunan-himpunan IF di sebuah himpunan X. $A \wedge B \wedge C$ dan $A \vee B \vee C$ adalah himpunan-himpunan IF sehingga:

$$(A \wedge B \wedge C)(x) = \{x, \min\{\mu_A(x), \mu_b(x), \mu_C(x)\}, \text{maks}\{\gamma_A(x), \gamma_B(x), \gamma_C(x)\} \,|\, x \in X\},$$

$$(A \vee B \vee C)(x) = \{x, \text{maks}\{\mu_A(x), \mu_b(x), \mu_C(x)\}, \min\{\gamma_A(x), \gamma_B(x), \gamma_C(x)\} \,|\, x \in X\}.$$

Contoh 2.2.6 Dari Contoh 2.2.2, didefinisikan dua buah himpunan IF $B = (\mu_B, \gamma_B)$, $C = (\mu_C, \gamma_C)$ di X dengan fungsi keanggotaan sebagai berikut.

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & x = 5 \\ 0.8, & x = 4 \\ 0.7, & x = 3 \\ 0.5, & x = 2 \\ 0.4, & x = 1 \\ 0.3, & x = 0 \end{cases} \qquad \gamma_A(x) = \begin{cases} 0, & x = 5 \\ 0.1, & x = 4 \\ 0.2, & x = 3 \\ 0.3, & x = 2 \\ 0.4, & x = 1 \\ 0.6, & x = 0 \end{cases}$$

$$\mu_B(x) = \begin{cases} 0.9, & x = 5 \\ 0.7, & x = 4 \\ 0.6, & x = 3 \\ 0.4, & x = 2 \\ 0.3, & x = 1 \\ 0.2, & x = 0 \end{cases} \qquad \gamma_B(x) = \begin{cases} 0.05, & x = 5 \\ 0.2, & x = 4 \\ 0.3, & x = 3 \\ 0.5, & x = 2 \\ 0.6, & x = 1 \\ 0.7, & x = 0 \end{cases}$$

$$\mu_C(x) = \begin{cases} 0.8, & x = 5 \\ 0.6, & x = 4 \\ 0.5, & x = 3 \\ 0.3, & x = 2 \\ 0.2, & x = 1 \\ 0.1, & x = 0 \end{cases} \qquad \gamma_C(x) = \begin{cases} 0.1, & x = 5 \\ 0.3, & x = 4 \\ 0.4, & x = 3 \\ 0.5, & x = 2 \\ 0.6, & x = 1 \\ 0.8, & x = 0, \end{cases}$$

maka:

$$\begin{aligned} (A \wedge B \wedge C)(x) &= \{x, \min\{\mu_A(x), \mu_b(x), \mu_C(x)\}, \text{maks}\{\gamma_A(x), \gamma_B(x), \gamma_C(x)\} \mid x \in X\} \\ &= \{(0, 0.1, 0.8), (1, 0.2, 0.6), (2, 0.3, 0.5), (3, 0.5, 0.4), (4, 0.6, 0.3), \\ &\quad (5, 1, 0.1)\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (A \vee B \vee C)(x) &= \{x, \text{maks}\{\mu_A(x), \mu_b(x), \mu_C(x)\}, \min\{\gamma_A(x), \gamma_B(x), \gamma_C(x)\} \mid x \in X\} \\ &= \{(0, 0.3, 0.6), (1, 0.4, 0.4), (2, 0.5, 0.3), (3, 0.7, 0.2), (4, 0.8, 0.1), \\ &\quad (5, 1, 0)\}. \end{aligned}$$

2.3 Semigrup Ternari

Pada subbab ini akan disajikan beberapa definisi terkait semigrup ternari. Definisi struktur aljabar dan semigrup pada subbab ini dirujuk dari Bhattarachya et al. (1995) dan Abdullah, et al. (2017). Selanjutnya, konsep terkait semigrup ternari dirujuk dari Davvas, et al. (2013). Khusus untuk operasi ternari, akan dipaparkan sesuai dengan definisi yang dijabarkan oleh Naseer-uddin (1970).

Definisi 2.3.1 (Operasi Ternari) Misalkan S adalah sebuah himpunan tidak kosong. Operasi ternari $[\ \ ]$ pada himpunan S adalah sebuah pemetaan untuk setiap pasangan terurut $(a, b, c) \in S \times S \times S$ ke $[abc] \in S$. Operasi ternari $[\ \ ]$ pada S dinotasikan:

$$[\ \ ]: \ S \times S \times S \ \rightarrow S$$

$$(a, b, c) \ \mapsto [\ \ ](abc) = [abc].$$

Contoh 2.3.2 Diberikan sebuah operasi $[\ \ ]$ pada $\mathbb{Z}$, untuk semua $x, y, z \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $[xyz] = x \cdot y \cdot z$, dimana $\cdot$ operasi pergandaan pada $\mathbb{Z}$. Akan dibuktikan bahwa $[\ \ ]$ merupakan sebuah operasi ternari.

Bukti. Akan ditunjukkan bahwa operasi $[\ \ ]$ merupakan sebuah operasi ternari. Pertama, akan dibuktikan bahwa operasi $[\ \ ]$ merupakan sebuah pemetaan. Diberikan relasi $f(x, y, z)$, didefinisikan dengan $f(x, y, z) = [xyz] = x \cdot y \cdot z$, untuk semua $x, y, z \in \mathbb{Z}$. Dengan demikian $f(x, y, z)$ adalah sebuah pemetaan yang bersesuaian dengan operasi $[\ \ ]$. Diketahui $\cdot$ merupakan sebuah pergandaan di $\mathbb{Z}$, sehingga untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}$, terdapat tepat satu $d \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $f(a,b,c) = d$. Terbukti bahwa $f(x,y,z)$ adalah sebuah pemetaan. Dengan demikian terbukti bahwa [ ] merupakan sebuah operasi ternari. ■

Definisi 2.3.3 (Sifat Operasi Ternari)

Operasi Ternari [ ] $: S \times S \times S \to S$ pada himpunan S, dikatakan:

(1) Tertutup, jika untuk setiap $a, b, c \in S$, terdapat $d \in S$, sedemikian sehingga $[abc] = d$.

(2) Asosiatif jika $[abc]de = ab[cde]$, untuk setiap $a, b, c \in S$.

Contoh 2.3.4 Berdasarkan **Contoh 2.3.2**, akan dibuktikan bahwa operasi [ ] pada $\mathbb{Z}$ bersifat asosiatif.

Bukti. Didefinisikan operasi [ ] pada $\mathbb{Z}$ dengan aturan, untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{Z}$, berlaku $[xyz] = x \cdot y \cdot z$. Akan ditunjukan bahwa operasi [ ] pada $\mathbb{Z}$ bersifat asosiatif. Sesuai sifat asosiatif pada pergandaan bilangan bulat, untuk sebarang $a, b, c, d, e \in \mathbb{Z}$, berlaku sebagai berikut.

$$
\begin{aligned}
[abc]de &= (a \cdot b \cdot c) \cdot d \cdot e \\
&= a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \\
ab[cde] &= a \cdot b \cdot (c \cdot d \cdot e) \\
&= a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e
\end{aligned}
$$

Jadi untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{Z}$ berlaku $[abc]de = ab[cde]$. Dengan demikian operasi biner [ ] pada $\mathbb{Z}$ bersifat asosiatif. ■

Definisi 2.3.5 (Struktur Aljabar) Misalkan S adalah sebuah himpunan tak kosong dan # adalah sebuah operasi yang terdefinisi pada S. Struktur aljabar, dinotasikan dengan $(S, \#)$ adalah sebuah himpunan tak kosong S yang dilengkapi dengan satu operasi # pada S atau lebih.

Contoh 2.3.6 Dari Contoh 2.3.2, $(\mathbb{Z}, [\quad])$ merupakan struktur aljabar, sebab $\mathbb{Z}$ dilengkapi satu operasi ternari pada $\mathbb{Z}$. ■

Definisi 2.3.7 (Semigrup) Misalkan S adalah sebuah himpunan tak kosong dan # adalah sebuah operasi biner yang terdefinisi pada S. Semigrup $(S, \#)$ adalah sebuah struktur aljabar $(S, \#)$ yang memenuhi hukum asosiatif, yakni untuk semua $a, b, c \in S$, berlaku $a\#(b\#c) = (a\#b)\#c$.

Contoh 2.3.8 Diberikan sebuah operasi biner $*$ pada $\mathbb{Z}$, untuk semua $x, y \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $x * y = x + y$. Akan dibuktikan bahwa $(\mathbb{Z},*)$ adalah sebuah semigrup.

Bukti. Didefinisikan operasi biner $*$ pada $\mathbb{Z}$ dengan aturan, untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}$, berlaku $x * y = x + y$. Akan ditunjukan bahwa $(\mathbb{Z},*)$ memenuhi hukum asosiatif. Sesuai sifat penjumlahan yang asosiatif pada bilangan bulat, maka untuk sebarang $x, y, z \in \mathbb{Z}$, berlaku sebagai berikut.

$$
\begin{aligned}
(x * y) * z &= (x + y) + z \\
&= x + y + z \\
x * (y * z) &= x + (y + z) \\
&= x + y + z.
\end{aligned}
$$

Jadi, untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{Z}$ berlaku $(x * y) * z = x * (y * z)$. Dengan demikian $(\mathbb{Z},*)$ memenuhi hukum asosiatif. Terbukti bahwa $(\mathbb{Z},*)$ adalah sebuah semigrup. ■

Definisi 2.3.9 (Semigrup Ternari) Misalkan X adalah sebuah himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan sebuah operasi pergandaan ternari $(a, b, c) \longmapsto [abc]$. Struktur aljabar $(X, [\quad])$ disebut semigrup ternari, jika setiap elemennya tertutup di bawah operasi pergandaan ternari $[\quad]$ dan memenuhi hukum asosiatif, sebagai berikut:

$$\big[[abc]de\big] = [a[bcd]e] = \big[ab[cde]\big], \text{ untuk semua } a, b, c, d, e \in X.$$

Untuk menyederhanakan penulisan, $[abc]$ akan ditulis sebagai abc. Untuk himpunan tak kosong A, B dan C dari X, berlaku sebagai berikut.

$$ABC := \{abc \mid a \in A, b \in B, c \in C\}.$$

Contoh 2.3.10 Misalkan $T = \{1,2,3\}$ merupakan sebuah himpunan yang di dalamnya terdefinisi operasi ternari $[abc] = a * b * c$ untuk semua $a, b, c \in T$, dimana $*$ didefinisikan oleh tabel cayley berikut ini.

Tabel 2.1 **Tabel Cayley untuk Operasi Biner** $*$

$*$	**1**	**2**	**3**
1	1	1	1
2	1	2	2
3	1	2	3

Akan dibuktikan bahwa $(T, [\quad])$ adalah sebuah ternari semigrup.

Bukti. Diketahui $T = \{1,2,3\}$ merupakan sebuah himpunan yang di dalamnya terdefinisi operasi ternari $[abc] = a * b * c$ untuk semua $a, b, c \in X$, dimana $*$ didefinisikan oleh Tabel 2.1. Akan dibuktikan bahwa (T, [ ]) bersifat tertutup dan asosiatif terhadap operasi [ ].

(1) (T, [ ]) tertutup terhadap operasi [ ]

Ambil sebarang $a, b, c \in T$, sehingga $[abc] = a * b * c$. Berdasarkan **Tabel 2.1**, T tertutup terhadap operasi $*$, sehingga untuk setiap $x, y \in T$, terdapat $z \in T$ sedemikian sehingga $x * y = z$. Dengan demikian untuk $[abc] = (a * b) * c$, dan $[abc] = a * (b * c)$, terdapat $d, e \in T$ sehingga $[abc] = d * c$ dan $[abc] = a * e$. Karena T tertutup terhadap operasi $*$, maka $[abc] \in T$. Dengan demikian, terbukti bahwa T tertutup terhadap operasi [ ].

(2) (T, [ ]) asosiatif terhadap operasi [ ]

Dengan melakukan perhitungan secara *manual,* sebagaimana yang terdapat pada Lampiran A-1, terbukti bahwa untuk setiap $a, b, c, d, e \in T$, maka $[abc]de = ab[cde]$. Dengan demikian terbukti bahwa (T, [ ]) asosiatif terhadap operasi [ ].

Karena telah terbukti bahwa (T, [ ]) bersifat tertutup dan asosiatif terhadap operasi [ ], maka telah dibuktikan bahwa (T, [ ]) adalah sebuah semigrup ternari. ∎

Definisi 2.3.11 (Ideal dalam Semigrup Ternari) Diberikan sebuah himpunan tak kosong A adalah himpunan bagian dari sebuah semigrup ternari $X.$ Himpunan A dikatakan ideal kiri (kanan, lateral) dalam X, jika $X^2A \subseteq A$ ($AX^2 \subseteq A,\ XAX \subseteq A$). Sebuah himpunan tak kosong A dari X dikatakan ideal dalam X jika A merupakan ideal kiri, kanan, dan literal dalam X.

Contoh 2.3.12 Dari Contoh 2.3.10, akan dibuktikan bahwa $I = \{1,2\}$ adalah sebuah ideal dalam semigrup T.

Bukti. Diketahui $(T, [\ \ ])$ adalah sebuah semigrup, dimana $[\ \ ]$ adalah sebuah operasi ternari seperti yang dijabarkan dalam Contoh 2.3.10**.** akan dibuktikan bahwa $I = \{1,2\}$ adalah sebuah ideal dalam T. Dengan melakukan perhitungan secara *manual* sesuai Lampiran A-2, terbukti bahwa untuk semua $a, b \in T$ dan untuk semua $i \in I$, berlaku $[abi] = [aib] = [iab] \in I$. Dengan demikian terbukti bahwa I adalah sebuah ideal dalam T. ∎

Definisi 2.3.13 (Subsemigrup Ternari) Misalkan A merupakan sebuah himpunan bagian dari semigrup ternari X. Himpunan A disebut subsemigrup ternari dari X jika $A^3 \subseteq A$.

Contoh 2.3.14 Dari Contoh 2.3.10, akan dibuktikan bahwa $P = \{2,3\}$ adalah sebuah subsemigrup dari semigrup T.

Bukti. Diketahui $(T, [\ \ ])$ adalah sebuah semigrup, dimana $[\ \ ]$ adalah sebuah operasi ternari seperti yang dijabarkan dalam Contoh 2.3.10. akan dibuktikan bahwa $P = \{2,3\}$ adalah subsemigrup dari T. Dengan melakukan perhitungan secara *manual* sesuai Lampiran A-3, terbukti bahwa untuk semua $j, k, l \in P$, berlaku $[jkl] \in P$. Terbukti bahwa P adalah subsemigrup dari T. ■

2.4 Ideal (α, β)-*Fuzzy* dalam Semigrup Ternari

Ideal (α, β)-*fuzzy* dalam semigrup ternari adalah salah satu pengembangan dari konsep ideal *fuzzy* dalam semigrup ternari. Pada subbab ini akan diberikan definisi-definisi yang terkait dengan ideal tersebut, sesuai dengan yang dijelaskan oleh Davvas, et al. (2013).

Definisi 2.4.1 (Subsemigrup Ternari *Fuzzy*) Misalkan A adalah sebuah himpunan *fuzzy* atas sebuah semigrup ternari T, dimana f adalah fungsi keanggotaan dari A. Himpunan *fuzzy* A disebut subsemigrup ternari *fuzzy*, jika untuk setiap $a, b, c \in T$, berlaku $f(abc) \geq f(a) \wedge f(b) \wedge f(c)$.

Contoh 2.4.2 Dari Contoh 2.3.10, Didefinisikan sebuah himpunan *fuzzy* A, dengan fungsi keanggotaan sebagai berikut:

$$f(x) = \begin{cases} 0.8, & x = 1 \\ 0.7, & x = 2 \\ 0.6, & x = 3, \end{cases}$$

sehingga:

$$A = \{(1, 0.8), (2, 0.7), (3, 0.6)\}.$$

Akan dibuktikan bahwa himpunan *fuzzy* A adalah sebuah subsemigrup ternari *fuzzy* dari semigrup T.

Bukti. Diketahui $(T, [\ \ ])$ adalah sebuah semigrup dan A adalah sebuah himpunan *fuzzy* atas T. Akan dibuktikan bahwa A adalah sebuah subsemigrup ternari *fuzzy* dari T. Dengan melakukan perhitungan secara *manual* sebagaimana yang terdapat pada Lampiran A-4, terbukti bahwa untuk setiap $a, b, c \in T$, berlaku $f(abc) \geq f(a) \wedge f(b) \wedge f(c)$. ■

Definisi 2.4.3 (Ideal *Fuzzy* dalam Semigrup Ternari) Diberikan A, sebuah himpunan *fuzzy* atas sebuah semigrup ternari T dan f adalah fungsi keanggotaan dari A. Himpunan *fuzzy* A disebut ideal *fuzzy* kiri (lateral, kanan) dalam T, jika untuk setiap $a, b, c \in T$ berlaku $f(abc) \geq f(c)$ $(f(abc) \geq f(b), f(abc) \geq f(a))$. Selanjutnya A disebut ideal *fuzzy* dalam semigrup ternari, jika A adalah ideal *fuzzy* kiri, lateral dan kanan dalam T.

Contoh 2.4.4 Dari **Contoh 2.3.10,** Diberikan himpunan *fuzzy* B, dengan fungsi keanggotaan sebagai berikut:

$$g(x) = \begin{cases} 0.9, & x = 1 \\ 0.8, & x = 2 \\ 0.7, & x = 3 \end{cases}$$

Sehingga:

$$B = \{(1, 0.9), (2, 0.8), (3, 0.7)\}.$$

Akan dibuktikan bahwa himpunan *fuzzy* B adalah sebuah Ideal *fuzzy* dari semigrup T.

Bukti. Diketahui $(T, [\ \ ])$ adalah sebuah semigrup dan B adalah himpunan *fuzzy* di T. Akan dibuktikan bahwa B adalah sebuah ideal *fuzzy* dalam T. Dengan melakukan perhitungan secara *manual,* sebagaimana yang tertera pada Lampiran A-5, terbukti bahwa untuk setiap $a, b, c \in T$, berlaku $g(abc) \geq g(c)$, $g(abc) \geq g(b)$ dan $g(abc) \geq g(a)$. Dengan demikian terbukti bahwa B adalah sebuah ideal *fuzzy* dalam T. ■

Definisi 2.4.5 (Subsemigrup Ternari $(\epsilon, \epsilon \vee q)$-*Fuzzy*) Diberikan A adalah sebuah himpunan *fuzzy* atas semigrup ternari X, dimana f adalah fungsi keanggotaan dari A. Maka A disebut subsemigrup $(\epsilon, \epsilon \vee q)$-*fuzzy* jika untuk setiap $a, b, c \in X$ dan $t, r, s \in (0,1]$, berlaku:

$$[a; t] \epsilon A, [b; r] \epsilon A, [c; s] \epsilon A \rightarrow [abc; \min\{t, r, s\}] \epsilon \vee qA$$

Dengan kata lain:

$$f(a) \geq t, f(b) \geq r, f(c) \geq s \ \rightarrow f(abc) \geq \min\{t, r, s\} \text{ atau } f(abc) + \min\{t, r, s\} > 1$$

Contoh 2.4.6 Berdasarkan Contoh 2.4.2, akan dibuktikan bahwa A adalah sebuah subsemigrup $(\epsilon, \epsilon \vee q)$-*fuzzy.*

Bukti. Pembuktian kali ini akan dilakukan dengan cara kontradiksi. Andaikan A adalah sebuah himpunan *fuzzy* atas semigrup ternari X, dimana f adalah fungsi keanggotaan dari A, namun A bukan merupakan sebuah subsemigrup $(\epsilon, \epsilon \vee q)$-*fuzzy*, sehingga terdapat $a, b, c \in T$, dan $t, r, s \in [0,1]$ sedemikian sehingga $[a; t] \epsilon A, [b; r] \epsilon A, [c; s] \epsilon A$, namun $[abc; \min\{t, r, s\}] \overline{\epsilon \vee q} A$. Karena $[abc; \min\{t, r, s\}] \overline{\epsilon \vee q} A$, maka $[abc; \min\{t, r, s\}] \bar{\epsilon} A$ dan $[abc; \min\{t, r, s\}] \bar{q} A$. Dengan demikian, berdasarkan Definisi 2.1.3, tentang *fuzzy point*, berlaku

$\min\{t,r,s\} > f(abc)$ dan $\min\{t,r,s\} + f(abc) \leq 1$. Namun, berdasarkan Contoh 2.5.2 diketahui bahwa $\min\{f(a), f(b), f(c)\} \leq f(abc)$ dan $[a;t]\,\epsilon\, A$, $[b;r]\,\epsilon\, A, [c;s]\,\epsilon\, A$, sehingga $\min\{f(a), f(b), f(c)\} > \min\{t,r,s\}$. Hal ini kontradiktif dengan $\min\{t,r,s\} > f(abc)$. Dengan demikian pengandaian salah, sehingga terbukti bahwa A adalah sebuah subsemigrup ternari $(\epsilon, \epsilon \vee q)$-*fuzzy* dari T. ■

Definisi 2.4.7 (Ideal $(\epsilon, \epsilon \vee q)$-*Fuzzy* dalam Semigrup Ternari) Misalkan A adalah sebuah himpunan *fuzzy* dari semigrup ternari T, dimana f adalah fungsi keanggotaaan dari A. Himpunan *fuzzy* A disebut Ideal $(\epsilon, \epsilon \vee q)$-*fuzzy* kiri (lateral, kanan) *dalam* semigrup ternari T, jika untuk setiap $a, b, c \in T$ dan $t \in (0,1]$, berlaku sebagai berikut.

$$[c;t]\,\epsilon\, A\ ([b;t]\,\epsilon\, A, [a;t]\,\epsilon\, A) \rightarrow [abc;t]\,\epsilon \vee qA.$$

Dengan kata lain:

$$f(a) \geq t\ (f(b) \geq t, f(c) \geq t)\ \rightarrow f(abc) \geq t \text{ atau } f(abc) + t > 1$$

Selanjutnya A disebut ideal $(\epsilon, \epsilon \vee q)$-*fuzzy dalam* subsemigrup ternari T jika A adalah Ideal $(\epsilon, \epsilon \vee q)$-*fuzzy* kiri kanan *dalam* subsemigrup ternari T.

Contoh 2.4.8 Berdasarkan Contoh 2.4.4, akan dibuktikan bahwa B adalah sebuah ideal $(\epsilon, \epsilon \vee q)$-*fuzzy* dari T.

Bukti. Diketahui $B = \{(1,0.9), (2, 0.8), (3, 0.7)\}$ berdasarkan Contoh 2.5.4, maka pemilihan $p \in T$, $[p;t]$ dapat dibagi menjadi 3 kemungkinan berikut.

(1) Pertama, bila $p = 1$. Diketahui $[p;t]\,\epsilon\, B$ sehingga berdasarkan Definisi 2.1.3, tentang definisi *fuzzy Point,* $g(p) = 0.9 \geq t$. Berdasarkan Tabel 2.1,

untuk semua $a, b \in T$, berlaku bahwa $[ab1] = [a1b] = [1ab] = 1$. Dengan demikian $g(a1b) = g(1ab) = g(ab1) = g(1) = 0.9 \geq t$.

(2) Kedua, jika $p = 2$, diketahui $[p; t] \epsilon B$ maka berdasarkan Definisi 2.1.3, $g(p) = 0.8 \geq t$. Berdasarkan Tabel 2.1, maka untuk semua $a, b \in T$, $g(apb) = g(pab) = g(abp)$ hanya akan memiliki dua kemungkinan nilai, yakni $g(1) = 0.9$ dan $g(2) = 0.8$. Dengan demikian berlaku $g(apb) = g(pab) = g(abp) \geq t$.

(3) ketiga, yakni jika $p = 3$, diketahui $[p; t] \epsilon B$ maka berdasarkan Definisi 2.1.3, $t \leq g(3) = 0.7$. Selanjutnya, diketahui 3 adalah elemen dari T dengan derajat keanggotaan terkecil. Dengan demikian untuk semua $a, b \in T$, maka berlaku $g(apb) = g(pab) = g(abp) \geq t$.

Berdasarkan ketiga kemungkinan tersebut, maka terbukti bahwa g adalah sebuah Ideal $(\epsilon, \epsilon \vee q)$-*fuzzy dalam* T. ■

2.5. Ideal *Fuzzy* Intuisionistik (Ideal IF) dalam Semigrup Ternari

Ideal *fuzzy* intuisionistik dalam semigrup merupakan pengembangan dari ideal fuzzy dalam semigrup. Pada subbab ini, akan diberikan definisi dan contoh terkait ideal IF dalam semigrup ternari. Definisi-definisi dalam subbab ini akan dipaparkan sesuai dengan konsep ideal IF menurut Akram (2012).

Definisi 2.5.1 (Subsemigrup Ternari *Fuzzy* Intuisionistik) Misalkan $A = (\mu_A, \gamma_A)$ adalah sebuah himpunan IF atas sebuah semigrup ternari T. Himpunan IF $A = (\mu_A, \gamma_A)$ disebut subsemigrup ternari *fuzzy* intuisionistik dari T, jika:

$$\mu_A(xyz) \geq \min\{\mu_A(x), \mu_A(y), \mu_A(z)\}, \text{ dan}$$

$$\gamma_A(xyz) \leq \text{maks}\{\gamma_A(x), \gamma_A(y), \gamma_A(z)\}$$

untuk semua $x, y, z \in T$.

Contoh 2.5.2 Berdasarkan Contoh 2.3.10, diketahui $(T, [\quad])$ adalah sebuah semigrup ternari. Selanjutnya didefinisikan $P = (\mu_P, \gamma_P)$ adalah sebuah IFS di semigrup ternari T, dengan fungsi keanggotaan (μ_P) dan fungsi non-keanggotaan (γ_P) sebagai berikut:

$$\mu_P(x) = \begin{cases} 0.8, & x = 1 \\ 0.7, & x = 2 \\ 0.6, & x = 3 \end{cases} \qquad \gamma_P(x) = \begin{cases} 0.1, & x = 1 \\ 0.2, & x = 2 \\ 0.3, & x = 3. \end{cases}$$

Sehingga:

$$P = (\mu_P, \gamma_P) = \{(1, 0.8, 0.1), (2, 0.7, 0.2), (3, 0.6, 0.3)\}.$$

Akan dibuktikan bahwa $P = (\mu_P, \gamma_P)$ adalah sebuah subsemigrup ternari *fuzzy* intuisionistik dari T.

