epository.ub.a

awijaya

awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijava awijaya

awijaya awijaya awijaya

awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awiiava awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya

awijaya awijaya

awijaya

ANALISIS DINAMIK MODEL EPIDEMI SEIRS DENGAN Univ LAJU PENULARAN DAN PENGOBATAN TERSATURASI tas Brawijaya

Universitas SKRIPSI Iniversitas Brawijaya oleh Universitas Brawijaya Asri Dwi Lestari vsitas Brawijaya 155090407111018



JURUSAN MATEMATIKA FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM UNIVERSITAS BRAWIJAYA rawijava

Universitas MALIANG niversitas Brawijaya Universitas Brazoirga Universitas Brawijaya Universitas Brawijaya Universitas Brawijaya

BRAWIJAYA

awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijava awijaya awijaya awijaya awijaya AVERS awijaya awiiava awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya

Universitas Pravijaya Universitas Brawijaya BRANIJALY

4.5

epository.ub.a

awijaya

awijaya awijaya

awijaya awijaya

awijaya

awijaya awijava

awijaya awijaya awijaya

awijaya

awijaya

awijaya

awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya

BRAWIJAYA

awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awiiava awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya

ANALISIS DINAMIK MODEL EPIDEMI SEIRS DENGAN LAJU PENULARAN DAN PENGOBATAN TERSATURASI

Universitas SKRIPSI Iniversitas Brawijaya

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Matematika stas Brawijaya

oleh ASRI DWI LESTARI 155090407111018

JURUSAN MATEMATIKA Brawijaya FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM UNIVERSITAS BRAWIJAYA

> Universitas MALIANG niversitas Brawijaya Universitas Brazoinga Universitas Brawijaya Universitas Brawilaya Universitas Brawijaya

1JAYA

s Brawijava

BRAWIJAYA

awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijava awijaya awijaya awijaya awijaya AVERS awijaya awiiava awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya

Universitas Pravijaya Universitas Brawijaya BRANIJALY

4.5

Universital Brawijaya Universitas Brawijaya

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI awijaya awijaya

awijaya awijaya

awijaya

awijaya awijaya

awijaya awijaya awijaya

awijaya awijaya awijaya awijava awijaya awijaya

awijaya awijaya

awijaya awijaya awiiava awijaya

awijaya

awijaya

awijaya awijaya

Universitas Brawijaya

ANALISIS DINAMIK MODEL EPIDEMI SEIRS DENGAN LAJU PENULARAN DAN PENGOBATAN TERSATURASI

awijaya awijaya awijaya awijaya awijava awijaya awijaya Universitas Brawlaya Universitas Brawijaya UnivASRI DWI LESTARI Univers155090407111018 rsitas Brawijaya

Universitas Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji niversitas Brawijaya pada tanggal 8 April 2019 Unive dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar itas Brawijaya Sarjana Matematika

Pembimbing

Dr. Wuryansari Muharini Kusumawinahyu, M.Si.niversitas Brawijaya

NIP. 196607281993032001

Mengetahui,

Ketua Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Universitas Br Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si, M.Si, Ph.D. NIP. 197509082000031003

Universitas Brawlibya Universitas Brawijaya

Universitas Brawijava



awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijava awijaya awijaya awijaya awijaya AVERS awijaya awiiava awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya

Universitas Pravijaya Universitas Brawijaya BRANIJALY

4.5

Universitaly Brawijaya Universitas Brawijaya



awijaya awijaya

awijaya

awijaya

awijaya

awijava

awijaya

awijaya

awijaya

awijaya awijaya

awijaya awiiava

awijaya

awijaya

awijaya awijaya

awijaya

LEMBAR PERNYATAAN LEMBAR PERNYATAAN LEMBAR PERNYATAAN LEMBAR PERNYATAAN LINIA STANJAYA LINIA STA

awijaya Universitas Brawijaya Universitas Brawijaya U dengan ini menyatakan bahwa:

1. skripsi ini adalah hasil pemikiran saya, bukan hasil menjiplak dari tulisan orang lain. Rujukan-rujukan yang tercantum pada Daftar Pustaka hanya digunakan sebagai acuan.

2. Apabila di kemudian hari skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala akibat hukum dari keadaan tersebut.

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

awijaya Universitas awijaya Universitas awijaya Universitas awijaya Universitas awijaya Universitas awijaya Universitas Brawijaya awijaya Universitas Brawijaya

Malang, 8 April 2019

Universitas Brawijaya Universitas Brawijaya

BRAWIJAYA

awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijava awijaya awijaya awijaya awijaya AVERS awijaya awiiava awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya

Universitas Pravijaya Universitas Brawijaya BRANIJALY

4.5

Universitad Brawijaya Universitas Brawijaya

awijava awijaya

awijaya

awijaya

awijaya awijaya

awijava

awijaya

awijaya

awijaya awijaya

awijaya

awijaya

awijaya

awijaya awijaya

awijaya

awijaya

awijaya

awijaya

awijaya awijaya awijaya

awijaya

awijaya

ANALISIS DINAMIK MODEL EPIDEMI SEIRS DENGAN

LAJU PENULARAN DAN PENGOBATAN TERSATURASI

Universita ABSTRAK

Unive Pada skripsi ini dibahas konstruksi dan analisis dinamik model Brawijaya epidemi SEIRS dengan laju penularan dan pengobatan tersaturasi. Pada model tersebut diasumsikan bahwa individu sembuh memiliki kekebalan sementara sehingga dapat kembali menjadi rentan. Analisis dinamik yang dilakukan pada model meliputi penentuan titik kesetimbangan, angka reproduksi dasar (\mathcal{R}_0), syarat eksistensi titik kesetimbangan, dan analisis kestabilan lokal. Berdasarkan hasil analisis diperoleh dua macam titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit yang selalu dan titik ada Ukesetimbangan endemik yang eksistensinya ditentukan oleh syarat Brawijaya tertentu. Titik kesetimbangan bebas penyakit bersifat stabil asimtotik lokal jika $\mathcal{R}_0 < 1$, sedangkan titik kesetimbangan endemik bersifat stabil asimtotik lokal jika memenuhi kriteria Routh-Hurwitz. Simulasi numerik yang dilakukan mendukung hasil analisis dinamik yang Udiperoleh.

Kata kunci: model epidemi SEIRS, laju penularan tersaturasi, laju pengobatan tersaturasi, angka reproduksi dasar, kestabilan lokal.

> A 25.

awijaya awijaya awiiava awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya

Universitas Brawlava Universitas Brawijava



BRAWIJAYA

awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijava awijaya awijaya awijaya awijaya AVERS awijaya awiiava awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya

Universitas Pravijaya Universitas Brawijaya BRANIJALY

4.5

Universite Brawijaya Universitas Brawijaya

awijava awijaya

awijaya

awijaya

awijaya awijaya

awijava

awijaya

awijaya

awijaya awijaya

awijaya

awijaya

awijaya

awijaya awijaya

awijaya

awijaya

awijaya

awijaya awijaya awijaya

awijaya

awijaya

DYNAMICAL ANALYSIS OF SEIRS EPIDEMIC MODEL WITH SATURATED INCIDENCE AND TREATMENT RATE ABSTRACT Unive This final project discussed the construction and dynamical Brawlaya analysis of SEIRS epidemic model with saturated incidence and Brawlaya treatment rate. In the model, it is assumed that recovering individuals have temporary immunity so that they can return to being susceptible. Dynamical analysis includes the determination of equilibrium point, the basic reproduction number (\mathcal{R}_0) , conditions for the existence of equilibrium point, and the local stability analysis. Based on the analysis results, two equilibrium points are obtained, namely disease free equilibrium point which always exists and endemic equilibrium

upoints which exist under certain conditions. The disease free Brawlaya equilibrium is local asymptotically stable when $\mathcal{R}_0 < 1$, while the endemic equilibrium point is local asymptotically stable if it satisfies the Routh-Hurwitz criteria. The performed numerical simulation supports the results of the dynamical analysis.

SEIRS epidemic model, saturated incidence rate, Kata kunci: saturated treatment rate, basic reproduction number, local stability.

awijaya awijaya awijaya awiiava awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya

Universitas Bravilyaya Universitas Brawijaya

BRAWIJAYA

awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijava awijaya awijaya awijaya awijaya AVERS awijaya awiiava awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya

Universitas Pravijaya Universitas Brawijaya BRANIJALY

4.5

Universita Brawijaya Universitas Brawijaya

awijaya

awijaya

awijaya

awijava

awijaya

awijaya

awiiava

awijaya awiiava

awiiava

awijaya awijaya

awijaya

awiiava

awijaya

awijaya awijaya

awiiava

awiiava

va Universitas Brawijaya va Universitas Brawijaya

iversitas Brawijaya Universi iversitas Brawijaya Universi **KATA PENGANTAR**

Puji syukur ke hadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat, karunia, dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul *Analisis Dinamik Model Epidemi SEIRS dengan Laju Penularan dan Pengobatan Tersaturasi* dengan baik dan lancar. Shalawat dan salam selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW sebagai suri teladan bagi penulis.

Skripsi ini tidak dapat diselesaikan dengan baik tanpa bantuan, bimbingan, dan motivasi dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada

1. Dr. Wuryansari Muharini Kusumawinahyu, M.Si. selaku dosen pembimbing atas segala bimbingan, motivasi, bantuan, dan saran yang diberikan kepada penulis untuk menyelesaikan skripsi ini dengan baik dan benar,

- 2. Indah Yanti, S.Si., M.Si. dan Corina Karim, S.Si., M.Si., Ph.D. selaku dosen penguji atas segala kritik dan saran yang diberikan untuk perbaikan skripsi ini,
 - 3. Dr. Sobri Abusini, M.T. selaku dosen penasihat akademik yang selalu memberikan motivasi kepada penulis untuk menyelesaikan skripsi ini tepat waktu,

4. Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si., M.Si., Ph.D. selaku Ketua Jurusan Matematika, Dr. Isnani Darti, S.Si., M.Si. selaku Ketua Program Studi Matematika, Bapak dan Ibu Dosen Jurusan Matematika yang telah memberikan ilmu kepada penulis, serta segenap staf dan karyawan TU Jurusan Matematika atas segala bantuan yang diberikan,

 Bapak Shobari, Ibu Sutimah, Fitri Meyyani, Ragil Wuri H, dan seluruh keluarga tercinta yang selalu mendoakan dan memberi dukungan kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini,
 Gandis Lelly, Erlina Narulita, Fitri Kurniawati, Rizky Saprianto, dan Irawan Gifachri atas ilmu, kritik, dan saran dalam penulisan skripsi ini.

Universitas BravXava Universitas Bravijava

ijaya Universitas Brawijaya awijaya

awiiava awiiava awijaya awijaya

besar Matematika 2015, Griyakost E-220, dan keluarga

organisasi UAKI UB atas dukungan dan kebersamaan selama ersitas Brawijaya Umenjalankan proses perkuliahan, wijaya Universitas Brawijaya Universitas Brawijaya

wijay 8. dan semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu. awijaya Universitas Brawijaya Universitas Brawijaya Universitas Brawijaya Universitas Brawijaya w Semoga Allah SWT memberikan anugerah dan berkah-Nya kepada ersitas Brawijaya semua pihak yang telah membantu menyelesaikan skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih banyak kekurangan. Oleh karena itu, kritik dan saran yang w membangun sangat penulis harapkan. Kritik dan saran dapat dikirim ersitas Brawijaya melalui email asridwilestari6@gmail.com, untuk perbaikan pada ersitas Brawlaya masa yang akan datang. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak yang membutuhkan, serta menjadi sumber inspirasi untuk penulisan skripsi selanjutnya.

Malang, 8 April 2019 ersitas Brawijava

awijaya awiiava awijaya awijaya awijaya awijaya awijava awiiava awijava awijaya awijaya

UniversitXUBrawijava Universitas Brawijava

Penulisversitas Brawijaya

BRAWIJAYA

awijaya	Universitas Brawijaya Unive		a Universitas		Universitas	
awijaya	Universitas Brawijaya Unive	rsitas Brawijaya	a Universitas	Brawijaya	Universitas	Brawijaya
awijaya	Universitas Brawijaya Unive	rsitas Brawijaya	a Universitas		Universitas	
awijaya	Universitas Brawijaya Unive	rsitas Brawijaya	a <u>Un</u> iversitas		Universitas	Brawijaya
awijaya	Universitas Brawijaya Unive	rsitaDAFIAR	a D Aiversitas		Universitas	
awijaya	Universitas Brawijaya Unive		a Universitas	Brawijaya	Universitas	Brawijaya
awijaya	Universitas Brawijaya Unive		a Universitas	Brawijaya	alaman	Brawijaya
	Universitas Brawijaya Unive	rsitas Brawijaya	a Universitas	Brawijaya	Universitas	Brawijaya
awijaya		rsitas Brawijaya	a Universitas	Brawijaya	Universitas	Brawijaya
awijaya	LEMBAR PENGESAI	IAN SKRIPS		Brawijaya	Universitas	Brawijaya
awijaya	LEMBAR PERNYATA	ANS Brawijaya	a Universitas	Brawijaya		Brawijaya
	ABSTRAK	rsitas Brawijay	a Universitas	Brawijaya	vii	Brawijaya
awijaya	ABSTRACT	reitae Brawijay	a Universitas	Brawijaya		Brawijaya
awijaya	KATA PENGANTAR	reitae Brawijay	a Universitas	Brawijaya	Universitas	Brawijaya
awijaya	DAETAD ISTiava Unive	rsitas Prawija y	a Universitas		Universiti	Brawijaya
awijaya	DAFTAR ISI		Universitas	Brawijaya	Universitas	Brawijaya
awijaya	DAFTAR GAMBAR		rsitas	Brawijaya	Universitas	
	DAFTAR LAMPIRAN			Brawijava	Univer XVII	
awijava	BAB I SPENDAHULU	JAN		rawijava	Universitals	Brawijava
awijaya	Univentilas Latar Belakan	(A) B	D.	tiava	Universitas	Brawijaya
awijaya	University Rumusan Mas	alah		va	Universitas	
awijaya	Univer 1.2 Training		業	••••••••	Universitas	Brawijaya
awijaya	Univ 1.3 Tujuan		Seat 1		Universitas	Brawijaya
awijaya	BAB II DASAR TEC	RI	1 CANE	7,	niversita	
awijaya	2.1 Sistem Dinam	k			hiversita5	Brawijaya
awijaya	2.1.1 Sistem	otonomus .			hiversitas	Brawijaya
	2.1.2 Sistem	otonomous li	near			Brawijaya
awijaya	213 Sistem	otonomous n	onlinear			Brawijaya
awijaya	2.1.5 Sister	o Routh Uuru	ita		Universitas	
				 	Universitas	Brawijaya
awijaya	2.2 Model SIRS C	engan Laju P	enularan da	in Pengod	Universitas	Brawijaya
awijaya	Universit Tersaturasi				Universitas	
awijava	Universita 2.2.1 Laju	perubahan	kelas ind	ividu re	ntan _{versitas}	Brawijava
awijaya	Universitas (Susce	ptible)			Universite2	Brawijaya
awijaya	Universitas 2.2.2 Laju	perubahan k	elas indivi	du terinf	eksiversitas	Brawijaya
awijaya	Universitas Bra	ive)		awijaya	Universitas	
awijaya	Universitas Bray	memuhahan	Lalas indi	Brawijaya	Universitas	Brawijaya
awijaya	Universitas BrandayaLajuve	perubahan	kelas _{ver} mar	vidu	lounversitas	
awijaya	Universitas Brawijaya(<i>Reco</i> v	ered) Brawijaya	a Universitas	.Brawijaya.	Universited	
awijaya	2.3 Model SEIR c	engan Laju P	enularan da	an Pengob	atan/ersitas	
awijaya	Tersaturasi	rsitas Brawijaya	a Universitas	Brawijaya	Universities	Brawijaya
awijaya	2.3.1 Laju	perubahan	kelas ind	ividu re	ntan	Brawijaya
awijaya	Universitas Brawijaya (Susce	ntihle)	a Universitas		Universitas	
	Universitas D.2.0 aval ainive	norubahan 1	zologie india	- Brawijaya. Zdawijtorni	hoversitas	Brawijaya
	Universitas Brawijava, Hnive	rsitas Brawilavi	a Universitas	Brawijava	Universites	Brawijava
awijava	Universitas Brawijava	ed)	a Universitas	Brawijava	Universitas	Brawijava
	Universitas Brawijava Unive	rsitas Brawilava	a Universitas	Brawijava	Universitas	Brawijava
	Universitas Brawijava Unive	rsitas Brav Xiii v	a Universitas		Universitas	
awijaya	Universitas Brawijaya Unive	rsitas Brawijava	a Universitas	Brawijaya	Universitas	Brawijaya
awijaya	Universitas Brawijaya Unive	rsitas Brawijaya	a Universitas	Brawijaya	Universitas	Brawijaya
awijaya	Universitas Brawijaya Unive	rsitas Brawijaya	a Universitas	Brawijaya	Universitas	Brawijaya
and the second	University a Description of Destroy		The former of the	Description	Line to see the second	Desculture

