SIFAT-SIFAT RING Q-FUZZY SMARANDACHE

TESIS

Oleh

FATMAWATI HIDAYAT
NIM 176090400111009

PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
BIDANG MINAT ALJABAR

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2019

SIFAT-SIFAT RING Q-$FUZZY$ SMARANDACHE

TESIS

Untuk Memenuhi Persyaratan
Memperoleh Gelar Magister Dalam Bidang Matematika

Oleh

FATMAWATI HIDAYAT
NIM. 176090400111009

PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
BIDANG MINAT ALJABAR

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2019

TESIS

SIFAT-SIFAT RING Q-$FUZZY$ SMARANDACHE

Oleh:

FATMAWATI HIDAYAT
NIM. 176090400111009

Telah dipertahankan di depan Komisi Penguji
pada tanggal, 26 Juli 2019
dan dinyatakan LULUS

Menyetujui,
Komisi Pembimbing

Ketua	**Anggota**
Prof. Dr. Marjono, M.Phil.	**Dr. Noor Hidayat, M.Si.**
NIP. 19621116 198803 1 004	NIP. 19611204 198802 1 001

Mengetahui:
Ketua Program Studi Magister Matematika

Dr. Noor Hidayat, M.Si.
NIP. 19611204 198802 1 001

IDENTITAS TIM PENGUJI

Judul Proposal Tesis	:	**SIFAT-SIFAT RING Q-$FUZZY$ SMARANDACHE**
Nama	:	FATMAWATI HIDAYAT
NIM	:	176090400111009
Program Studi	:	Magister Matematika
Bidang Minat	:	ALJABAR

KOMISI PEMBIMBING

Ketua	:	Prof. Dr. Marjono, M.Phil.
Anggota	:	Dr. Noor Hidayat, M.Si.

TIM DOSEN PENGUJI

Dosen Penguji 1	:	Drs. Abdul Rouf Alghofari, M. Sc., Ph.D.
Dosen Penguji 2	:	Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si., M.Si., Ph.D.
Tanggal Ujian	:	26 juli 2019
SK. Penguji	:	

PERNYATAAN ORISINALITAS

Saya menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa sepanjang pengetahuan saya, didalam naskah tesis ini tidak terdapat karya ilmiah yang pernah diajukan oleh orang lain untuk memperoleh gelar akademik di suatu perguruan tinggi dan tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain, kecuali yang secara tertulis dikutip dalam naskah ini dan disebutkan dalam sumber kutipan dan daftar pustaka.

Apabila ternyata di dalam naskah tesis ini dapat dibuktikan terdapat unsur-unsur jiplakan, saya bersedia diproses sesuai dengan peraturan perundang-undangan yang berlaku dan tesis dibatalkan.

Malang,

Fatmawati Hidayat
NIM. 176090400111009

RIWAYAT HIDUP

Penulis, Fatmawati Hidayat lahir di kota Bangkalan, Madura, pada tanggal 27 November 1992, biasa dipanggil Fifi. Penulis merupakan anak ke 2 dari Bapak Firman Hidayat dan Ibu Soegiartiningsih. Penulis meyelesaikan pendidikan Taman Kanak-kanak (TK) di TK Dharma Wanita Bangkalan Madura pada tahun 1999 dan pendidikan dasarnya ditempuh di SDN Pejagan IX Bangkalan Madura dan lulus pada tahun 2005, setelah itu melanjutkan pendidikan ke SMP Tahfidz Al-Amien Prenduan, Sumenep Madura dan lulus tahun 2008 kemudian melanjutkan pendidikan ke SMA Tahfidz Al-Amien Prenduan, Sumenep Madura dan lulus tahun 2011. Penulis menyelesaikan pendidikan tingkat sarjana (S1) di Jurusan Matematika. Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang pada tahun 2016. Pada tahun 2017 penulis melanjutkan pendidikan tingkat Magister (S2) pada Program Studi Magister Matematika Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Brawijaya.