Bukti. Diketahui $(T, [\quad])$ adalah sebuah semigrup dan untuk semua $a, b, c \in T$, $[abc] = a * b * c$, dimana $*$ adalah sebuah operasi biner, sebagaimana yang dipaparkan dalam Tabel 2.1. Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa $P = (\mu_P, \gamma_P)$ bahwa sebuah subsemigrup ternari *fuzzy* intuisionistik dari T. Dengan melakukan perhitungan secara *manual* sesuai dengan Lampiran A-6, terbukti bahwa untuk semua $a, b, c \in T$ berlaku $\mu_P(abc) \geq \min\{\mu_P(a), \mu_P(b), \mu_P(c)\}$, $\gamma_P(abc) \leq \text{maks}\{\gamma_P(a), \gamma_P(b), \gamma_P(c)\}$. Dengan demikian terbukti bahwa $P = (\mu_P, \gamma_P)$ adalah sebuah subsemigrup ternari fuzzy intuisionistik dari T. ■

Definisi 2.5.3. (Ideal *Fuzzy* Intuisionistik Kiri, Lateral dan Kanan dalam Semigrup Ternari) Misalkan $A = (\mu_A, \gamma_A)$ adalah sebuah himpunan IF atas sebuah semigrup ternari T. Himpunan IF $A = (\mu_A, \gamma_A)$ disebut ideal *fuzzy* intuisionistik kiri (lateral, kanan), dari T, jika syarat di bawah ini berlaku.

$$\mu_A(xyz) \geq \mu_A(z) \qquad (\mu_A(xyz) \geq \mu_A(y),\ \mu_A(xyz) \geq \mu_A(x))$$

$$\gamma_A(xyz) \leq \gamma_A(z) \qquad (\gamma_A(xyz) \leq \gamma_A(y), \gamma_A(xyz) \leq \gamma_A(x))$$

Untuk semua $x, y, z \in T$.

Contoh 2.5.4 Berdasarkan Contoh 2.3.10, $(T. [\quad])$ adalah sebuah semigrup ternari. Didefinisikan $I = (\mu_I, \gamma_I)$ merupakan sebuah himpunan IF atas semigrup ternari T, dengan fungsi keanggotaan (μ_I) dan fungsi non-keanggotaan (γ_I) sebagai berikut.

$$\mu_I(x) = \begin{cases} 0.9, & x = 1 \\ 0.8, & x = 2 \\ 0.7, & x = 3 \end{cases} \qquad \gamma_I(x) = \begin{cases} 0.1, & x = 1 \\ 0.1, & x = 2 \\ 0.2, & x = 3, \end{cases}$$

sehingga:

$$I = (\mu_I, \gamma_I) = \{(1, 0.9, 0.1), (2, 0.8, 0.1), (3, 0.7, 0.2)\}.$$

Akan dibuktikan bahwa $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah sebuah ideal *fuzzy* intuisionistik kiri, lateral dan kanan dalam semigrup ternari T.

Bukti. Berdasarkan Contoh 2.3.10, diketahui $T = \{1,2,3\}$ adalah sebuah semigrup terhadap operasi ternari [ ], dimana untuk semua $a, b, c \in T$, berlaku $[abc] = a * b * c$, dengan $*$ adalah sebuah operasi biner, sebagaimana yang dipaparkan dalam Tabel 2.1. Akan dibuktikan bahwa $I = (\mu_I, \gamma_I)$ bahwa sebuah ideal *fuzzy* intuisionistik (ideal IF) dalam semigrup ternari T. Dengan melakukan perhitungan secara *manual* sesuai yang tertera pada Lampiran A-7, terbukti bahwa untuk semua $a, b, c \in T$ berlaku $\mu_I(abc) \geq \mu_I(c)$, $\mu_I(abc) \geq \mu_I(b)$, $\mu_I(abc) \geq \mu_I(a)$ dan $\gamma_I(abc) \leq \gamma_I(c)$, $\gamma_I(abc) \leq \gamma_I(b), \gamma_I(abc) \leq \gamma_I(a)$. Dengan demikian terbukti bahwa $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah ideal IF kiri, ideal IF lateral, ideal IF kanan dalam semigrup ternari T. ■

Definisi 2.5.5 (Ideal *Fuzzy* Intuisionistik dalam Semigrup Ternari) Misalkan $A = (\mu_A, \gamma_A)$ merupakan sebuah himpunan IF dalam sebuah semigrup ternari T. Himpunan IF $A = (\mu_A, \gamma_A)$ disebut ideal *fuzzy* intuisionistik (disingkat Ideal IF) dari T, jika A merupakan Ideal IF kiri, lateral dan kanan.

Contoh 2.5.6 Berdasarkan Contoh 2.5.4, maka $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah sebuah ideal IF dalam semigrup ternari T, sebab $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah ideal IF kiri, lateral, dan kanan dari T.

2.6. Ideal (α,β)-*Fuzzy* Intuisionistik dalam Semigrup

Ideal (α,β)-*fuzzy* intuisionistik (ideal (α,β)-IF) adalah perluasan dari ideal IF. Pada ini diberikan definisi-definisi yang terkait ideal (α,β)-IF menurut Abdullah, et al. (2017).

Definisi 2.6.1 (Subsemigrup *Fuzzy* Intuisionistik) Misalkan $A = (\mu_A, \gamma_A)$ adalah sebuah himpunan IF di semigrup S. Himpunan IF $A = (\mu_A, \gamma_A)$ disebut subsemigrup *fuzzy* intuisionistik (subsemigrup IF) dari S, jika untuk setiap $x, y \in S$, aksioma-aksioma berikut berlaku.

$$\mu_A(xy) \geq \min\{\mu_A(x), \mu_A(y)\}$$

$$\gamma_A(xy) \leq \text{maks}\{\mu_A(x), \mu_A(y)\}$$

Contoh 2.6.2. Diberikan $S = \{1,2,3\}$ dan # merupakan sebuah operasi biner yang dideskripsikan dengan tabel cayley berikut.

Tabel 2.2 **Tabel Cayley untuk Operasi Biner #,**

#	1	2	3
1	1	2	3
2	2	2	3
3	3	3	3

Selanjutnya, didefinisikan sebuah himpunan IF $P = (\mu_P, \gamma_P)$ di S dengan fungsi keanggotaan dan fungsi non-keanggotaan berikut ini.

$$\mu_P(x) = \begin{cases} 0.6, & x = 1 \\ 0.7, & x = 2 \\ 0.8, & x = 3 \end{cases} \qquad \gamma_P(x) = \begin{cases} 0.3, & x = 1 \\ 0.2, & x = 2 \\ 0.1, & x = 3, \end{cases}$$

sehingga:

$$P = (\mu_P, \gamma_P) = \{(1,0.6,0.3),(2,0.7,0.2),(3,0.8,0.1)\}.$$

Akan dibuktikan bahwa $P = (\mu_P, \gamma_P)$ adalah sebuah subsemigrup IF dari S.

Bukti. Diketahui $S = \{1,2,3\}$ adalah sebuah himpunan yang di dalamnya terdefinisi operasi biner #. Pertama, akan dibuktikan bahwa $(S,\#)$ adalah sebuah semigrup.

(1) $(S,\#)$ Bersifat tertutup. Berdasarkan Tabel 2.2, terbukti bahwa untuk setiap $a, b \in S$ berlaku $a\#b \in s$. Dengan demikian terbukti bahwa $(S,\#)$ bersifat tertutup.

(2) $(S,\#)$ bersifat asosiatif. Dengan melakukan perhitungan secara *manual* sebagaimana yang tertera pada Lampiran A-8 terbukti bahwa, untuk sebarang $a, b, c \in S$ berlaku $a\#(b\#c) = (a\#b)\#c$. Terbukti bahwa $(S,\#)$ bersifat asosiatif.

Dengan demikian terbukti bahwa $(S,\#)$ adalah sebuah semigrup. Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa $P = (\mu_P, \gamma_P)$ adalah sebuah subsemigrup IF dari T. Dengan melakukan perhitungan secara *manual* sesuai Lampiran A-9, terbukti bahwa, untuk setiap $a, b \in S$ berlaku $\mu_P(ab) \geq \min\{\mu_P(a), \mu_P(b)\}$ dan $\gamma_P(ab) \leq \text{maks}\{\gamma_P(a), \gamma_P(b)\}$. Terbukti bahwa $P = (\mu_P, \gamma_P)$ adalah sebuah subsemigrup IF dari T. ■

Definisi 2.6.3 (Ideal *Fuzzy* Intuisionistik dalam Semigrup) Diberikan $A = (\mu_A, \gamma_A)$ adalah sebuah Himpunan IF di semigrup S. Himpunan IF $A = (\mu_A, \gamma_A)$ disebut ideal *fuzzy* intuisionistik kiri (kanan) dalam S, jika untuk setiap $x, y \in S$ berlaku $\mu_A(xy) \geq \mu_A(y)$ dan $\gamma_A(xy) \leq \gamma_A(y)$ $(\mu_A(xy) \geq \mu_A(x)$ dan $\gamma_A(xy) \leq \gamma_A(x))$. Selanjutnya, $A = (\mu_A, \gamma_A)$ disebut Ideal *fuzzy* intuisionistik (Ideal IF) dalam S, jika $A = (\mu_A, \gamma_A)$ adalah ideal IF kiri dan ideal IF kanan dalam S.

Contoh 2.6.4, Dari Contoh 2.6.2, diberikan sebuah himpunan IF $I = (\mu_I, \gamma_I)$ dengan fungsi keanggotaan dan fungsi non keanggotaan sebagai berikut.

$$\mu_I(x) = \begin{cases} 0.7, & x = 1 \\ 0.8, & x = 2 \\ 0.9, & x = 3 \end{cases} \qquad \gamma_I(x) = \begin{cases} 0.2, & x = 1 \\ 0.1, & x = 2 \\ 0.1, & x = 3, \end{cases}$$

sehingga:

$$I = (\mu_I, \gamma_I) = \{(1, 0.7, 0.2), (2, 0.8, 0.1), (3, 0.9, 0.1)\}.$$

Akan dibuktikan bahwa $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah sebuah ideal IF dalam semigrup S.

Bukti. Diketahui $(S, \#)$ adalah sebuah semigrup dan $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah sebuah IF di S. Akan dibuktikan bahwa $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah sebuah ideal IF dalam S. Dengan melakukan perhitungan secara *manual* sesuai yang tertera pada Lampiran A-10, terbukti bahwa, untuk setiap $a, b \in S$ berlaku $\mu_I(xy) \geq \mu_I(y), \mu_I(xy) \geq \mu_I(x)$ dan $\gamma_I(xy) \leq \gamma_I(y)$, $\gamma_I(xy) \leq \gamma_I(x)$. Dengan demikian, terbukti $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah ideal IF kiri dan kanan dari S, dengan kata lain $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah ideal IF dari S. ∎

Definisi 2.6.5 (Subsemigrup $(\epsilon, \epsilon \vee q)$-*Fuzzy* Intuisionistik) Diberikan $A = (\mu_A, \gamma_A)$ adalah sebuah himpunan IF atas semigrup S. Himpunan IF $A = (\mu_A, \gamma_A)$ disebut subsemigrup $(\epsilon, \epsilon \vee q)$-*fuzzy* intuisionistik dalam S, jika $(\forall x, y \in S)(\forall a_1, a_2 \in (0,1])$ dan $(\forall b_1, b_2 \in [0,1))$, maka pernyataan ini berlaku.

$$x_{(a_1,b_1)} \epsilon A \text{ dan } y_{(a_2,b_2)} \epsilon A \rightarrow (xy)_{(\min\{a_1,a_2\}, maks\{b_1,b_2\})} \epsilon \vee qA.$$

Dengan kata lain:

$$\begin{matrix} \mu_A(x) \geq a_1, \\ \gamma_A(x) \leq b_1 \end{matrix} \text{ dan } \begin{matrix} \mu_A(y) \geq a_2, \\ \gamma_A(y) \leq b_2 \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{matrix} \mu_A(xy) \geq \min\{a_1, a_2\}, \\ \gamma_A(xy) \leq maks\{b_1, b_2\} \end{matrix} \text{ atau } \begin{matrix} \mu_A(xy) + \min\{a_1, a_2\} > 1, \\ \gamma_A(xy) + maks\{b_1, b_2\} < 1 \end{matrix}$$

Contoh 2.6.6 Berdasarkan Contoh 2.6.2, akan dibuktikan bahwa $P = (\mu_P, \gamma_P)$ adalah sebuah subsemigrup $(\epsilon, \epsilon \vee q)$-IF dari S.

Bukti. Diketahui $(S, \#)$ adalah sebuah semigrup dan $P = (\mu_P, \gamma_P)$ adalah sebuah himpunan IF di S dengan fungsi keanggotaan dan fungsi non-keanggotaan sebagai berikut ini.

$$\mu_P(x) = \begin{cases} 0.6, & x = 1 \\ 0.7, & x = 2 \\ 0.8, & x = 3 \end{cases} \qquad \gamma_P(x) = \begin{cases} 0.3, & x = 1 \\ 0.2, & x = 2 \\ 0.1, & x = 3 \end{cases}$$

sehingga:

$$P = (\mu_P, \gamma_P) = \{(1, 0.6, 0.3), (2, 0.7, 0.2), (3, 0.8, 0.1)\}.$$

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa untuk setiap $x, y \in S$ dan untuk setiap $a_1, a_2 \in (0,1]$ dan $b_1, b_2 \in [0,1)$, maka berlaku sebagai berikut.

$$x_{(a_1,b_1)} \epsilon P \text{ dan } y_{(a_2,b_2)} \epsilon P \rightarrow (xy)_{(\min\{a_1,a_2\}, maks\{b_1,b_2\})} \epsilon \vee qP.$$

Pembuktian ini akan dilakukan dengan cara kontradiksi. Andaikan $P = (\mu_P, \gamma_P)$ adalah sebuah himpunan IF di S, dengan fungsi keanggotaan μ_P dan fungsi non-keanggotaan γ_P, namun $P = (\mu_P, \gamma_P)$ bukan merupakan sebuah subsemigrup $(\epsilon, \epsilon \vee q)$-IF dari S. Oleh karena itu, terdapat $x, y \in S$ dimana $a_1, a_2 \in (0,1]$ dan $b_1, b_2 \in [0,1)$, sedemikian sehingga $x_{(a_1,b_1)} \epsilon\, P$ dan $y_{(a_2,b_2)} \epsilon\, P$, namun $(xy)_{(\min\{a_1,a_2\}, maks\{b_1,b_2\})} \overline{\epsilon \vee q}\, P$. Untuk mempermudah penulisan, maka $e = \min\{a_1, a_2\}$, dan $f = maks\{b_1, b_2\}$. Diketahui bahwa $xy_{(e,f)}\, \bar{\epsilon}\, P$ dan $xy_{(e,f)}\, \bar{q} P$ sehingga $e > \mu_P(xy)$, $f < \gamma_P(xy)$ dan $e + \mu_P(xy) \leq 1$, $f + \gamma_P(xy) \geq 1$. Dengan demikian terdapat 3 kemungkinan sebagai berikut.

(1) Jika $xy = 1$, maka $\mu_P(xy) = 0.6$, $\gamma_P(xy) = 0.3$. Berdasarkan Tabel 2.2, ini hanya bisa terjadi jika $x = y = 1$. Hal ini kontradiktif dengan $e + \mu_P(xy) \leq 1, f + \mu_P(xy) \geq 1$, sebab $\mu_P(xy) = 0.6, \gamma(xy) = 0.3, e > 0.6, f < 0.3$.

(2) Selanjutnya, Jika $xy = 2$, maka $\mu_P(xy) = 0.7$, $\gamma_P(xy) = 0.2$. Ini hanya bisa terjadi jika terdapat minimal satu elemen 2 pada x atau y, dan $3 \notin \{x, y\}$. Jika terdapat tepat satu elemen 2 pada x atau y maka $xy = 2$, sehingga $e \leq \mu_P(xy)$, $f \geq \gamma_P(xy)$. Hal ini kontradiktif dengan pernyataan $e > \mu_P(xy)$, $f < \gamma_P(xy)$. Selanjutnya, jika $x = y = 2$, maka hal ini akan kontradiktif dengan pernyataan $e + \mu_P(xy) \leq 1$, $f + \gamma_P(xy) \geq 1$, sebab $e > \mu_P(xy) = 0.7$, dan $f < \gamma_P(xy) = 0.2$.

(3) Terakhir, Jika $xy = 3$, maka $\mu_P(xy) = 0.8, \gamma_P(xy) = 0.1$. Hal ini hanya bisa terjadi jika terdapat minimal satu elemen 3 pada x atau y dari xy. Jika salah satu dari x dan y adalah 3, maka akan kontradiktif dengan pernyataan $e > \mu_P(xy), f < \gamma_P(xy)$. Selanjutnya $x = y = 3$, maka akan kontradiktif dengan pernyataan $e + \mu_P(xy) \leq 1$, $f + \gamma_P(xy) \geq 1$.

Dengan demikian pengandaian salah, sehingga terbukti bahwa $P = (\mu_P, \gamma_P)$ adalah sebuah subsemigrup (α, β)-IF dari S. ∎

Definisi 2.6.7 (Ideal $(\epsilon, \epsilon \vee q)$-*Fuzzy* Intuisionistik dalam Semigrup) Diberikan $A = (\mu_A, \gamma_A)$ adalah sebuah himpunan IF di semigrup S. Himpunan IF $A = (\mu_A, \gamma_A)$ disebut ideal $(\epsilon, \epsilon \vee q)$-*fuzzy* intuisionistik kiri (kanan) dalam semigrup S, jika $\forall x, y \in S$ dan $\forall a_1, a_2 \in (0,1]$ dan $\forall b_1, b_2 \in [0,1)$, aksioma berikut terpenuhi:

$$y_{(a_1,b_1)} \epsilon A \rightarrow (xy)_{(a_1,b_1)} \epsilon \vee qA \qquad \text{ideal kiri}$$

$$(\, x_{(a_2,b_2)} \epsilon A \rightarrow (xy)_{(a_2,b_2)} \epsilon \vee qA \,) \qquad \text{(ideal kanan)}$$

Dengan kata lain,

$$\begin{matrix} \mu_A(y) \geq a_1, \\ \gamma_A(y) \leq b_1 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \mu_A(xy) \geq a_1, \\ \gamma_A(xy) \leq b_1 \end{matrix} \text{ atau } \begin{matrix} \mu_A(xy) + a_1 > 1, \\ \gamma_A(xy) + b_1 < 1 \end{matrix} \qquad \text{ideal kiri}$$

$$\begin{matrix} \mu_A(x) \geq a_2, \\ \gamma_A(x) \leq b_2 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \mu_A(xy) \geq a_2, \\ \gamma_A(xy) \leq b_2 \end{matrix} \text{ atau } \begin{matrix} \mu_A(xy) + a_2 > 1, \\ \gamma_A(xy) + b_2 < 1 \end{matrix} \qquad \text{(ideal kanan)}$$

Selanjutnya, $A = (\mu_A, \gamma_A)$ disebut ideal $(\epsilon, \epsilon \vee q)$-*fuzzy* intuisionistik dalam semigrup S, jika $A = (\mu_A, \gamma_A)$ disebut ideal $(\epsilon, \epsilon \vee q)$-*fuzzy* intuisionistik kiri dan ideal $(\epsilon, \epsilon \vee q)$-*fuzzy* intuisionistik kanan dalam semigrup S.

Contoh 2.6.8 Berdasarkan Contoh 2.6.4, akan dibuktikan bahwa $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah sebuah ideal $(\epsilon, \epsilon \vee q)$-IF dalam S.

Bukti. Diketahui $(S, \#)$ adalah sebuah semigrup dan $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah sebuah himpunan IF di S dengan fungsi keanggotaan dan fungsi non-keanggotaan sebagai berikut:

$$\mu_I(x) = \begin{cases} 0.7, & x = 1 \\ 0.8, & x = 2 \\ 0.9, & x = 3 \end{cases} \qquad \gamma_I(x) = \begin{cases} 0.2, & x = 1 \\ 0.1, & x = 2 \\ 0.1, & x = 3 \end{cases}$$

sehingga:

$$I = (\mu_I, \gamma_I) = \{(1,0.7, 0.2), (2, 0.8, 0.1), (3, 0.9, 0.1)\}.$$

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa untuk setiap $x, y \in S$ dan untuk setiap $a_1, a_2 \in (0,1]$ dan $\forall b_1, b_2 \in [0,1)$, berlaku $y_{(a_1,b_1)} \epsilon I \rightarrow (xy)_{(a_1,b_1)} \epsilon \vee qI$ dan $x_{(a_2,b_2)} \epsilon I \rightarrow (xy)_{(a_2,b_2)} \epsilon \vee qI$. Diketahui $y_{(a_1,b_1)} \epsilon I \rightarrow (xy)_{(a_1,b_1)} \epsilon \vee qI$, maka berdasarkan Definisi 2.2.3, tentang definisi IFP, berlaku $\mu_I(xy) \geq a_1$ dan $\gamma_I(xy) \leq b_1$, atau berlaku $\mu_I(xy) + a_1 > 1$ dan $\gamma_I(xy) + b_1 < 1$. Selanjutnya Diketahui $x_{(a_2,b_2)} \epsilon I \rightarrow (xy)_{(a_2,b_2)} \epsilon \vee qI$, maka berdasarkan **Definisi 2.2.3**, tentang definisi IFP, berlaku $\mu_I(xy) \geq a_1$ dan $\gamma_I(xy) \leq b_1$, atau berlaku $\mu_I(xy) + a_1 > 1$ dan $\gamma_I(xy) + b_1 < 1$. Dengan demikian, berlaku $\mu_I(xy) \geq \text{maks}\{a_1, a_2\}$ dan $\gamma_I(xy) \leq \min\{b_1, b_2\}$, atau berlaku $\mu_I(xy) + \text{maks}\{a_1, a_2\} > 1$ dan $\gamma_I(xy) + \min\{b_1, b_2\} < 1$. Dengan kata lain, berdasarkan Definisi 2.2.3, $(xy)_{(\text{maks}\{a_1,a_2\},\min\{b_1,b_2\})} \epsilon \vee qI$. Oleh karena itu, akan dibuktikan bahwa untuk setiap $x, y \in S$ dan untuk setiap $a_1, a_2 \in (0,1]$ dan $b_1, b_2 \in [0,1)$ berlaku:

$$y_{(a_1,b_1)} \epsilon I, x_{(a_2,b_2)} \epsilon I \rightarrow (xy)_{(\text{maks}\{a_1,a_2\},\min\{b_1,b_2\})} \epsilon \vee qI.$$

Pembuktian ini akan dilakukan dengan cara kontradiksi. Andaikan $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah sebuah himpunan IF di S, dengan fungsi keanggotaan μ_I dan fungsi non-keanggotaan γ_I, $I = (\mu_I, \gamma_I)$ bukan merupakan sebuah ideal $(\epsilon, \epsilon \vee q)$-IF dalam S, sehingga terdapat $x, y \in S$ dimana $a_1, a_2 \in (0,1]$, $b_1, b_2 \in [0,1)$, sedemikian sehingga berlaku $y_{(a_1,b_1)} \epsilon I, x_{(a_2,b_2)} \epsilon I$, namun $(xy)_{(\text{maks}\{a_1,a_2\},\min\{b_1,b_2\})} \overline{\epsilon \vee q} I$. Untuk mempermudah penulisan $r = \text{maks}\{a_1, a_2\}$, $s = \min\{b_1, b_2\}$. Diketahui $(xy)_{(r,s)} \overline{\epsilon \vee q} I$, maka $(xy)_{(r,s)} \bar{\epsilon} I$ dan $(xy)_{(r,s)} \bar{q} I$, sehingga $r > \mu_I(xy)$, $s < \gamma_I(xy)$ dan $r + \mu_I(xy) \leq 1$, $s + \gamma_I(xy) \geq 1$.

Oleh sebab itu, terdapat 3 kemungkinan:

(1) Pertama, Jika $xy = 3$, maka $\mu_I(xy) = 0.9, \gamma_I(xy) = 0.1$. Hal ini hanya dapat terjadi jika minimal terdapat satu elemen $3 \in S$ pada x atau y. Jika salah satu dari x atau y bernilai 3, maka akan kontradiktif dengan pernyataan dengan$r + \mu_I(xy) \leq 1$,$s + \gamma_I(xy) \geq 1$, sebab $r > \mu_I(xy) = 0.9$, $s < \gamma_I(xy) = 0.1$. Selanjutnya jika $x = y = 3$ maka akan berkontradiksi dengan pernyataan $r > \mu_I(xy)$, $s < \gamma_I(xy)$.

(2) Jika $xy = 2$, maka $\mu_I(xy) = 0.8, \gamma_I(xy) = 0.1$. Hal ini terjadi jika terdapat minimal satu elemen 2 pada x atau y, dan $3 \notin \{x, y\}$. Jika terdapat tepat satu elemen 2 pada x atau y, maka $r \leq \mu_I(xy)$ dan $s \geq \gamma_I(xy)$. Pernyataan ini kontradiktif dengan $r > \mu_I(xy)$, $s < \gamma_I(xy)$. Kemudian, jika $x = y = 2$, maka akan kontradiktif dengan pernyataan $r + \mu_I(xy) \leq 1$, $s + \gamma_I(xy) \geq 1$.

(3) Kemudian, Jika $xy = 1$, maka $\mu_I(xy) = 0.7, \gamma_I(xy) = 0.2$ hal ini hanya dapat terjadi jika kedua x dan y merupakan elemen 1, sehingga $r \leq \mu_I(xy)$, $s \geq \gamma_I(xy)$, pernyataan ini kontradiktif dengan $r > \mu_I(xy)$, $s < \gamma_I(xy)$.