awijaya	Univ		rawijaya	Universitas	Brawijaya	Universitas	
awijaya	Univ	ersitas B	rawijaya	Universitas	Brawijaya	Universitas	Brawijaya
awijaya	Univ	ersitas B	rawijaya	Universitas	Brawijaya	Universitas	
awijaya	Univ	ersitas B	rawijaya	Universitas	Brawijaya	Universitas	Brawijaya
awijaya	Univ	2.3.3 B	rawijaya Laiu r	perubahan	kelas ir	dividu te	rinfeksi
	Univ	ersitas B	(Infacti	ous	Brawijaya	Universitas	Brawijaya
awijaya	Univ	ersitas B	(Injeciii	ousiversitas	Brawijaya	Universitas	Brawijaya
	Univ	2.3.4	rDaju ya j	perubahan	skelas	individu as	sembuh
awijaya	Univ		(Recove	ered)	Brawijaya	Universitas	Brawijaya
awijaya. awijaya	2.4	Angka	Reprodu	ıksi Dasar	Brawijaya	Universitas	Brawijaya
BAI	B III	PEM	BAHAS	ANversitas	Brawijaya	Universitas	Brawijaya
awijaya	3.1niv	Konstru	iksi Moo	dehiversitas	Brawijaya	Universitas	Brawijaya
awijaya	3.21iv	Titik K	esetimba	angan Mod	elrawijaya	Universitas	Brawijaya
awijaya	Univ	egsijas B	Anoka	reproduksi	dasarijaya	Universitas	Brawijaya
awijaya	Univ	ersitas B	Ekcisto	nei titik ka	atimbana	Universitas	Brawijaya
awijaya	Univ	ersitas B	L'ASISIC	ilan Lalal		niversitas	Brawijaya
awijaya	Signiv	Anansi	s Kestad	nan Lokai	THIK Kes	eumbangai	Brawijaya
awijaya	Univ	essas B	Kestabi	lan lokal	titik kese	etimbangar	bebas
	Univ		penyaki	it	S .P.		rawijaya
awijaya	Univ	3.3.2	Kestabi	lan lokal ti	tik kesetir	nbangan ei	ndemik
awijaya	3.4	Simula	si Nume	rik		* · · · · ·	
	Univ	3.4.1	Simulas	si untuk \mathcal{R}_{ℓ}	> 1 dan	$\alpha = 0$	
awijaya	Uni	342	Simula	si untuk \mathcal{R}	r > 1 dan	$\alpha > 0$	7
awijaya	Uni	3 / 3	Simula	\mathcal{D} i untuk \mathcal{D}	* / D.	<1 0. >	0 dan
awijaya	Uni	5.4.5	D < 0	SI UIILUK 7C		\sim 1, α >	0, uan
awijaya	Uni	VDOI	D < 0			$(r, r) \in \mathcal{F}_{r}$	• • • •
awij BA I	BIN	KESI	MPULA	AN DAN S	AKAN	77	
awijaya	4.Iniv	Kesimp	oulan .	(.)		🔬	
awijaya	4.2	Saran				¥	
DA	FTA 1	R PUST	'AKA	Tet		T	
LA]	MPI	RAN				7	
awijaya	Univ	ersita		H.	う周川	1	N/2
	Univ	ersitas		1.5	À		iava
awijaya	Univ	ersitas E					wijaya
awijaya	Univ	ersitas B	ra				awijaya
awijaya	Univ	ersitas B	raw,				
awijaya	Univ	ersitas B	rawijaya	Universities		universitas	
	Univ	ersitas B		Universitas	Brawijaya	Universitas	Brawijaya
awijaya	Univ	ersitas B	rawijaya	Universitas	Brawijaya	Universitas	
awijaya	Univ	ersitas B	rawijaya	Universitas	Brawijaya	Universitas	Brawijaya
awijaya	Univ	ersitas B	rawijaya	Universitas	Brawijaya	Universitas	Brawijaya
awijaya	Univ		rawijaya	Universitas	Brawijaya	Universitas	Brawijaya
	Univ	ersitas B		Universitas		Universitas	Brawijaya
awijaya	Univ	orsitas D	rawijaya	Universitas	Brawijaya	Universitas	
annaya				JIIIVGI JILAJ			

UniversitXIVBrawijaya Universitas Brawijaya

Ul oversitas Brawijaya Uróversitas Brawijaya Upiversitas Brawijaya **21**versitas Brawijaya 1211versitas Brawijava 22versitas Brawijaya versitas Brawijaya 27 10 July - Star Brawijaya 29versitas Brawijaya ugoversitas Brawijaya 30^{versitas} Brawijaya 32versitas Brawijaya 32versitas Brawijaya 33versitas Brawijaya versitas Brawijaya 34versitas Brawijaya 37versitas Brawijaya 37versitas Brawijaya yiversitas Brawijaya 19 Aniversitas Brawijaya versitas Brawijaya 41versitas Brawijaya

DOSITORY.UD.a

awijaya

awijava

awijaya awijaya

awijaya

awijaya

awijaya

Gambar 2.1 awijaya awijaya Gambar 3.1 awijaya

Unive Gambar 3.2 va Unive Gambar 3.3 Gambar 3.4

awijaya awijava awijaya awijaya awiiava awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya

Unive DAFTAR GAMBAR itas Brawijava

Diagram kompartemen model SIRS dengan Unive Gambar 2.2 ya Diagram kompartemen model SEIR dengan ersitas Brawijaya laju penularan dan pengobatan tersaturasi Universi 15 Brawijaya vērsitas Brawijava Universitas Brawijaya Universitas Brawijava

Diagram^{as} kompartemen^{rsi}model^{wij}epidemi^{ersitas Brawijaya} dan SEIRS dengan penularan laju Universitas Brawijaya pengobatan tersaturasi versitas Brawijaya. Universi21 Brawijaya Potret fase untuk $\mathcal{R}_0 > 1$ dan $\alpha = 0$ ava. Universi33 Brawijaya Potret fase untuk $\mathcal{R}_0 > 1 \operatorname{dan} \alpha > 0$ a.e. Universi 34 Brawijaya RANIJALA Potret fase untuk $\mathcal{R}^* < \mathcal{R}_0 < 1, \alpha > 0$, dan

ulava.

Universitas BravXy a Universitas Brawijaya

Universit

BRAWIJAYA

awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijava awijaya awijaya awijaya awijaya AVERS awijaya awiiava awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya

Universitas Pravijaya Universitas Brawijaya

BRANIJALY

4.5

UniversitXVIBrawijaya Universitas Brawijaya

epository.ub.ad

awijaya **Universitas Brawijaya** Univers Lampiran 1 awijaya Univers Lampiran 2a awijaya UniversLampiran 3 Lampiran 4 awijaya awijaya awijaya awijaya awijava awijaya awijaya awijaya awijaya ANER awijaya awiiava awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya

DAFTAR LAMPIRAN Perhitungan koefisien persamaan karakteristik sitas Brawijaya matriks $J(Q_0)$ ijaya Universitas Brawijaya Universita44 rawijaya Perhitungan koefisien persamaan karakteristik

Universitas Brawijaya Universitas Brawijaya 3RAWIJALY

Universitas BraXVII/a Universitas Brawijava

matriks $J(Q_*)$ 45 may java 45 may java 45 may java

awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijava awijaya awijaya awijaya awijaya AVERS awijaya awiiava awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya

Universitas Pravijaya Universitas Brawijaya BRANIJALY

4.5

Univers XVIII rawijaya Universitas Brawijaya



awijaya

awijaya

awijaya awijaya

awijaya

awijaya

awijaya

awijaya awijaya

awijaya

awijaya

awijaya

awijaya awijaya

awijaya

awijaya

awiiava

awijaya

awijaya awijaya

awijaya

awijava

awijaya

awiiava

awijaya awijaya

awijava

awijaya

awijaya awijaya

awijaya Universitas Brawijaya awijaya Universitas Brawijaya

U1.1 rsiLatar Belakang ersitas Brawijaya Universitas Brawijaya

Penyakit menular seperti influenza, difteri, tuberkulosis, dan campak masih menjadi ancaman bagi manusia. Hal ini mendorong para ahli melakukan penelitian untuk mengendalikan penyebaran penyakit menular. Selain para ahli di bidang biologi dan kedokteran, matematikawan juga turut mengembangkan model matematika untuk masalah penyebaran penyakit yang sering disebut model epidemi. Pada model epidemi dilakukan analisis untuk mengetahui sifat-sifat penyebaran penyakit agar ditemukan cara pengendalian penyakit tersebut.

Universitas Brawijay

Univer PENDAHULUAN

Model epidemi pertama kali diperkenalkan oleh Kermack dan McKendric pada tahun 1927. Mereka mengonstruksi model epidemi yang terdiri dari tiga kelas, yaitu kelas individu rentan (*Susceptible*), kelas individu terinfeksi (*Infective*), dan kelas individu sembuh (*Recovered*). Model yang dikenal sebagai model SIR tersebut telah banyak dikembangkan untuk memahami permasalahan penyakit yang semakin kompleks.

Salah satu komponen yang memiliki peran penting dalam model epidemi adalah laju penularan. Laju penularan yang sering digunakan pada model epidemi adalah laju penularan bilinear dan laju penularan standar. Pada tahun 1978, Cappaso dan Serio memperkenalkan laju penularan tersaturasi pada model SIR, yaitu laju penularan yang mempertimbangkan efek penghambatan sebagai akibat adanya pencegahan yang dilakukan individu rentan ketika banyak individu yang terinfeksi. Pada tahun 1994, Li dan Muldowney mengonstruksi model

epidemi yang terdiri dari empat kelas, yaitu dengan menambahkan kelas individu terpapar atau terinfeksi tetapi belum mampu menulari individu lain (*Exposed*) pada model SIR. Model ini dikenal sebagai model SEIR. Pada model SIR dan SEIR, diasumsikan bahwa individu yang telah sembuh memiliki kekebalan permanen terhadap suatu

aya Universitas Brawijaya aya Universitas Brawijaya aya Universitas Brawijaya aya Universitas Brawijaya aya Universitas Brawijaya

BRAWIJAY

penyakit sehingga individu tersebut akan tetap berada pada kelas individu sembuh. awijava wijaya Pengobatan merupakan salah satu metode efektif untuk mencegah dan mengendalikan penyebaran penyakit menular. Pada tahun 2004, Wang dan Ruan memperkenalkan laju pengobatan konstan pada model SIR, yang kemudian dikembangkan oleh Wang (2006) menjadi laju pengobatan bertahap. Secara umum, laju pengobatan bergantung pada sumber daya medis, seperti obat-obatan, tenaga medis, fasilitas rumah sakit, dan tempat isolasi. Setiap kota atau negara memiliki kapasitas medis yang terbatas untuk pengobatan. Hal ini menyebabkan melambatnya penanganan individu terinfeksi ketika jumlah individu terinfeksi banyak. Berdasarkan hal tersebut, Zhang dan Liu (2008) mengonstruksi model SIR dengan laju pengobatan tersaturasi yang mempertimbangkan efek melambatnya pengobatan individu terinfeksi ketika kapasitas medis terbatas dan jumlah individu terinfeksi banyak.

^{Jaya} Beberapa penelitian mengenai model epidemi dengan laju penularan dan pengobatan tersaturasi telah dilakukan. Pada tahun 2014, Zhang, dkk. membahas model SEIR dengan laju penularan dan pengobatan tersaturasi. Selanjutnya, Jana, dkk. (2016) membahas model SIRS dengan laju penularan dan pengobatan tersaturasi. Pada model Jana, dkk. (2016) diasumsikan bahwa individu yang telah sembuh memiliki kekebalan sementara terhadap suatu penyakit sehingga individu tersebut dapat kembali menjadi rentan.

awiaya Pada skripsi ini dibahas model epidemi SEIRS dengan laju penularan dan pengobatan tersaturasi yang merujuk artikel Khan, dkk. (2017). Analisis dinamik yang dilakukan pada model ini meliputi penentuan titik kesetimbangan, angka reproduksi dasar, syarat eksistensi titik kesetimbangan, dan analisis kestabilan lokal. Setelah itu, dilakukan simulasi numerik untuk mendukung hasil analisis.