Dengan demikian pengandaian ini salah, sehingga terbukti bahwa $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah sebuah ideal (α, β)-IF dari S. ■

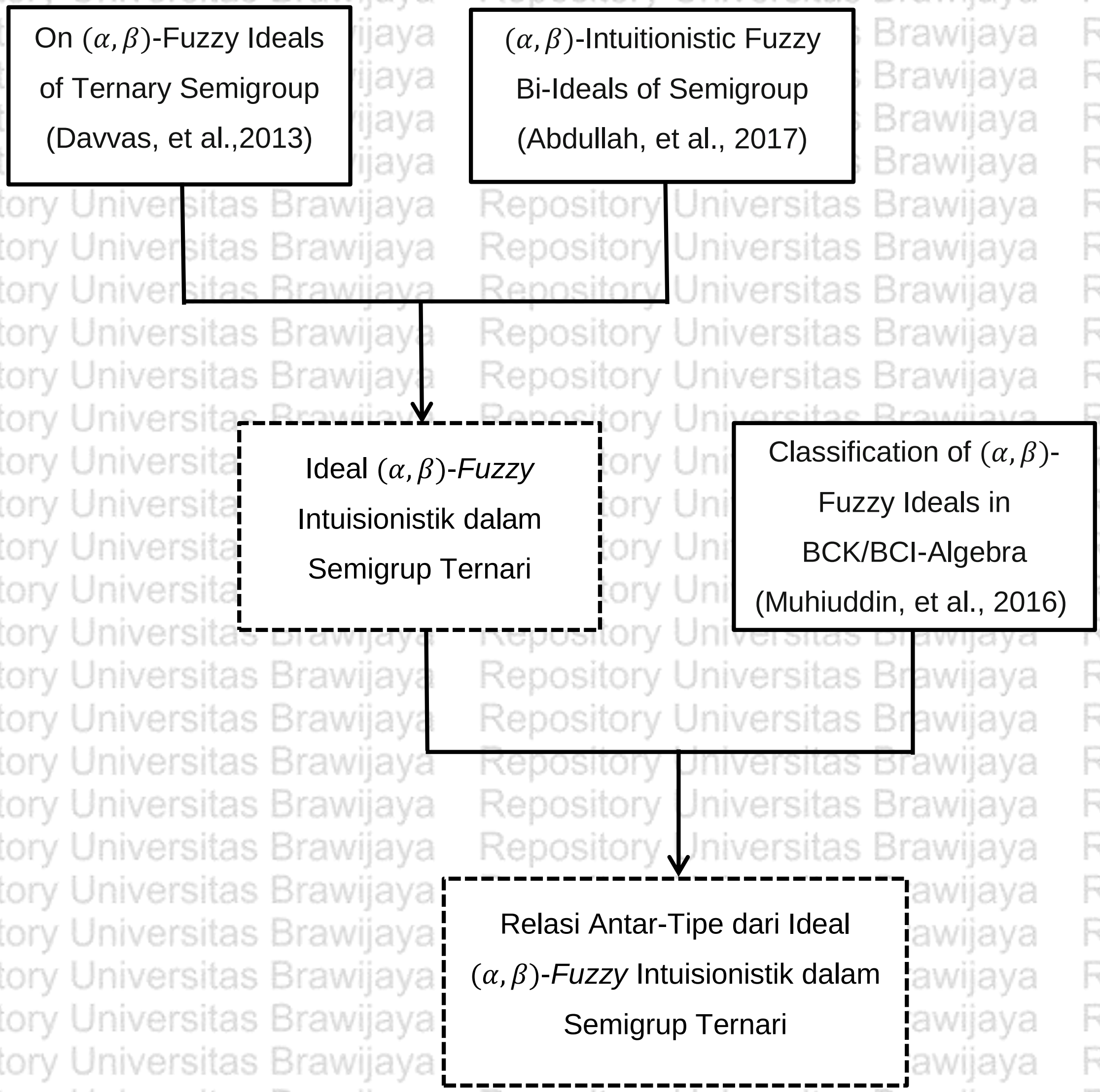
BAB III

KERANGKA KONSEP PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Penelitian ini menggunakan metode studi literatur (*library research*). Secara garis besar, penelitian ini akan mengkaji konsep ideal (α,β)-IF dalam sebuah semigrup ternari dan relasi antar-tipe dari ideal tersebut. Konstruksi definisi dari ideal (α,β)-IF dalam sebuah semigrup ternari dikembangkan dari penelitian sudah ada sebelumnya terkait ideal (α,β)-*fuzzy* dalam semigrup ternari dan ideal (α,β)-*fuzzy* intuisionistik dalam semigrup (Davvas, et al.,2013; Abdullah, et al., 2017). Dengan menelaah definisi-definisi pada ideal (α,β)-IF dan ideal (α,β)-*fuzzy* tersebut, maka dapat dirumuskan definisi ideal (α,β)-IF dalam semigrup ternari, sebagaimana yang akan dibahas dalam tesis ini. Kemudian, akan dibahas relasi antar-tipe dari ideal tersebut. Untuk pembahasan mengenai relasi antar-tipe dari ideal (α,β)-IF dalam semigrup ternari, akan ditelaah apakah ideal (α,β)-IF, yang notabene adalah generalisasi dari ideal (α,β)-*fuzzy*, masih mempertahankan relasi-relasi antar-tipe dari ideal tersebut sebagaimana yang dimiliki oleh relasi antar-tipe dari ideal (α,β)-fuzzy dalam aljabar BCK. Relasi antar-tipe dari ideal (α,β)-*fuzzy* dalam aljabar BCK ini merujuk pada artikel oleh Muhiuddin,et al. (2016:91).

Kebaruan dan perbedaan antara penelitian ini dengan penelitian-penelitian sebelumnya disajikan dalam bentuk bagan berikut ini.



3.2 Analisis: Konstruksi Definisi dan Teorema

Pertama, akan dibahas mengenai proses kontruksi definisi dari ideal (α, β)-IF dalam semigrup ternari. Dalam definisi ideal $(\epsilon, \epsilon \vee q)$-IF dalam semigrup pada Definisi 2.6.7 dan definisi ideal $(\epsilon, \epsilon \vee q)$-*fuzzy* dalam semigrup ternari pada Definisi 2.4.7, terdapat kesamaan dalam definisi dasar mengenai ideal $(\epsilon, \epsilon \vee q)$-IF. Definisi 2.6.7 merupakan perluasan dari Definisi 2.4.7, yakni dengan melakukan penambahan syarat untuk derajat non-keanggotaan untuk ideal $(\epsilon, \epsilon \vee q)$-IF dalam semigrup. Namun pada definisi ideal (α, β)-IF dalam hemiring, yang didalamnya terdefinisi pula ideal $(\epsilon, \epsilon \vee q)$ -IF dalam hemiring, ditambahkan definisi subsemigrup dalam hemiring ke dalam definisi ideal (α, β)-IF (Abdullah, et al., 2011:3079). Salah satu akibat dari pendefinisian ini adalah setiap ideal (α, β)-IF dalam hemiring adalah subsemigrup (α, β)-IF dalam hemiring, namun tidak berlaku sebaliknya. Berdasarkan pertimbangan ini, maka pada perumusan definisi ideal (α, β)-IF dalam semigrup ternari, akan ditambahkan juga syarat untuk definisi subsemigrup (α, β)-IF dalam semigrup ternari. Dengan perumusan ini, maka sifat bahwa setiap ideal (α, β)-IF dalam semigrup ternari adalah subsemigrup ternari (α, β)-IF dari semigrup ternari, masih dipertahankan.

Telah dibuktikan oleh Banach, bahwa tidak semua semigrup ternari adalah sebuah semigrup (Los, 1955). Oleh karena itu, setelah pendefinisian (α, β)-IF dalam semigrup ternari telah dikonstruksikan, akan ditinjau apakah sifat ideal (α, β)-IF dalam semigrup masih dipertahankan pada ideal (α, β)-IF dalam semigrup ternari (Abdullah, et al., 2017).

Selanjutnya, akan dibahas sifat relasi antar-tipe dari ideal (α, β)-IF dalam semigrup ternari. Penelitian ini akan membuktikan apakah sifat relasi antar-tipe antar ideal (α, β)-fuzzy dalam aljabar BCK juga berlaku pada relasi antar-tipe dari ideal (α, β)-IF dalam semigrup ternari (Muhiuddin, et al., 2016:91).

BAB IV

PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibahas beberapa definisi dan teorema terkait ideal (α,β)-*fuzzy* intuisionistik dalam semigrup ternari.

4.1 Ideal (α,β)-*Fuzzy* Intuisionistik dalam Semigrup Ternari

Berikut ini akan dipaparkan definisi terkait ideal (α,β)-*fuzzy* intuisionistik dalam semigrup ternari. Pada subbab ini juga akan dibahas mengenai beberapa teorema terkait sifat ideal tersebut.

Sebelum membahas mengenai ideal (α,β)-*fuzzy* intuisionistik dalam semigrup ternari, berikut ini diberikan definisi subsemigrup ternari (α,β)-*fuzzy* intuisionistik. Definisi ini dikembangkan dengan menggabungkan dan menggeneralisasi konsep subsemigrup $(\epsilon,\epsilon\vee q)$-*fuzzy* intuisionistik pada Definisi 2.6.5 dan konsep subsemigrup ternari $(\epsilon,\epsilon\vee q)$-*fuzzy* pada Definisi 2.4.5.

Definisi 4.1.1 (Subsemigrup Ternari (α,β)-*Fuzzy* Intuisionistik dari Semigrup Ternari) Misalkan $A=(\mu_A,\gamma_A)$ adalah sebuah himpunan IF di sebuah semigrup ternari T. $A=(\mu_A,\gamma_A)$ disebut subsemigrup ternari (α,β)-*fuzzy* intuisionistik dari semigrup ternari T, dimana $\alpha\in\{\epsilon,q,\epsilon\vee q\}$ dan $\beta\in\{\epsilon,q,\epsilon\vee q,\epsilon\wedge q\}$, jika untuk setiap $x,y,z\in T$, dan untuk setiap $a_1,a_2,a_3\in(0,1]$ dan $b_1,b_2,b_3\in[0,1)$, berlaku sebagai berikut.

$$x_{(a_1,b_1)}\alpha A, y_{(a_2,b_2)}\alpha A, z_{(a_3,b_3)}\alpha A\rightarrow xyz_{(\min\{a_1,a_2,a_3\},maks\{b_1,b_2,b_3\})}\beta A$$

Contoh 4.1.2 Dari Contoh 2.4.4, Diberikan $T = \{1,2,3\}$ merupakan semigrup ternari di bawah operasi ternari $[abc] = a * b * c$ untuk semua $a, b, c \in T$, dimana $*$ didefinisikan oleh tabel *cayley* berikut ini:

Tabel 2.1. **Tabel Cayley untuk Operasi Biner $*$,**

$*$	1	2	3
1	1	1	1
2	1	2	2
3	1	2	3

Diberikan $P = (\mu_P, \gamma_P)$ dan $Q = (\mu_Q, \gamma_Q)$ merupakan dua himpunan IF di T, dengan fungsi keanggotaan dan fungsi non-keanggotaan sebagai berikut.

$$\mu_P(x) = \begin{cases} 0.7, & x = 1 \\ 0.4, & x = 2 \\ 0.3, & x = 3 \end{cases} \qquad \gamma_P(x) = \begin{cases} 0.3, & x = 1 \\ 0.5, & x = 2 \\ 0.6, & x = 3 \end{cases}$$

$$\mu_Q(x) = \begin{cases} 0.8, & x = 1 \\ 0.7, & x = 2 \\ 0.6, & x = 3 \end{cases} \qquad \gamma_Q(x) = \begin{cases} 0.1, & x = 1 \\ 0.2, & x = 2 \\ 0.3, & x = 3 \end{cases}$$

Maka:

(1) $P = (\mu_P, \gamma_P)$ adalah subsemigrup ternari (ϵ, ϵ)-IF dari T, sehingga $P = (\mu_P, \gamma_P)$ adalah subsemigrup ternari $(\epsilon \vee q, \epsilon)$-IF, $(\epsilon, \epsilon \vee q)$-IF, $(\epsilon \vee q, \epsilon \vee q)$-IF dari T.

(2) $Q = (\mu_Q, \gamma_Q)$ adalah subsemigrup ternari (q, q)-IF dari T, sehingga $Q = (\mu_Q, \gamma_Q)$ adalah subsemigrup ternari $(\epsilon \vee q, q)$-IF, $(q, \epsilon \vee q)$-IF, $(\epsilon \vee q, \epsilon \vee q)$-IF dari T.

Bukti. Diketahui $(T,[\ \ ])$ adalah sebuah semigrup ternari. Pembuktian ini akan dibagi menjadi dua bagian, yakni:

(1) Akan dibuktikan bahwa $P=(\mu_P,\gamma_P)$ adalah subsemigrup ternari (ϵ,ϵ)-IF dari T, sehingga $P=(\mu_P,\gamma_P)$ adalah subsemigrup ternari $(\epsilon \vee q,\epsilon)$-IF, $(\epsilon,\epsilon \vee q)$-IF, $(\epsilon \vee q,\epsilon \vee q)$-IF dari T.

Ambil sebarang $x,y,z \in T$, dan $a_1,a_2,a_3 \in (0,1]$ dan $b_1,b_2,b_3 \in [0,1)$, berlaku:

$$x_{(a_1,b_1)} \epsilon P, y_{(a_2,b_2)} \epsilon P, z_{(a_3,b_3)} \epsilon P$$

$$\rightarrow xyz_{(\min\{a_1,a_2,a_3\},maks\{b_1,b_2,b_3\})} \epsilon P$$

Untuk memudahkan penulisan, $e=\min\{a_1,a_2,a_3\}$ dan $f=maks\{b_1,b_2,b_3\}$. Pembuktian ini akan dilakukan dengan cara kontradiksi. Andaikan $P=(\mu_P,\gamma_P)$ adalah sebuah IFS di T dengan fungsi keanggotaan μ_P dan fungsi non-keanggotaan γ_P, tetapi $P=(\mu_P,\gamma_P)$ bukan merupakan sebuah subsemigrup ternari (ϵ,ϵ)-IF dari T. Dengan demikian terdapat $x,y,z \in T$, dengan $a_1,a_2,a_3 \in (0,1]$ dan $b_1,b_2,b_3 \in [0,1)$, sedemikian sehingga berlaku $x_{(a_1,b_1)} \epsilon P$, $y_{(a_2,b_2)} \epsilon P, z_{(a_3,b_3)} \epsilon P$, namun $xyz_{(e,f)} \bar{\epsilon} P$. Berdasarkan Definisi 2.2.3 tentang IFP, berlaku $a_1 \le \mu_P(x)$, $b_1 \ge \gamma_P(x)$, $a_2 \le \mu_P(y), b_2 \ge \gamma_P(y)$, $a_3 \le \mu_P(x), b_3 \ge \gamma_P(x)$ dan $e > \mu_P(xyz), f < \gamma_P(xyz)$.

Dengan demikian terdapat 3 kemungkinan berikut ini.

1) Pertama, jika $xyz=1$, maka $\mu_P(xyz)=0.7$. Hal ini hanya dapat terjadi jika terdapat minimal satu elemen 1 pada x,y atau z. Selanjutnya karena $\mu_P(1)$ adalah derajat keanggotaan terbesar dari derajat

keanggotaan elemen T lainnya, sehingga kontradiktif dengan $e > \mu_P(xyz)$.

2) Selanjutnya jika $xyz = 2$, maka $\mu_P(xyz) = 0.4$, yakni jika terdapat minimal satu elemen 2 pada x, y atau z dan $3 \notin \{x, y, z\}$. Hal ini kontradiktif dengan $e > \mu_P(xyz)$, sebab $0.4 \geq e \geq 0.3$.

3) Terakhir, jika $xyz = 3$, maka $\mu_P(xyz) = 0.3$. Hal ini hanya akan terjadi jika terdapat elemen 3 pada minimal salah satu dari x, y, z, sehingga kontradiktif dengan $e > \mu_P(xyz)$, sebab $e = 0.3$.

Dengan demikian pengandaian salah dan $P(\mu_P, \gamma_P)$ adalah sebuah subsemigrup ternari (ϵ, ϵ)-IF dari T.

Selanjutnya, diketahui bahwa $x_{(a_1,b_2)} \epsilon P, y_{(a_2,b_2)} \epsilon P, z_{(a_3,b_3)} \epsilon P$, maka $x_{(a_1,b_2)} \epsilon \vee q\, P$, $y_{(a_2,b_2)} \epsilon \vee qP$, $z_{(a_3,b_3)} \epsilon \vee qP$. Kemudian diketahui bahwa $xyz_{(\min\{a_1,a_2,a_3\}, maks\{b_1,b_2,b_3\})} \epsilon P$, sehingga berdasarkan Definisi 2.2.3 tentang IFP, $xyz_{(\min\{a_1,a_2,a_3\}, maks\{b_1,b_2,b_3\})} \epsilon \vee qP$. Dengan demikian terbukti bahwa $P(\mu_P, \gamma_P)$ adalah sebuah subsemigrup ternari $(\epsilon \vee q, \epsilon)$-IF, $(\epsilon, \epsilon \vee q)$-IF, $(\epsilon \vee q, \epsilon \vee q)$-IF dari T.

(2) Akan dibuktikan bahwa $Q = (\mu_Q, \gamma_Q)$ adalah subsemigrup ternari (q, q) – IF dari T, sehingga $Q = (\mu_Q, \gamma_Q)$ adalah subsemigrup ternari $(\epsilon \vee q, q)$-IF, $(q, \epsilon \vee q)$-IF, $(\epsilon \vee q, \epsilon \vee q)$-IF dari T.

Ambil sebarang $x, y, z \in T$, dan $a_1, a_2, a_3 \in (0,1]$ dan $b_1, b_2, b_3 \in [0,1)$, berlaku:

$$x_{(a_1,b_1)} qQ, y_{(a_2,b_2)} qQ, z_{(a_3,b_3)} qQ$$
$$\rightarrow xyz_{(\min\{a_1,a_2,a_3\}, maks\{b_1,b_2,b_3\})} qQ$$

Untuk memudahkan penulisan, $e = \min\{a_1, a_2, a_3\}$ dan $f = maks\{b_1, b_2, b_3\}$. Pembuktian ini akan dilakukan dengan cara kontradiksi. Andaikan $Q = (\mu_Q, \gamma_Q)$ adalah sebuah IFS di T dengan fungsi keanggotaan μ_Q dan fungsi non-keanggotaan γ_Q, tetapi $Q = (\mu_Q, \gamma_Q)$ bukan merupakan sebuah subsemigrup ternari (q, q)- IF dari T, sehingga terdapat $x, y, z \in T$, dengan $a_1, a_2, a_3 \in (0,1]$ dan $b_1, b_2, b_3 \in [0,1)$, sedemikian sehingga berlaku $x_{(a_1,b_1)}qQ$, $y_{(a_2,b_2)}qQ, z_{(a_3,b_3)}qQ$, namun $xyz_{(e,f)}\bar{q}Q$, Oleh karena itu, berdasarkan Definisi 2.2.3 tentang IFP, $a_1 + \mu_Q(x) > 1$, $b_1 + \gamma_Q(x) < 1$, $a_2 + \mu_Q(y) > 1$, $b_2 + \gamma_W(y) < 1$, $a_3 + \mu_Q(z) > 1$, $b_3 + \gamma_Q(z) < 1$ dan $e + \mu_Q(xyz) \leq 1$, $f + \gamma_Q(xyz) \geq 1$.

Dengan demikian terdapat 3 kemungkinan,

1) Pertama, jika $xyz = 1$, maka $\mu_Q(xyz) = 0.8$. Hal ini terjadi jika terdapat minimal satu elemen 1 pada x, y atau z. Dengan demikian kontradiktif dengan $e + \mu_Q(xyz) \leq 1$, sebab $\mu_Q(xyz) = 0.8$ dan $0.6 \leq e \leq 0.8$.
2) Selanjutnya, jika $xyz = 2$, maka $\mu_Q(xyz) = 0.7$, yakni jika terdapat minimal satu elemen 2 pada x, y atau z, dimana $3 \notin \{x, y, z\}$. Dengan demikian kontradiktif dengan $e + \mu_Q(xyz) \leq 1$, sebab $\mu_Q(xyz) = 0.7$ dan $0.6 \leq e \leq 0.7$.
3) Terakhir, jika $xyz = 3$, maka $\mu_Q(xyz) = 0.6$, yakni jika $x = y = z = 3$. Hal ini kontradiktif dengan $e + \mu_Q(xyz) \leq 1$, sebab $\mu_Q(xyz) = e = 0.6$.

Dengan demikian pengandaian salah dan $Q(\mu_Q, \gamma_Q)$ adalah sebuah subsemigrup ternari (q, q)-IF dari T.

Selanjutnya, diketahui bahwa $x_{(a_1,b_2)}qQ$, $y_{(a_2,b_2)}qQ$, $z_{(a_3,b_3)}qQ$, maka $x_{(a_1,b_2)} \in \vee\, q\, Q$, $y_{(a_2,b_2)} \in \vee\, qQ$, $z_{(a_3,b_3)} \in \vee\, qQ$. Kemudian diketahui bahwa $xyz_{(\min\{a_1,a_2,a_3\},maks\{b_1,b_2,b_3\})}qQ$, maka berdasarkan Definisi 2.2.3 tentang IFP, $xyz_{(\min\{a_1,a_2,a_3\},maks\{b_1,b_2,b_3\})} \in \vee\, qQ$. Terbukti bahwa $Q(\mu_Q,\gamma_Q)$ adalah sebuah subsemigrup ternari $(\epsilon \vee q, q)$-IF, $(q, \epsilon \vee q)$-IF, $(\epsilon \vee q, \epsilon \vee q)$-IF dari T.

Dengan demikian Contoh 4.1.2 terbukti. ■

Berikut dipaparkan definisi Ideal (α,β)-*Fuzzy* Intuisionistik dalam Semigrup Ternari. Sama perihalnya dengan subsemigrup ternari (α,β)-*Fuzzy* Intuisionistik, definisi ini dikembangkan dengan menggeneralisasi dan menggabungkan konsep ideal (α,β)-*Fuzzy* Intuisionistik dalam Semigrup pada Definisi 2.6.7 dan konsep ideal (α,β)-*Fuzzy* dalam Semigrup Ternari pada Definisi 2.4.7.

Definisi 4.1.3 (Ideal (α,β)-*Fuzzy* Intuisionistik Kiri (lateral, kanan) dalam Semigrup Ternari) Misalkan $A = (\mu_A,\gamma_A)$ adalah sebuah Himpunan IF di sebuah semigrup ternari T, $A = (\mu_A,\gamma_A)$ dikatakan ideal (α,β)-*fuzzy* intuisionistik kiri (lateral, kanan) dalam semigrup T, dimana $\alpha \in \{\epsilon, q, \epsilon \vee q\}$ dan $\beta \in \{\epsilon, q, \epsilon \vee q, \epsilon \wedge q\}$, jika untuk setiap $x,y,z \in T$ dan untuk setiap $a_1,a_2,a_3 \in (0,1]$ dan $b_1,b_2,b_3 \in [0,1)$, berlaku aksioma – aksioma berikut:

$$x_{(a_1,b_1)}\alpha A, y_{(a_2,b_2)}\alpha A, z_{(a_3,b_3)}\alpha A \rightarrow xyz_{(\min\{a_1,a_2,a_3\},maks\{b_1,b_2,b_3\})}\beta A$$

$$z_{(a_3,b_3)}\alpha A \rightarrow xyz_{(a_3,b_3)}\beta A\ \left(y_{(a_2,b_2)}\alpha A \rightarrow xyz_{(a_2,b_2)}\beta A,\ x_{(a_3,b_3)}\alpha A \rightarrow xyz_{(a_1,b_1)}\beta A\right)$$

Selanjutnya, $A = (\mu_A,\gamma_A)$ disebut ideal (α,β)-IF dalam semigrup ternari T, jika $A = (\mu_A,\gamma_A)$ adalah ideal (α,β)-IF kiri, lateral dan kanan dalam semigrup ternari T.

Sekarang, berdasarkan Definisi 4.1.3 di atas, definisi ideal (α,β)-*fuzzy* intuisionistik dalam semigrup ternari T dapat disederhanakan menjadi berikut:

Definisi 4.1.4 (Ideal (α,β)-*Fuzzy* Intuisionistik dalam Semigrup Ternari) Diberikan $A=(\mu_A,\gamma_A)$ adalah sebuah himpunan IF di sebuah semigrup ternari T, $A=(\mu_A,\gamma_A)$ dikatakan sebuah ideal (α,β)-*fuzzy* intuisionistik dalam semigrup T, dimana $\alpha\in\{\epsilon,q,\epsilon\vee q\}$ dan $\beta\in\{\epsilon,q,\epsilon\vee q,\epsilon\wedge q\}$, jika untuk setiap $x,y,z\in T$ dan untuk setiap $a_1,a_2,a_3\in(0,1]$ dan $b_1,b_2,b_3\in[0,1)$, berlaku aksioma berikut.

$$x_{(a_1,b_1)}\alpha A, y_{(a_2,b_2)}\alpha A, z_{(a_3,b_3)}\alpha A\rightarrow xyz_{(\text{maks}\{a_1,a_2,a_3\},min\{b_1,b_2,b_3\})}\beta A$$

Dari Definisi 4.1.1 dan Definisi 4.1.4 dapat diketahui bahwa setiap ideal (α,β)-IF dalam semigrup T adalah subsemigrup ternari (α,β)-IF dari semigrup ternari T, tetapi tidak berlaku sebaliknya.

Contoh 4.1.5 Dari Contoh 4.1.2, Diberikan $I=(\mu_I,\gamma_I)$ dan $J=(\mu_J,\gamma_J)$ merupakan dua himpunan IF di T, dengan fungsi keanggotaan dan fungsi non-keanggotaan sebagai berikut.

$$\mu_I(x)=\begin{cases}0.7, & x=1\\ 0.4, & x=2\\ 0.3, & x=3\end{cases}\qquad \gamma_I(x)=\begin{cases}0.3, & x=1\\ 0.4, & x=2\\ 0.6, & x=3\end{cases}$$

$$\mu_J(x)=\begin{cases}0.9, & x=1\\ 0.8, & x=2\\ 0.7, & x=3\end{cases}\qquad \gamma_J(x)=\begin{cases}0.1, & x=1\\ 0.1, & x=2\\ 02, & x=3\end{cases}$$

maka:

(1) $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah ideal (ϵ, ϵ)-IF dalam T, sehingga $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah ideal $(\epsilon \vee q, \epsilon)$-IF, $(\epsilon, \epsilon \vee q)$-IF, $(\epsilon \vee q, \epsilon \vee q)$-IF dalam T.

(2) $J = (\mu_J, \gamma_J)$ adalah ideal (q, q)-IF dalam T, sehingga $J = (\mu_J, \gamma_J)$ adalah ideal $(\epsilon \vee q, q)$-IF, $(q, \epsilon \vee q)$-IF, $(\epsilon \vee q, \epsilon \vee q)$-IF dalam T.

Bukti. Diketahui $(T, [\ \ ])$ adalah sebuah semigrup ternari. Pembuktian ini akan dibagi menjadi dua bagian, yakni:

(1) Akan dibuktikan bahwa $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah ideal (ϵ, ϵ)-IF dari T, sehingga $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah ideal $(\epsilon \vee q, \epsilon)$-IF, $(\epsilon, \epsilon \vee q)$-IF, $(\epsilon \vee q, \epsilon \vee q)$-IF dalam T.