Rumusan Masalah Universitas B a Berikut rumusan masalah yang dibahas pada skripsi ini. Wilaya Bagaimana konstruksi model epidemi SEIRS dengan laju

penularan dan pengobatan tersaturasi?

awijaya

awijaya awijaya

awijaya awijaya

awijaya

awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya

BRAWIJAYA

Bagaimana titik kesetimbangan model tersebut? 3. Bagaimana kestabilan lokal titik kesetimbangan model? awijaya 4. Bagaimana kesesuaian hasil simulasi numerik dengan hasil awijaya Universitanalisis yang diperoleh?arawijaya Universitas Brawijaya awijaya U1.3 rsiTujuanijaya wijaya Universitas Brawijava awijaya Berdasarkan rumusan masalah tersebut, tujuan pembahasan skripsi awijaya Uinieadalah rawijaya Universitas Pravijaya Universitas Brawijaya awijava awijaya Univel. menjelaskan konstruksi model epidemi SEIRS dengan laju Brawijaya awijaya Universit penularan dan pengobatan tersaturasi, awijaya awijaya Universitas E

2. menentukan titik kesetimbangan model,

- 3. mengetahui kestabilan lokal titik kesetimbangan model, dan
 - memverifikasi kesesuaian hasil simulasi numerik dengan hasil analisis yang diperoleh.

awijaya Universita awijaya Universita awijaya Universita awijaya Universitas awijaya Universitas Bra awijaya Universitas Bra awijaya Universitas Brawijay awijaya Universitas Brawijay

Universitas Brawija Universitas Brawija

Universitas Brawijaya Universita Brawijava

BRAWIJAYA

awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijava awijaya awijaya awijaya awijaya , NERS awijaya awiiava awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awij**4**va

Universitas Pravijaya Universitas Brawijaya

BRANIJALY

4.5

awijaya

awijaya

awijaya

awijava

awijaya

awijaya awijaya

awijaya awiiava

awijaya awijaya

awijaya awiiava

awijaya awijaya

awijaya

awijaya awijaya

awijaya awijaya

awijaya

awijaya awijaya

awiiava

awiiava

awijaya

awijaya awijaya

awijaya

2.1 Sistem Dinamik

Sistem dinamik adalah suatu sistem yang senantiasa berubah dan dapat diprediksi kondisinya pada masa yang akan datang apabila diketahui kondisinya saat ini atau di masa lalu (Nagle, 2012). Sistem dinamik dibedakan menjadi dua, yaitu sistem dinamik diskret dengan bentuk umum

UniversiDASAR TEORI

Universitas BBABAU Universitas Brawijava

dan sistem dinamik kontinu dengan bentuk umum

 $\frac{d\vec{x}}{dt} = f(\vec{x}, t), t \in \mathbb{R}, \vec{x} \in \mathbb{R}^n.$

 $\vec{x}_{t+1} = f(\vec{x}_t), t \in \mathbb{Z}$ atau $\mathbb{N}, \vec{x} \in \mathbb{R}^n$, vijava

Sistem dinamik diskret dinyatakan sebagai persamaan beda, sedangkan sistem dinamik kontinu dinyatakan sebagai persamaan diferensial.

(Alligood, dkk., 2000)

2.1.1 Sistem otonomus

Pada bagian ini, definisi-definisi yang dibahas merujuk pada Finizio dan Ladas (1982). Secara khusus, sistem persamaan diferensial yang memiliki bentuk

 $\frac{d\vec{x}}{dt} = f(\vec{x}), \vec{x} \in \mathbb{R}^n,$ (2.1) dengan $f(\vec{x})$ tidak bergantung terhadap variabel bebas *t* secara eksplisit dinamakan sistem otonomus. **Definisi 2.1.1 (Titik kesetimbangan).**

Titik \vec{x}^* yang memenuhi kondisi $\frac{d\vec{x}}{dt} = 0$ disebut titik kritis atau titik rawijaya kesetimbangan sistem (2.1). Titik kritis \vec{x}^* merupakan solusi sistem (2.1) yang bernilai konstan karena $\frac{d\vec{x}}{dt} = 0$. Universitas Brawijaya Universitas Brawijaya

BRAWIJA

awijava awiiava

awijaya awijaya

awiiava awiiava awiiava

Definisi 2.1.2 (Kestabilan titik kesetimbangan). Titik kesetimbangan \vec{x}^* sistem (2.1) dikatakan myersitas Brawijaya

1. stabil, jika untuk setiap arepsilon > 0 terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap solusi $\vec{x}(t)$ sistem (2.1) yang memenuhi persitas Brawijaya

Universitas Brawijaya Universitas Brawijaya Universitas Brawijaya Univ $\|\vec{x}(0) - x^*\|_{a} \leq \delta$ Iniversitas Brawijaya awijaya ada dan memenuhi awijaya awijaya

 $\|\vec{x}(t) - \vec{x^*}\| < \varepsilon, \forall t \ge 0, \text{ stars Brawijaya}$

wilay 2. Ustabil asimtotik, jika x^* stabil dan terdapat $\delta_0 > 0$ sedemikian ersitas Brawijaya awijaya sehingga untuk setiap solusi $\vec{x}(t)$ sistem (2.1) yang memenuhi awijava

$$\|\vec{x}(0) - \vec{x^*}\| < \delta_0,$$

awijaya ada dan memenuhi

$$\lim_{t \to \infty} \vec{x}(t) = \vec{x^*}, \forall t \ge 0$$

3. tidak stabil, jika tidak memenuhi kriteria stabil.

2.1.2 Sistem otonomous linear

awijaya Sistem otonomus linear n persamaan secara umum dinyatakan dalam bentuk

awijava awijaya awiiava awiiava awijava awijaya awijaya awiiava

 $\frac{dx_1}{dt} = h_{11}x_1 + h_{12}x_2 + \dots + h_{1n}x_n$ $\frac{dx_2}{dx_2} = h_{21}x_1 + h_{22}x_2 + \dots + h_{2n}x_n$ Universitas $\frac{dx_n}{dt}$ ijava Universitas Brawijava Universitas Brawijava Universitas Brawijava Universitas Brawijava

awi**dalam bentuk**as Brawijava wijdengan awi**6**va

dengan $h_{ij} \in \mathbb{R}, \forall i, j = 1, 2, \cdots, n$. Sistem (2.2) dapat dinyatakan Univ $\frac{dec{x}}{dt}$ itas Brawijaya Universitas Brawijaya (23) Univ $\frac{dec{x}}{dt}$ itas Brawijaya Universitas Brawijaya (23)

NUT

(2.2)versitas Brawijaya

 $\begin{array}{c} \textbf{1}\\ \textbf{1}\\ \textbf{2}\\ \textbf{3}\\ \textbf{4}\\ \textbf{4}\\$

awijaya awijaya awijaya

awijaya

awijaya

awijaya awijaya

awijaya

awijaya

awijaya

awijaya awijaya

awijaya

awijaya awijaya

awijaya awijaya

awijaya

awijaya awijaya

awijaya

 $\begin{pmatrix} h_{n1} & h_{n2} & \cdots & h_{nn} \end{pmatrix} \ \begin{pmatrix} x_n \end{pmatrix}$ Jika $det(H) \neq 0$, maka $\vec{x^*} = \vec{0}$ adalah satu-satunya titik kesetimbangan sistem (2.2). (Boyce dan DiPrima, 2012)

 $\begin{array}{ccccc} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2n} \end{array}$

Universitas Brawijaya

Penentuan kestabilan titik kesetimbangan dengan menggunakan definisi (2.1.2) tidak mudah, sehingga digunakan teorema berikut untuk menentukan kestabilan titik kesetimbangan sistem (2.2).

Teorema 2.1.3 (Kestabilan titik kesetimbangan sistem otonomus linear).

Kestabilan titik kesetimbangan sistem otonomus linear bergantung pada nilai eigen matriks H. Misalkan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ adalah nilai eigen matriks H. Titik kesetimbangan $\vec{x^*} = \vec{0}$ sistem (2.2) bersifat,

1. stabil asimtotik, jika $Re(\lambda_i) < 0$ untuk i = 1, 2, ..., n,

2. tidak stabil, jika sedikitnya terdapat satu nilai eigen yang memiliki bagian real positif.

Khusus untuk sistem (2.2) dua dimensi, titik $\vec{x^*} = \vec{0}$ bersifat stabil tetapi tidak stabil asimtotik, jika $Re(\lambda_i) = 0$ untuk i = 1, 2 atau salah satu nilai eigen bernilai 0 dan lainnya negatif.

awijaya Universitas

(Robinson, 2004)

 $x_{2/2}$

vijava

Univer

dan \vec{x}

2.1.3 Sistem otonomous nonlinear

Sistem otonomus nonlinear berdimensi n dapat ditulis seperti sistem (2.1) dengan $f_i(\vec{x})$ merupakan fungsi nonlinear yang memiliki turunan parsial dan kontinu di titik kesetimbangan \vec{x}^* untuk i = 1, 2, ..., n. Ekspansi deret Taylor fungsi f_i di sekitar titik kesetimbangan \vec{x}^* adalah $f_i(\vec{x}) = f_i(\vec{x}^*) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(\vec{x}^*)}{\partial x_j} (x_j - x_j^*) + \eta_i(\vec{x}),$ (2.4) Universitas Bravijaya Universitas Bravij

BRAWIJAY

wijaya	Universitas	Brawijaya	Universit		a Universitas		Univers
wijaya	Universitas	Brawijaya	Universit		a Universitas	Brawijaya	Univers
wijaya	Universitas	Brawijaya	Universit	as Brawijaya	a Universitas		Univers
	Universitas		Universit	as Brawijaya	a Universitas	Brawijaya	Univers
wijava	Universitas	Brawijaya	Universit	as Brawijav	a Universitas	Brawijaya	Univers
wijaya	gan $\eta_i(x)$		iku sisa	nash nan	ipitali olde	Brawijaya	itivers
wijmen	nenuhi sifat	Brawijaya	Universit	as Brawijaya	a Universitas		Univers
wijaya	Universitas	Brawijaya	Univers	$\underline{i(x)} \equiv 0^{1/3}$	a Universitas	Brawijaya	Univers
wijaya	Universitas	Brawijaya	$\vec{x} \rightarrow \vec{x}^{*S}$	$ec{q}$ Brawijaya	a Universitas		Univers
wijaya	Universitas	Brawijaya	Universit	as Brawijaya	a Universitas	Brawijaya	Univers
wideng	gan $\vec{q} = (q_1$	$,q_2,\cdot$ jaya,	$q_n)^I = i$	$ec{x}$ = $ec{x}^*$ vijaya	a Universitas		Univers
wijaya	Selanjutnya	a dengan r	nenggun	akan persai	maan (2.4) o	lan mengi	ngat ^{/ers}
wij <u>d</u> \vec{x} a_	$= \frac{d\vec{q}}{dt}$ dipero	Brawijaya	Universit	as Brāwijaya	a Universitas	Brawijaya	Univers
wij <i>dt</i> ja	Udtversitas	Brawijaya	Universit		a Universitas		Univers
wijaya	Universitas	Brawijaya	Universit	as Brawijaya	a Universitas		Univers
wijaya	Unive <i>9</i> 1itas	Brawijaya	$(x_n)_{v \in [sit]}$		a Universitas	Brawijaya	Univers
wijaya	$d^{\sf Jnive}q_2$ tas	Brawijay <i>f</i> ₂	(\vec{x}^*)		Universitas		Univers
wijaya-	Juliversitas	Brawijaya			rsitas	Brawijaya	Univers
wijaya	Universitas	Brawii					Univers
wijaya	Unve q_n ta/s	Br $\int f_n$	(\vec{x}^*)	CD		rawijaya	Univers
wijaya	Universitas	/ ∂1	$f_1(\vec{x^*}) \in \mathcal{E}_1$	$\partial f_1(\vec{x^*})$	$\partial f_1(\vec{x^*})$	tiaya	Univers
wijaya	Universit		$\frac{1}{\partial x_{1}}$	$\frac{\partial x_2}{\partial x_2}$	$\frac{-j_1(-)}{\partial x_{n_1}}$	$\left(\begin{array}{c} q_1 \end{array} \right)$	Univers
	Univer	$\underline{\partial f}$	$\frac{f_2(x^*)}{2}$ $\frac{f_2(x^*)}{2}$	$\frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x^*}$	$\frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x^2}$	q_2	Univers
	Univ	+	∂x_1	∂x_2	∂x_n	1 -	Inivers
wijaya	Uni						nivers
	Uni	∂f	$n(\vec{x^*}) \delta$	$f_n(\vec{x^*})$	$\partial f_n(\vec{x^*})$	$\int q_n$	nivers
wijaya	Uni		∂x_1	∂x_2 .	∂x_n		nivers
	Uni	(η_1)	(\vec{x})				nivers
wijaya	Univ	201	(\vec{r})		77		nivers
wijaya	Unive	$+$ $^{\prime \prime 2}$		STAT	4.2		Univers
	Unive		NB1		in the second se		Univers
wijaya	Univer		(\vec{r})	ETE			Univers
	Univers	$\langle \eta_n \rangle$			1 FL		Univers
wijaya	Universit		132		11/1	a	4.7)vers

w Karena $f_i(ec{x}^*)=0$ maka persamaan (2.5) dapat dituliskan sebagai Universitas Brawijaya

awijaya	Universitas					ijaya	Universitas	Brawijaya
awijaya	Universitas	l d	$f_1(\vec{x^*})$	$\partial f_1(\vec{x^*})$	$\partial f_1(\vec{x^*})$	vijaya 🗸	Universitas	Brawijaya
awijaya	Un/ve q_1 itas	Bra	$\frac{1}{\partial x_{1}}$	$\frac{\partial x_2}{\partial x_2}$	$\cdot \frac{\partial x_n}{\partial x_n}$	$\left\langle q_{1} \right\rangle \left\langle q_{1} \right\rangle$	Universitas	
awijaya	Universitas	Brav <u>∂</u>	$f_2(\vec{x^*})$	$\frac{\partial f_2(\vec{x^*})}{\dots}$	$\frac{\partial f_2(x^*)}{\partial f_2(x^*)}$	Brawijaya	Universitas	Brawijaya
awijaya-	Uriversitas	B rr awijaya	∂x_{1} ivers	∂x_2	∂x_n itas	Brawijaya	Universitas	
awijaya ⁰	lt _{Universitas}	Brawijaya	Universi	itas Brawijay	a Universitas	Brawijaya	Universitas	Brawijaya
awijaya	Unvegsita	Brawijay _{ð 1}	$r_n(\vec{x^*})^{\text{ers}}$	$\partial f_n(\vec{x^*})$ wijay	$\partial f_n(\vec{x^*})$	β rawij q_n va /	Universitas	
awijaya	Universitas	Brawijaya	∂x_1 ivers	ita dx2rawijay	a Uni ∂x_n itas	Brawijaya	Universitas	Brawijaya
awijaya	Universitas	Braw/jaya	$\dot{\vec{r}}$ hivers	itas Brawijay	a Universitas	Brawijaya	Universitas	Brawijaya
awijaya	Universitas	Brawijaya	Liniversi	itas Brawijay	a Universitas	Brawijaya	Universitas	Brawijaya
awijaya	Universitas	Brawijaya	Universi	itas Brawijay	a Universitas		Universitas	Brawijaya
awijaya	Universitas	Brawijaya	Universi	itas Brawijay	a Universitas		Universitas	
awijaya	Universitas	Brawijaya	Liniversi	itas Brawijay	a Universitas	Brawijaya	Universitas	Brawijaya
awijaya	Universitas	Brawijaya	Universi	itas Brawijay	a Universitas	Brawijaya	Universitas	
awijaya	Universitas	Brawijaya	Univers	itas Brawijay	a Universitas	Brawijaya	Universitas	Brawijaya
awij 8 ya	Universitas	Brawijaya	Univers	itas Brawijay	a Universitas		Universitas	
awijaya	Universitas		Univers	itas Brawijay	a Universitas	Brawijaya	Universitas	Brawijaya
awijaya	Universitas	Brawijaya	Universi	itas Brawijay	a Universitas	Brawijaya	Universitas	Brawijaya
awijaya	Universitas	Brawijaya	Univers	itas Brawijay	a Universitas	Brawijaya	Universitas	Brawijaya
awiiava	Universites		Univore	itas Brawijav	a Universitas	Brawijava	Universites	

awijaya

awijaya

awijaya

awijava

awijaya awijaya awijaya

awiiava

awiiava

awijaya awijaya awiiava

awiiava awijava awijaya

awijaya

awiiava

awijaya awijaya

awijaya awijaya

awijava

awijaya

awiiava

atau

dengan

ita $d\vec{q}$ = $J\vec{q}$ + $\vec{\eta}$ iversitas Brawijaya itas Brawijava Universitas Brawiiava $\partial f_1(x^*)$ $\cap \partial f_1(x^*)$ $\partial f_1(x^*)$ ∂x_{1} ∂x_2 ∂x_n $\partial f_2(x^*)$ $\partial f_2(x^*)$ ∂x_n $\overline{\partial x_1}$ as ∂x_2 Universitas Brawijava ersitas Brawijava ava $\partial f_n(x^*)$ $\partial f_n(x^*)$ $\partial f_n(x^*)$

disebut matriks Jacobi. Jika \vec{x} berada dekat dengan \vec{x}^* , maka $\vec{\eta}$ bernilai kecil, sehingga $\vec{\eta} \rightarrow 0$. Oleh karena itu, $\vec{\eta}$ dapat diabaikan dan sistem otonomus nonlinear dapat dihampiri oleh sistem otonomus linear

$$\frac{d\vec{q}}{dt} = J\vec{q}.$$

(2.6)

Jika $\vec{x} = \vec{x}^*$, maka $\vec{q}^* = \vec{0}$ sehingga sistem (2.6) mirip dengan sistem Uotonomus linear (2.3) dengan matriks J berperan seperti matriks H. Brawijaya Proses penghampiran sistem otonomus nonlinear oleh sistem linear dinamakan proses linearisasi.

Teorema 2.1.4 (Kestabilan titik kesetimbangan sistem otonomus nonlinear).

Kestabilan titik kesetimbangan sistem otonomus nonlinear bergantung pada kestabilan titik kesetimbangan sistem hasil linearisasi, yaitu bersifat

awiiava 1. stabil asimtotik, jika titik kesetimbangan sistem hasil linearisasi awijaya niversi bersifat stabil asimtotik Brawijava Universitas Brawijava awijaya 2. tidak stabil, jika titik kesetimbangan sistem hasil linearisasi bersifat tidak stabil. (Bovce dan DiPrima, 20 Universita 9

Kriteria Routh-Hurwitz as Brawijaya Universitas Brawijaya

Wileya Kestabilan ^Btitik^a kesetimbangan ^asistem otonomus nonlinear ^{assisted Brayllaya} bergantung pada nilai eigen matriks Jacobi sistem (2.6). Persamaan karakteristik untuk memperoleh nilai eigen adalah

Un $J_{r} = \lambda I_{B} = 0$ ava Universitas Brawijava (2.7) ver awijaya Universitas Brawijaya Universitas Brawijaya Universitas Brawijaya Universitas Brawijaya dengan λ adalah nilai eigen dan J adalah matriks Jacobi. Bentuk wijumum persamaan (2.7) adalah rsitas Brawijaya Universitas Brawijaya Universitas Brawijaya $\mathbb{U}\lambda^n + A_1\lambda^{n-1} + A_2\lambda^{n-2} + \dots + A_n = 0, A_n \neq 0$ awijaya (2.8) ersitas Brawijaya

^{awijaya} Titik kesetimbangan sistem (2.6) stabil asimtotik jika $Re(\lambda_i) < 0$ ersitas Brawijaya $\stackrel{\text{sitas}}{=} 1, 2, \ldots, n.$ Namun, penentuan tanda akar-akar untuk i karakteristik tidak selalu mudah, sehingga kriteria Routh-Hurwitz widapat digunakan untuk mengetahui kestabilan titik kesetimbangan ersitas Brawijaya w tanpa menentukan akar-akar karakteristiknya.

Akar-akar karakteristik persamaan (2.8) mempunyai bagian riil negatif jika dan hanya jika

	Unit		A SHANKYA	1. 2.	1 4	Λ	niversitas	Brawijaya
awijaya	Univ	1	A_1 A_2		A_1	A_3	A5 niversitas	Brawijaya
wij D_1 :	$= A_1 > 0,$	$D_2 = $	$\begin{vmatrix} 11 & 13 \\ 1 & 4_2 \end{vmatrix} > 0$	$, D_3 =$	1	A_2	A_4 > 0 , as	
awijaya	Unive		1 112	S.	0	A_1	A_3 Iniversitas	Brawijaya
awijaya	Univer		올기록기병		I	/	Universitas	Brawijaya
	Univers			$ A_1 $	4	· A2	Universitas	Brawijaya
awijaya	Universit		10 51	1	-3 A	1 27	a Universitas	Brawijaya
awijaya	Uni A_1 it A_3	$A_5 A_7$			$\mathbf{h}_2 \cdots$	$\cdot A_{2\eta}$	n ² -2n versitas	Brawijaya
awijaya	Universita A_2	$A_4 A_6$		0 A	$4_1 \cdots$	$\cdot A_{2i}$	n-3n versitas	Brawijaya
$_{\rm awijaya}$	Univenita	$A_3 A_5$	$ >0, D_k =$	= 0	$1 \cdot \cdot$	\cdot / A_{2i}	h-4n versitas	Brawijaya
awijaya	Universitas Br						a Universitas	
awijaya	Universitas Br	$A_2 A_4$	1	÷	S Br	awijaya	a Universitas	Brawijaya
	Universitas Br			aya U 0 vers	s()as Br	awijaya	AkIniversitas	

awiiava Universitas Brawiiava dengan k = 1, 2, ..., n. awijaya Misalkan diberikan persamaan (2.8) dengan n = 4 yaitu jaya Universitas $\lambda^4 + A_1\lambda^3 + A_2\lambda^2 + A_3\lambda + A_4 = 0$ as Brawijaya(2.9) ersitas Brawijaya Pada persamaan (2.9), $Re(\lambda_i) < 0$ untuk i = 1, 2, 3, 4 jika dan hanya ersitas Brawlaya iika

wii10a

1. $D_1 = |A_1|$ Universitas Brawijaya awijaya ersitas Brav A 3sit D awijaya ersitas Brav **Universitas Brav** awijaya iiav awijaya awijava Universitas Brawii Universitas Brawiiava awijaya 4. $D_4 =$ awijaya ijayo awijaya **Universitas Brav** awijava 0, sehingga $A_4 >$ awijaya awijaya awijaya awijaya

awiiava

awijava

awijaya awijaya

awijaya

awijaya

awijaya awijaya

awijaya

awijava

awijaya

awijaya

awijaya

awijaya

awijava

awijaya

awijaya awijaya A_1

aya

 A_1

 $A_{3/e}$

 A_2 $^{\circ}A_4$

 A_1 A_3

 A_{2}

 A_1

1 A_2

 $A_3 A_5$

 A_{Λ}

 A_3

0.

UAiversAs Brawijaya Universitas Brawijava Hniversitas Brawijaya $A_1 A_2 A_3$ $-A_{1}^{2}A_{4}$ s Brawijaya Universitas Brawijaya A_7 A_6 Universitas E $A_1 A_2 A_3 A_4$ A_5 A_4 BRAW

Universitas Brawijaya Universitas Brawijaya UA1ersitas Brawijaya Universitas Brawijaya Universitas Brawijaya Universitas Brawijaya

LA2/ersitas Brawijaya Universitas Brawijaya

 $= A_1 A_2 - A_3 > 0$, Brawijaya

(Murray, 2002) Brawijaya

Universitas Brawijaya

2.2 Model SIRS dengan Laju Penularan dan Pengobatan Tersaturasi

(2016) mengembangkan model SIRS dengan laju Jana, dkk. penularan dan pengobatan tersaturasi. Model SIRS terdiri dari tiga kelas, yaitu kelas individu rentan (Susceptible), kelas individu terinfeksi (Infective), dan kelas individu sembuh (Recovered). Model ini menggunakan laju penularan tersaturasi, yaitu laju penularan dengan mempertimbangkan efek penghambatan sebagai akibat Uadanya pencegahan yang dilakukan individu rentan ketika banyak Brawijaya Model ini juga menggunakan laju Brawijaya individu yang terinfeksi. yaitu laju pengobatan pengobatan tersaturasi, yang mempertimbangkan efek melambatnya pengobatan individu terinfeksi Uketika kapasitas medis terbatas dan jumlah individu terinfeksi banyak. Brawijaya Pada model tersebut diasumsikan bahwa individu yang telah sembuh memiliki kekebalan sementara terhadap suatu penyakit sehingga individu tersebut dapat kembali rentan. Selanjutnya, diagram kompartemen model SIRS dengan laju penularan dan pengobatan Brawiaya Utersaturasi digambarkan pada Gambar 2.1. versitas Brawijaya

awiiava

ya Universitas Brawijaya ya Universitas Brawijaya ya Universitas Brawijaya ya Universitas Brawijaya

aya Universitas E aya Universitas E aya Universitas E ijaya Universitas ijaya Universitas ijaya Universitas



itas Brawijaya itas Brawijaya s Brawijaya

s Brawijaya

Gambar 2.1: Diagram kompartemen model SIRS dengan penularan dan pengobatan tersaturasi

jaya Universit iava Universit

Model SIRS dengan laju penularan dan pengobatan tersaturasi diperoleh dengan menerjemahkan diagram kompartemen pada Gambar 2.1 dalam bentuk model matematika. Terdapat sembilan parameter yang memengaruhi laju perpindahan masing-masing kelas, yaitu Λ , β , b, μ , θ , γ , ϕ , α , dan ψ . Parameter Λ menyatakan laju kelahiran, β menyatakan laju kontak langsung, b menyatakan faktor saturasi yang mengukur efek penghambat penyebaran penyakit, μ menyatakan laju kematian alami, θ menyatakan laju kesembuhan alami, γ menyatakan laju kematian karena penyakit, ϕ menyatakan laju pengobatan, α menyatakan faktor saturasi yang mengukur efek tunda dari individu terinfeksi dalam pengobatan, dan ψ merupakan laju individu sembuh menjadi rentan kembali. Konstruksi model epidemi SIRS dengan laju penularan dan pengobatan tersaturasi dijelaskan secara rinci berikut ini.

2.2.1 Laju perubahan kelas individu rentan (Susceptible)

Misalkan S(t), I(t), dan R(t) berturut-turut menyatakan jumlah individu rentan, terinfeksi, dan sembuh setiap saat. Individu yang baru lahir akan masuk ke dalam kelas rentan, sehingga jumlah individu pada kelas rentan bertambah dengan laju Λ . Jumlah individu pada kelas rentan juga bertambah karena perubahan individu yang telah sembuh

awijaya Universitas B awijaya Universitas B awijaya Universitas B awijaya Universitas B awijaya Universitas B

Universitas Brawijaya U Universitas Brawijaya U Universitas Brawijaya U Universitas Brawijaya U

Iniversitas Brawijaya Iniversitas Brawijaya Iniversitas Brawijaya Iniversitas Brawijaya Iniversitas Brawijaya

ijaya Universitas Bra Jniversitas Brawijaya Alayarsitas Brawijaya Alayarsitas Brawijaya Alayarsitas Brawijaya Mayorsitas Brawijaya Alayarsitas Brawijaya awijaya

awiiava

awiiava

awijaya

awijaya awiiava

awijaya

awiiava

awijaya

awiiava

menjadi rentan kembali dengan laju ψ . Interaksi secara langsung antara individu rentan dengan individu terinfeksi menyebabkan berkurangnya jumlah individu pada kelas rentan karena terjadinya proses penularan. Laju penularan pada model ini merupakan laju penularan tersaturasi yang dinyatakan sebagai $g(I) = \frac{\beta I}{1+bI}$ dengan βI menyatakan kekuatan penyebaran penyakit dan $\frac{1}{1+bI}$ menyatakan efek penghambatan penyebaran penyakit. Berkurangnya jumlah individu pada kelas rentan juga disebabkan oleh kematian alami dengan laju μ . Dengan demikian, laju perubahan kelas rentan dapat dinyatakan sebagai

awijaya $rac{dS}{dt}=\Lambda-rac{eta SI}{1+bI}-\mu S+\psi R$.rawijaya awijaya

2.2.2 Laju perubahan kelas individu terinfeksi (Infective)

Interaksi langsung antara individu rentan dengan individu terinfeksi menyebabkan terjadinya infeksi pada individu rentan. Hal ini menyebabkan bertambahnya jumlah individu pada kelas terinfeksi dengan laju $\frac{\beta I}{1+bI}$.

Jumlah individu pada kelas terinfeksi menurun disebabkan adanya pengobatan pada individu terinfeksi. Laju pengobatan pada model ini merupakan laju pengobatan tersaturasi yang dinyatakan sebagai $T(I) = \frac{\phi I}{(1+\alpha I)}$ dengan ϕI menyatakan efisiensi pengobatan dan $\frac{1}{1+\alpha I}$ menyatakan efek terlambatnya individu terinfeksi untuk mendapatkan pengobatan. Jumlah individu pada kelas terinfeksi juga menurun disebabkan individu pada kelas ini mengalami kesembuhan alami dengan laju θ . Selain itu, berkurangnya jumlah individu pada kelas ini juga disebabkan oleh kematian alami dengan laju μ dan kematian akibat penyakit dengan laju γ . Dengan demikian, laju perubahan kelas terinfeksi per satuan waktu dapat dinyatakan sebagai

Universitas BrawidI = $\frac{\beta SI}{1+bI}$ = $\frac{\phi I}{1+aI}$ = $\frac{\mu I}{1+aI}$

2.2.3 Laju perubahan kelas individu sembuh (Recovered)

Jumlah individu pada kelas sembuh bertambah karena adanya pengobatan pada individu terinfeksi dengan laju $T(I) = \frac{\phi I}{(1+\alpha I)}$ dan

ijaya Universitas Brawijaya ijaya Universitas Brawijaya ijaya Universitas Brawijaya ijaya Universitas Brawijaya awiiava

awiiava

kesembuhan alami pada individu terinfeksi dengan laju θ . Jumlah individu pada kelas ini berkurang disebabkan oleh kematian alami dengan laju μ dan perubahan individu sembuh menjadi rentan kembali karena kekebalan yang sementara dengan laju ψ . Dengan demikian, laju perubahan kelas sembuh per satuan waktu dapat dinyatakan

Iniversitas Brawijaya Universitas Brawijaya sitas $\mu R = \eta R + \theta I$ sitas Brawijay (2.12) awiiava Universitas Bradtava 1_{t} $\psi \alpha d$ itas Brawijaya Universitas Brawijaya Berdasarkan persamaan (2.10)-(2.12) diperoleh sistem otonomus w nonlinear sebagai berikut U awiiava

sitasdSav $= \frac{\beta SI}{1+bI} - \frac{\phi I}{1+\alpha I} - \frac{\phi I}{1+\alpha I}$ dIdtdR $\frac{\phi I}{1+\alpha I} - \mu R - \psi R + \theta I,$

dengan kondisi awal $S(0), I(0), R(0) \ge 0$. $\Lambda, \beta, \mu, \theta, \gamma, \phi, \psi$ bernilai positif, dan b, α bernilai non negatif. Titik kesetimbangan bebas penyakit model (2.13) adalah $Q_0 = (\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0)$ dan titik kesetimbangan endemik adalah $Q_* = (S_*, I_*, R_*)$ (Jana, dkk., 2016).