Ambil sebarang $x, y, z \in T$, dan $a_1, a_2, a_3 \in (0,1]$ dan $b_1, b_2, b_3 \in [0,1)$, berlaku:

$$x_{(a_1,b_1)} \epsilon I, y_{(a_2,b_2)} \epsilon I, z_{(a_3,b_3)} \epsilon I$$

$$\rightarrow xyz_{(\text{maks}\{a_1,a_2,a_3\}, min\{b_1,b_2,b_3\})} \epsilon I$$

Untuk memudahkan penulisan, maka $r = \text{maks}\{a_1, a_2, a_3\}$ dan $s = min\{b_1, b_2, b_3\}$. Pembuktian ini akan dilakukan dengan cara kontradiksi. Andaikan $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah sebuah IFS di T dengan fungsi keanggotaan μ_I dan fungsi non-keanggotaan γ_I, namun $I = (\mu_I, \gamma_I)$ bukan merupakan sebuah ideal (ϵ, ϵ)-IF dari T, sehingga terdapat $x, y, z \in T$, dengan $a_1, a_2, a_3 \in (0,1]$ dan $b_1, b_2, b_3 \in [0,1)$, sedemikian sehingga berlaku $x_{(a_1,b_1)} \epsilon I$, $y_{(a_2,b_2)} \epsilon I, z_{(a_3,b_3)} \epsilon I$, namun $xyz_{(r,s)} \bar{\epsilon} I$. Dengan kata lain, berdasarkan Definisi 2.2.3 tentang IFP, berlaku $a_1 \leq \mu_I(x)$, $b_1 \geq \gamma_I(x)$, $a_2 \leq \mu_I(y)$, $b_2 \geq \gamma_I(y)$, $a_3 \leq \mu_I(x)$, $b_3 \geq \gamma_I(x)$ dan $r > \mu_I(xyz)$, $s < \gamma_I(xyz)$.

Dengan demikian terdapat 3 kemungkinan berikut,

1) Pertama, jika $xyz = 1$, maka $\mu_I(xyz) = 0.7$. Berdasarkan Tabel 2.1, ini hanya dapat terjadi jika terdapat minimal satu elemen 1 pada x, y atau z. Hal ini kontradiktif dengan $r > \mu_I(xyz)$, sebab $r = \mu_I(xyz) = 0.7$.
2) Selanjutnya, jika $xyz = 2$, maka $\mu_I(xyz) = 0.4$. yakni jika terdapat minimal satu elemen 2 pada x, y atau z, dimana $3 \notin \{x, y, z\}$. Dengan demikian kontradiktif dengan $r > \mu_P(xyz)$ sebab $r = \mu_I(xyz) = 0.4$.
3) Terakhir, jika $xyz = 2$, maka $\mu_I(xyz) = 0.3$, yakni jika $x = y = z = 3$. Hal ini kontradiktif dengan $r > \mu_P(xyz)$, sebab $r = \mu_P(xyz)$.

Dengan demikian pengandaian salah dan $P(\mu_P, \gamma_P)$ adalah ideal (ϵ, ϵ)-IF dalam T.

Selanjutnya diketahui bahwa $x_{(a_1,b_2)} \in I, y_{(a_2,b_2)} \in I, z_{(a_3,b_3)} \in I$, maka $x_{(a_1,b_2)} \in \vee\, qI, y_{(a_2,b_2)} \in \vee\, qI, z_{(a_3,b_3)} \in \vee\, qI$. Kemudian diketahui bahwa $xyz_{(\text{maks}\{a_1,a_2,a_3\}, min\{b_1,b_2,b_3\})} \in I$, sehingga berdasarkan Definisi 2.2.3 tentang IFP, $xyz_{(\text{maks}\{a_1,a_2,a_3\}, min\{b_1,b_2,b_3\})} \in \vee\, qI$. Dengan demikian terbukti bahwa $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah sebuah ideal $(\epsilon \vee q, q)$-IF, $(q, \epsilon \vee q)$-IF, $(\epsilon \vee q, \epsilon \vee q)$-IF dalam T.

(2) Akan dibuktikan bahwa $J = (\mu_J, \gamma_J)$ adalah ideal (q, q)-IF dalam T, sehingga $J = (\mu_J, \gamma_J)$ adalah ideal $(\epsilon \vee q, q)$-IF, $(q, \epsilon \vee q)$-IF, $(\epsilon \vee q, \epsilon \vee q)$-IF dalam T.

Ambil sebarang $x, y, z \in T$, dan $a_1, a_2, a_3 \in (0,1]$ dan $b_1, b_2, b_3 \in [0,1)$, berlaku:

$$x_{(a_1,b_1)}qJ, y_{(a_2,b_2)}qJ, z_{(a_3,b_3)}qJ$$
$$\rightarrow xyz_{(\text{maks}\{a_1,a_2,a_3\}, min\{b_1,b_2,b_3\})}qJ$$

Untuk memudahkan penulisan, maka $r = \text{maks}\{a_1, a_2, a_3\}$ dan $s = min\{b_1, b_2, b_3\}$. Pembuktian ini akan dilakukan dengan cara kontradiksi. Andaikan $J = (\mu_J, \gamma_J)$ adalah sebuah IFS di T dengan fungsi keanggotaan μ_J dan fungsi non-keanggotaan γ_J, tetapi $J = (\mu_J, \gamma_J)$ bukan merupakan sebuah ideal (q, q)-IF dalam T. Dengan demikian terdapat $x, y, z \in T$, dengan $a_1, a_2, a_3 \in (0,1]$ dan $b_1, b_2, b_3 \in [0,1)$, sedemikian sehingga berlaku $x_{(a_1,b_1)}qJ, y_{(a_2,b_2)}qJ, z_{(a_3,b_3)}qJ$ namun $xyz_{(r,s)}\bar{q}J$. Berdasarkan Definisi 2.2.3 tentang IFP, maka $a_1 + \mu_J(x) > 1$, $b_1 + \gamma_J(x) < 1$, $a_2 + \mu_J(y) > 1$, $b_2 + \gamma_J(y) < 1$, $a_3 + \mu_J(z) > 1$, $b_3 + \gamma_J(z) < 1$ dan $r + \mu_J(xyz) \leq 1$, $s + \gamma_J(xyz) \geq 1$.

Dengan demikian terdapat 3 kemungkinan,

1) Pertama, jika $xyz = 1$, maka $\mu_J(xyz) = 0.9$. Berdasarkan Tabel 2.1, ini hanya akan terjadi jika terdapat minimal satu elemen 1 pada x, y atau z. Hal ini kontradiktif dengan $r + \mu_J(xyz) \leq 1$, sebab $r = \mu_J(xyz) = 0.9$.
2) Selanjutnya, jika $xyz = 2$, maka $\mu_J(xyz) = 0.8$, yakni jika terdapat minimal satu elemen 2 pada x, y atau z, dimana $3 \notin \{x, y, z\}$. Dengan demikian kontradiktif dengan $r + \mu_j(xyz) \leq 1$ sebab $r = \mu_J(xyz) = 0.8$.
3) Terakhir, jika $xyz = 3$, maka $\mu_J(xyz) = 0.7$, yakni $x = y = z = 3$. Hal ini kontradiktif dengan $r + \mu_J(xyz) \leq 1$, sebab $\mu_J(xyz) = r = 0.7$.

Dengan demikian pengandaian salah dan $J = (\mu_j, \gamma_j)$ adalah sebuah ideal (q, q)-IF dari T.

Selanjutnya diketahui bahwa $x_{(a_1,b_1)}qJ, y_{(a_2,b_2)}qJ, z_{(a_3,b_3)}qJ$, maka $x_{(a_1,b_1)} \in \vee qJ, y_{(a_2,b_2)} \in \vee qJ, z_{(a_3,b_3)} \in \vee qJ$. Kemudian diketahui juga bahwa $xyz_{(\min\{a_1,a_2,a_3\}, maks\{b_1,b_2,b_3\})}qJ$, sehingga berdasarkan Definisi 2.2.3 tentang IFP $xyz_{(\min\{a_1,a_2,a_3\}, maks\{b_1,b_2,b_3\})} \in \vee qJ$. Terbukti bahwa $J(\mu_J, \gamma_J)$ adalah sebuah ideal $(\epsilon \vee q, q)$-IF, $(q, \epsilon \vee q)$-IF, $(\epsilon \vee q, \epsilon \vee q)$-IF dari T.

Dengan demikian Contoh 4.1.5 terbukti. ■

Sekarang, akan dibahas teorema – teorema yang berlaku pada subsemigrup ternari (α, β)-IF dari semigrup ternari T dan ideal (α, β)-IF dalam semigrup T. Pada teorema di bawah ini akan diberikan syarat perlu bagi sebuah sebuah subsemigrup dari sebuah semigrup ternari T, dan sebuah himpunan IF atas T agar dapat dikategorikan sebagai sebuah subsemigrup ternari $(\alpha, \epsilon \vee q)$-IF dari T.

Teorema 4.1.6 Diberikan D adalah sebuah subsemigrup dari sebuah semigrup ternari T, dan $P = (\mu_P, \gamma_P)$ adalah sebuah himpunan IF, sedemikian sehingga syarat – syarat berikut terpenuhi :

(1) $(\forall x \in T \backslash D)$ $(\mu_P(x) = 0$ dan $\gamma_P(x) = 1)$

(2) $(\forall x \in D)$ $(\mu_P(x) \geq 0.5$ dan $\gamma_P(x) \leq 0.5)$

Maka $P = (\mu_P, \gamma_P)$ adalah sebuah subsemigrup ternari $(\alpha, \epsilon \vee q)$-IF dari T.

Bukti. Diketahui D adalah sebuah subsemigrup ternari dari sebuah semigrup ternari T. Oleh karena itu, berdasarkan Definisi 2.3.13, tentang definisi subsemigrup ternari dari semigrup ternari, maka untuk setiap $x, y, z \in D$ berlaku $xyz \in D$.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $P = (\mu_P, \gamma_P)$ adalah sebuah subsemigrup ternari (α, β)-IF dalam T

(1) Kasus $\alpha = q$,

Akan dibuktikan bahwa untuk setiap $j, k, l \in P$ dimana $a_1, a_2, a_3 \in (0,1]$ dan $b_1, b_2, b_3 \in [0,1)$ berlaku:

$$j_{(a_1,b_1)}qP, k_{(a_2,b_2)}qP, l_{(a_3,b_3)}qP$$
$$\rightarrow jkl_{(\min\{a_1,a_2,a_3\}, maks\{b_1,b_2,b_3\})} \in \vee qP.$$

Diketahui $j, k, l \in P$, maka $\mu_P(j) \geq 0.5, \gamma_P(j) \leq 0.5$, $\mu_P(k) \geq 0.5$, $\gamma_P(k) \leq 0.5$ dan $\mu_P(l) \geq 0.5$, $\gamma_P(l) \leq 0.5$. Selanjutnya $\alpha = q$, sehingga $j_{(a_1,b_1)}qP, k_{(a_2,b_2)}qP, l_{(a_3,b_3)}qP$. Dengan demikian $\mu_P(j) + a_1 > 1$, $\gamma_P(j) + b_1 < 1$, $\mu_P(k) + a_2 > 1$, $\gamma_P(k) + b_2 < 1$ dan $\mu_P(l) + a_3 > 1$, $\gamma_P(l) + b_1 < 1$, sehingga $a_1 > 0.5, a_2 > 0.5, a_3 > 0.5$ dan $b_1 < 0.5$, $b_2 < 0.5$, $b_3 < 0.5$. Misal $s = \min\{a_1, a_2, a_3\}$ dan $t = maks\{b_1, b_2, b_3\}$ maka $s > 0.5$ dan $t < 0.5$. Karena D adalah sebuah subsemigrup dari T, maka $jkl \in D$, sehingga $\mu_P(jkl) \geq 0.5$ dan $\gamma_P(jkl) \leq 0.5$, mengakibatkan $\mu_P(jkl) + s > 1$ dan $\gamma_P(jkl) + t < 1$. Dengan demikian $jkl_{(s,t)}qP$, sehingga $jkl_{(s,t)} \in \vee qP$. Terbukti bahwa $P = (\mu_P, \gamma_P)$ adalah sebuah subsemigrup ternari $(q, \in \vee q)$-IF dari semigrup ternari T.

(2) Kasus $\alpha = \epsilon$,

Berikut ini akan dibuktikan bahwa untuk setiap $j, k, l \in I$ dimana $a_1, a_2, a_3 \in (0,1]$ dan $b_1, b_2, b_3 \in [0,1)$, berlaku:

$$j_{(a_1,b_1)} \epsilon P, k_{(a_2,b_2)} \epsilon P, l_{(a_3,b_3)} \epsilon P$$
$$\rightarrow jkl_{(\min\{a_1,a_2,a_3\}, maks\{b_1,b_2,b_3\})} \epsilon \vee qP.$$

Diketahui $j, k, l \in P$, maka $\mu_P(j) \geq 0.5, \gamma_P(j) \leq 0.5$, $\mu_P(k) \geq 0.5$, $\gamma_P(k) \leq 0.5$ dan $\mu_P(l) \geq 0.5$, $\gamma_P(l) \leq 0.5$. $\alpha = \epsilon$, sehingga $j_{(a_1,b_1)} \epsilon P, k_{(a_2,b_2)} \epsilon P, l_{(a_3,b_3)} \epsilon P$. Dengan demikian $\mu_P(j) \geq a_1$, $\gamma_P(j) \leq b_1$ $\mu_P(k) \geq a_2, \gamma_P(k) \leq b_2$ dan $\mu_P(l) \geq a_3$, $\gamma_P(l) \leq b_3$. Karena $j, k, l \in P$, Maka $a_1 \leq 0.5, a_2 \leq 0.5, a_3 \leq 0.5$ dan $b_1 \geq 0.5$, $b_2 \geq 0.5$, $b_3 \geq 0.5$. Misal $s = \min\{a_1, a_2, a_3\}$ dan $t = maks\{b_1, b_2, b_3\}$, maka $s \leq 0.5$ dan $t \geq 0.5$. karena D adalah sebuah subsemigrup ternari dari T, maka $jkl \in D$, sehingga $\mu_P(jkl) \geq 0.5$ dan $\gamma_P(jkl) \leq 0.5$, mengakibatkan $\mu_P(jkl) \geq 0.5 \geq s$ dan $\gamma_P(jkl) \leq 0.5 \leq t$. Dengan demikian $jkl_{(s,t)} \epsilon P$, sehingga mengakibatkan $jkl_{(s,t)} \epsilon \vee qP$. Terbukti bahwa $P = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah sebuah subsemigrup ternari $(\epsilon, \epsilon \vee q)$-IF dari semigrup ternari T.

(3) Kasus $\alpha = \epsilon \vee q$,

Diketahui $\alpha = \epsilon \vee q$, berdasarkan Definisi 2.2.3, tentang definisi IFP, maka $a = \epsilon$ atau $\alpha = q$, berdasarkan kasus $a = \epsilon$ atau $\alpha = q$ sebelumnya, telah dibuktikan bahwa untuk $\alpha = \{\epsilon, q\}$, $P = (\mu_P, \gamma_P)$ adalah sebuah subsemigrup ternari $(\alpha, \epsilon \vee q)$-IF dalam semigrup ternari T.

Dengan demikian, telah dibuktikan bahwa $P = (\mu_P, \gamma_P)$ adalah sebuah subsemigrup ternari $(\alpha, \epsilon \vee q)$-IF dari semigrup ternari T. ■

Selanjutnya, Pada teorema di bawah ini akan diberikan syarat perlu bagi sebuah ideal kiri dalam sebuah semigrup ternari T, dan sebuah himpunan IF atas T agar dapat dikategorikan sebagai sebuah ideal $(\alpha, \epsilon \vee q)$-IF kiri dalam T.

Teorema 4.1.7 Misalkan R merupakan sebuah ideal kiri dalam sebuah semigrup ternari T, dan $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah sebuah himpunan IF, sedemikian sehingga syarat-syarat berikut terpenuhi :

(1) $(\forall x \in T \setminus R)$ $(\mu_I(x) = 0$ dan $\gamma_I(x) = 1)$
(2) $(\forall x \in R)$ $(\mu_I(x) \geq 0.5$ dan $\gamma_I(x) \leq 0.5)$

Maka $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah sebuah ideal $(\alpha, \epsilon \vee q)$-IF kiri dalam T.

Bukti. Diketahui R adalah sebuah ideal kiri dalam sebuah semigrup ternari T. Dengan demikian berdasarkan Definisi 2.3.11, mengenai definisi ideal dalam semigrup ternari, untuk setiap $z \in R$ dan untuk setiap $x, y \in T$, berlaku $xyz \in R$.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah sebuah ideal (α, β)-IF dalam T.

(1) Untuk $\alpha = q$,

Ambil sebarang $x, y \in T$, $z \in I$ dan $a \in (0,1]$, $b \in [0,1)$ sedemikian sehingga $z_{(a,b)qI}$. Oleh karena itu, $\mu_I(z) + a > 1$ dan $\gamma_I(z) + b < 1$, dan $z \in R$. Diketahui R adalah ideal dalam T, maka $xyz \in R$. Selanjutnya, karena diketahui $xyz \in R$ dan I adalah himpunan IF di T, berdasarkan syarat teorema 4.1.7 pada himpunan IF I, berlaku $xyz \in I$ dan $\mu_I(xyz) \geq 0.5$, $\gamma_I(xyz) \leq 0.5$.

Pertama-tama, akan dibuktikan $xyz_{(a,b)}qI$. Diketahui $\mu_I(z) + a > 1$ dan $\gamma_I(z) + b < 1$, dimana $z \in I$. Karena $\mu_I(z) \geq 0.5$ dan $\gamma_I(z) \leq 0.5$, mengakibatkan $a > 0.5$ dan $b < 0.5$. Diketahui $xyz \in I$, sehingga $\mu_I(xyz) \geq 0.5$, $\gamma_I(xyz) \leq 0.5$, dengan demikian $\mu_I(xyz) + a > 1$, dan $\gamma_I(xyz) + b < 1$. Terbukti bahwa $xyz(a,b)qI$ mengakibatkan $xyz_{(a,b)} \epsilon \vee qI$.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa untuk setiap $j,k,l \in I$ dimana $a_1, a_2, a_3 \in (0,1]$ dan $b_1, b_2, b_3 \in [0,1)$ berlaku:

$$j_{(a_1,b_1)}qI, k_{(a_2,b_2)}qI, l_{(a_3,b_3)}qI$$
$$\rightarrow jkl_{(\min\{a_1,a_2,a_3\}, maks\{b_1,b_2,b_3\})}\beta I.$$

Diketahui $j,k,l \in I$, maka $\mu_I(j) \geq 0.5$, $\gamma_I(j) \leq 0.5$, $\mu_I(k) \geq 0.5$, $\gamma_I(k) \leq 0.5$ dan $\mu_I(l) \geq 0.5$, $\gamma_I(l) \leq 0.5$. $\alpha = q$, sehingga $j_{(a_1,b_1)}qI, k_{(a_2,b_2)}qI, l_{(a_3,b_3)}qI$. Dengan demikian $\mu_I(j) + a_1 > 1$, $\gamma_I(j) + b_1 < 1$ dan $\mu_I(k) + a_2 > 1$, $\gamma_I(k) + b_2 < 1$, $\mu_I(l) + a_3 > 1$, $\gamma_I(l) + b_1 < 1$, sehingga $a_1 > 0.5, a_2 > 0.5, a_3 > 0.5$ dan $b_1 < 0.5$, $b_2 < 0.5$, $b_3 < 0.5$. Misal $s = \min\{a_1, a_2, a_3\}$ dan $t = maks\{b_1, b_2, b_3\}$, maka $s > 0.5$ dan $t < 0.5$. Selanjutnya, R adalah sebuah ideal dari T, maka $jkl \in R$, sehingga $\mu_I(jkl) \geq 0.5$ dan $\gamma_I(jkl) \leq 0.5$. Oleh karena itu, $\mu_I(jkl) + s > 1$ dan $\gamma_I(jkl) + t < 1$. Dengan demikian $jkl_{(s,t)}qI$, sehingga $jkl_{(s,t)} \epsilon \vee qI$. Terbukti bahwa $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah sebuah ideal $(q, \epsilon \vee q)$-IF dalam semigrup ternari T.

(2) Untuk $\alpha = \epsilon$,

Ambil sebarang $x, y \in T$, $z \in I$ dan $a \in (0,1]$, $b \in [0,1)$ sedemikian sehingga $z_{(a,b)} \epsilon I$. Oleh karena itu, $\mu_I(z) \geq a$ dan $\gamma_I(z) \leq b$, sehingga $z \in R$. Diketahui R adalah ideal dalam T, maka $xyz \in R$. Selanjutnya, karena diketahui $xyz \in R$ dan I adalah himpunan IF di T, berdasarkan syarat teorema 4.1.7 pada himpunan IF I, berlaku $xyz \in I$ dan $\mu_I(xyz) \geq 0.5$, $\gamma_I(xyz) \leq 0.5$.

Selanjutnya akan dibuktikan $xyz_{(a,b)}qI$. Telah diketahui $\mu_I(z) \geq a$, $\gamma_I(z) \geq b$ dan $z \in I$. Karena $\mu_I(z) \geq 0.5$ dan $\gamma_I(z) \leq 0.5$, mengakibatkan $a \leq 0.5$ dan $b \geq 0.5$. Dari paragraf sebelumnya, $xyz \in I$ dan $\mu_I(xyz) \geq 0.5$, $\gamma_I(xyz) \leq 0.5$, sehingga $\mu_I(xyz) \geq 0.5 \geq a$, dan $\gamma_I(xyz) \leq 0.5 \leq b$. Dengan demikian terbukti $xyz_{(a,b)}qI$, mengakibatkan $xyz_{(a,b)} \epsilon \vee qI$.

Kemudian akan dibuktikan bahwa untuk setiap $j, k, l \in I$ dimana $a_1, a_2, a_3 \in (0,1]$ dan $b_1, b_2, b_3 \in [0,1)$, berlaku:

$$j_{(a_1,b_1)} \epsilon I, k_{(a_2,b_2)} \epsilon I, l_{(a_3,b_3)} \epsilon I$$

$$\rightarrow jkl_{(\min\{a_1,a_2,a_3\}, maks\{b_1,b_2,b_3\})} \epsilon I.$$

Diketahui $j, k, l \in I$, maka $\mu_I(j) \geq 0.5, \gamma_I(j) \leq 0.5$, $\mu_I(k) \geq 0.5$, $\gamma_I(k) \leq 0.5$ dan $\mu_I(l) \geq 0.5$, $\gamma_I(l) \leq 0.5$. $\alpha = \epsilon$, sehingga $j_{(a_1,b_1)} \epsilon I, k_{(a_2,b_2)} \epsilon I, l_{(a_3,b_3)} \epsilon I$. Dengan demikian $\mu_I(j) \geq a_1$, $\gamma_I(j) \leq b_1$ $\mu_I(k) \geq a_2, \gamma_I(k) \leq b_2$ dan $\mu_I(l) \geq a_3, \gamma_I(l) \leq b_3$. Karena $j, k, l \in I$, Maka $a_1 \leq 0.5, a_2 \leq 0.5, a_3 \leq 0.5$ dan $b_1 \geq 0.5$, $b_2 \geq 0.5$, $b_3 \geq 0.5$. Misal $s = \min\{a_1, a_2, a_3\}$ dan $t = maks\{b_1, b_2, b_3\}$, maka $s \leq 0.5$ dan $t \geq 0.5$. karena R adalah sebuah ideal dari T, maka $jkl \in R$, sehingga $\mu_I(jkl) \geq 0.5$ dan $\gamma_I(jkl) \leq 0.5$, mengakibatkan $\mu_I(jkl) \geq 0.5 \geq s$ dan $\gamma_I(jkl) \leq 0.5 \leq t$. Dengan demikian $jkl_{(s,t)} \epsilon I$, sehingga $jkl_{(s,t)} \epsilon \vee qI$. Terbukti bahwa $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah sebuah ideal $(\epsilon, \epsilon \vee q)$-IF dalam semigrup ternari T.

(3) Untuk $\alpha = \epsilon \vee q$,

Diketahui $\alpha = \epsilon \vee q$, berdasarkan Definisi 2.2.3, menganai definisi IFP, maka $\alpha = \epsilon$ atau $\alpha = q$, berdasarkan kasus $\alpha = \epsilon$ atau $\alpha = q$ sebelumnya, telah dibuktikan bahwa untuk $\alpha = \{\epsilon, q\}$, maka $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah sebuah ideal $(\alpha, \epsilon \vee q)$ – IF dalam semigrup ternari T.

Dengan demikian, telah terbukti bahwa $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah sebuah ideal $(\alpha, \epsilon \vee q)$-IF dalam semigrup T. ■

4.2 Relasi Antar-Tipe dari Ideal (α, β)-*Fuzzy* Intuisionistik dalam Semigrup Ternari

Pada Subbab sebelumnya, telah didefinisikan Ideal (α, β)-IF dalam semigrup ternari, dimana $\alpha \in \{\epsilon, q, \epsilon \vee q\}$ dan $\beta \in \{\epsilon, q, \epsilon \vee q, \epsilon \wedge q\}$. Dalam subbab ini akan ditelaah mengenai beberapa relasi antar-tipe dari ideal-ideal tersebut. Berdasarkan Definisi 4.1.4, maka Ideal (α, β)-IF dalam semigrup ternari dapat diklasifikasikan menjadi 12 jenis berdasarkan nilai (α, β), yakni (ϵ, ϵ), (ϵ, q), $(\epsilon, \epsilon \vee q)$, $(\epsilon, \epsilon \wedge q)$, (q, ϵ), (q, q), $(q, \epsilon \wedge q)$, $(q, \epsilon \vee q)$, (ϵ, q). $(\epsilon \vee q, \epsilon)$, $(\epsilon \vee q, q)$, $(\epsilon \vee q, \epsilon \wedge q)$.

Teorema 4.2.1 ($(q, \epsilon \vee q) \rightarrow (\epsilon, \epsilon \vee q)$) Jika $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah sebuah ideal $(q, \epsilon \vee q)$-IF dalam sebuah semigrup ternari T, maka $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah ideal $(\epsilon, \epsilon \vee q)$-IF dalam T.