(2.13)

Model SEIR dengan Laju Penularan dan Pengobatan 2.3Tersaturasi

wijaya Berbeda dengan Jana, dkk. (2016), Zhang, dkk. (2012) menggunakan laju penularan dan pengobatan tersaturasi pada model epidemi SEIR. Model SEIR terdiri dari empat kelas, yaitu kelas individu rentan (Susceptible), kelas individu terpapar atau terinfeksi w tetapi belum mampu menulari individu lain (*Exposed*), kelas individu ers terinfeksi dan dapat menulari individu lain (Infectious), dan kelas individu sembuh (Recovered). Pada model tersebut diasumsikan bahwa individu yang telah sembuh memiliki kekebalan permanen. Selanjutnya, diagram kompartemen model SEIR dengan laju penularan dan pengobatan tersaturasi digambarkan pada Gambar 2.2.

14

awijaya

awijaya

awijaya awijaya awijaya awijaya

awijaya

awijaya awijaya

awijaya

awijaya

awijaya

awijaya

awijaya awijaya

awijaya awijaya

awijaya awijaya

awiiava

awijaya

awijaya awijaya

awijaya

awijaya

awijaya

awijava

awijaya Universitas Brawijay awijaya Universitas Brawijay awijaya Universitas Brawijay awijaya Universitas Brawijay awijaya Universitas Brawija Universitas Brawijaya Universitas Brawijaya Universitas Brawijaya Universitas Brawijaya

 $\downarrow D_{1}^{\mu S}$ $\downarrow S$ $\downarrow S$ $\downarrow S$ $\downarrow I$ $\downarrow I$ $\downarrow R$ $\downarrow I$ $\downarrow I$

Gambar 2.2: Diagram kompartemen model SEIR dengan laju penularan dan pengobatan tersaturasi

Model SEIR dengan laju penularan dan pengobatan tersaturasi diperoleh dengan menerjemahkan diagram kompartemen pada Gambar 2.2 dalam bentuk model matematika. Terdapat sembilan parameter yang memengaruhi laju perpindahan masing-masing kelas, yaitu Λ , β , b, μ , θ , γ , ϕ , α yang mewakili hal yang sama seperti pada model (2.13), dan δ merupakan laju individu terpapar menjadi terinfeksi. Konstruksi model epidemi SEIR dengan laju penularan dan pengobatan tersaturasi dijelaskan secara rinci berikut ini.

2.3.1 Laju perubahan kelas individu rentan (Susceptible)

Misalkan S(t), E(t), I(t), dan R(t) berturut-turut menyatakan jumlah individu rentan, terpapar, terinfeksi, dan sembuh setiap saat. Laju perubahan kelas rentan pada model ini hampir sama dengan persamaan (2.10), perbedaannya jumlah individu rentan tidak bertambah akibat perubahan individu yang telah sembuh menjadi rentan kembali dengan laju ψ . Dengan demikian, laju perubahan kelas rentan per satuan waktu dapat dinyatakan sebagai

> Universitas Brawij βSI Universitas Brawijaya Universitas Brawijaya

> Univ dt_{sitas} Braw 1 + $bI_{niversitas}$ Brawijava

awijaya Universitas Brawijaya Brawijaya Universita Brawijaya Universita Brawijaya Universita

jaya Universitas jaya Universitas

Univ(2:14) Brawijaya

Universita Brawijava

n jaya Uni sitas Brawijaya Uni sitas Brawijaya Uni

2.3.2 Laju perubahan kelas individu terpapar (*Exposed*)

Jumlah individu pada kelas terpapar bertambah dengan laju $\frac{\beta I}{1+bI}$ akibat interaksi langsung antara individu rentan dengan individu terinfeksi. Jumlah individu pada kelas terpapar berkurang karena individu pada kelas ini berubah menjadi individu terinfeksi dan menulari individu lain dengan laju δ . Berkurangnya jumlah individu pada kelas terpapar juga disebabkan oleh kematian alami dengan laju μ . Dengan demikian, laju perubahan kelas terpapar per satuan waktu dapat dinyatakan sebagai

ya Universitas Brawij $\frac{dE}{dt} = \frac{\beta SI}{1+bI} - \mu E - \delta E.$

2.3.3 Laju perubahan kelas individu terinfeksi (Infectious)

Laju perubahan kelas terinfeksi pada model ini hampir sama dengan persamaan (2.11), perbedaannya jumlah individu pada kelas terinfeksi bertambah akibat perubahan individu terpapar menjadi individu terinfeksi dan menulari individu lain dengan laju δ . Dengan demikian, laju perubahan kelas terinfeksi per satuan waktu dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{dI}{dt} = \delta E - \frac{\phi I}{1 + \alpha I} - \mu I - \gamma I - \theta I.$$

2.3.4 Laju perubahan kelas individu sembuh (Recovered)

Laju perubahan kelas sembuh pada model ini hampir sama dengan persamaan (2.12), perbedaannya jumlah individu pada kelas sembuh tidak berkurang akibat perubahan individu sembuh menjadi rentan kembali karena kekebalan yang sementara dengan laju ψ . Dengan demikian, laju perubahan kelas sembuh per satuan waktu dapat dipustakan

ImageImageImageImageImageUniversitasBrawijayaUniversitasImageUniver

Initial StrawInitial StrawawijayaUniversitas BrawijayaUniversitas BrawawijayaUniversitas BrawijayaUniversitas Braw $\mu R + \theta I$ iversitas BrawijayaUniversitas BrawijayaUniversitas BrawawijayaUniversitas BrawijayaUniversitas BrawijayaawijayaUniversitas BrawijayaUniversitas BrawawijayaUniversitas BrawijayaUniversitas BrawawijayaUniversitas BrawijayaUniversitas BrawawijayaUniversitas BrawijayaUniversitas BrawawijayaUniversitas BrawijayaUniversitas BrawawijayaUniversitas BrawijayaUniversitas BrawawijayaUniversitas BrawijayaUniversitas Braw

(2.16)

s Brawijav(2.15)

awijava

awijaya awijaya awijaya

awiiava

awiiava

awijaya awijaya

awijaya

awiiava

awijaya

awijaya awijaya

awijaya

awijava

awijaya

awiiava

awijava

awijaya

awijaya

Berdasarkan persamaan (2.14)-(2.17) diperoleh sistem otonomus nonlinear sebagai berikut itas Brawijava Universitas Brawijava awijava Universitas BrawijaydSUniversitaseta SIwijaya Universitas Brawijaya Universitas Brawijay $\frac{dB}{dt} = \Lambda \operatorname{rst} \frac{\beta S I}{1 + bI}$ ja μS , iversitas Brawijaya Universitas Brawijay $\frac{dE}{dE}$ in $\beta S I$ Brawijaya Universitas Brawijaya Universitas Brawijay $\frac{dE}{dE}$ is $\mu E = \delta E$, ersitas Brawijaya Universitas Brawijaydt Univ1+bI Brawijaya Universitas Brawijaya awijaya Universitas Brawijay $\frac{dI}{dt}$ = δE itas B ϕI ijaya Universitas Brawijay $\frac{dI}{dt}$ = δE itas $\frac{1}{1+\alpha I}$ ya γI vers awijaya awijaya $^{v}dR^{\text{University}}\phi I$ awijava $-\mu R + \theta I$, ers awijaya Universitas Brawijay $\frac{1}{1+\alpha I}$ Universitas Brawijay $\frac{dt}{1+\alpha I}$ awiiava awijaya

U dengan kondisi awal $S(0), E(0), I(0), R(0) \ge 0$. $\Lambda, \beta, \mu, \theta, \gamma, \phi, \delta$ U bernilai positif, dan b, α bernilai non negatif.

2.4 Angka Reproduksi Dasar

Dalam epidemiologi, angka reproduksi dasar (\mathcal{R}_0) merupakan angka yang menyatakan jumlah individu baru yang terinfeksi oleh Braw satu individu yang telah terinfeksi sebelumnya selama masa penyebaran penyakit pada populasi rentan. \mathcal{R}_0 merupakan salah satu komponen penting dalam model epidemi penyakit karena dapat menentukan terjadi atau tidaknya wabah penyakit dalam suatu Br populasi. Jika $\mathcal{R}_0 <$ 1 maka satu individu yang terinfeksi menyebabkan rata-rata kurang dari satu individu baru yang terinfeksi, sehingga nantinya suatu populasi bisa bebas dari penyakit. 1 maka satu individu yang terinfeksi Sebaliknya, jika $\mathcal{R}_0 >$ menyebabkan rata-rata lebih dari satu individu baru yang terinfeksi, sehingga nantinya terjadi wabah penyakit dalam suatu populasi (Heffernan, 2005).

Angka reproduksi dasar (\mathcal{R}_0) dapat ditentukan dengan menggunakan matriks generasi selanjutnya. Konstruksi matriks generasi selanjutnya hanya melibatkan kelas terinfeksi, baik yang mampu menulari penyakit maupun yang belum mampu menulari penyakit. Diberikan $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)^T$ dengan $x_i \ge 0$ menyatakan jumlah individu pada kelas ke- $i, i = 1, 2, \dots, n$ pada saat t. Misalkan kelas yang terinfeksi sebanyak m dengan $m \le n$. Model

Universites

jaya Universitas Brawijaya jaya Universitas Brawijaya jaya Universitas Brawijaya universitas Brawijaya Universitas Brawijaya

kompartemen dengan kelas terinfeksi dapat dinyatakan dalam bentuk

Iniversitas Brawijaya Hniversitas Brawijaya Universitas Brawijaya Iniversitas Braw $i_i = \mathcal{F}_i = \mathcal{V}_i, i = 1, 2, \cdots$ mersitas Brawijaya

dengan \mathcal{F}_i menyatakan tingkat kemunculan infeksi baru dari suatu penyakit pada kelas ke-*i* dan bernilai positif, sedangkan \mathcal{V}_i menyatakan transfer keluar dan masuk pada kelas ke-*i* dan masing-masing bernilai positif dan negatif. \mathcal{F}_i merupakan komponen vektor \mathcal{F} dengan $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_m)^T$ dan \mathcal{V}_i merupakan komponen vektor \mathcal{V} dengan $\mathcal{V} = (\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots, \mathcal{V}_m)^T$. Matriks F dan V adalah matriks berukuran $m \times m$ yang didefinisikan sebagai

$$F(Q_0) = \left(\frac{\partial \mathcal{F}_i(Q_0)}{\partial x_j}\right) \operatorname{dan} V(Q_0) = \left(\frac{\partial \mathcal{V}_i(Q_0)}{\partial x_j}\right)$$

dengan i, j = 1, 2, ..., m dan Q_0 adalah titik kesetimbangan bebas penyakit. Matriks generasi selanjutnya didefinisikan sebagai

$$K = [F(Q_0)][V(Q_0)]^{-1}$$

Angka reproduksi dasar (\mathcal{R}_0) dapat diperoleh dari

$$\mathcal{R}_0 = \rho(K)$$

dengan $\rho(K)$ merupakan radius *spectral* matriks K, yaitu modulus maksimal nilai eigen matriks K (Brauer dan Chavez, 2010).

vij**Contoh**vers

awijava

Perhatikan model (2.13), terdapat satu kelas terinfeksi yaitu kelas I sehingga m = 1. Titik kesetimbangan bebas penyakit model (2.13) adalah $Q_0 = (\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0, 0)$. Berdasarkan definisi sebelumnya, komponen \mathcal{F} dan \mathcal{V} dapat disusun sebagai berikut

Universitas Brawijaya $\mathcal{F} = \left(\begin{array}{c} \frac{\beta SI}{1+bI} \end{array}\right) \operatorname{dan} \mathcal{V} = \left(\begin{array}{c} \frac{\phi I}{1+\alpha I} + \mu I + \gamma I + \theta I \end{array}\right).$ Selanjutnya setiap entri komponen \mathcal{F} dan \mathcal{V} dicari turunan parsialnya terhadap I sehingga diperoleh matriks F dan V yaitu $F = \left(\begin{array}{c} \frac{\beta S}{1+bI} - \frac{\beta bSI}{(1+bI)^2} \end{array}\right) \operatorname{dan}^{F}$ $F = \left(\begin{array}{c} \frac{\beta S}{1+bI} - \frac{\beta bSI}{(1+bI)^2} \end{array}\right) \operatorname{dan}^{F}$ Universitas Brawijaya $V = \left(\begin{array}{c} \frac{\phi}{(1+\alpha I)} - \frac{\phi \alpha I}{(1+\alpha I)^2} + (\mu + \gamma + \theta) \end{array}\right).$ Universitas Brawijaya Universit awijaya awijaya

awijaya awijava awijaya

awijaya

awijaya awijaya awijaya

awijaya awijaya

awijaya awiiava awijaya awijaya awijaya

awijaya

awijaya

awijaya awijaya

awiiava

awijaya

Matriks F dan V disubstitusi dengan Q_0 sehingga diperoleh ersitas Brawijaya Universitas Brawijaya $\int dan V(Q_0) = (\phi + \mu + \gamma + \theta)$ Jniversitas Brawijava Universitas $F(Q_0)$ a \equiv Universitas Brawijaya Universitas Brawijaya Kemudian dilakukan pencarian invers matriks $V(Q_0)$ sehingga diperoleh sitas Brawijaya Universitas Brawijaya $V_{Ve}^{\dagger}(Q_0) = \sqrt{1} \overline{\phi + \mu + \gamma + \theta}$ Dimisalkan $K = F(Q_0)V^{-1}(Q_0)$, sehingga diperoleh $\overline{\phi + \mu + \gamma} + \theta$ $rac{eta\Lambda}{\mu(\phi+\mu+\gamma+ heta)}$

Unive Matriks K merupakan matriks generasi selanjutnya berukuran $1 \times$ Brawijaya \Box 1. Nilai eigen dari matriks K yaitu

$$\lambda = \frac{\beta \Lambda}{\mu(\phi + \mu + \gamma + \theta)}.$$

Angka reproduksi dasar (\mathcal{R}_0) diperoleh dari radius *spectral* matriks K atau modulus maksimal nilai eigen, yaitu

awijaya awijaya awijaya

awijaya

$${\cal R}_0 = rac{eta \Lambda}{\mu(\phi+\mu+\gamma+ heta)}.$$

Titik kesetimbangan bebas penyakit model (2.13) bersifat stabil Brawlaya < 1, sedangkan titik kesetimbangan asimtotik lokal jika \mathcal{R}_0 endemiknya bersifat stabil asimtotik lokal jika $\mathcal{R}_0 > 1$ (Jana, dkk.,

12016).as Bra awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya

Universit Brawijava

Universitas Brawijaya

BRAWIJAYA

awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijava awijaya awijaya awijaya awijaya AVERS awijaya awiiava awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awi 20a

Universitas Pravijaya Universitas Brawijaya

BRANIJALY

4.5

awijaya awijaya

awijaya

awijava

awijaya

awijaya

awijaya awijaya

awijaya

awijaya

awijaya awijaya

awiiava

awijava

awijaya awijaya awiiava

awijava

awijaya awijaya awijaya

awijava

awiiava

awijaya awijaya awijaya

aya Universitas Brawijaya aya Universitas Brawijaya

3.1 Konstruksi Model Pada skripsi ini dibahas model epidemi SEIRS dengan laju penularan dan pengobatan tersaturasi yang merujuk artikel Khan, dkk. (2017). Model SEIRS terdiri dari empat kelas, yaitu kelas individu rentan (*Susceptible*), kelas individu terpapar atau terinfeksi tetapi belum mampu menulari individu lain (*Exposed*), kelas individu terinfeksi dan dapat menulari individu lain (*Infectious*), dan kelas individu sembuh (*Recovered*). Model ini menggunakan laju penularan dan pengobatan tersaturasi seperti pada subbab 2.2 dan 2.3. Pada model ini diasumsikan bahwa individu yang telah sembuh memiliki kekebalan sementara sehingga dapat kembali menjadi rentan. Diagram kompartemen model SEIRS dengan laju penularan dan pengobatan tersaturasi disajikan pada Gambar 3.1.

Univers PEMBAHASAN

Universitas BABaIII Universitas Brawijava



Gambar 3.1: Diagram kompartemen model epidemi SEIRS dengan laju penularan dan pengobatan tersaturasi

Konstruksi model SEIRS dengan laju penularan dan pengobatan tersaturasi mirip dengan model (2.18). Perbedaannya terletak pada adanya aliran perpindahan individu sembuh menjadi rentan kembali seperti pada model (2.13). Terdapat sepuluh parameter yang 21

BRAWIJA)

memengaruhi laju perpindahan masing-masing kelas, yaitu Λ , β , b, μ , θ , γ , ϕ , α , δ , dan ψ yang mewakili hal yang sama seperti pada model (2.13) atau (2.18). Berdasarkan hal tersebut, sistem otonomus nonlinear untuk model ini dinyatakan sebagai

bwijaya Universitas Brawijaya Universitas B

dengan kondisi awal $S(0), E(0), I(0), R(0) \ge 0$. $\Lambda, \beta, \mu, \delta, \phi, \gamma, \theta, \psi$ bernilai positif, dan b, α bernilai non negatif.

3.2 Titik Kesetimbangan Model

Titik kesetimbangan sistem (3.1) diperoleh apabila $\frac{dS}{dt} = \frac{dE}{dt} = \frac{dI}{dt} = \frac{dR}{dt} = 0, \text{ yaitu}$ $\Lambda - \left(\frac{\beta I}{1+bI} + \mu\right)S + \psi R = 0, \quad (3)$ $\frac{\beta SI}{1+bI} - (\mu + \delta)E = 0, \quad (3)$ $\delta E - \frac{\phi I}{1+\alpha I} - (\mu + \gamma + \theta)I = 0, \quad (3)$ $\frac{\phi I}{1+\alpha I} + \theta I - (\mu + \psi)R = 0. \quad (3)$ Misalkan $a_1 = \mu + \delta, a_2 = \mu + \psi, \text{ dan } a_3 = \mu + \gamma + \theta, \text{ maka persam}$ (3.2b), (3.2c), dan (3.2d) menjadi

 $\frac{\phi I}{1 + \alpha I} + \theta I - (\mu + \psi)R = 0.$ Misalkan $a_1 = \mu + \delta$, $a_2 = \mu + \psi$, dan $a_3 = \mu + \gamma + \theta$, maka persamaan (3.2b), (3.2c), dan (3.2d) menjadi universitas Brawijaya (3.2b), (3.2c), dan (3.2d) menjadi $\frac{\beta SI}{1 + bI} = a_1 E = 0$, versitas Brawijaya Universitas Brawijaya Universitas

(3.2a)

(3.2b)versitas Brawi

awijaya awijaya

awijaya

awijaya

awijaya awijaya awijaya

awijaya

awijaya awijaya awijaya

awijaya awijava awijaya

awijaya awijaya

awijaya awijaya awijaya

awijaya

awijaya

awijaya

awijaya

Berdasarkan persamaan (3.4) dan (3.5), diperoleh $\prod_{E} [\phi + a_3(1 + \alpha I)]I$ Universitas Bi $\delta(1_{i}+\alpha I)$ iversitas Brawijava Universitas Brawijaya Udan rsitas Brawijaya Universita $+ \theta (1 + \alpha I)]I$ ϕ UniR Universitas $a_2(1_{ja}+\alpha I)$ iversitas Brawijava Selanjutnya dengan persamaan mensubstitusikan

persamaan (3.3) diperoleh

 βSI

1 + bI

awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya

sehingga

 $(+ bI)[\phi + a_3(1 + \alpha I)]I$

 $=\frac{a_1[\phi+a_3(1+\alpha I)]}{\delta(1+\alpha I)}$

Kemudian dengan mensubstitusikan persamaan (3.7) dan (3.8) ke persamaan (3.2a) diperoleh

$$\begin{aligned} (1+bI)I\{a_2\beta\delta\Lambda(1+\alpha I)+\psi\beta\delta[\phi+\theta(1+\alpha I)]I\\ -a_1a_2[\phi+a_3(1+\alpha I)][\beta I+\mu(1+bI)]\} &= 0 \end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (3.9) diperoleh dua kemungkinan yaitu ersitas Brawijaya

awijaya

atau awijaya awijaya

$$a_{2}\beta\delta\Lambda(1+\alpha I) + \psi\beta\delta[\phi + \theta(1+\alpha I)]I$$

$$-a_{1}a_{2}[\phi + a_{3}(1+\alpha I)][\beta I + \mu(1+bI)] = 0.$$
Jika $I = 0$ maka menurut persamaan (3.6) dan (3.7)
 $E = 0$ dan $R = 0.$ Setelah itu, dengan mensubstitusikan
 $R = 0$ ke persamaan (3.2a) diperoleh
Iniversitas Brawijaya
Iniversit

Universitas Brawijaya Universitas Brawijaya (3.9)) diperoleh I∪≕v0 dan Brawijaya

Universi23 Brawijaya

Unive(3:6) Brawijaya

Unive(317) Brawijaya

(3.6)^{rsi}ke ^{Brawijaya}

Universitas Brawijava

Dengan demikian, diperoleh titik kesetimbangan yang pertama, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit, Brawijaya Universitas Brawijaya Universitas Brawijaya Universitas Brawijaya Universitas Brawijaya Universitas $Q_0 = (S_0, E_0, I_0, R_0) = (a_{\overline{v}a}, 0, 0, 0)$ as Brawijaya Universitas Brawijaya Universitas Brawijaya Universitas Brawijaya Wilaya Titika kesetimbangan yang kedua diperoleh jika I \neq Berdasarkan persamaan (3.9) jika $I \neq 0$ maka $a_2\beta\delta\Lambda(1+\alpha I) + \psi\beta\delta[\phi + \theta(1+\alpha I)]I$ $-a_1 a_2 [\phi + a_3 (1 + \alpha I)] [\beta I + \mu (1 + bI)] = 0.$ awijaya awiiava RAWIJA

Universitas Brawijaya

(3.10)^{versitas}

Persamaan tersebut ekuivalen dengan

awijaya awijaya awiiava

$$AI^2 + BI + C = 0, I_2 \ge I$$

aw dengan

awiiava

 $A = \alpha [a_1 a_2 a_3 (\beta + \mu b) - \delta \psi \theta \beta] (> 0)$ $B = a_1 a_2 [(\beta + \mu b)(\phi + a_3) + a_3 \alpha \mu] - \beta \delta [a_2 \alpha \Lambda + \psi(\phi + \theta)]$ $C = a_2[a_1\mu(\phi + a_3) - \beta\delta\Lambda].$

Kemudian berdasarkan persamaan (3.8), (3.6), dan (3.7) diperoleh



dengan I_* merupakan akar-akar riil positif persamaan (3.10). Dengan demikian, diperoleh titik kesetimbangan yang kedua, yaitu titik kesetimbangan endemik $Q_* = B(S_*, E_*, I_*, R_*)$. Penurunan persamaan (3.9) dan (3.10) secara rinci dapat dilihat pada Lampiran 1 dan 2. wi24a

awijaya

awijaya

awijaya

awijava

awijaya awijaya

awijaya

awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya

awijaya

awijaya awijaya

awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya

awijaya awijaya

awijaya

awijaya

3.2.1 Angka reproduksi dasar Angka reproduksi dasar (\mathcal{R}_0) ditentukan dengan metode matriks generasi selanjutnya. Matriks generasi selanjutnya didefinisikan sebagai $K = [F(Q_0)][V(Q_0)]^{-1}$. Kemudian dapat ditentukan angka reproduksi dasar (\mathcal{R}_0) , yaitu radius *spectral* matriks K. Langkah awal untuk mendapatkan (\mathcal{R}_0) yaitu membentuk matriks Jacobi F dan V. Komponen pembentuk matriks F dan V terdiri dari kelas yang terinfeksi, yaitu kelas terpapar (E) dan kelas terinfeksi (I)sehingga m = 2. Matriks F dan V adalah matriks yang masing-masing terbentuk dari komponen $\mathcal{F} = (f_1, f_2)$ dan

sebagai berikut

The product
$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} \frac{\beta SI}{1+bI} \\ 0 \end{pmatrix} \operatorname{dan} \mathcal{V} = \begin{pmatrix} a_1 E \\ -\delta E + \frac{\phi I}{1+\alpha I} + a_3 I \end{pmatrix}$$

Selanjutnya membentuk matriks F dan V dengan cara mendiferensialkan setiap entri komponen \mathcal{F} dan \mathcal{V} terhadap E dan I sehingga

 $\mathcal{V} = (v_1, v_2)$. Berdasarkan definisi, komponen \mathcal{F} dan \mathcal{V} dapat disusun

$$F = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\beta S}{1+bI} - \frac{\beta b SI}{(1+bI)^2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} dan$$
$$V = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ -\delta & \frac{\phi}{(1+\alpha I)} - \frac{\phi \alpha I}{(1+\alpha I)^2} + a_3 \end{pmatrix}$$

Langkah selanjutnya yaitu membentuk matriks K berukuran 2×2 . Pertama, mensubstitusi matriks F dan V dengan Q_0 sehingga diperoleh

Universitas

Universi25 Braw

awijaya as Brawijava, 0awijaya 6ita⁄a₁Brawii0/a μ dan $V(Q_0)$ awijaya hiveosita $-\delta \phi + a_3$ as Brawijava Universitas Brawijaya awijaya Kemudian matriks $V(Q_0)$ diinverskan sehingga diperoleh Universitas Brawijaya Brawijava Universitas B $\overline{a_1}$ (Q_0) Universitas Brawijaya

awijaya

awijaya

awijaya

awijaya

awijaya awijaya

awijava

awijaya awijaya awijaya awijaya awiiava

awijaya

awijaya awiiava

Berdasarkan matriks $F(Q_0)$ dan $V(Q_0)$, kemudian dibentuk matriks awi generasi selanjutnya, yaitu niversitas Brawijaya Universitas Brawijaya **Universitas Brawijava** Universitas Brawijava Universitas Brawijava $\beta\Lambda$ er) it (s Bra $\frac{1}{a_1}$ aya er) it (s <u>Brav</u>á java fay0 ava Universitas Brawijaya Universitas Kraw Universit Universita Unive/sit $a_1(\phi+a_3)$ $\phi + a_3$ Universitas Brawijaya Universitas Brawijava $I\beta\delta\Lambda$ ersitas B $\beta\Lambda$ ijava Universitas Brawijava $\overline{\mu a_1(\phi+a_3)}$ $\overline{\mu(\phi+a_3)}$ $\overline{\mu(\phi+a_3)}$ Universitas Brawijava Universitas Brawi Universitas Brawijaya Universitas Brawijaya Universitas Brawijaya Universitas Brawijaya Langkah selanjutnya adalah nilai eigen dari matriks K $|K - \lambda I| = 0$ awijaya Universit γ s Bra $\beta\delta\Lambda$ $\mu a_1(\phi + a_3)$ $\mu(\phi + a_3)$ = 0

Diperoleh nilai eigen dari matriks K yaitu

 $\lambda_1 = \frac{\beta \delta \Lambda}{\mu a_1(\phi + a_3)} \operatorname{dan} \lambda_2 = 0.$

Kemudian menentukan angka reproduksi dasar yang merupakan radius w *spectral* matriks K.

awijaya awijaya awijava awijaya awijaya

awiiava awijaya awijaya awijaya

awijaya awijaya awijaya awijava awi 26a

 $\mathcal{R}_0 = \rho(K)$ $\frac{\beta\delta\Lambda}{\mu a_1(\phi+a_3)}, \lambda_2 = 0$ = max $\beta\delta\Lambda$ Universitas Brav $\mu a_1(\phi+a_3)$

awijaya awijaya

awijaya

awijaya awiiava

awijaya awijaya awijaya

awijaya

awijaya

awijaya

awijaya awijaya

awijaya

awijaya

awijaya

awiiava

Eksistensi titik kesetimbangan Setelah \mathcal{R}_0 diketahui, persamaan (3.10) dapat ditulis sebagai berikut $(AI^2 + BI + C)$ $= 0.1_{2}$ >t I_{1} Brawijaya Udengans Brawijaya ${}^{\sf Un}A = \alpha[a_1a_2a_3(\beta + \mu b) - \delta\psi\theta\beta] (> 0)^{\sf Universitas}$ Brawijaya awijaya awijaya $B = a_1 a_2 [(eta + \mu b)(\phi + a_3) + a_3 lpha \mu] - eta \delta [a_2 lpha \Lambda + \psi(\phi + heta)]_{
m error stars}$ Brawijaya awijaya $C = a_2 [a_1 \mu (\phi + a_3) - eta \delta \Lambda]$ Universitas Brawijaya awijava awijaya $= a_2[a_1\mu(\phi + a_3) - a_1\mu(\phi + a_3)R_0]$ awijaya awijaya $U_{1} = a_1 a_2 \mu (\phi + a_3) (1 - \mathcal{R}_0).$ awijaya

Berdasarkan persamaan (3.12), terdapat dua kasus yang perlu ditinjau, Brawi yaitu ketika $\alpha = 0$ dan $\alpha > 0$.