Bukti. Untuk membuktikan teorema di atas, maka digunakan Definisi 4.1.3, sehingga akan dibagi menjadi 3 kasus, yakni

(1) $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah sebuah ideal $(q, \epsilon \vee q)$-IF kiri dari T

Diketahui $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah sebuah ideal $(q, \epsilon \vee q)$-IF kiri dari T, sehingga untuk setiap $x, y, z \in T$ dan untuk setiap $a_1, a_2, a_3 \in (0,1]$ dan $b_1, b_2, b_3 \in [0,1)$, berlaku:

$$x_{(a_1,b_1)}qI, y_{(a_2,b_2)}qI, z_{(a_3,b_3)}qI$$
$$\rightarrow xyz_{(\min\{a_1,a_2,a_3\}, maks\{b_1,b_2,b_3\})} \in \vee qI$$

dan

$$z_{(a_3,b_3)}qI \rightarrow xyz_{(a_3,b_3)} \in \vee qI.$$

Pertama, akan dibuktikan menggunakan metode kontradiksi, bahwa untuk $I = (\mu_I(z), \gamma_I(z))$ berlaku $z_{(a_3,b_3)} \in I \rightarrow xyz_{(a_3,b_3)} \in \vee qI$. Andaikan $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah sebuah IFS di T dengan fungsi keanggotaan μ_I dan fungsi non-keanggotaan γ_I, tetapi $I = (\mu_I, \gamma_I)$ bukan merupakan sebuah ideal $(q, \epsilon \vee q)$-IF kiri dari T, sehingga terdapat $x, y, z \in T$, $a_1, a_2, a_3 \in (0,1]$ dan $b_1, b_2, b_3 \in [0,1)$, sedemikian sehingga $z_{(a_3,b_3)} \in I$, namun $xyz_{(a_3,b_3)} \overline{\in \vee q}I$. Oleh karena itu, berdasarkan Definisi 2.2.3 tentang IFP, berlaku $\mu_I(z) \geq a_3$, $\gamma_1(z) \leq b_3$, dan $\mu_I(xyz) < a_3$, $\gamma_I(xyz) > b_3$ dan $\mu_I(xyz) + a_3 \leq 1$, $\gamma_I(xyz) + b_3 \geq 1$. Jadi, $\mu_I(xyz) < 0.5$, $\gamma_I(xyz) > 0.5$, sehingga $\mu_I(xyz) < \min\{a_3, 0.5\}$ dan $\gamma_I(xyz) > maks\{b_3, 0.5\}$. Dengan demikian berlaku pernyataan-pernyataan berikut ini:

$$\begin{aligned} 1 - \mu_I(xyz) &> 1 - \min\{a_3, 0.5\} \\ &= \text{maks}\{1 - a_3, 0.5\} \\ &\geq \text{maks}\{1 - \mu_I(z), 0.5\} \end{aligned}$$

dan

$$1-\gamma_I(xyz) \quad \leq \quad 1-\text{maks}\{b_3, 0.5\}$$
$$= \quad \min\{1-b_3, 0.5\}$$
$$\leq \quad \min\{1-\gamma_I(z), 0.5\}$$

maka terdapat $c \in (0,1]$ dan $d \in [0,1)$, sedemikian sehingga:

$$1-\mu_I(xyz) \geq c > \text{maks}\{1-\mu_I(z), 0.5\}, \text{ dan}$$
$$1-\gamma_I(xyz) \leq d < \min\{1-\gamma(z), 0.5\} \quad (4.1)$$

Dari pernyataan (4.1) sebelumnya, diketahui $\mu_I(z)+c>1$ dan $\gamma_I(z)+d<1$, yakni terdapat $z \in T$, sedemikian sehingga $z_{(c,d)}qI$. Karena $I=(\mu_I,\gamma_I)$ adalah sebuah ideal $(q, \epsilon \vee q)$-IF, maka $xyz_{(c,d)} \epsilon \vee qI$, tetapi berdasarkan pernyataan (4.1) di atas, $\mu_I(xyz)+c \leq 1$, $\gamma_I(xyz)+d \geq 1$, $\mu_I(xyz) \leq 1-c < 1-0.5 \leq c$ dan $\gamma_I(xyz) \geq 1-d \geq 1-0.5 \geq d$. Dengan demikian $z_{(c,d)}\, \bar{\epsilon}\, I$ dan $z_{(c,d)}\bar{q}I$, dengan kata lain $z_{(c,d)}\, \overline{\epsilon \vee q}I$, hal ini kontradiksi sebab diketahui $z_{(c,d)} \epsilon \vee qI$.

Kedua, akan dibuktikan dengan menggunakan metode kontradiksi bahwa untuk $I=(\mu_I,\gamma_I)$ berlaku sebagai berikut:

$$x_{(a_1,b_1)} \epsilon I, y_{(a_2,b_2)} \epsilon I, z_{(a_3,b_3)} \epsilon I$$
$$\rightarrow xyz_{(\min\{a_1,a_2,a_3\}, maks\{b_1,b_2,b_3\})} \epsilon \vee qI$$

Untuk memudahkan penulisan $g=\min\{a_1,a_2,a_3\}$ dan $h=maks\{b_1,b_2,b_3\}$

Andaikan $I=(\mu_I,\gamma_I)$ adalah sebuah IFS di T dengan fungsi keanggotaan μ_I dan fungsi non-keanggotaan γ_I, tetapi $I=(\mu_I,\gamma_I)$ bukan merupakan sebuah ideal $(q, \epsilon \vee q)$-IF kiri dari T. Oleh karena itu, terdapat $x,y,z \in T$, $a_1,a_2,a_3 \in (0,1]$ dan $b_1,b_2,b_3 \in [0,1)$, sedemikian sehingga $x_{(a_1,b_1)} \epsilon I$, $y_{(a_2,b_2)} \epsilon I$, $z_{(a_3,b_3)} \epsilon I$, namun $xyz_{(g,h)}\, \overline{\epsilon \vee q}I$. Berdasarkan Definisi

2.2.3 tentang IFP, maka $\mu_I(xyz) \leq g$, $\gamma_I(xyz) \geq h$ dan $\mu_I(xyz) + g \leq 1, \gamma_I(xyz) + h \geq 1$, sehingga $\mu_I(xyz) < \min\{0.5, g\}$ dan $\gamma_I(xyz) > \text{maks}\{0.5, h\}$. Dengan demikian pernyataan-pernyataan ini berlaku:

$$\begin{aligned} 1 - \mu_I(xyz) &> 1 - \min\{\min\{a_1, a_2, a_3\}, 0.5\} \\ &= 1 - \min\{a_1, a_2, a_3, 0.5\} \\ &= \text{maks}\{1 - a_1, 1 - a_2, 1 - a_3, 0.5\} \\ &\geq \text{maks}\{1 - \mu_I(x), 1 - \mu_I(y), 1 - \mu_I(x), 0.5\} \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} 1 - \gamma_I(xyz) &< 1 - \text{maks}\{\text{maks}\{b_1, b_2, b_3\}, 0.5\} \\ &= 1 - \text{maks}\{a_1, a_2, a_3, 0.5\} \\ &= \min\{1 - b_1, 1 - b_2, 1 - b_3, 0.5\} \\ &\leq \min\{1 - \gamma_I(x), 1 - \gamma_I(y), 1 - \gamma_I(x), 0.5\} \end{aligned}$$

Maka terdapat $r \in (0,1]$ dan $s \in [0,1)$, sedemikian sehingga:

$$\begin{gathered} 1 - \mu_I(xyz) \geq r > \text{maks}\{1 - \mu_I(x), 1 - \mu_I(y), 1 - \mu_I(x), 0.5\} \\ 1 - \gamma_I(xyz) \leq s < \min\{1 - \gamma_I(x), 1 - \gamma_I(y), 1 - \gamma_I(x), 0.5\} \end{gathered} \quad (4.2)$$

Misal $\mu_I(u) = \min\{\mu_I(x), \mu_I(y), \mu_I(z)\}$, $\gamma_I(u) = maks\{\gamma_I(x), \gamma_I(y), \gamma_I(z)\}$. Dari pernyataan (4.2) diketahui $\mu_I(u) + r > 1$ dan $\gamma_I(u) + s < 1$, yakni terdapat $u \in T$, sedemikian sehingga $u_{(r,s)} qI$. Karena $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah sebuah ideal $(q, \epsilon \vee q)$-IF, maka $xyz_{(r,s)}\ \epsilon \vee qI$, tetapi berdasarkan pernyataan (4.2) di atas, $\mu_I(xyz) + c \leq 1, \gamma_I(xyz) + d \geq 1$ dan $\mu_I(xyz) \leq 1 - r < 1 - 0.5 \leq r$, $\gamma_I(xyz) \geq 1 - s \geq 1 - 0.5 \geq s$. Sehingga $u_{(r,s)}\ \bar{\epsilon}\, I$ dan $u_{(r,s)} \bar{q} I$, dengan kata lain $u_{(r,s)}\ \overline{\epsilon \vee q} I$, hal ini kontradiksi sebab diketahui $u_{(r,s)}\ \epsilon \vee qI$. Dengan demikian terbukti bahwa $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah sebuah ideal $(\epsilon, \epsilon \vee q)$-IF kiri dari T.

Selanjutnya, untuk pembuktian $I(\mu_I, \gamma_I)$ adalah ideal $(\epsilon, \epsilon \vee q)$-IF lateral dan kanan dalam T, akan dilakukan cara yang sama seperti di atas:

(2) $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah sebuah ideal $(q, \epsilon \vee q)$-IF lateral dari T

Diketahui $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah sebuah ideal $(q, \epsilon \vee q)$-IF lateral dari T, sehingga untuk setiap $x, y, z \in T$ dan untuk setiap $a_1, a_2, a_3 \in (0,1]$ dan $b_1, b_2, b_3 \in [0,1)$ berlaku:

$$x_{(a_1,b_1)} qI, y_{(a_2,b_2)} qI, z_{(a_3,b_3)} qI$$

$$\rightarrow xyz_{(\min\{a_1,a_2,a_3\}, maks\{b_1,b_2,b_3\})} \epsilon \vee qI$$

dan

$$y_{(a_2,b_2)} q\, I \rightarrow xyz_{(a_3,b_3)}\, \epsilon \vee qI$$

Pertama akan dibuktikan menggunakan kontradiksi, bahwa untuk $I = (\mu_I(y), \gamma_I(y))$ berlaku $y_{(a_2,b_2)}\, \epsilon\, I \rightarrow xyz_{(a_2,b_2)}\, \epsilon \vee qI$. Andaikan Andaikan $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah sebuah IFS di T dengan fungsi keanggotaan μ_I dan fungsi non-keanggotaan γ_I, tetapi $I = (\mu_I, \gamma_I)$ bukan merupakan sebuah ideal $(q, \epsilon \vee q)$-IF lateral dari T, sehingga terdapat $x, y, z \in T$, $a_1, a_2, a_3 \in (0,1]$ dan $b_1, b_2, b_3 \in [0,1)$, sedemikian sehingga $y_{(a_2,b_2)}\, \epsilon\, I$, namun $xyz_{(a_2,b_2)} \overline{\epsilon \vee qI}$. Oleh Karena itu berdasarkan Definisi 2.2.3 tentang IFP, berlaku $\mu_I(y) \geq a_3$, $\gamma_1(y) \leq b_3$, dan $\mu_I(xyz) < a_2$, $\gamma_I(xyz) > b_2$ dan $\mu_I(xyz) + a_2 \leq 1$, $\gamma_I(xyz) + b_2 \geq 1$. Jadi, $\mu_I(xyz) < 0.5$, $\gamma_I(xyz) > 0.5$, mengakibatkan $\mu_I(xyz) < \min\{a_2, 0.5\}$ dan $\gamma_I(xyz) > maks\{b_2, 0.5\}$. Dengan demikian berlaku pernyataan-pernyataan berikut ini:

$$\begin{aligned} 1 - \mu_I(xyz) &> 1 - \min\{a_2, 0.5\} \\ &= \mathrm{maks}\{1 - a_2, 0.5\} \\ &\geq \mathrm{maks}\{1 - \mu_I(y), 0.5\} \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} 1-\gamma_I(xyz) &\leq 1-\text{maks}\{b_2, 0.5\} \\ &= \min\{1-b_2, 0.5\} \\ &\leq \min\{1-\gamma_I(y), 0.5\}, \end{aligned}$$

maka terdapat $c \in (0,1]$ dan $d \in [0,1)$, sedemikian hingga:

$$\begin{aligned} &1-\mu_I(xyz) \geq c > \text{maks}\{1-\mu_I(y), 0.5\}, \text{ dan} \\ &1-\gamma_I(xyz) \leq d < \min\{1-\gamma(y), 0.5\} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Dari pernyataan (4.3) sebelumnya, diketahui $\mu_I(y)+c>1$ dan $\gamma_I(y)+d<1$, yakni terdapat $y \in T$, sedemikian sehingga $y_{(c,d)}qI$. Karena $I=(\mu_I,\gamma_I)$ adalah sebuah ideal $(q, \epsilon \vee q)$-IF, maka $xyz_{(c,d)}\, \epsilon \vee qI$, tetapi berdasarkan pernyataan (4.3) di atas, $\mu_I(xyz)+c \leq 1$, $\gamma_I(xyz)+d \geq 1$ dan $\mu_I(xyz) \leq 1-c < 1-0.5 \leq c$, $\gamma_I(xyz) \geq 1-d \geq 1-0.5 \geq d$. Dengan demikian $y_{(c,d)}\, \bar{\epsilon} I$ dan $y_{(c,d)}\bar{q}I$, dengan kata lain $y_{(c,d)}\, \overline{\epsilon \vee q}I$, hal ini kontradiksi sebab $y_{(c,d)}\, \epsilon \vee qI$.

Kedua, akan dibuktikan dengan menggunakan metode kontradiksi bahwa untuk $I=(\mu_I,\gamma_I)$ berlaku:

$$x_{(a_1,b_2)}\, \epsilon\, I, y_{(a_2,b_2)}\, \epsilon\, I, z_{(a_3,b_3)}\, \epsilon\, I$$
$$\rightarrow xyz_{(\min\{a_1,a_2,a_3\}, maks\{b_1,b_2,b_3\})}\, \epsilon \vee qI$$

Untuk memudahkan penulisan $g=\min\{a_1,a_2,a_3\}$ dan $h=maks\{b_1,b_2,b_3\}$. Andaikan $I=(\mu_I,\gamma_I)$ adalah sebuah IFS di T dengan fungsi keanggotaan μ_I dan fungsi non-keanggotaan γ_I, tetapi $I=(\mu_I,\gamma_I)$ bukan merupakan sebuah ideal $(q, \epsilon \vee q)$-IF lateral dari T. Dengan demikian terdapat $x,y,z \in T$, $a_1,a_2,a_3 \in (0,1]$ dan $b_1,b_2,b_3 \in [0,1)$, sedemikian sehingga $x_{(a_1,b_2)}\, \epsilon\, I$, $y_{(a_2,b_2)}\, \epsilon\, I$, $z_{(a_3,b_3)}\, \epsilon\, I$, namun $xyz_{(g,h)}\, \overline{\epsilon \vee q}I$. Oleh karena itu, berdasarkan Definisi 2.2.3

tentang IFP, berlaku $\mu_I(xyz) \leq g, \gamma_I(xyz) \geq h$ dan $\mu_I(xyz) + g \leq 1$, $\gamma_I(xyz) + h \geq 1$, sehingga $\mu_I(xyz) < \min\{0.5, g\}$ dan $\gamma_I(xyz) > \text{maks}\{0.5, h\}$. Dengan demikian pernyataan-pernyataan ini berlaku:

$$\begin{aligned} 1 - \mu_I(xyz) &> 1 - \min\{\min\{a_1, a_2, a_3\}, 0.5\} \\ &= 1 - \min\{a_1, a_2, a_3, 0.5\} \\ &= \text{maks}\{1 - a_1, 1 - a_2, 1 - a_3, 0.5\} \\ &\geq \text{maks}\{1 - \mu_I(x), 1 - \mu_I(y), 1 - \mu_I(x), 0.5\} \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} 1 - \gamma_I(xyz) &< 1 - \text{maks}\{\text{maks}\{b_1, b_2, b_3\}, 0.5\} \\ &= 1 - \text{maks}\{a_1, a_2, a_3, 0.5\} \\ &= \min\{1 - b_1, 1 - b_2, 1 - b_3, 0.5\} \\ &\leq \min\{1 - \gamma_I(x), 1 - \gamma_I(y), 1 - \gamma_I(x), 0.5\} \end{aligned}$$

Sehingga terdapat $r \in (0,1]$ dan $s \in [0,1)$, sedemikian hingga:

$$\begin{aligned} &1 - \mu_I(xyz) \geq r > \text{maks}\{1 - \mu_I(x), 1 - \mu_I(y), 1 - \mu_I(x), 0.5\} \\ &1 - \gamma_I(xyz) \leq s < \min\{1 - \gamma_I(x), 1 - \gamma_I(y), 1 - \gamma_I(x), 0.5\} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Misal $\mu_I(u) = \min\{\mu_I(x), \mu_I(y), \mu_I(z)\}$, $\gamma_I(u) = max\{\gamma_I(x), \gamma_I(y), \gamma_I(z)\}$. Dari pernyataan (4.4) diketahui $\mu_I(u) + r > 1$ dan $\gamma_I(u) + s < 1$, yakni terdapat $u \in T$, sedemikian sehingga $u_{(r,s)} qI$. Karena $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah sebuah ideal $(q, \epsilon \vee q)$-IF, maka $xyz_{(r,s)} \epsilon \vee qI$, tetapi berdasarkan pernyataan (4.4), $\mu_I(xyz) + c \leq 1$, $\gamma_I(xyz) + d \geq 1$ dan $\mu_I(xyz) \leq 1 - r < 1 - 0.5 \leq r$, $\gamma_I(xyz) \geq 1 - s \geq 1 - 0.5 \geq s$. Sehingga $u_{(r,s)} \bar{\epsilon} I$ dan $u_{(r,s)} \bar{q} I$, dengan kata lain $u_{(r,s)} \overline{\epsilon \vee q} I$, hal ini kontradiksi sebab diketahui $u_{(r,s)} \epsilon \vee qI$. Dengan demikian terbukti bahwa $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah sebuah ideal $(\epsilon, \epsilon \vee q)$-IF lateral dari T.

(3) $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah sebuah ideal $(q, \epsilon \vee q)$-IF kanan dari T.

Diketahui $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah sebuah ideal $(q, \epsilon \vee q)$-IF lateral dari T, sehingga untuk setiap $x, y, z \in T$ dan untuk setiap $a_1, a_2, a_3 \in (0,1]$ dan $b_1, b_2, b_3 \in [0,1)$ berlaku:

$$x_{(a_1,b_1)}qI, y_{(a_2,b_2)}qI, z_{(a_3,b_3)}qI$$
$$\rightarrow xyz_{(\min\{a_1,a_2,a_3\}, maks\{b_1,b_2,b_3\})}\ \epsilon \vee qI$$

dan

$$x_{(a_1,b_1)}qI \rightarrow xyz_{(a_1,b_1)}\ \epsilon \vee qI.$$

Pertama, akan dibuktikan menggunakan kontradiksi, bahwa untuk $I = (\mu_I(x), \gamma_I(x))$ berlaku $x_{(a_1,b_1)}\ \epsilon\ I \rightarrow xyz_{(a_1,b_1)}\ \epsilon \vee qI$. Andaikan $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah sebuah IFS di T dengan fungsi keanggotaan μ_I dan fungsi non-keanggotaan γ_I, tetapi $I = (\mu_I, \gamma_I)$ bukan merupakan sebuah ideal $(q, \epsilon \vee q)$-IF kanan dari T, sehingga terdapat $x, y, z \in T$, $a_1, a_2, a_3 \in (0,1]$ dan $b_1, b_2, b_3 \in [0,1)$, sedemikian sehingga $x_{(a_1,b_1)}\ \epsilon\ I$, namun $xyz_{(a_1,b_1)}\ \overline{\epsilon \vee q}I$. Oleh karena itu, berdasarkan Definisi 2.2.3 tentang IFP, berlaku $\mu_I(x) \geq a_1$, $\gamma_1(x) \leq b_1$, dan $\mu_I(xyz) < a_1$, $\gamma_I(xyz) > b_1$ dan $\mu_I(xyz) + a_1 \leq 1$, $\gamma_I(xyz) + b_1 \geq 1$. Dengan demikian $\mu_I(xyz) < 0.5$, $\gamma_I(xyz) > 0.5$, sehingga $\mu_I(xyz) < \min\{a_1, 0.5\}$ dan $\gamma_I(xyz) > maks\{b_1, 0.5\}$. Oleh karena itu ernyataan-pernyataan berikut ini benar:

$$\begin{aligned} 1 - \mu_I(xyz) &> 1 - \min\{a_1, 0.5\} \\ &= \text{maks}\{1 - a_1, 0.5\} \\ &\geq \text{maks}\{1 - \mu_I(x), 0.5\} \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} 1-\gamma_I(xyz) &\leq 1-\text{maks}\{b_1, 0.5\} \\ &= \min\{1-b_1, 0.5\} \\ &\leq \min\{1-\gamma_I(x), 0.5\} \end{aligned}$$

maka terdapat $c \in (0,1]$ dan $d \in [0,1)$, sedemikian hingga :

$$\begin{gathered} 1-\mu_I(xyz) \geq c > \text{maks}\{1-\mu_I(x), 0.5\}, \text{ dan} \\ 1-\gamma_I(xyz) \leq d < \min\{1-\gamma(x), 0.5\} \end{gathered} \tag{4.5}$$

Dari pernyataan (4.5) diketahui $\mu_I(x)+c>1$ dan $\gamma_I(x)+d<1$, yakni terdapat $x \in T$, sedemikian sehingga $y_{(c,d)}qI$. Karena $I=(\mu_I,\gamma_I)$ adalah sebuah ideal $(q, \epsilon \vee q)$-IF, maka $xyz_{(c,d)} \ \epsilon \vee qI$, tetapi berdasarkan pernyataan (4.5), $\mu_I(xyz)+c \leq 1, \gamma_I(xyz)+d \geq 1$ dan $\mu_I(xyz) \leq 1-c < 1-0.5 \leq c,\ \gamma_I(xyz) \geq 1-d \geq 1-0.5 \geq d$. Dengan demikian $x_{(c,d)} \ \bar{\epsilon}\, I$ dan $y_{(c,d)}\bar{q}I$, sehingga $x_{(c,d)} \ \overline{\epsilon \vee q}I$. Hal ini kontradiktif sebab diketahui $x_{(c,d)} \ \epsilon \vee qI$.

Kedua, akan dibuktikan dengan menggunakan metode kontradiksi bahwa untuk $I=(\mu_I,\gamma_I)$ berlaku sebagai berikut.

$$\begin{aligned} & x_{(a_1,b_1)} \ \epsilon\, I, y_{(a_2,b_2)} \ \epsilon\, I, z_{(a_3,b_3)} \ \epsilon\, I \\ & \qquad \to xyz_{(\min\{a_1,a_2,a_3\}, maks\{b_1,b_2,b_3\})} \ \epsilon \vee qI \end{aligned}$$

Untuk memudahkan penulisan $g=\min\{a_1,a_2,a_3\}$ dan $h=maks\{b_1,b_2,b_3\}$ Andaikan $I=(\mu_I,\gamma_I)$ bukan merupakan sebuah ideal $(q, \epsilon \vee q)$-IF kanan dari T, sehingga terdapat $x,y,z \in T$, $a_1,a_2,a_3 \in (0,1]$ dan $b_1,b_2,b_3 \in [0,1)$, sedemikian sehingga $x_{(a_1,b_2)} \ \epsilon\, I, y_{(a_2,b_2)} \ \epsilon\, I, z_{(a_3,b_3)} \ \epsilon\, I$ namun $xyz_{(g,h)} \ \overline{\epsilon \vee q}I$. Oleh karena itu, berdasarkan Definisi 2.2.3 tentang IFP, berlaku $\mu_I(xyz) \leq g, \gamma_I(xyz) \geq h$ dan $\mu_I(xyz)+g \leq 1, \gamma_I(xyz)+h \geq 1$, sehingga $\mu_I(xyz) < \min\{0.5, g\}$ dan $\gamma_I(xyz) < \text{maks}\{0.5, h\}$. Dengan demikian pernyataan-pernyataan ini berlaku:

$$\begin{aligned} 1-\mu_I(xyz) &> 1-\min\{\min\{a_1,a_2,a_3\},0.5\} \\ &= 1-\min\{a_1,a_2,a_3,0.5\} \\ &= \text{maks}\{1-a_1, 1-a_2, 1-a_3, 0.5\} \\ &\geq \text{maks}\{1-\mu_I(x), 1-\mu_I(y), 1-\mu_I(x), 0.5\} \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} 1-\gamma_I(xyz) &< 1-\text{maks}\{\text{maks}\{b_1,b_2,b_3\},0.5\} \\ &= 1-\text{maks}\{a_1,a_2,a_3,0.5\} \\ &= \min\{1-b_1, 1-b_2, 1-b_3, 0.5\} \\ &\leq \min\{1-\gamma_I(x), 1-\gamma_I(y), 1-\gamma_I(x), 0.5\} \end{aligned}$$

maka terdapat $r \in (0,1]$ dan $s \in [0,1)$, sedemikian hingga:

$$\begin{aligned} 1-\mu_I(xyz) \geq r > \text{maks}\{1-\mu_I(x), 1-\mu_I(y), 1-\mu_I(x), 0.5\} \\ 1-\gamma_I(xyz) \leq s < \min\{1-\gamma_I(x), 1-\gamma_I(y), 1-\gamma_I(x), 0.5\} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Misal $\mu_I(u) = \min\{\mu_I(x), \mu_I(y), \mu_I(z)\}, \gamma_I(u) = maks\{\gamma_I(x), \gamma_I(y), \gamma_I(z)\}$. Dari pernyataan (4.6), diketahui $\mu_I(u) + r > 1$ dan $\gamma_I(u) + s < 1$, yakni terdapat $u \in T$, sedemikian sehingga $u_{(r,s)} qI$. Karena $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah sebuah ideal $(q, \epsilon \vee q)$-IF, maka $xyz_{(r,s)}\, \epsilon \vee qI$, tetapi berdasarkan pernyataan (4.6), $\mu_I(xyz) + c \leq 1, \gamma_I(xyz) + d \geq 1$ dan $\mu_I(xyz) \leq 1 - r < 1 - 0.5 \leq r$, $\gamma_I(xyz) \geq 1 - s \geq 1 - 0.5 \geq s$. Sehingga $u_{(r,s)}\, \bar{\epsilon}\, I$ dan $u_{(r,s)} \bar{q} I$, dengan kata lain $u_{(r,s)}\, \overline{\epsilon \vee q} I$, hal ini kontradiksi sebab diketahui $u_{(r,s)}\, \epsilon \vee qI$. Dengan demikian terbukti bahwa $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah sebuah ideal $(\epsilon, \epsilon \vee q)$-IF kanan dari T.

Karena telah dibuktikan bahwa $I(\mu_I, \gamma_I)$ adalah ideal $(\epsilon, \epsilon \vee q)$-IF kiri, lateral dan kanan dalam T, maka terbukti bahwa $I(\mu_I, \gamma_I)$ adalah ideal $(\epsilon, \epsilon \vee q)$-IF dalam T. ■

Selanjutnya, berikut ini akan dipaparkan teorema-teorema yang berkaitan dengan relasi antar-tipe dari beberapa ideal (α,β)-IF dalam semigrup ternari. Kemudian akan diberikan teorema yang menggambar relasi dari ideal – ideal tersebut secara umum.