Ketika $\alpha = 0$, maka A = 0 dan

 $B = a_1 a_2 (\beta + \mu b) (\phi + a_3) - \delta \psi \beta (\phi + \theta) > 0$

sehingga persamaan (3.12) menjadi persamaan linear dengan satu-satunya solusi, yaitu $I_* = \frac{-C}{B}$ yang akan bernilai positif jika C < 0. Kondisi C < 0 terpenuhi apabila $\mathcal{R}_0 > 1$. Jadi, jika $\alpha = 0$ dan $\mathcal{R}_0 > 1$ maka terdapat satu titik kesetimbangan endemik, yaitu $Q_* = (S_*, E_*, I_*, R_*)$.

Ketika $\alpha > 0$, akar-akar persamaan (3.12) akan bernilai riil apabila nilai diskriminan $\Delta = B^2 - 4AC \ge 0$. Oleh karena itu, perlu ditinjau dua kasus, yaitu $\Delta > 0$ dan $\Delta = 0$. Nilai $\Delta > 0$ ekuivalen dengan

awijaya $B^2 - 4AC > 0$ awijaya $B^2 - 4A[a_1a_2\mu(\phi + a_3)(1 - \mathcal{R}_0)] > 0$ awijaya awijaya Universitas B $4A[a_1a_2\mu(\phi+a_3)(1-\mathcal{R}_0)] < B^2$ sitas Brawijaya awijaya Universitas Brawijaya Universitas B $_{D2}$ vijaya Universitas $(1 \approx \mathcal{R}_0) \lor (1 \approx \mathcal{R}_0)$ Universitas Brawijaya' Uni $4Aa_1a_2\mu(\phi+a_3)$ nivers Universitas Brawijaya Universitas Brawip2a Universitas Brawij \mathcal{R}_0 \triangleright i $1e_{rs}$ it $4Aa_1a_2\mu(\phi$ $+a_{3}$) awiiava Universi27 atau \mathcal{R}

 $< \mathcal{R}_0$ dengan

Universitas Br

Hal ini juga berlaku untuk $\Delta = 0$, sehingga nilai $\Delta = 0$ ekuivalen dengan $\mathcal{R}^* = \mathcal{R}_0$. Pada kasus $\Delta > 0$, jika berlaku C < 0 maka $\frac{C}{A} < 0$ sehingga persamaan (3.12) pasti memiliki satu akar riil positif, yaitu I_2 . Kondisi C < 0 terpenuhi apabila $\mathcal{R}_0 > 1$. Jadi, jika $\mathcal{R}_0 > 1$ maka terdapat satu titik kesetimbangan endemik, yaitu $Q_2 = (S_2, E_2, I_2, R_2)$. Pada kasus $\Delta > 0$, jika berlaku C > 0 dan B < 0 maka $-\frac{B}{A} > 0$

Universitas Brawijaya Universitas Brawijaya <u>Universitas Brawijaya U</u>niversitas Brawijaya

dan $\frac{C}{A} > 0$ sehingga persamaan (3.12) memiliki dua akar riil positif, yaitu

$$f_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}.$$

Kondisi C > 0 terpenuhi jika $\mathcal{R}_0 < 1$ dan nilai $\Delta > 0$ ekuivalen dengan $\mathcal{R}^* < \mathcal{R}_0$. Jadi, dapat disimpulkan bahwa jika $\mathcal{R}^* < \mathcal{R}_0 < 1$ dan B < 0 maka terdapat dua titik kesetimbangan endemik, yaitu $Q_{1,2} = (S_{1,2}, E_{1,2}, I_{1,2}, R_{1,2}).$

Selanjutnya jika C = 0, persamaan (3.12) menjadi $AI^2 + BI = 0$. Sehingga persamaan tersebut mempunyai dua akar, yaitu $I_1 = 0$ atau $I_2 = \frac{-B}{A}$. Kondisi C = 0 terpenuhi jika $\mathcal{R}_0 = 1$. Jadi, jika $\mathcal{R}_0 = 1$ dan B < 0 maka terdapat satu titik kesetimbangan endemik, yaitu $Q_2 = (S_2, E_2, I_2, R_2)$.

Jika $\Delta = 0$ maka persamaan (3.12) memiliki dua akar yang kembar, yaitu $I_1 = I_2 = \frac{-B}{2A}$. Nilai $\Delta = 0$ ekuivalen dengan $\mathcal{R}^* = \mathcal{R}_0$ sehingga jika $\mathcal{R}^* = \mathcal{R}_0$ dan B < 0 maka terdapat satu titik kesetimbangan endemik, yaitu $Q_1 = Q_2 = (S_2, E_2, I_2, R_2)$.

awijaya Universitas Brawijaya Unive awijaya Universitas Brawijaya Unive

yaitu Q1 = Q2 = (S2 Universitas Brawijaya Uni Universitas Brawijaya ganversitas Brawijaya ganversitas Brawijaya universitas Brawijaya

Hasil analisis tersebut dirangkum dalam teorema berikut ini. ^UTeorema 3.2.1 (Eksistensi titik kesetimbangan).^{Brawijaya} Universitas Bi Sistem (3.1) memiliki dua macam titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit Q_0 yang selalu ada dan titik kesetimbangan endemik yang eksistensinya ditentukan oleh syarat Braw Uberikites Brawijaya Universitas Brawijaya Universitas Brawijaya Universitas Bra awijaya 1. Jika $\alpha = 0$ dan $\mathcal{R}_0 > 1$ maka terdapat satu titik kesetimbangan endemik, yaitu $Q_* = (S_*, E_*, I_*, R_*)$ dengan $I_* = \frac{-C}{D}$ dan S_*, E_*, R_* dinyatakan dalam persamaan (3.11). awiiava Jika $\alpha > 0$ dan • $\mathcal{R}_0 > 1$ maka terdapat satu titik kesetimbangan endemik yaitu $Q_2 = (S_2, E_2, I_2, R_2),$ awijaya • \mathcal{R}^* < \mathcal{R}_0 < 1, serta B < 0 maka terdapat dua titik kesetimbangan endemik, yaitu $(S_{1,2}, E_{1,2}, I_{1,2}, R_{1,2})$ dengan $Q_{1,2}$ awijava $rac{B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$ dan $S_{1,2},E_{1,2},R_{1,2}$ dinyatakan $I_{1.2}$ dalam persamaan (3.11), awiiava 1, serta B < 0 maka terdapat satu titik • R0 awiiava kesetimbangan endemik, yaitu $Q_2 = (S_2, E_2, I_2, R_2)$ dengan $I_2 = \frac{-B}{A}$ dan S_2, E_2, R_2 dinyatakan dalam awijaya persamaan (3.11), \mathcal{R}^* $= \mathcal{R}_0$, serta B < 0 maka terdapat satu titik awiiava endemik, kesetimbangan -B 1 Br $Q_1 = Q_2 = (S_2, E_2, I_2, R_2)$ dengan $I_2 = \cup \frac{-B}{2A}$ dan Braw $BraS_2, E_2, R_2$ dinyatakan dalam persamaan (3.11), Universitas Bra awiiava $1 - \frac{B^2}{4Aa_1a_2\mu(\phi+a_3)}$ dan A, B, C seperti $\frac{\beta\delta\Lambda}{\mu a_1(\phi+a_3)}, \mathcal{R}^*$ dengan \mathcal{R}_0 pada persamaan (3.12). Analisis Kestabilan Lokal tik Kesetimbangan /a Unive Sifat kestabilan lokal titik kesetimbangan model diperoleh dengan Br melakukan linearisasi sistem otonomus nonlinear (3.1) di sekitar titik Berdasarkan proses linearisasi, hal pertama yang kesetimbangan.

dilakukan adalah menentukan matriks Jacobi. Matriks Jacobi sistem (3.1) adalah tas Brawijaya roitas BrawijayβSUniversitas/Brawijaya Brav*βI*a 1+bIŨniveršitas Brawi $(1+bI)^2$ iversitas Brav Univer a_1 as Brav $\frac{(1+b)}{(1+b)^2}$ niversita0Bravijaya 1+bIsitas Bravijaya Universitas Brawiø a_3 Universitas $\overline{\mathrm{Br}(1+\alpha I)^2}$ awijaya Unive 0 it as $B_{(1+\alpha I)^2}$ s Brawii va Kestabilan lokal titik kesetimbangan bebas penyakit Matriks Jacobi sistem (3.1)pada titik kesetimbangan $\left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0, 0\right)$ adalah awi Q_0 awiiava

awijaya awiiava

awijava awijaya

awijaya

awijava

Persamaan karakteristik matriks $J(Q_0)$ diperoleh dari penyelesaian persamaan $|J(Q_0) - \lambda I| = 0$ yang dipaparkan pada Lampiran 3, awij**yaitu**Unive awijaya

University
$$(-\mu - \lambda)(-a_2 - \lambda)(\lambda^2 + k\lambda + l) = 0,$$

aw dengan vers

 $k = a_1 + \phi + a_3$

$$l = a_1(\phi + a_3)(1 - \mathcal{R}_0).$$

Akar-akar persamaan karakteristik (3.13) memiliki bagian riil w negatif jika dan hanya jika l > 0. Hal ini ekuivalen dengan $\mathcal{R}_0 < 1$. Versitas Brawijaya Jadi, titik kesetimbangan bebas penyakit Q_0 bersifat stabil asimtotik lokal jika $\mathcal{R}_0 < 1$ dan tidak stabil jika $\mathcal{R}_0 > 1$.

3.3.2 Kestabilan lokal titik kesetimbangan endemik

Wiley Matriks Jacobi sistem (3.1) pada titik kesetimbangan Q_* adalah erstas Brawlaya sebagai berikut

wi30a

 $\begin{pmatrix} -\frac{\beta I_{*}}{1+bI_{*}} - \mu & 0 & -\frac{\beta a_{1}(1+bI_{*})[\phi+a_{3}(1+\alpha I_{*})]}{\beta \delta(1+bI_{*})^{2}(1+\alpha I_{*})} \\ \frac{\beta I_{*}}{1+bI_{*}} & -a_{1} & \frac{\beta a_{1}(1+bI_{*})[\phi+a_{3}(1+\alpha I_{*})]}{\beta \delta(1+bI_{*})^{2}(1+\alpha I_{*})} \\ \end{pmatrix}$ oniversitas Braw Universita Universita Oniversit aya $\overline{(1+lpha I_*)_2}$ tas a_3 awijaya Universi0 s Brawijay $\frac{\phi}{(1+\alpha I_*)^2} + \theta$ ra $-a_2$ ve Brawijam ersitas Persamaan karakteristik matriks $J(Q_*)$ diperoleh dari penyelesaian awijaya persamaan $|J(Q_*) - \lambda I| = 0$ yang dipaparkan pada Lampiran 4, awijaya Uvjaitu itas Brawijaya Universitas Brawijaya Universitas Brawijaya awijaya awijava $\lambda^4 + A_1\lambda^3 + A_2\lambda^2 + A_3\lambda + A_4$ awijaya awijaya dengan awijaya $A_1 = \mu + a_1 + a_2 + a_3 + \frac{\beta I_*}{1 + bI_*} + \frac{\phi}{(1 + \alpha I_*)^2}$ awiiava awiiava $\begin{array}{l} & \text{University} \\ & \text{U} \, A_2 = a_2 (\frac{\beta I_*}{1+bI_*} + \mu) + (\frac{\beta I_*}{1+bI_*} + \mu + a_2) (\frac{\phi}{(1+\alpha I_*)^2} \\ \end{array} \end{array}$ awijaya awiiava $+ a_1(\frac{\phi}{(1+\alpha I_*)^2} + a_3) - \frac{a_1(\phi + a_3(1+\alpha I_*))}{(1+bI_*)(1+\alpha I_*)}$ awijava awijaya $= A_3 = a_2 \left(\frac{\beta I_*}{1+bI_*} + \mu\right) \left(\frac{\phi}{(1+\alpha I_*)^2} + a_1 + a_3\right)$ awijaya awiiava $+\left(\frac{\beta I_{*}}{1+bI_{*}}+\mu+a_{2}\right)\left[a_{1}\left(\frac{\phi}{(1+\alpha I_{*})^{2}}+a_{3}\right)-\frac{a_{1}(\phi+a_{3}(1+\alpha I_{*}))}{(1+bI_{*})(1+\alpha I_{*})}\right]$ awiiava awiiava $\beta I_* a_1(\phi + a_3(1 + \alpha I_*))$ awijaya $(1+bI_*)^2(1+\alpha I_*)$ awijava $\bigcup_{A_4} A_4 = a_2 (\frac{\beta I_*}{1+bI_*} + \mu) [a_1(\frac{\phi}{(1+\alpha I_*)^2} + a_3) - \frac{a_1(\phi + a_3(1+\alpha I_*))}{(1+bI_*)(1+\alpha I_*)} + a_3) - \frac{a_1(\phi + a_3(1+\alpha I_*))}{(1+bI_*)(1+\alpha I_*)} + a_3) + a_3) + \frac{a_1(\phi + a_3(1+\alpha I_*))}{(1+bI_*)(1+\alpha I_*)} + a_3) + a_3) + a_3) + a_4$ awiiava $+rac{eta a_1 a_2 (\phi + a_3 (1 + lpha I_*)) I_*}{(1 + b I_*)^2 (1 + lpha I_*)} - (rac{eta \delta I_*}{1 + b I_*}) (rac{\phi \psi}{(1 + lpha I_*)^2} + heta \psi).$ awiiava awijaya Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz, akar-akar persamaan karakteristik (3.14) memiliki bagian riil negatif jika dan hanya jika $A_1 > 0, A_4 > 0, A_1A_2 - A_3 > 0, \text{ dan } A_1A_2A_3 - A_3^2 - A_1^2A_4 > 0.$ Karena sulitnya ekspresi dari A_1, A_2, A_3 , dan A_4 , kestabilan lokal Braw titik kesetimbangan endemik tidak dibuktikan secara analitik, tetapi dibuktikan secara numerik Universites

ya Universitas Brawijaya Univer ya Universitas Brawijaya Univer 4 Simulasi Numerik Univer ya Universitas Brawijaya Universitas

Brawijaya Universitas Brawija Brawijaya Universitas Brawija

Pada subbab ini ditunjukkan simulasi numerik sistem (3.1) untuk mengilustrasikan hasil analisis pada subbab sebelumnya. Simulasi dilakukan dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde 4. Simulasi dilakukan untuk kasus-kasus sesuai dengan Teorema 3.2.1. Hasil simulasi numerik disajikan sebagai potret fase di ruang tiga dimensi (S, E, I) dengan beberapa nilai awal yang berbeda.