Teorema 4.2.2 $\boldsymbol{((\epsilon,\epsilon\wedge q)\rightarrow (\epsilon,\epsilon),(\epsilon,q),(\epsilon,\epsilon\vee q))}$ Jika $I=(\mu_I,\gamma_I)$ adalah sebuah ideal $(\epsilon,\epsilon\wedge q)$-IF dalam sebuah semigrup ternari T, maka $=(\mu_I,\gamma_I)$ adalah sebuah ideal (ϵ,ϵ) – IF, (ϵ,q) – IF dan $(\epsilon,\epsilon\vee q)$-IF dalam T

Bukti. Diketahui $I=(\mu_I,\gamma_I)$ adalah sebuah ideal $(\epsilon,\epsilon\wedge q)$-IF dalam sebuah semigrup ternari T. Oleh karena itu, berdasarkan Definisi 4.1.4, untuk setiap $x,y,z\in T$ dan untuk setiap $a_1,a_2,a_3\in(0,1]$ dan $b_1,b_2,b_3\in[0,1)$, berlaku sebagai berikut:

$$x_{(a_1,b_1)}\in I, y_{(a_2,b_2)}\in I, z_{(a_3,b_3)}\in I$$
$$\rightarrow xyz_{(\text{maks}\{a_1,a_2,a_3\},min\{b_1,b_2,b_3\})}\in\wedge qI$$

Misalkan $r=\text{maks}\{a_1,a_2,a_3\}$ dan $s=\ min\{b_1,b_2,b_3\}$. Berdasarkan Definisi 2.2.3, tentang definisi IFP, $xyz_{(\text{r,s})}\in\wedge qI$, berarti $xyz_{(r,s)}\in I$, dan $xyz_{(r,s)}qI$. Dengan demikian pernyataan-pernyataan berikut ini, berlaku.

(1) Untuk $xyz_{(\text{maks}\{a_1,a_2,a_3\},min\{b_1,b_2,b_3\})}\in I$, maka:

$$x_{(a_1,b_1)}\in I, y_{(a_2,b_2)}\in I, z_{(a_3,b_3)}\in I$$
$$\rightarrow xyz_{(\text{maks}\{a_1,a_2,a_3\},min\{b_1,b_2,b_3\})}\in I \tag{4.7}$$

Terbukti bahwa $I=(\mu_I,\gamma_I)$ adalah sebuah ideal $(\epsilon,\epsilon)-IF$ dalam T.

(2) Diketahui $xyz_{(\text{maks}\{a_1,a_2,a_3\},min\{b_1,b_2,b_3\})} \in I$, sehingga:

$$x_{(a_1,b_1)} \in I, y_{(a_2,b_2)} \in I, z_{(a_3,b_3)} \in I \\ \rightarrow xyz_{(\text{maks}\{a_1,a_2,a_3\},min\{b_1,b_2,b_3\})} qI \tag{4.8}$$

Telah dibuktikan bahwa $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah sebuah ideal (ϵ, q)-IF dalam T.

(3) Berdasarkan Definisi 2.2.3, tentang definisi IFP, $xyz_{(r,s)} \in \vee\, qI$ berarti $xyz_{(\text{r,s})} \in I$ atau $xyz_{(\text{r,s})} qI$. Selanjutnya, dengan mengambil contoh kasus pernyataan (4.7) atau (4.8), terbukti bahwa $xyz_{(r,s)} \in \vee\, qI$. Dengan demikian $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah sebuah ideal (ϵ, q)-IF dalam T.

Dengan demikian Teorema 4.2.2 telah terbukti.■

Teorema 4.2.3 ($(\epsilon, \epsilon) \rightarrow (\epsilon, \epsilon \vee \boldsymbol{q})$**)** Jika $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah sebuah ideal (ϵ, ϵ)-IF dalam sebuah semigrup ternari T, maka $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah ideal $(\epsilon, \epsilon \vee q)$-IF dalam T.

Bukti. Diketahui $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah sebuah ideal (ϵ, ϵ)-IF dalam sebuah semigrup ternari T. Oleh karena itu, berdasarkan Definisi 4.1.4, untuk setiap $x, y, z \in T$ dan untuk setiap $a_1, a_2, a_3 \in (0,1]$ dan $b_1, b_2, b_3 \in [0,1)$, berlaku sebagai berikut:

$$x_{(a_1,b_1)} \in I, y_{(a_2,b_2)} \in I, z_{(a_3,b_3)} \in I \\ \rightarrow xyz_{(\text{maks}\{a_1,a_2,a_3\},min\{b_1,b_2,b_3\})} \in I \tag{4.9}$$

Untuk mempermudah penulisan, misalkan $e = \text{maks}\{a_1, a_2, a_3\}$ dan $f = min\{b_1, b_2, b_3\}$. Berdasarkan **Definisi 2.2.3,** tentang definisi IFP**,** $xyz_{(\text{e},f)} \in \vee\, qI$ berarti $xyz_{(e,f)} \in I$ atau $xyz_{(e,f)} qI$. Selanjutnya, berdasarkan pernyataan (4.9), $xyz_{(e,f)} \in I$ adalah benar, sehingga $xyz_{(\mathrm{e},f)} \in \vee qI$ berlaku. Terbukti bahwa $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah sebuah ideal $(\epsilon, \epsilon \vee q)$ - IF dalam T.■

Teorema 4.2.4 ($(\epsilon, \boldsymbol{q}) \rightarrow (\epsilon, \epsilon \vee \boldsymbol{q})$**)** Jika $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah sebuah ideal (ϵ, q)-IF dalam sebuah semigrup ternari T, maka $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah ideal $(\epsilon, \epsilon \vee q)$- IF dalam T.

Bukti. Diketahui $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah sebuah ideal (ϵ, q)-IF dalam sebuah semigrup ternari T. Oleh karena itu, berdasarkan Definisi 4.1.4, untuk setiap $x, y, z \in T$ dan untuk setiap $a_1, a_2, a_3 \in (0,1]$ dan $b_1, b_2, b_3 \in [0,1)$, berlaku sebagai berikut:

$$x_{(a_1,b_1)}qI, y\_(a_2, b_2)qI, z(a_3, b_3)qI \\ \rightarrow xyz_{(\mathrm{maks}\{a_1,a_2,a_3\}, min\{b_1,b_2,b_3\})}qI \tag{4.10}$$

Misalkan $e = \mathrm{maks}\{a_1, a_2, a_3\}$ dan $f = min\{b_1, b_2, b_3\}$. Berdasarkan Definisi 2.2.3, tentang definisi IFP, $xyz_{(\mathrm{e},f)} \in \vee qI$ berarti $xyz_{(e,f)} \in I$ atau $xyz_{(e,f)}qI$. Diketahui berdasarkan pernyataan (4.10) di atas, $xyz_{(e,f)}qI$ adalah benar, sehingga $xyz_{(\mathrm{e},f)} \in \vee qI$ berlaku. Terbukti bahwa $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah sebuah ideal $(\epsilon, \epsilon \vee q)$ - IF dalam T.■

Teorema 4.2.5 ($(\epsilon \vee \boldsymbol{q}, \epsilon \wedge \boldsymbol{q}) \rightarrow (\epsilon \vee \boldsymbol{q}, \epsilon), (\epsilon \vee \boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}), (\epsilon \vee \boldsymbol{q}, \epsilon \vee \boldsymbol{q})$**)** Jika $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah sebuah ideal $(\epsilon \vee q, \epsilon \wedge q)$**-IF** dalam sebuah semigrup ternari T, maka $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah sebuah ideal $(\epsilon \vee q, \epsilon)$ – IF, $(\epsilon \vee q, q)$ – IF dan $(\epsilon \vee q, \epsilon \vee q)$ – IF dalam T

Bukti. Diketahui $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah sebuah ideal $(\epsilon \vee q, \epsilon \wedge q)$-IF dalam sebuah semigrup ternari T. Oleh karena itu, berdasarkan Definisi 4.1.4, untuk setiap $x, y, z \in T$ dan untuk setiap $a_1, a_2, a_3 \in (0,1]$ dan $b_1, b_2, b_3 \in [0,1)$, berlaku sebagai berikut:

$$x_{(a_1,b_1)} \epsilon \vee qI, y_{(a_2,b_2)} \epsilon \vee qI, z_{(a_3,b_3)} \epsilon \vee qI$$
$$\rightarrow xyz_{(\text{maks}\{a_1,a_2,a_3\}, min\{b_1,b_2,b_3\})} \epsilon \wedge qI$$

Misalkan $e = \text{maks}\{a_1, a_2, a_3\}$ dan $f = min\{b_1, b_2, b_3\}$. Berdasarkan Berdasarkan Definisi 2.2.3, tentang definisi IFP $x_{(a_1,b_1)} \epsilon \vee qI$, $y_{(a_2,b_2)} \epsilon \vee qI$, $z_{(a_3,b_3)} \epsilon \vee qI$ berarti $x_{(a_1,b_1)} \epsilon I$, $y_{(a_2,b_2)} \epsilon I$, $z_{(a_3,b_3)} \epsilon I$ atau $x_{(a_1,b_1)} qI, y_{(a_2,b_2)} qI, z_{(a_3,b_3)} qI$. Kemudian $xyz_{(e,f)} \epsilon \wedge qI$, sehingga $xyz_{(e,f)} \epsilon I$ dan $xyz_{(e,f)} qI$. Dengan demikian pernyataan - pernyataan berikut ini berlaku:

(1) Untuk $xyz_{(e,f)} \epsilon I$, maka:

$$x_{(a_1,b_1)} \epsilon \vee qI, y_{(a_2,b_2)} \epsilon \vee qI, z_{(a_3,b_3)} \epsilon \vee qI$$
$$\rightarrow xyz_{(\text{maks}\{a_1,a_2,a_3\}, min\{b_1,b_2,b_3\})} \epsilon I \tag{4.11}$$

Terbukti bahwa $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah sebuah ideal $(\epsilon \vee q, \epsilon)$-IF dalam T

(2) Diketahui $xyz_{(e,f)} \epsilon I$, sehingga:

$$x_{(a_1,b_1)} \epsilon \vee qI, y_{(a_2,b_2)} \epsilon \vee qI, z_{(a_3,b_3)} \epsilon \vee qI$$
$$\rightarrow xyz_{(\text{maks}\{a_1,a_2,a_3\}, min\{b_1,b_2,b_3\})} qI \tag{4.12}$$

Telah dibuktikan bahwa $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah sebuah ideal $(\epsilon \vee q, q) - IF$ dalam T

(3) Berdasarkan Definisi 2.2.3, tentang definisi IFP, $xyz_{(e,f)} \in \vee qI$ berarti $xyz_{(e,f)} \in I$ atau $xyz_{(e,f)} qI$. Sehingga dengan mengambil contoh kasus pernyataan (4.11) atau (4.12), maka terbukti bahwa $xyz_{(e,f)} \in \vee qI$. Dengan demikian $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah sebuah ideal $(\epsilon \vee q, \epsilon \vee q) - IF$ dalam T

Telah dibuktikan bahwa sebuah ideal $(\epsilon \vee q, \epsilon)$ – IF, $(\epsilon \vee q, q)$ – IF dan $(\epsilon \vee q, \epsilon \vee q)$ – IF dalam T, maka Teorema 4.2.5 telah terbukti. ■

Teorema 4.2.6 ($(\epsilon \vee \boldsymbol{q}, \epsilon) \rightarrow (\epsilon \vee \boldsymbol{q}, \epsilon \vee \boldsymbol{q})$) Jika $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah sebuah ideal $(\epsilon \vee q, \epsilon)$-IF dalam sebuah semigrup ternari T, maka $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah ideal $(\epsilon \vee q, \epsilon \vee q)$-IF dalam T.

Bukti. Diketahui $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah sebuah ideal $(\epsilon \vee q, \epsilon)$-IF dalam sebuah semigrup ternari T. Oleh karena itu, berdasarkan Definisi 4.1.4, untuk setiap $x, y, z \in T$ dan untuk setiap $a_1, a_2, a_3 \in (0,1]$ dan $b_1, b_2, b_3 \in [0,1)$, berlaku sebagai berikut:

$$x_{(a_1,b_1)} \in \vee qI, y_{(a_2,b_2)} \in \vee qI, z_{(a_3,b_3)} \in \vee qI \rightarrow xyz_{(\mathrm{maks}\{a_1,a_2,a_3\}, min\{b_1,b_2,b_3\})} \in I \tag{4.13}$$

Untuk mempermudah penulisan, misalkan $e = \mathrm{maks}\{a_1, a_2, a_3\}$ dan $f = min\{b_1, b_2, b_3\}$. Berdasarkan Definisi 2.2.3, tentang definisi IFP, $xyz_{(e,f)} \in \vee qI$ berarti $xyz_{(e,f)} \in I$ atau $xyz_{(e,f)} qI$. Diketahui berdasarkan pernyataan (4.13) di atas, $xyz_{(e,f)} \in I$ adalah benar, sehingga $xyz_{(e,f)} \in \vee qI$ berlaku. Terbukti bahwa $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah sebuah ideal $(\epsilon \vee q, \epsilon \vee q)$-IF dalam T. ■

Teorema 4.2.7 ($(\epsilon \vee \boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}) \rightarrow (\epsilon \vee \boldsymbol{q}, \epsilon \vee \boldsymbol{q})$) Jika $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah sebuah ideal $(\epsilon \vee q, q)$ – IF dalam sebuah semigrup ternari T, maka $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah ideal $(\epsilon \vee q, \epsilon \vee q)$ – IF dalam T.

Bukti. Diketahui $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah sebuah ideal $(\epsilon \vee q, q)$-IF dalam sebuah semigrup ternari T. Oleh karena itu, berdasarkan Definisi 4.1.4, untuk setiap $x, y, z \in T$ dan untuk setiap $a_1, a_2, a_3 \in (0,1]$ dan $b_1, b_2, b_3 \in [0,1)$, berlaku sebagai berikut:

$$x_{(a_1,b_1)} \epsilon \vee qI, y_{(a_2,b_2)} \epsilon \vee qI, z_{(a_3,b_3)} \epsilon \vee qI \rightarrow xyz_{(\text{maks}\{a_1,a_2,a_3\}, min\{b_1,b_2,b_3\})} qI \quad (4.14)$$

Misalkan $e = \text{maks}\{a_1, a_2, a_3\}$ dan $f = min\{b_1, b_2, b_3\}$. Berdasarkan Definisi 2.2.3, tentang definisi IFP, $xyz_{(\text{e},f)} \epsilon \vee qI$ berarti $xyz_{(e,f)} \epsilon I$ atau $xyz_{(e,f)} qI$. Diketahui berdasarkan pernyataan (4.14) di atas, $xyz_{(e,f)} qI$ adalah benar, sehingga $xyz_{(\text{e},f)} \epsilon \vee qI$ berlaku. Terbukti bahwa $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah sebuah ideal $(\epsilon \vee q, \epsilon \vee q)$-IF dalam T. ■

Teorema 4.2.8 ($(\epsilon \vee \boldsymbol{q}, \epsilon \vee \boldsymbol{q}) \rightarrow (\epsilon, \epsilon \vee \boldsymbol{q})$) Jika $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah sebuah ideal $(\epsilon \vee \boldsymbol{q}, \boldsymbol{q})$ – IF dalam sebuah semigrup ternari T, maka $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah ideal $(\epsilon, \epsilon \vee \boldsymbol{q})$ – IF dalam T.

Bukti. Diketahui $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah sebuah ideal $(\epsilon \vee q, q)$-IF dalam sebuah semigrup ternari T. Oleh karena itu, berdasarkan Definisi 4.1.4, untuk setiap $x, y, z \in T$ dan untuk setiap $a_1, a_2, a_3 \in (0,1]$ dan $b_1, b_2, b_3 \in [0,1)$, berlaku sebagai berikut:

$$x_{(a_1,b_2)} \epsilon \vee qI, y_{(a_2,b_2)} \epsilon \vee qI, z_{(a_3,b_3)} \epsilon \vee qI$$

$$\rightarrow xyz_{(\text{maks}\{a_1,a_2,a_3\}, min\{b_1,b_2,b_3\})} \epsilon \vee qI$$

Untuk mempermudah penulisan, misalkan $e = \text{maks}\{a_1, a_2, a_3\}$ dan $f = min\{b_1, b_2, b_3\}$. Berdasarkan Definisi 2.2.3, tentang definisi IFP, $x_{(a_1,b_1)} \epsilon \vee qI, y_{(a_2,b_2)} \epsilon \vee qI, z_{(a_3,b_3)} \epsilon \vee qI$, sehingga $x_{(a_1,b_2)}qI, y_{(a_2,b_2)}qI, z_{(a_3,b_3)}qI$ atau $x_{(a_1,b_2)} \epsilon I, y_{(a_2,b_2)} \epsilon I, z_{(a_3,b_3)} \epsilon I$, dengan demikian pembuktian ini dapat dibagi menjadi dua kasus:

(1) Kasus Pertama, jika $x_{(a_1,b_1)} \epsilon I, y_{(a_2,b_2)} \epsilon I, z_{(a_3,b_3)} \epsilon I$ berlaku maka

$$x_{(a_1,b_1)} \epsilon I, y_{(a_2,b_2)} \epsilon I, z_{(a_3,b_3)} \epsilon I$$

$$\rightarrow xyz_{(\text{maks}\{a_1,a_2,a_3\}, min\{b_1,b_2,b_3\})} \epsilon \vee qI$$

Terbukti bahwa $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah sebuah ideal $(\epsilon, \epsilon \vee q)$-IF dalam T

(2) Kasus kedua, jika $x_{(a_1,b_1)}qI, y_{(a_2,b_2)}qI, z_{(a_3,b_3)}qI$, telah dibuktikan pada Teorema 4.2.1, bahwa jika $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah sebuah ideal $(q, \epsilon \vee q)$-IF T, maka $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah ideal $(\epsilon, \epsilon \vee q)$-IF dalam T.

Dengan demikian terbukti bahwa $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah ideal $(\epsilon \vee q, \epsilon \vee q)$-IF dalam T. ■

Teorema 4.2.9 ($(\boldsymbol{q}, \epsilon \wedge \boldsymbol{q}) \rightarrow (\boldsymbol{q}, \epsilon), (\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}), (\boldsymbol{q}, \epsilon \vee \boldsymbol{q})$) Jika $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah sebuah ideal $(q, \epsilon \wedge q)$ – IF dalam sebuah semigrup ternari T, maka $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah sebuah ideal (q, ϵ) – IF, (q, q) – IF dan $(q, \epsilon \vee q)$ – IF dalam T

Bukti. Diketahui $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah sebuah ideal $(q, \epsilon \wedge q)$ - IF dalam sebuah semigrup ternari T. Oleh sebab itu, berdasarkan Definisi 4.1.4, untuk setiap $x, y, z \in T$ dan untuk setiap $a_1, a_2, a_3 \in (0,1]$ dan $b_1, b_2, b_3 \in [0,1)$, berlaku sebagai berikut:

$$x_{(a_1,b_1)}qI, y_{(a_2,b_2)}qI, z_{(a_3,b_3)}qI$$
$$\rightarrow xyz_{(\text{maks}\{a_1,a_2,a_3\},min\{b_1,b_2,b_3\})} \epsilon \wedge qI$$

Misalkan $e = \text{maks}\{a_1, a_2, a_3\}$ dan $f = min\{b_1, b_2, b_3\}$. Berdasarkan **Definisi 2.2.3,** tentang definisi IFP, $xyz_{(e,f)} \epsilon \wedge qI$ berarti $xyz_{(e,f)} \epsilon I$ dan $xyz_{(e,f)}qI$. Dengan demikian pernyataan – pernyataan berikut ini berlaku:

(1) Untuk $xyz_{(e,f)} \epsilon I$, maka:

$$x_{(a_1,b_2)}qI, y_{(a_2,b_2)}qI, z_{(a_3,b_3)}qI$$
$$\rightarrow xyz_{(\text{maks}\{a_1,a_2,a_3\},min\{b_1,b_2,b_3\})} \epsilon I \tag{4.15}$$

Terbukti bahwa $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah sebuah ideal $(q, \epsilon) - IF$ dalam T.

(2) Diketahui $xyz_{(e,f)} \epsilon I$, sehingga:

$$x_{(a_1,b_1)}qI, y_{(a_2,b_2)}qI, z_{(a_3,b_3)}qI$$
$$\rightarrow xyz_{(\text{maks}\{a_1,a_2,a_3\},min\{b_1,b_2,b_3\})}qI \tag{4.16}$$

Telah dibuktikan bahwa $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah sebuah ideal (q, q)-IF dalam T

(3) Berdasarkan Definisi 2.2.3, tentang definisi IFP, $xyz_{(e,f)} \epsilon \vee qI$ berarti $xyz_{(e,f)} \epsilon I$ atau $xyz_{(e,f)}qI$. Sehingga dengan mengambil contoh kasus pernyataan (4.15) atau (4.16), maka terbukti bahwa $xyz_{(e,f)} \epsilon \vee qI$. Dengan demikian $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah sebuah ideal $(q, \epsilon \vee q)$-IF dalam T.

Telah dibuktikan bahwa $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah sebuah ideal (q, ϵ) – IF, (q, q) – IF dan $(q, \epsilon \vee q)$ – IF, maka Teorema 4.2.9 telah terbukti.■

Teorema 4.2.10 ($(q,\epsilon) \rightarrow (q,\epsilon \vee q)$) Jika $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah sebuah ideal (q,ϵ)-IF dalam sebuah semigrup ternari T, maka $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah ideal $(q,\epsilon \vee q)$-IF dalam T.

Bukti. Diketahui $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah sebuah ideal (q,ϵ)-IF dalam sebuah semigrup ternari T. Oleh karena itu, berdasarkan Definisi 4.1.4, untuk setiap $x, y, z \in T$ dan untuk setiap $a_1, a_2, a_3 \in (0,1]$ dan $b_1, b_2, b_3 \in [0,1)$, berlaku sebagai berikut:

$$x_{(a_1,b_1)} qI, y_{(a_2,b_2)} qI, z_{(a_3,b_3)} qI \rightarrow xyz_{(\text{maks}\{a_1,a_2,a_3\}, min\{b_1,b_2,b_3\})} \in I \quad (4.17)$$

Untuk mempermudah penulisan, misalkan $e = \text{maks}\{a_1, a_2, a_3\}$ dan $f = min\{b_1, b_2, b_3\}$. Berdasarkan Definisi 2.2.3, tentang definisi IFP, $xyz_{(e,f)} \in \vee qI$ berarti $xyz_{(e,f)} \in I$ atau $xyz_{(e,f)} qI$. Jadi, berdasarkan pernyataan (4.17) di atas, $xyz_{(e,f)} \in I$ adalah benar, sehingga $xyz_{(e,f)} \in \vee qI$ berlaku. Terbukti bahwa $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah sebuah ideal $(q, \epsilon \vee q)$ - IF dalam T. ∎

Teorema 4.2.11 ($(q,q) \rightarrow (q,\epsilon \vee q)$) Jika $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah sebuah ideal (q,q) – IF dalam sebuah semigrup ternari T, maka $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah ideal $(\epsilon \vee q, \epsilon \vee q)$ – IF dalam T.

Bukti. Diketahui $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah sebuah ideal (q,q) - IF dalam sebuah semigrup ternari T. Oleh sebab itu, berdasarkan Definisi 4.1.4, untuk setiap $x, y, z \in T$ dan untuk setiap $a_1, a_2, a_3 \in (0,1]$ dan $b_1, b_2, b_3 \in [0,1)$, berlaku sebagai berikut:

$$x_{(a_1,b_2)} qI, y_{(a_2,b_2)} qI, z_{(a_3,b_3)} qI \rightarrow xyz_{(\text{maks}\{a_1,a_2,a_3\}, min\{b_1,b_2,b_3\})} qI \quad (4.18)$$

Misalkan $e = \text{maks}\{a_1, a_2, a_3\}$ dan $f = min\{b_1, b_2, b_3\}$. Berdasarkan Definisi 2.2.3, tentang definisi IFP, $xyz_{(\mathrm{e},f)} \in \vee qI$ berarti $xyz_{(e,f)} \in I$ atau $xyz_{(e,f)}qI$. Diketahui berdasarkan pernyataan (4.18) di atas, $xyz_{(e,f)}qI$ adalah benar, sehingga $xyz_{(\mathrm{e},f)} \in \vee qI$ berlaku. Terbukti bahwa $I = (\mu_I, \gamma_I)$ adalah sebuah ideal $(q, \in \vee q)$-IF dalam T.

Setelah Teorema 4.2.1 - Teorema 4.2.11 dibuktikan, berikut diberikan teorema yang menggambarkan relasi antar tipe dari ideal - ideal (α, β)-IF dalam semigrup ternari sebelumnya.

Teorema 4.2.12 Jika T adalah sebuah semigrup ternari, maka pernyataan - pernyataan berikut ini berlaku:

(1) Setiap ideal $(\epsilon, \epsilon \wedge q)$-IF dalam T adalah sebuah ideal $(\epsilon, \epsilon \vee q)$-IF, (ϵ, ϵ)-IF dan (ϵ, q)-IF dalam T. Selanjutnya, setiap ideal (ϵ, ϵ)-IF, (ϵ, q)-IF, $(\epsilon, \epsilon \wedge q)$-IF, $(\epsilon \vee q, \epsilon \vee q)$-IF dalam T adalah sebuah ideal $(\epsilon, \epsilon \vee q)$-IF dalam T. Setiap ideal $(\epsilon \vee q, \epsilon \wedge q)$-IF dalam T adalah sebuah ideal $(\epsilon \vee q, \epsilon)$-IF, $(\epsilon \vee q, q)$-IF dan $(\epsilon \vee q, \epsilon \vee q)$-IF. Terakhir, setiap ideal $(\epsilon \vee q, \epsilon)$-IF, $(\epsilon \vee q, q)$-IF, $(\epsilon \vee q, \epsilon \wedge q)$-IF dalam T adalah sebuah ideal $(\epsilon \vee q, \epsilon \vee q)$-IF dalam T.

(2) Setiap ideal $(q, \epsilon \wedge q)$-IF dalam T adalah sebuah ideal (q, ϵ)-IF, (q, q)-IF dan $(q, \epsilon \vee q)$-IF dalam T. Selanjutnya, setiap ideal (q, ϵ)-IF, (q, q)-IF, $(q, \epsilon \wedge q)$-IF dalam T adalah sebuah ideal $(q, \epsilon \vee q)$-IF dalam T.