13.4.1 Universitas Brawijaya Universitas Brawijaya Universitas Brawijaya Universitas Brawijaya

Pada simulasi ini digunakan nilai parameter $\Lambda = 100, \beta = 0.12, \beta = 0.4, \mu = 0.8, \psi = 0.3, \delta = 0.6, \phi = 2, \alpha = 0, \gamma = 0.8, dan \theta = 0.7.$ Nilai parameter tersebut memenuhi nilai $\mathcal{R}_0 = 1.4950 > 1$ sehingga terdapat dua titik kesetimbangan, yaitu $Q_0 = (125, 0, 0, 0)$ dan $Q_* = (114.33, 6.5820, 0.9184, 2.2543)$. Nilai parameter yang diberikan memenuhi syarat kestabilan lokal titik kesetimbangan endemik Q_* , yaitu $A_1 = 7.6806 > 0, A_4 = 1.9179 > 0, A_1A_2 - A_3 = 97.5 > 0, dan <math>A_1^2A_4 + A_1A_2A_3 - A_3^2 = 772.11 > 0.$ Simulasi numerik dilakukan dengan beberapa nilai awal, yaitu $T_1 = (200, 20, 8), T_2 = (180, 20, 0.1), T_3 = (50, 8, 10), T_4 = (100, 0.5, 0.5), dan T_5 = (160, 0.1, 0.2).$ Hasil simulasi numerik ditunjukkan pada Gambar 3.2.

wijaya Universit

Gambar 3.2 menunjukkan bahwa orbit semua solusi dengan berbagai nilai awal menuju titik kesetimbangan endemik Q_* dan tidak ada orbit solusi yang bergerak menuju titik kesetimbangan bebas penyakit Q_0 . Hal ini berarti titik Q_* bersifat stabil asimtotik lokal dan titik Q_0 bersifat tidak stabil. Hasil simulasi numerik yang diperoleh mendukung hasil analisis pada subbab sebelumnya bahwa jika kriteria Routh-Hurwitz terpenuhi maka titik kesetimbangan endemik bersifat stabil asimtotik lokal dan jika $\mathcal{R}_0 > 1$ maka titik kesetimbangan bebas penyakit bersifat tidak stabil.

awijaya Unive awijaya Unive

awijava

awijaya

awijaya

awijaya

awijaya

awijaya

awijaya

awijaya awijaya awijaya

awijaya awijaya awijaya

awijaya awijaya

awijaya awijaya

awijaya

awijaya

awijaya

awijaya

awijaya awijaya

awijaya

awijaya

awijaya

awijaya awijaya Brawijaya Universitas Brawijaya Brawijaya Universitas Brawijaya Brawijaya Universitas Brawijaya Brawijaya Universitas Brawijaya

Brawijaya Universitas Brawijay Brawijaya Universitas Brawijay Brawijaya Universitas Brawijaya Brawijaya Universitas Brawijaya



Gambar 3.2: Potret fase untuk $\mathcal{R}_0 > 1 \operatorname{dan} \alpha = 0$

3.4.2 Simulasi untuk $\mathcal{R}_0 > 1 \operatorname{dan} \alpha > 0$

Pada simulasi ini digunakan nilai parameter $\Lambda = 100, \beta = 0.12, b = 0.4, \mu = 0.8, \psi = 0.3, \delta = 0.6, \phi = 2, \alpha = 0.3, \gamma = 0.8, dan \theta = 0.7.$ Nilai parameter tersebut memenuhi nilai $\mathcal{R}_0 = 1.4950 > 1$ sehingga terdapat dua titik kesetimbangan, yaitu $Q_0 = (125, 0, 0, 0)$ dan $Q_2 = (111.373, 8.3428, 1.3437, 2.5963)$. Nilai parameter yang diberikan memenuhi syarat kestabilan lokal titik kesetimbangan endemik Q_2 , yaitu $A_1 = 6.7208 > 0, A_4 = 1.6034 > 0, A_1A_2 - A_3 = 71.077 > 0, dan <math>A_1^2A_4 + A_1A_2A_3 + A_3^2 = 464.66 > 0.$ Simulasi numerik dilakukan dengan beberapa nilai awal, yaitu $T_1 = (100, 15, 8), T_2 = (180, 20, 0.5), T_3 = (50, 5, 0.2), T_4 = (80, 0, 0.5), dan T_5 = (200, 0.1, 0.2).$ Hasil simulasi numerik ditunjukkan pada Gambar 3.3.

BRAWIJAYA

awijava

aya Universitas Brawijay aya Universitas Brawijay aya Universitas Brawijay aya Universitas Brawijay niversitas Brawijaya Universitas Brawijaya niversitas Brawijaya Universitas Brawijaya niversitas Brawijaya Universitas Brawijaya



Universitas Brawijaya Universitas Brawijaya

Gambar 3.3: Potret fase untuk $\mathcal{R}_0 > 1 \operatorname{dan} \alpha > 0$

Gambar 3.3 menunjukkan bahwa orbit semua solusi dengan berbagai nilai awal menuju titik kesetimbangan endemik Q_2 dan tidak ada orbit solusi yang bergerak menuju titik kesetimbangan bebas penyakit Q_0 . Hal ini berarti titik Q_2 bersifat stabil asimtotik lokal dan titik Q_0 bersifat tidak stabil. Hasil simulasi numerik yang diperoleh mendukung hasil analisis pada subbab sebelumnya bahwa jika kriteria Routh-Hurwitz terpenuhi maka titik kesetimbangan endemik bersifat stabil asimtotik lokal dan jika $\mathcal{R}_0 > 1$ maka titik kesetimbangan bebas penyakit bersifat tidak stabil.

3.4.3 Simulasi untuk $\mathcal{R}^* < \mathcal{R}_0 < 1$, $\alpha > 0$, dan B < 0Pada simulasi ini digunakan nilai parameter $\Lambda = 100$, $\beta = 0.07$, b = 0.4, $\mu = 0.8$, $\psi = 0.3$, $\delta = 0.6$, $\phi = 2$, $\alpha = 10$, $\gamma = 0.8$, dan $\theta = 0.7$. Nilai parameter tersebut memenuhi nilai $\mathcal{R}^* = 0.1936 < \mathcal{R}_0 = 0.8721 < 1$ dan B = -15.315 sehingga terdapat tiga titik kesetimbangan, yaitu $Q_0 = (125, 0, 0, 0)$, $Q_1 = (124.54, 0.2822, 0.0462, 0.0868)$, dan 34 ository.ub.a

awijaya

awijaya

awijaya

awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya

awijaya

awiiava awijaya

awijaya

awijaya

awijaya awijava

awijaya

awijaya

awijaya

awijava

awijaya

awijaya

awijaya

awijaya awijaya awijaya

awijaya

(117.6064,4.4051, 1.0696, 0.8469). Nilai parameter yang Q_2 diberikan tidak memenuhi syarat kestabilan lokal titik kesetimbangan Brawijaya endemik Q_1 karena $A_4 = -0.4353 < 0.1$ Nilai parameter yang Brawijaya diberikan memenuhi syarat kestabilan lokal titik kesetimbangan endemik Q_2 , yaitu $A_1 = 5.6670 > 0$, $A_4 = 0.8996 > 0$, $A_1A_2 = -A_3$ University $A_3 = -A_3$ University $A_5.841$ Versity $A_3 = -A_3$ University $A_3 = -A_3$ University $A_3 = -A_3$ $A_1^2A_4 + A_1A_2A_3 - A_3^2 = 209.77 > 0$. Simulasi numerik dilakukan Brawijaya Udengan S beberapa Unilai taawal, jayaitu v T_1 tas = wija (100, 1, 0.5), Brawijaya awijaya $T_2 = (90, 4, 0.3), T_3 = (160, 0.05, 0.05), T_4 = (120, 0.5, 1), dan$ awijava $T_5 = (50, 0.1, 0.2)$. Hasil simulasi numerik ditunjukkan pada Gambar awijaya





w sebelumnya bahwa jika kriteria Routh-Hurwitz terpenuhi maka titik ersitas Brawijaya w kesetimbangan Bendemik Ubersifat stabil asimtotik Ulokal dan jika ersitas Brawijaya \mathcal{R}_0 asimtotik lokal. awijaya awijaya awijaya awijava awijaya

awijaya awijaya awijaya WERS awijaya

awijaya

awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awiiava awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya

awijaya awi 36a

Universitas Brawijaya Universitas Brawijaya Universitas Brawijaya Universitas Brawijaya

RAWIJALY

numerik yang diperoleh mendukung hasil analisis pada subbab <11 maka titik kesetimbangan bebas penyakit bersifat stabil ersitas Brawijaya awijaya

awijaya

awiiava awijava

awijaya

awijaya

awijaya

awijava awiiava

awijaya

awijaya

awiiava awiiava

awijava

awijaya awijaya

awiiava

awijava

awijaya awiiava

awijaya

awijava

awijaya awiiava

awiiava

awijaya

Kesimpulan Unive Berdasarkan bab sebelumnya dapat ditarik kesimpulan sebagai Universitas Brawijaya Universitas Brawijaya Upiverkijas Brawijaya Universitas Brawijaya Universitas Brawijaya Universitas Brawijaya Universitas Br

1. Model epidemi SEIRS dengan laju penularan dan pengobatan tersaturasi berbentuk sistem otonomus nonlinear empat dimensi jumlah individu rentan perubahan yang menyatakan (Susceptible), terpapar (Exposed), terinfeksi (Infectious), dan Bra sembuh (Recovered). Pada model tersebut diasumsikan bahwa individu sembuh memiliki kekebalan sementara sehingga dapat kembali menjadi rentan.

Universitas BBABaIY Universitas Brawijava

KESIMPULAN DAN SARA

2. Pada model tersebut terdapat dua macam titik kesetimbangan, vaitu titik kesetimbangan bebas penyakit danvertitik kesetimbangan endemik. Titik kesetimbangan bebas penyakit selalu eksis, sedangkan eksistensi titik kesetimbangan endemik ditentukan oleh syarat tertentu.

3. Analisis kestabilan menunjukkan bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit akan stabil asimtotik lokal jika $\mathcal{R}_0 < 1$, sedangkan titik kesetimbangan endemik akan stabil asimtotik lokal jika memenuhi kriteria Routh-Hurwitz.

4. Simulasi numerik yang dilakukan menunjukkan hasil yang sesuai dengan hasil analisis.

awijaya U4.2 s Saranwijava awijaya Pada skripsi ini hanya dibahas analisis kestabilan lokal pada model epidemi SEIRS dengan laju penularan dan pengobatan Utersaturasi.awija Pada Upembahasanay selanjutnya Bdisarankan Uuntuk bahkan analisis kestabilan global pada model epidemi ini.

Universidad

BRAWIJAYA

awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijava awijaya awijaya awijaya awijaya AVERS awijaya awiiava awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awijaya awi **38**a

Universitas Pravijaya Universitas Brawijaya BRANIJALY

4.5

awijaya

awijaya

awijaya

awijaya awijaya

awijaya awijaya

awijaya

awiiava

awijaya awijaya

awijaya awijaya

awijaya awijaya

awijaya

awijaya awijaya

awijaya awijaya

awiiava

awiiava

awijaya

A Universitas Brawijaya

versitas Brawijaya Universitas DAFTAR PUSTAKA versitas Brawijaya Universitas

Alligood, K. T., T. D. Sauer, dan J. A. Yorke. 2000. CHAOS: An Introduction to Dynamical Systems. Spinger-Verlag. New York.

Boyce, W. E. dan R. C. DiPrima. 2012. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. Ninth Edition. John Wiley Sons, Inc. United State of America.

Brauer, F. dan C. C. Chavez. 2012. Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology. Second Edition. Springer Science+Business Media. New York.

Cappaso, V dan G. Serio. 1978. A Generalization of the Kermack-McKendrick Deterministic Epidemic Model. *Mathematical Bioscience*. 42: 41-61.

Finizio, N. dan G. Ladas. 1982. An Introduction to Differential Equations. Wadsworth, Inc. California.

Heffernan, J.M, R.J. Smith, dan L.M. Wahl. 2005. Perspective on the Basic Reproductive Ratio. *The Royal Society Interface*. Vol. 2. Hal. 281-293.

Jana, S., S. K. Nandi, dan T.K. Kar. 2016. Complex Dynamics of an Signature SIR Epidemic Model with Saturated Incidence Rate and Treatment. *Acta Biotheor*. Vol. 64. Hal. 6584.

Kermack, W. O. dan A. G. McKendrick. 1927. A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics. *Proceedings of the Royal Society of London*. Vol. 115. No. 772. Hal. 700-721.

Khan, M. A., K. Yasir, dan S. Islam. 2017. Complex Dynamics of an SEIR Epidemic Model with Saturated Incidence Rate and Treatment. *Physica A: Statistical Mechanics and its*

Universi39

vijaya Universitas Brawijaya vijaya Universitas Brawijaya vijaya Universitas Brawijaya vijaya Universitas Brawijaya vijaya Universitas Brawijaya

Applications. Vol. 493. Hal. 210-227. w Li, M. Y. dan J. S. Muldowney: 1994. Global Stability for the SEIR ersitas Brawijaya Model in Epidemiology. Mathematical Biosciences. Vol. 125. iversitas Brawijaya Universitas Brawijaya Univer Hal. 155-164. Wurray, J. D. 2002. Mathematical Biology: An Introduction. Third ersitas Brawiaya Edition. Springer-Verlag. New York va Universitas Brawijaya Nagle, R. K., E. B. Saff, dan A. D. Snider. 2012. Fundamentals of Differential Equations. Eighth Edition. Pearson Education, Inc. awiiava UBoston.s Braw awijava Robinson, J. C. 2004. An Introduction to Ordinary Differential Equations. First Edition. Cambridge University Press. awijaya awiiava

Wang, W. D. 2006. Backward Bifurcation of an Epidemic Model with Treatment. *Mathematical Biosciences*. Vol. 201. Hal. 5871.

Wang, W. and S. Ruan. 2004. Bifurcation in an Epidemic Model with erstas Brawlaya Constant Removal Rate of the Infectives. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. Vol. 291. Hal. 775793.

awijava Universi

awijava

Zhang, J., J. Jia, dan X. Song. 2014. Analysis of an SEIR Epidemic Model with Saturated Incidence and Saturated Treatment Function. *The Scientific World Journal*. Vol. 2014.

Zhang, X. dan X. N. Liu. 2008. Backward Bifurcation of an Epidemic Model with Saturated Treatment Function. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. Vol. 348. Hal.

awijaya UA33443. awijaya Universitas a Universitas Bra vijaya Universitas Braw vijaya Universitas Braw