Dengan kata lain, berikut ini adalah diagram-diagram yang menggambarkan relasi antar-tipe dari ideal (α, β)-IF dalam sebuah semigrup ternari sebagaimana yang tertera pada Teorema 4.2.12.

$$\begin{tikzcd}
(\in, \in) \arrow[dr, Rightarrow] & (\in, \in\wedge q) \arrow[l, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & (\in, q) \arrow[dl, Rightarrow] \\
& (\in, \in\vee q) & \\
& (\in\vee q, \in\vee q) \arrow[u, Rightarrow] & \\
(\in\vee q, \in) \arrow[ur, Rightarrow] & (\in\vee q, \in\wedge q) \arrow[l, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] \arrow[u, Rightarrow] & (\in\vee q, q) \arrow[ul, Rightarrow]
\end{tikzcd}$$

Gambar 4.1 **Relasi antar-tipe dari Ideal (α, β)-IF dalam T (Bag. 1)**

$$\begin{tikzcd}
(q, \in) \arrow[dr, Rightarrow] & (q, \in\wedge q) \arrow[l, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & (q, q) \arrow[dl, Rightarrow] \\
& (q, \in\vee q) &
\end{tikzcd}$$

Gambar 4.2 **Relasi antar-tipe dari Ideal (α, β)-IF dalam T (Bag. 2)**

Bukti. Berdasarkan Teorema 4.2.2 – Teorema 4.2.7, Maka dapat disimpulkan bahwa Relasi antar-ideal (α, β)-IF dalam T sesuai yang tertera pada Gambar 4.1 berlaku. Selanjutnya dengan menggunakan Teorema 4.2.8 - Teorema 4.2.11, maka dapat dibuktikan bahwa relasi pada Gambar 4.2 berlaku. Dengan demikian Teorema 4.2.12 terbukti.■

Contoh 4.2.13 Diberikan sebuah himpunan $D = \{2n \mid n \in \mathbb{N} + \{0\}\}$ merupakan sebuah semigrup ternari di bawah operasi ternari $(xyz) = x \cdot y \cdot z$, untuk semua $x, y, z \in D$, dimana $\cdot$ adalah sebuah operasi pergandaan biasa.

Selanjutnya, diberikan $G = (\mu_G, \gamma_G)$ merupakan sebuah himpunan IF di D, dengan fungsi keanggotaan dan fungsi non-keanggotaan Untuk semua $x \in D$ sebagai berikut:

$$\mu_G(x) = 1 - \left(\frac{1}{1 + 0.5 \cdot x}\right) \qquad \gamma_G(x) = \left(\frac{1}{2 + x}\right)$$

Maka $G = (\mu_G, \gamma_G)$ adalah ideal $(\epsilon \vee q, \epsilon \vee q)$-IF dalam D, sehingga $G = (\mu_G, \gamma_G)$ adalah $(q, \epsilon \vee q)$-IF dalam D.

Bukti. Diketahui sebuah himpunan $D = \{2n \mid n \in \mathbb{N} + \{0\}\}$ merupakan sebuah semigrup ternari di bawah operasi ternari $(xyz) = x \cdot y \cdot z$, untuk semua $x, y, z \in D$, dimana $\cdot$ adalah sebuah operasi pergandaan biasa. Selanjutnya, diketahui juga bahwa $G = (\mu_G, \gamma_G)$ merupakan sebuah himpunan IF di D.

Pertama, akan dibuktikan bahwa $G = (\mu_G, \gamma_G)$ adalah ideal $(\epsilon \vee q, \epsilon \vee q)$-IF dalam D, yakni untuk setiap $x, y, z \in D$ dan untuk setiap $a_1, a_2, a_3 \in (0,1]$ dan $b_1, b_2, b_3 \in [0,1)$, berlaku aksioma berikut.

$$x_{(a_1,b_1)}\alpha G, y_{(a_2,b_2)}\alpha G, z_{(a_3,b_3)}\alpha G \rightarrow xyz_{(\text{maks}\{a_1,a_2,a_3\}, min\{b_1,b_2,b_3\})}\beta G$$

Dimana $\alpha = \epsilon \vee q$ dan $\beta = \epsilon \vee q$. Berdasarkan Definisi 2.2.3, tentang definisi IFP, maka akan dibagi menjadi 2 kasus:

1. Untuk $\alpha = \epsilon$. Ambil sebarang $x, y, z \in D$, $a_1, a_2, a_3 \in (0,1]$ dan $b_1, b_2, b_3 \in [0,1)$, berdasarkan Definisi 2.2.3, tentang definisi IFP, maka $\mu_G(x) \geq a_1$, $\mu_G(y) \geq a_2$, $\mu_G(z) \geq a_3$ dan $\gamma_G(x) \geq b_1$, $\gamma_G(y) \geq b_2$, $\gamma_G(z) \geq b_3$.

   Selanjutnya, D adalah sebuah semigrup ternari, maka untuk $x, y, z \in D$

sehingga $(xyz) \in D$. Diketahui G adalah sebuah IF di D, maka $(xyz) \in G$ sehingga pernyataan berikut berlaku:

$$\mu_G((xyz)) = 1 - \left(\frac{1}{1+0.5\cdot(xyz)}\right) \text{ dan } \gamma_G((xyz)) = \left(\frac{1}{2+(xyz)}\right)$$

Selanjutnya, $x, y, z \in D$ sehingga $(xyz) = x \cdot y \cdot z \geq maks\{x, y, z\}$. Oleh karena itu, pernyataan berikut berlaku:

$$\mu_G((xyz)) \geq maks\{\mu_G(x), \mu_G(y), \mu_G(z)\} \geq maks\{a_1, a_2, a_3\}$$

$$\gamma_G((xyz)) \leq min\{\gamma_G(x), \gamma_G(y), \gamma_G(z)\} \leq min\{b_1, b_2, b_3\}$$

Dengan demikian, berdasarkan Definisi 2.2.3, tentang definisi IFP, berlaku $xyz_{(\mathrm{maks}\{a_1,a_2,a_3\}, min\{b_1,b_2,b_3\})} \epsilon G$.

2. Untuk $\alpha = q$. Ambil sebarang $x, y, z \in D$, $a_1, a_2, a_3 \in (0,1]$ dan $b_1, b_2, b_3 \in [0,1)$, berdasarkan Definisi 2.2.3, tentang definisi IFP, maka

$$\mu_G(x) + a_1 > 1,\ \mu_G(y) + a_2 > 1,\ \mu_G(z) + a_3 > 1$$

$$\gamma_G(x) + b_1 < 1,\ \gamma_G(y) + b_2 < 1,\ \gamma_G(z) + b_3 < 1$$

Sehingga

$$\mu_G(x) > 1 - a_1,\ \mu_G(y) > 1 - a_2,\ \mu_G(z) > 1 - a_3$$

$$\gamma_G(x) < 1 - b_1,\ \gamma_G(y) < 1 - b_2,\ \gamma_G(z) < 1 - b_3$$

Selanjutnya, D adalah sebuah semigrup ternari, maka untuk $x, y, z \in D$ sehingga $(xyz) \in D$. Diketahui G adalah sebuah IF di D, sehingga $(xyz) \in G$ dan pernyataan berikut berlaku:

$$\mu_G((xyz)) = 1 - \left(\frac{1}{1+0.5\cdot(xyz)}\right) \text{ dan } \gamma_G((xyz)) = \left(\frac{1}{2+(xyz)}\right)$$

Selanjutnya, $x, y, z \in D$ sehingga $(xyz) = x \cdot y \cdot z \geq maks\{x, y, z\}$. Oleh karena itu, pernyataan berikut berlaku

$$\mu_G((xyz)) \geq maks\{\mu_G(x), \mu_G(y), \mu_G(z)\} > maks\{1 - a_1, 1 - a_2, 1 - a_3\}$$

$$\gamma_G((xyz)) \leq min\{\gamma_G(x), \gamma_G(y), \gamma_G(z)\} < min\{1 - b_1, 1 - b_2, 1 - b_3\}$$

Oleh karena itu, berdasarkan Definisi 2.2.3, tentang definisi IFP, maka $xyz_{(\text{maks}\{a_1,a_2,a_3\},min\{b_1,b_2,b_3\})}qG$.

Dengan demikian telah dibuktikan bahwa jika $\alpha = \epsilon$, maka $\beta = \epsilon$ dan jika $\alpha = q$, maka $\beta = q$. Terbukti bahwa G adalah sebuah ideal $(\epsilon \vee q, \epsilon \vee q)$-IF dalam D.

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa G adalah sebuah ideal $(q, \epsilon \vee q)$-IF dalam D. Diketahui G adalah sebuah ideal $(\epsilon \vee q, \epsilon \vee q)$-IF dalam D, maka berdasarkan Teorema 4.2.12. Diketahui G adalah sebuah ideal $(q, \epsilon \vee q)$-IF dalam D.

BAB V

KESIMPULAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian dan pembahasan pada bab sebelumnya, dipaparkan kesimpulan sebagai berikut:

(1) Ideal (α,β)-*Fuzzy* Intuisionistik dan subsemigrup (α,β)-*Fuzzy* Intuisionistik dalam semigrup ternari telah dapat didefinisikan.

(2) Jika D adalah sebuah subsemigrup dari sebuah semigrup ternari T, dan $P=(\mu_P,\gamma_P)$ adalah sebuah himpunan IF, sedemikian sehingga $(\forall x \in T\backslash D)\ (\mu_P(x)=0$ dan $\gamma_P(x)=1)$ dan $(\forall x \in D)\ (\mu_P(x) \geq 0.5$ dan $\gamma_P(x) \leq 0.5)$, maka $P=(\mu_P,\gamma_P)$ adalah sebuah subsemigrup ternari $(\alpha,\epsilon \vee q)$-IF dari T.

(3) Jika R adalah sebuah ideal kiri dalam sebuah semigrup ternari T, dan $I=(\mu_I,\gamma_I)$ adalah sebuah himpunan IF, sedemikian sehingga $(\forall x \in T\backslash R)\ (\mu_I(x)=0$ dan $\gamma_I(x)=1)$ dan $(\forall x \in R)\ (\mu_I(x) \geq 0.5$ dan $\gamma_I(x) \leq 0.5)$, maka $I=(\mu_I,\gamma_I)$ adalah sebuah ideal $(\alpha,\epsilon \vee q)$-IF kiri dalam T.

(4) Jika $I=(\mu_I,\gamma_I)$ adalah sebuah ideal $(q,\epsilon \vee q)$-IF dalam sebuah semigrup ternari T, maka $I=(\mu_I,\gamma_I)$ adalah ideal $(\epsilon,\epsilon \vee q)$-IF dalam T.

(5) Jika T adalah sebuah semigrup ternari, maka setiap ideal $(\epsilon,\epsilon \wedge q)$-IF dalam T adalah sebuah ideal $(\epsilon,\epsilon \vee q)$-IF, (ϵ,ϵ)-IF dan (ϵ,q)-IF dalam T. Selanjutnya, setiap ideal (ϵ,ϵ)-IF, (ϵ,q)-IF, $(\epsilon,\epsilon \wedge q)$-IF, $(\epsilon \vee q,\epsilon \vee q)$-IF dalam T adalah sebuah ideal $(\epsilon,\epsilon \vee q)$-IF dalam T. Setiap ideal $(\epsilon \vee q,\epsilon \wedge q)$-IF dalam T adalah sebuah ideal $(\epsilon \vee q,\epsilon)$-IF, $(\epsilon \vee q,q)$-IF dan $(\epsilon \vee q,\epsilon \vee q)$-IF. Terakhir,

setiap ideal $(\epsilon \vee q, \epsilon)$-IF, $(\epsilon \vee q, q)$-IF, $(\epsilon \vee q, \epsilon \wedge q)$-IF dalam T adalah sebuah ideal $(\epsilon \vee q, \epsilon \vee q)$-IF dalam T.

(6) Jika T adalah sebuah semigrup ternari, maka setiap ideal $(q, \epsilon \wedge q)$-IF dalam T adalah sebuah ideal (q, ϵ)-IF, (q, q)-IF dan $(q, \epsilon \vee q)$-IF dalam T. Selanjutnya, setiap ideal (q, ϵ)-IF, (q, q)-IF, $(q, \epsilon \wedge q)$-IF dalam T adalah sebuah ideal $(q, \epsilon \vee q)$-IF dalam T.

5.2 Saran

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan, saran yang dapat diberikan adalah bagaimana potensi penelitian ini dapat dilanjutkan ke arah yang lebih general. Sebagaimana yang diketahui pada hasil penelitian ini, bahwa setiap ideal (α, β)-IF dalam semigrup ternari adalah sebuah subsemigrup ternari (α, β)-IF, namun tidak berlaku sebaliknya. Dengan demikian dapat dilakukan sebuah penelitian lanjutan mengenai relasi antar-tipe dari subsemigrup ternari (α, β)-IF, sehingga dapat diketahui akibat dari perluasan konsep ideal (α, β)-IF dalam semigrup ternari.

DAFTAR PUSTAKA

Abdullah, S. dan Davvas, B. dan Aslam, M., 2011. ”(α,β)-Intuitionistic Fuzzy Ideals of Hemirings”. In Computer and Mathematics with Applications 62(8):2077-3090. DOI: 10.1016/j.camwa.2011.08.021.

Abdullah, S. dan Hussain, S., 2017. ”(α,β)-Intuitionistic Fuzzy Bi-Ideals of Semigroup”. In Afrika Matematika 28:1033-1059. DOI: 10.1007/s13370-017-0501-0

Akram, M., 2012. “Intuitionistic Fuzzy Points and Ideals of Ternary Semigroup”. In International Journal of Algebra and Statistics 1: 74-82. DOI: 10.20454/ijas.2012.392.

Aslam, M. dan Abdullah, S. dan Amin, N., 2012. “Characterization of gamma LA-Semigroup by Generalized Fuzzy Gamma Ideals”. In International Jounal of Mathematics and Statistics 12(1):29-50. DOI: 10.1007/s13370-012-0130-6.

Atanassov, K. T., 1986. “Intuitionistic Fuzzy Sets”. In Fuzzy Sets and Systems 20:87-96. DOI: 10.1016/S0165-0114(86)80034-3.

Bhakat, S. K. dan Das, P., 1996. “$(\epsilon,\epsilon \vee q)$-Fuzzy Subgrup”. In Fuzzy Sets and System 80:359-368. DOI: 10.1016/0165-0114(95)00157-3.

Bhattacharya, P. B., et al., 1995. *Basic Abstract Algebra*. Edisi Kedua. New York: Cambridge University Press.

Davvas, B. dan Zeb, A. dan Khan, A., 2013. “On (α,β)-Fuzzy Ideals of Ternary Semigroup”. In Journal of the Indonesian Mathematical Society 19(2):123-138. DOI: 10.22342/jims.19.2.120.123-138.

Kar, S. dan Maity, B. K., 2011. “Some Ideals of Ternary Semigroups”. In Analete Stiintifice Ale Universitia “Al. I. Cuza” Din Iasi (S.N) Matematica 57:247-258. DOI: 10.2478/v10157-011-0024-1.

Kim K. H. dan Lee, J.G., 2005. “On Intuitionistic Fuzzy Bi-Ideals of Semigroups”. In Turkish Journal of Mathematics 29:201-210. Melalui: https://dergipark.org.tr/en/download/article-file/127548 [11/8/20].

Lehmer, D. H., 1932. “A Ternary Analogue of Abelian Groups”. In the American Journal of Mathematics. Hal. 329-338, 1932. DOI: 10.2307/2370997.

Los, J., 1955. “On the Extending of Models I”. In Fundamenta Mathematicae 42:38-54. DOI: 10.2307/2963709

Muhiuddin, G. dan Al-Roqi, A. M., 2016. “Classification of (α, β)-Fuzzy Ideals in BCK/BCI-Algebra”. Journal of Mathematical Analysis 7(6):89-96. Melalui: https://www.researchgate.net/publication/319748532_CLASSIFICATIONS_OF_a_b-FUZZY_IDEALS_IN_BCKBCI-ALGEBRAS [11/08/20].

Morali, V., 2004. “Fuzzy Points of Equivalent Fuzzy Subset”. In Information Sciences 158:277-278. DOI: 10.1016/j.ins.2003.07.008

Nasser-uddin, 1970. “The Ternary Operation $(a, b, c)\theta = abc$ and its Application in Group Theory. In Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 19(3): 327—333, 1993. DOI: 10.1007/bf02845963

Pu, P. M. dan Liu, M., 1980. “Fuzzy Topology I: Neighbourhood Structure of a Fuzzy Point and Moore-Smith Convergence”. In Journal of Mathematical Analysis and Applications 76:571-599. DOI: 10.1016/0022-247X(80)90048-7.

Zadeh, L. A., 1965. “Fuzzy Sets”. In Inform and Control 8:338-353. DOI: 10.1016/S0019-9958(65)90241-X

Lampiran A-1. Pembuktian Contoh 2.3.10

Untuk semua $a, b, c, d, e \in X$, dengan $[abc] = a * b * c$, dimana $*$ adalah sebuah operasi biner seperti yang tertera pada **Tabel 2.1,** akan dibuktikan $[abc]de = ab[cde]$.

a	b	c	c	e	$[abc]de$	$ab[cde]$	$[abc]de = ab[cde]$
1	1	1	1	1	1	1	Ya
2	1	1	1	1	1	1	Ya
3	1	1	1	1	1	1	Ya
1	2	1	1	1	1	1	Ya
2	2	1	1	1	1	1	Ya
3	2	1	1	1	1	1	Ya
1	3	1	1	1	1	1	Ya
2	3	1	1	1	1	1	Ya
3	3	1	1	1	1	1	Ya
1	1	2	1	1	1	1	Ya
2	1	2	1	1	1	1	Ya
3	1	2	1	1	1	1	Ya
1	2	2	1	1	1	1	Ya
2	2	2	1	1	1	1	Ya
3	2	2	1	1	1	1	Ya
1	3	2	1	1	1	1	Ya
2	3	2	1	1	1	1	Ya
3	3	2	1	1	1	1	Ya
1	1	3	1	1	1	1	Ya
2	1	3	1	1	1	1	Ya
3	1	3	1	1	1	1	Ya
1	2	3	1	1	1	1	Ya
2	2	3	1	1	1	1	Ya
3	2	3	1	1	1	1	Ya
1	3	3	1	1	1	1	Ya
2	3	3	1	1	1	1	Ya
3	3	3	1	1	1	1	Ya
1	1	1	2	1	1	1	Ya
2	1	1	2	1	1	1	Ya
3	1	1	2	1	1	1	Ya
1	2	1	2	1	1	1	Ya
2	2	1	2	1	1	1	Ya
3	2	1	2	1	1	1	Ya
1	3	1	2	1	1	1	Ya

2	3	1	2	1	1	1	Ya
3	3	1	2	1	1	1	Ya
1	1	2	2	1	1	1	Ya
2	1	2	2	1	1	1	Ya
3	1	2	2	1	1	1	Ya
1	2	2	2	1	1	1	Ya
2	2	2	2	1	1	1	Ya
3	2	2	2	1	1	1	Ya
1	3	2	2	1	1	1	Ya
2	3	2	2	1	1	1	Ya
3	3	2	2	1	1	1	Ya
1	1	3	2	1	1	1	Ya
2	1	3	2	1	1	1	Ya
3	1	3	2	1	1	1	Ya
1	2	3	2	1	1	1	Ya
2	2	3	2	1	1	1	Ya
3	2	3	2	1	1	1	Ya
1	3	3	2	1	1	1	Ya
2	3	3	2	1	1	1	Ya
3	3	3	2	1	1	1	Ya
1	1	1	3	1	1	1	Ya
2	1	1	3	1	1	1	Ya
3	1	1	3	1	1	1	Ya
1	2	1	3	1	1	1	Ya
2	2	1	3	1	1	1	Ya
3	2	1	3	1	1	1	Ya
1	3	1	3	1	1	1	Ya
2	3	1	3	1	1	1	Ya
3	3	1	3	1	1	1	Ya
1	1	2	3	1	1	1	Ya
2	1	2	3	1	1	1	Ya
3	1	2	3	1	1	1	Ya
1	2	2	3	1	1	1	Ya
2	2	2	3	1	1	1	Ya
3	2	2	3	1	1	1	Ya
1	3	2	3	1	1	1	Ya
2	3	2	3	1	1	1	Ya
3	3	2	3	1	1	1	Ya
1	1	3	3	1	1	1	Ya
2	1	3	3	1	1	1	Ya
3	1	3	3	1	1	1	Ya
1	2	3	3	1	1	1	Ya
2	2	3	3	1	1	1	Ya
3	2	3	3	1	1	1	Ya
1	3	3	3	1	1	1	Ya
2	3	3	3	1	1	1	Ya

3	3	3	3	1	1	1	Ya
1	1	1	1	2	1	1	Ya
2	1	1	1	2	1	1	Ya
3	1	1	1	2	1	1	Ya
1	2	1	1	2	1	1	Ya
2	2	1	1	2	1	1	Ya
3	2	1	1	2	1	1	Ya
1	3	1	1	2	1	1	Ya
2	3	1	1	2	1	1	Ya
3	3	1	1	2	1	1	Ya
1	1	2	1	2	1	1	Ya
2	1	2	1	2	1	1	Ya
3	1	2	1	2	1	1	Ya
1	2	2	1	2	1	1	Ya
2	2	2	1	2	1	1	Ya
3	2	2	1	2	1	1	Ya
1	3	2	1	2	1	1	Ya
2	3	2	1	2	1	1	Ya
3	3	2	1	2	1	1	Ya
1	1	3	1	2	1	1	Ya
2	1	3	1	2	1	1	Ya
3	1	3	1	2	1	1	Ya
1	2	3	1	2	1	1	Ya
2	2	3	1	2	1	1	Ya
3	2	3	1	2	1	1	Ya
1	3	3	1	2	1	1	Ya
2	3	3	1	2	1	1	Ya
3	3	3	1	2	1	1	Ya
1	1	1	2	2	1	1	Ya
2	1	1	2	2	1	1	Ya
3	1	1	2	2	1	1	Ya
1	2	1	2	2	1	1	Ya
2	2	1	2	2	1	1	Ya
3	2	1	2	2	1	1	Ya
1	3	1	2	2	1	1	Ya
2	3	1	2	2	1	1	Ya
3	3	1	2	2	1	1	Ya
1	1	2	2	2	1	1	Ya
2	1	2	2	2	1	1	Ya
3	1	2	2	2	1	1	Ya
1	2	2	2	2	1	1	Ya
2	2	2	2	2	2	2	Ya
3	2	2	2	2	2	2	Ya
1	3	2	2	2	1	1	Ya
2	3	2	2	2	2	2	Ya
3	3	2	2	2	2	2	Ya

1	1	3	2	2	1	1	Ya
2	1	3	2	2	1	1	Ya
3	1	3	2	2	1	1	Ya
1	2	3	2	2	1	1	Ya
2	2	3	2	2	2	2	Ya
3	2	3	2	2	2	2	Ya
1	3	3	2	2	1	1	Ya
2	3	3	2	2	2	2	Ya
3	3	3	2	2	2	2	Ya
1	1	1	3	2	1	1	Ya
2	1	1	3	2	1	1	Ya
3	1	1	3	2	1	1	Ya
1	2	1	3	2	1	1	Ya
2	2	1	3	2	1	1	Ya
3	2	1	3	2	1	1	Ya
1	3	1	3	2	1	1	Ya
2	3	1	3	2	1	1	Ya
3	3	1	3	2	1	1	Ya
1	1	2	3	2	1	1	Ya
2	1	2	3	2	1	1	Ya
3	1	2	3	2	1	1	Ya
1	2	2	3	2	1	1	Ya
2	2	2	3	2	2	2	Ya
3	2	2	3	2	2	2	Ya
1	3	2	3	2	1	1	Ya
2	3	2	3	2	2	2	Ya
3	3	2	3	2	2	2	Ya
1	1	3	3	2	1	1	Ya
2	1	3	3	2	1	1	Ya
3	1	3	3	2	1	1	Ya
1	2	3	3	2	1	1	Ya
2	2	3	3	2	2	2	Ya
3	2	3	3	2	2	2	Ya
1	3	3	3	2	1	1	Ya
2	3	3	3	2	2	2	Ya
3	3	3	3	2	2	2	Ya
1	1	1	1	3	1	1	Ya
2	1	1	1	3	1	1	Ya
3	1	1	1	3	1	1	Ya
1	2	1	1	3	1	1	Ya
2	2	1	1	3	1	1	Ya
3	2	1	1	3	1	1	Ya
1	3	1	1	3	1	1	Ya
2	3	1	1	3	1	1	Ya
3	3	1	1	3	1	1	Ya
1	1	2	1	3	1	1	Ya

2	1	2	1	3	1	1	Ya
3	1	2	1	3	1	1	Ya
1	2	2	1	3	1	1	Ya
2	2	2	1	3	1	1	Ya
3	2	2	1	3	1	1	Ya
1	3	2	1	3	1	1	Ya
2	3	2	1	3	1	1	Ya
3	3	2	1	3	1	1	Ya
1	1	3	1	3	1	1	Ya
2	1	3	1	3	1	1	Ya
3	1	3	1	3	1	1	Ya
1	2	3	1	3	1	1	Ya
2	2	3	1	3	1	1	Ya
3	2	3	1	3	1	1	Ya
1	3	3	1	3	1	1	Ya
2	3	3	1	3	1	1	Ya
3	3	3	1	3	1	1	Ya
1	1	1	2	3	1	1	Ya
2	1	1	2	3	1	1	Ya
3	1	1	2	3	1	1	Ya
1	2	1	2	3	1	1	Ya
2	2	1	2	3	1	1	Ya
3	2	1	2	3	1	1	Ya
1	3	1	2	3	1	1	Ya
2	3	1	2	3	1	1	Ya
3	3	1	2	3	1	1	Ya
1	1	2	2	3	1	1	Ya
2	1	2	2	3	1	1	Ya
3	1	2	2	3	1	1	Ya
1	2	2	2	3	1	1	Ya
2	2	2	2	3	2	2	Ya
3	2	2	2	3	2	2	Ya
1	3	2	2	3	1	1	Ya
2	3	2	2	3	2	2	Ya
3	3	2	2	3	2	2	Ya
1	1	3	2	3	1	1	Ya
2	1	3	2	3	1	1	Ya
3	1	3	2	3	1	1	Ya
1	2	3	2	3	1	1	Ya
2	2	3	2	3	2	2	Ya
3	2	3	2	3	2	2	Ya
1	3	3	2	3	1	1	Ya
2	3	3	2	3	2	2	Ya
3	3	3	2	3	2	2	Ya
1	1	1	3	3	1	1	Ya
2	1	1	3	3	1	1	Ya

3	1	1	3	3	1	1	Ya
1	2	1	3	3	1	1	Ya
2	2	1	3	3	1	1	Ya
3	2	1	3	3	1	1	Ya
1	3	1	3	3	1	1	Ya
2	3	1	3	3	1	1	Ya
3	3	1	3	3	1	1	Ya
1	1	2	3	3	1	1	Ya
2	1	2	3	3	1	1	Ya
3	1	2	3	3	1	1	Ya
1	2	2	3	3	1	1	Ya
2	2	2	3	3	2	2	Ya
3	2	2	3	3	2	2	Ya
1	3	2	3	3	1	1	Ya
2	3	2	3	3	2	2	Ya
3	3	2	3	3	2	2	Ya
1	1	3	3	3	1	1	Ya
2	1	3	3	3	1	1	Ya
3	1	3	3	3	1	1	Ya
1	2	3	3	3	1	1	Ya
2	2	3	3	3	2	2	Ya
3	2	3	3	3	2	2	Ya
1	3	3	3	3	1	1	Ya
2	3	3	3	3	2	2	Ya
3	3	3	3	3	3	3	Ya

Lampiran A-2. Pembuktian Contoh 2.3.12

Untuk semua $a, b \in X$, $i \in I$ dengan $[abi] = a * b * i$, dimana $*$ adalah sebuah operasi biner seperti yang tertera pada **Tabel 2.1,** akan dibuktikan $[abi] = [aib] = [iab]$.

a	b	i	$[abi]$	$[aib]$	$[iab]$	$[abi] = [aib] = [iba]$
1	1	1	1	1	1	Ya
2	1	1	1	1	1	Ya
3	1	1	1	1	1	Ya
1	2	1	1	1	1	Ya
2	2	1	1	1	1	Ya
3	2	1	1	1	1	Ya
1	3	1	1	1	1	Ya
2	3	1	1	1	1	Ya
3	3	1	1	1	1	Ya
1	1	2	1	1	1	Ya
2	1	2	1	1	1	Ya
3	1	2	1	1	1	Ya
1	2	2	1	1	1	Ya
2	2	2	2	2	2	Ya
3	2	2	2	2	2	Ya
1	3	2	1	1	1	Ya
2	3	2	2	2	2	Ya
3	3	2	2	2	2	Ya

Lampiran A-3. Pembuktian Contoh 2.3.14

Untuk semua $j, k, l \in P$, dengan $[jkl] = j * k * l$, dimana $*$ adalah sebuah operasi biner seperti yang tertera pada **Tabel 2.1,** akan dibuktikan bahwa $[jkl] \in P$.

j	k	l	$[jkl]$	$[jkl] \in P$
2	2	2	2	Ya
3	2	2	2	Ya
2	3	2	2	Ya
3	3	2	2	Ya
2	2	3	2	Ya
3	2	3	2	Ya
2	3	3	2	Ya
3	3	3	3	Ya

Lampiran A-4. Pembuktian Contoh 2.4.2

Pada lampiran ini, akan dibuktikan untuk setiap $a, b, c \in T$, berlaku $f(abc) \geq \min(f(a), f(b), f(c))$.

a	b	c	abc	$f(a)$	$f(b)$	$f(c)$	$f(abc)$	$min\{f(a), f(b), f(c)\}$	$f(abc) \geq min(f(a), f(b), f(c)$
1	1	1	1	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	Ya
2	1	1	1	0.7	0.8	0.8	0.8	0.7	Ya
3	1	1	1	0.6	0.8	0.8	0.8	0.6	Ya
1	2	1	1	0.8	0.7	0.8	0.8	0.7	Ya
2	2	1	1	0.7	0.7	0.8	0.8	0.7	Ya
3	2	1	1	0.6	0.7	0.8	0.8	0.6	Ya
1	3	1	1	0.8	0.6	0.8	0.8	0.6	Ya
2	3	1	1	0.7	0.6	0.8	0.8	0.6	Ya
3	3	1	1	0.6	0.6	0.8	0.8	0.6	Ya
1	1	2	1	0.8	0.8	0.7	0.8	0.7	Ya
2	1	2	1	0.7	0.8	0.7	0.8	0.7	Ya
3	1	2	1	0.6	0.8	0.7	0.8	0.6	Ya
1	2	2	1	0.8	0.7	0.7	0.8	0.7	Ya
2	2	2	2	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	Ya
3	2	2	2	0.6	0.7	0.7	0.7	0.6	Ya
1	3	2	1	0.8	0.6	0.7	0.8	0.6	Ya
2	3	2	2	0.7	0.6	0.7	0.7	0.6	Ya
3	3	2	2	0.6	0.6	0.7	0.7	0.6	Ya
1	1	3	1	0.8	0.8	0.6	0.8	0.6	Ya
2	1	3	1	0.7	0.8	0.6	0.8	0.6	Ya
3	1	3	1	0.6	0.8	0.6	0.8	0.6	Ya
1	2	3	1	0.8	0.7	0.6	0.8	0.6	Ya
2	2	3	2	0.7	0.7	0.6	0.7	0.6	Ya
3	2	3	2	0.6	0.7	0.6	0.7	0.6	Ya
1	3	3	1	0.8	0.6	0.6	0.8	0.6	Ya
2	3	3	2	0.7	0.6	0.6	0.7	0.6	Ya
3	3	3	3	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	Ya

Lampiran A-5. Pembuktian Contoh 2.4.4

Pada lampiran ini, akan dibuktikan untuk setiap $a, b, c \in T$, berlaku $g(abc) \geq g(c)$, $g(abc) \geq g(b)$ dan $g(abc) \geq g(a)$.

a	b	c	abc	$g(a)$	$g(b)$	$g(c)$	$g(abc)$	$g(abc) \geq g(a)$	$g(abc) \geq g(b)$	$g(abc) \geq g(c)$
1	1	1	1	0.9	0.9	0.9	0.9	Ya	Ya	Ya
2	1	1	1	0.8	0.9	0.9	0.9	Ya	Ya	Ya
3	1	1	1	0.7	0.9	0.9	0.9	Ya	Ya	Ya
1	2	1	1	0.9	0.8	0.9	0.9	Ya	Ya	Ya
2	2	1	1	0.8	0.8	0.9	0.9	Ya	Ya	Ya
3	2	1	1	0.7	0.8	0.9	0.9	Ya	Ya	Ya
1	3	1	1	0.9	0.7	0.9	0.9	Ya	Ya	Ya
2	3	1	1	0.8	0.7	0.9	0.9	Ya	Ya	Ya
3	3	1	1	0.7	0.7	0.9	0.9	Ya	Ya	Ya
1	1	2	1	0.9	0.9	0.8	0.9	Ya	Ya	Ya
2	1	2	1	0.8	0.9	0.8	0.9	Ya	Ya	Ya
3	1	2	1	0.7	0.9	0.8	0.9	Ya	Ya	Ya
1	2	2	1	0.9	0.8	0.8	0.9	Ya	Ya	Ya
2	2	2	2	0.8	0.8	0.8	0.8	Ya	Ya	Ya
3	2	2	2	0.7	0.8	0.8	0.8	Ya	Ya	Ya
1	3	2	1	0.9	0.7	0.8	0.9	Ya	Ya	Ya
2	3	2	2	0.8	0.7	0.8	0.8	Ya	Ya	Ya
3	3	2	2	0.7	0.7	0.8	0.8	Ya	Ya	Ya
1	1	3	1	0.9	0.9	0.7	0.9	Ya	Ya	Ya
2	1	3	1	0.8	0.9	0.7	0.9	Ya	Ya	Ya
3	1	3	1	0.7	0.9	0.7	0.9	Ya	Ya	Ya
1	2	3	1	0.9	0.8	0.7	0.9	Ya	Ya	Ya
2	2	3	2	0.8	0.8	0.7	0.8	Ya	Ya	Ya
3	2	3	2	0.7	0.8	0.7	0.8	Ya	Ya	Ya
1	3	3	1	0.9	0.7	0.7	0.9	Ya	Ya	Ya
2	3	3	2	0.8	0.7	0.7	0.8	Ya	Ya	Ya
3	3	3	3	0.7	0.7	0.7	0.7	Ya	Ya	Ya

Lampiran A-6. Pembuktian Contoh 2.5.2

Pada lampiran ini akan dibuktikan bahwa untuk semua $a, b, c \in T$ berlaku bahwa $\mu_P(abc) \geq \min(\mu_P(a), \mu_P(b), \mu_P(c))$, $\gamma_P(abc) \leq \max(\gamma_P(a), \gamma_P(b), \gamma_P(c))$. Lampiran ini disajikan dalam dua tabel, pertama untuk membuktikan $\mu_P(abc) \geq \min(\mu_P(a), \mu_P(b), \mu_P(c))$ untuk semua $a, b, c \in T$.

a	b	c	abc	$\mu_P(a)$	$\mu_P(b)$	$\mu_P(b)$	$\mu_P(abc)$	$\min\begin{Bmatrix}\mu_P(a),\\ \mu_P(b),\\ \mu_P(c)\end{Bmatrix}$	$\mu_P(abc) \geq \min\begin{Bmatrix}\mu_P(a),\\ \mu_P(b),\\ \mu_P(c)\end{Bmatrix}$
1	1	1	1	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	Ya
2	1	1	1	0.7	0.8	0.8	0.8	0.7	Ya
3	1	1	1	0.6	0.8	0.8	0.8	0.6	Ya
1	2	1	1	0.8	0.7	0.8	0.8	0.7	Ya
2	2	1	1	0.7	0.7	0.8	0.8	0.7	Ya
3	2	1	1	0.6	0.7	0.8	0.8	0.6	Ya
1	3	1	1	0.8	0.6	0.8	0.8	0.6	Ya
2	3	1	1	0.7	0.6	0.8	0.8	0.6	Ya
3	3	1	1	0.6	0.6	0.8	0.8	0.6	Ya
1	1	2	1	0.8	0.8	0.7	0.8	0.7	Ya
2	1	2	1	0.7	0.8	0.7	0.8	0.7	Ya
3	1	2	1	0.6	0.8	0.7	0.8	0.6	Ya
1	2	2	1	0.8	0.7	0.7	0.8	0.7	Ya
2	2	2	2	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	Ya
3	2	2	2	0.6	0.7	0.7	0.7	0.6	Ya
1	3	2	1	0.8	0.6	0.7	0.8	0.6	Ya
2	3	2	2	0.7	0.6	0.7	0.7	0.6	Ya
3	3	2	2	0.6	0.6	0.7	0.7	0.6	Ya
1	1	3	1	0.8	0.8	0.6	0.8	0.6	Ya
2	1	3	1	0.7	0.8	0.6	0.8	0.6	Ya
3	1	3	1	0.6	0.8	0.6	0.8	0.6	Ya
1	2	3	1	0.8	0.7	0.6	0.8	0.6	Ya
2	2	3	2	0.7	0.7	0.6	0.7	0.6	Ya
3	2	3	2	0.6	0.7	0.6	0.7	0.6	Ya
1	3	3	1	0.8	0.6	0.6	0.8	0.6	Ya
2	3	3	2	0.7	0.6	0.6	0.7	0.6	Ya
3	3	3	3	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	Ya

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa $\gamma_P(abc) \leq \max\big(\gamma_P(a), \gamma_P(b), \gamma_P(c)\big)$ untuk semua $a, b, c \in T$.

a	b	c	abc	$\gamma_P(a)$	$\gamma_P(a)$	$\gamma_P(a)$	$\gamma_P(abc)$	$\max\left\{\begin{matrix}\gamma_P(a),\\ \gamma_P(b),\\ \gamma_P(c)\end{matrix}\right\}$	$\gamma_P(abc) \leq \max\left\{\begin{matrix}\gamma_P(a),\\ \gamma_P(b),\\ \gamma_P(c)\end{matrix}\right\}$
1	1	1	1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	Ya
2	1	1	1	0.2	0.1	0.1	0.1	0.2	Ya
3	1	1	1	0.3	0.1	0.1	0.1	0.3	Ya
1	2	1	1	0.1	0.2	0.1	0.1	0.2	Ya
2	2	1	1	0.2	0.2	0.1	0.1	0.2	Ya
3	2	1	1	0.3	0.2	0.1	0.1	0.3	Ya
1	3	1	1	0.1	0.3	0.1	0.1	0.3	Ya
2	3	1	1	0.2	0.3	0.1	0.1	0.3	Ya
3	3	1	1	0.3	0.3	0.1	0.1	0.3	Ya
1	1	2	1	0.1	0.1	0.2	0.1	0.2	Ya
2	1	2	1	0.2	0.1	0.2	0.1	0.2	Ya
3	1	2	1	0.3	0.1	0.2	0.1	0.3	Ya
1	2	2	1	0.1	0.2	0.2	0.1	0.2	Ya
2	2	2	2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	Ya
3	2	2	2	0.3	0.2	0.2	0.2	0.3	Ya
1	3	2	1	0.1	0.3	0.2	0.1	0.3	Ya
2	3	2	2	0.2	0.3	0.2	0.2	0.3	Ya
3	3	2	2	0.3	0.3	0.2	0.2	0.3	Ya
1	1	3	1	0.1	0.1	0.3	0.1	0.3	Ya
2	1	3	1	0.2	0.1	0.3	0.1	0.3	Ya
3	1	3	1	0.3	0.1	0.3	0.1	0.3	Ya
1	2	3	1	0.1	0.2	0.3	0.1	0.3	Ya
2	2	3	2	0.2	0.2	0.3	0.2	0.3	Ya
3	2	3	2	0.3	0.2	0.3	0.2	0.3	Ya
1	3	3	1	0.1	0.3	0.3	0.1	0.3	Ya
2	3	3	2	0.2	0.3	0.3	0.2	0.3	Ya
3	3	3	3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	Ya

Lampiran A-7. Pembuktian Contoh 2.5.4

Pada lampiran ini akan dibuktikan bahwa untuk semua $a, b, c \in T$ berlaku bahwa $\mu_I(abc) \geq \mu_I(c)$, $\mu_I(abc) \geq \mu_I(b)$, $\mu_I(abc) \geq \mu_I(a)$ dan $\gamma_I(abc) \leq \gamma_I(c)$, $\gamma_I(abc) \leq \gamma_I(b), \gamma_I(abc) \leq \gamma_I(a)$. Lampiran ini disajikan dalam dua tabel, pertama untuk membuktikan $\mu_I(abc) \geq \mu_I(c)$, $\mu_I(abc) \geq \mu_I(b)$, $\mu_I(abc) \geq \mu_I(a)$ untuk semua $a, b, c \in T$. Selanjutnya, pada tabel kedua akan dibuktikan bahwa $\gamma_I(abc) \leq \gamma_I(c), \gamma_I(abc) \leq \gamma_I(b), \gamma_I(abc) \leq \gamma_I(a)$ untuk semua $a, b, c \in T$. Pertama, $\mu_I(abc) \geq \mu_I(c)$, $\mu_I(abc) \geq \mu_I(b)$, $\mu_I(abc) \geq \mu_I(a)$ berlaku untuk semua $a, b, c \in T$.

a	b	c	abc	$\mu_I(a)$	$\mu_I(b)$	$\mu_I(c)$	$\mu_I(abc)$	$\mu_I(abc) \geq \mu_I(a)$	$\mu_I(abc) \geq \mu_I(b)$	$\mu_I(abc) \geq \mu_I(c)$
1	1	1	1	0.9	0.9	0.9	0.9	Ya	Ya	Ya
2	1	1	1	0.8	0.9	0.9	0.9	Ya	Ya	Ya
3	1	1	1	0.7	0.9	0.9	0.9	Ya	Ya	Ya
1	2	1	1	0.9	0.8	0.9	0.9	Ya	Ya	Ya
2	2	1	1	0.8	0.8	0.9	0.9	Ya	Ya	Ya
3	2	1	1	0.7	0.8	0.9	0.9	Ya	Ya	Ya
1	3	1	1	0.9	0.7	0.9	0.9	Ya	Ya	Ya
2	3	1	1	0.8	0.7	0.9	0.9	Ya	Ya	Ya
3	3	1	1	0.7	0.7	0.9	0.9	Ya	Ya	Ya
1	1	2	1	0.9	0.9	0.8	0.9	Ya	Ya	Ya
2	1	2	1	0.8	0.9	0.8	0.9	Ya	Ya	Ya
3	1	2	1	0.7	0.9	0.8	0.9	Ya	Ya	Ya
1	2	2	1	0.9	0.8	0.8	0.9	Ya	Ya	Ya
2	2	2	2	0.8	0.8	0.8	0.8	Ya	Ya	Ya
3	2	2	2	0.7	0.8	0.8	0.8	Ya	Ya	Ya
1	3	2	1	0.9	0.7	0.8	0.9	Ya	Ya	Ya
2	3	2	2	0.8	0.7	0.8	0.8	Ya	Ya	Ya
3	3	2	2	0.7	0.7	0.8	0.8	Ya	Ya	Ya
1	1	3	1	0.9	0.9	0.7	0.9	Ya	Ya	Ya
2	1	3	1	0.8	0.9	0.7	0.9	Ya	Ya	Ya
3	1	3	1	0.7	0.9	0.7	0.9	Ya	Ya	Ya
1	2	3	1	0.9	0.8	0.7	0.9	Ya	Ya	Ya
2	2	3	2	0.8	0.8	0.7	0.8	Ya	Ya	Ya
3	2	3	2	0.7	0.8	0.7	0.8	Ya	Ya	Ya
1	3	3	1	0.9	0.7	0.7	0.9	Ya	Ya	Ya
2	3	3	2	0.8	0.7	0.7	0.8	Ya	Ya	Ya
3	3	3	3	0.7	0.7	0.7	0.7	Ya	Ya	Ya

Selanjutnya, akan dibuktikan $\gamma_I(abc) \leq \gamma_I(c)$, $\gamma_I(abc) \leq \gamma_I(b), \gamma_I(abc) \leq \gamma_I(a)$ berlaku untuk semua $a, b, c \in T$.

a	b	c	abc	$\gamma_I(a)$	$\gamma_I(b)$	$\gamma_I(c)$	$\gamma_I(abc)$	$\gamma_I(abc) \leq \gamma_I(a)$	$\gamma_I(abc) \leq \gamma_I(b)$	$\gamma_I(abc) \leq \gamma_I(c)$
1	1	1	1	0.1	0.1	0.1	0.1	Ya	Ya	Ya
2	1	1	1	0.1	0.1	0.1	0.1	Ya	Ya	Ya
3	1	1	1	0.2	0.1	0.1	0.1	Ya	Ya	Ya
1	2	1	1	0.1	0.1	0.1	0.1	Ya	Ya	Ya
2	2	1	1	0.1	0.1	0.1	0.1	Ya	Ya	Ya
3	2	1	1	0.2	0.1	0.1	0.1	Ya	Ya	Ya
1	3	1	1	0.1	0.2	0.1	0.1	Ya	Ya	Ya
2	3	1	1	0.1	0.2	0.1	0.1	Ya	Ya	Ya
3	3	1	1	0.2	0.2	0.1	0.1	Ya	Ya	Ya
1	1	2	1	0.1	0.1	0.1	0.1	Ya	Ya	Ya
2	1	2	1	0.1	0.1	0.1	0.1	Ya	Ya	Ya
3	1	2	1	0.2	0.1	0.1	0.1	Ya	Ya	Ya
1	2	2	1	0.1	0.1	0.1	0.1	Ya	Ya	Ya
2	2	2	2	0.1	0.1	0.1	0.1	Ya	Ya	Ya
3	2	2	2	0.2	0.1	0.1	0.1	Ya	Ya	Ya
1	3	2	1	0.1	0.2	0.1	0.1	Ya	Ya	Ya
2	3	2	2	0.1	0.2	0.1	0.1	Ya	Ya	Ya
3	3	2	2	0.2	0.2	0.1	0.1	Ya	Ya	Ya
1	1	3	1	0.1	0.1	0.2	0.1	Ya	Ya	Ya
2	1	3	1	0.1	0.1	0.2	0.1	Ya	Ya	Ya
3	1	3	1	0.2	0.1	0.2	0.1	Ya	Ya	Ya
1	2	3	1	0.1	0.1	0.2	0.1	Ya	Ya	Ya
2	2	3	2	0.1	0.1	0.2	0.1	Ya	Ya	Ya
3	2	3	2	0.2	0.1	0.2	0.1	Ya	Ya	Ya
1	3	3	1	0.1	0.2	0.2	0.1	Ya	Ya	Ya
2	3	3	2	0.1	0.2	0.2	0.1	Ya	Ya	Ya
3	3	3	3	0.2	0.2	0.2	0.2	Ya	Ya	Ya

Lampiran A-8. Pembuktian Contoh 2.6.2 (Bag. 1)

Berikut ini akan ditunjukan bahwa untuk sebarang $a, b, c \in S$ berlaku $a\#(b\#c) = (a\#b)\#c$.

a	b	c	$a\#(b\#c)$	$(a\#b)\#c$	$a\#(b\#c) = (a\#b)\#c$
1	1	1	1	1	Ya
2	1	1	2	2	Ya
3	1	1	3	3	Ya
1	2	1	2	2	Ya
2	2	1	2	2	Ya
3	2	1	3	3	Ya
1	3	1	3	3	Ya
2	3	1	3	3	Ya
3	3	1	3	3	Ya
1	1	2	2	2	Ya
2	1	2	2	2	Ya
3	1	2	3	3	Ya
1	2	2	2	2	Ya
2	2	2	2	2	Ya
3	2	2	3	3	Ya
1	3	2	3	3	Ya
2	3	2	3	3	Ya
3	3	2	3	3	Ya
1	1	3	3	3	Ya
2	1	3	3	3	Ya
3	1	3	3	3	Ya
1	2	3	3	3	Ya
2	2	3	3	3	Ya
3	2	3	3	3	Ya
1	3	3	3	3	Ya
2	3	3	3	3	Ya
3	3	3	3	3	Ya

Lampiran A-9. Pembuktian Contoh 2.6.2 (Bag. 2)

Berikut ini akan ditunjukan bahwa untuk setiap $a, b \in S$ berlaku $\mu_P(ab) \geq \min\{\mu_P(a), \mu_P(b)\}$ dan $\gamma_P(ab) \leq \text{maks}\{\mu_P(a), \mu_P(b)\}$. Lampiran ini akan disajikan dalam dua tabel yang pertama untuk membuktikan bahwa $\mu_P(ab) \geq \min\{\mu_P(a), \mu_P(b)\}$ untuk setiap $a, b \in S$. Selanjutnya tabel kedua untuk membuktikan bahwa $\gamma_I(ab) \leq \text{maks}\{\gamma_P(a), \gamma_P(b)\}$ untuk setiap $a, b \in S$.

Pertama, akan dibuktikan bahwa $\mu_P(ab) \geq \min\{\mu_P(a), \mu_P(b)\}$ untuk setiap $a, b \in S$.

a	b	ab	$\mu_P(a)$	$\mu_P(b)$	$\mu_P(ab)$	$\min\begin{Bmatrix}\mu_P(a),\\ \mu_P(b)\end{Bmatrix}$	$\mu_P(ab) \geq \min\begin{Bmatrix}\mu_P(a),\\ \mu_P(b)\end{Bmatrix}$
1	1	1	0.6	0.6	0.6	0.6	Ya
2	1	2	0.7	0.6	0.7	0.6	Ya
3	1	3	0.8	0.6	0.8	0.6	Ya
1	2	2	0.6	0.7	0.7	0.6	Ya
2	2	2	0.7	0.7	0.7	0.7	Ya
3	2	3	0.8	0.7	0.8	0.7	Ya
1	3	3	0.6	0.8	0.8	0.6	Ya
2	3	3	0.7	0.8	0.8	0.7	Ya
3	3	3	0.8	0.8	0.8	0.8	Ya

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $\gamma_I(ab) \leq \text{maks}\{\mu_P(a), \mu_P(b)\}$ untuk setiap $a, b \in S$.

a	b	ab	$\gamma_P(a)$	$\gamma_P(b)$	$\gamma_P(ab)$	$\text{maks}\begin{Bmatrix}\gamma_P(a),\\ \gamma_P(b)\end{Bmatrix}$	$\gamma_I(ab) \leq \text{maks}\begin{Bmatrix}\gamma_P(a),\\ \gamma_P(b)\end{Bmatrix}$
1	1	1	0.3	0.3	0.3	0.3	Ya
2	1	2	0.2	0.3	0.2	0.3	Ya
3	1	3	0.1	0.3	0.1	0.3	Ya
1	2	2	0.3	0.2	0.2	0.3	Ya
2	2	2	0.2	0.2	0.2	0.2	Ya
3	2	3	0.1	0.2	0.1	0.2	Ya
1	3	3	0.3	0.1	0.1	0.3	Ya
2	3	3	0.2	0.1	0.1	0.2	Ya
3	3	3	0.1	0.1	0.1	0.1	Ya

Lampiran A-10. Pembuktian Contoh 2.6.4

Pada lampiran ini akan ditunjukan bahwa untuk setiap $x, y \in S$ berlaku $\mu_I(xy) \geq \mu_I(y), \mu_I(xy) \geq \mu_I(x)$ dan $\gamma_I(xy) \leq \gamma_I(y), \gamma_I(xy) \leq \gamma_I(x)$. Dalam Lampiran ini akan disajikan dua tabel, yang pertama untuk membuktikan bahwa $\mu_I(xy) \geq \mu_I(y), \mu_I(xy) \geq \mu_I(x)$ untuk setiap $x, y \in S$. Selanjutnya tabel kedua untuk membuktikan bahwa $\gamma_I(xy) \leq \gamma_I(y), \gamma_I(xy) \leq \gamma_I(x)$ untuk setiap $x, y \in S$.

Pertama, akan dibuktikan bahwa $\mu_I(xy) \geq \mu_I(y), \mu_I(xy) \geq \mu_I(x)$ untuk setiap $x, y \in S$

x	y	xy	$\mu_I(x)$	$\mu_I(y)$	$\mu_I(xy)$	$\mu_I(xy) \geq \mu_I(y)$	$\mu_I(xy) \geq \mu_I(x)$
1	1	1	0.7	0.7	0.7	Ya	Ya
2	1	2	0.8	0.7	0.8	Ya	Ya
3	1	3	0.9	0.7	0.9	Ya	Ya
1	2	2	0.7	0.8	0.8	Ya	Ya
2	2	2	0.8	0.8	0.8	Ya	Ya
3	2	3	0.9	0.8	0.9	Ya	Ya
1	3	3	0.7	0.9	0.9	Ya	Ya
2	3	3	0.8	0.9	0.9	Ya	Ya
3	3	3	0.9	0.9	0.9	Ya	Ya

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $\gamma_I(xy) \leq \gamma_I(y)$, $\gamma_I(xy) \leq \gamma_I(x)$ untuk setiap $x, y \in S$.

x	y	xy	$\gamma_I(x)$	$\gamma_I(y)$	$\gamma_I(xy)$	$\gamma_I(xy) \leq \gamma_I(y)$	$\gamma_I(xy) \leq \gamma_I(x)$
1	1	1	0.2	0.2	0.2	Ya	Ya
2	1	2	0.1	0.2	0.1	Ya	Ya
3	1	3	0.1	0.2	0.1	Ya	Ya
1	2	2	0.2	0.1	0.1	Ya	Ya
2	2	2	0.1	0.1	0.1	Ya	Ya
3	2	3	0.1	0.1	0.1	Ya	Ya
1	3	3	0.2	0.1	0.1	Ya	Ya
2	3	3	0.1	0.1	0.1	Ya	Ya
3	3	3	0.1	0.1	0.1	Ya	Ya