RINGKASAN

Fatmawati Hidayat, Program Studi Magister Matematika Jurusan Matematika, FMIPA Universitas Brawijaya, Sifat-Sifat Ring Q-$Fuzzy$ Smarandache, Ketua Komisi Pembimbing: Marjono, Anggota Komisi: Noor Hidayat.

Aljabar abstrak adalah ilmu aljabar yang membahas tentang struktur aljabar. Salah satu perluasan konsep struktur aljabar adalah struktur aljabar $fuzzy$. Pengembangan teori terkait struktur aljabar $fuzzy$ telah banyak diteliti, diantaranya ring $fuzzy$ dan ideal $fuzzy$. Ring Smarandache adalah generalisasi dari ring yang didefinisikan sebagai suatu ring yang memuat himpunan bagian sejati $A \subset R$ berbentuk field dan ideal Smarandache didefinisikan sebagai suatu ideal A dari R yang memuat himpunan bagian sejati $X \subset A$ berbentuk field. Penelitian ini bertujuan untuk mengembangkan struktur aljabar Q-$fuzzy$ Smarandache karena belum banyak penelitian terkait struktur tersebut. Permasalahan tersebut kemudian digunakan untuk membangun struktur baru tentang ring Q-$fuzzy$ Smarandache beserta sifat-sifatnya. Struktur baru ini dibentuk berdasarkan definisi dari Kandasamy (2003) yang membahas tentang struktur ring $fuzzy$ Smarandache dan sifat-sifat dari paper Doss (2016) yang membahas tentang konsep semigrup Q-$fuzzy$ Smarandache serta Malik (1991), Ray (1999) dan Aktas (2006) yang membahas tentang produk cartesian dari subgrup $fuzzy$. Selanjutnya, sifat-sifat yang telah diperoleh akan dibuktikan. Hasil dari penelitian ini adalah struktur baru ring Q-$fuzzy$ Smarandache di antaranya, ring Q-$fuzzy$ Smarandache, subring Q-$fuzzy$ Smarandache, ideal Q-$fuzzy$ Smarandache, koset Q-$fuzzy$ Smarandache, koset Smarandache dari ideal Q-$fuzzy$ Smarandache, ring kuosien Q-$fuzzy$ Smarandache dan produk kartesian dari ring Q-$fuzzy$ Smarandache, beserta sifat-sifatnya. Bagi penelitian selanjutnya diharapkan dapat membangun definisi homomorfisma, isomorfisma dari ring Q-$fuzzy$ Smarandache dll beserta sifat-sifatnya.

Kata Kunci: struktur ring Smarandache, struktur baru ring Q-$fuzzy$ Smarandache, semigrup Q-$fuzzy$ Smarandache.

SUMMARY

Fatmawati Hidayat, *Master Mathematics Study Program, Mathematics Department, Faculty of Natural Sciences University of Brawijaya, Smarandache Q-Fuzzy Rings and Its Properties, Supervisor*: Marjono, *Co-Supervisor*: Noor Hidayat.

Abstract algebra is a science of algebra wich discusse the algebraic structure. One of the extensions of the concept of algebraic structure is $fuzzy$ *algebra. The development of* $fuzzy$ *algebra has been widely researched, including* $fuzzy$ *ring and* $fuzzy$ *ideal. Smarandache ring is a generalization of the ring that is defined as a ring* R *that has a proper subset* $A \subset R$ *such that* A *is a field and Smarandache ideal is defined as an ideal* A *of* R *that has a proper subset* $X \subset A$ *such that* X *is a field. This research aims to develop Smarandache* Q-$fuzzy$ *algebra because currently there is a few related to these theories. These problems are then used to build new structures on the Smarandache* Q-$fuzzy$ *ring with their properties. This new structure is formed on the basis of the definition of* Kandasamy (2003) *which discusses about the concept of Smarandache* $fuzzy$ *ring. Then, the properties of paper Doss (2016) discusses the concept of Smarandache* Q-$fuzzy$ *semigroups and also Malik (1991), Ray (1999) and Aktas (2006) are discusses the Cartesian product of* $fuzzy$ *subgroup. Furthermore, properties that have been obtained will be proved. The results of this research is the new structure of Smarandache* Q-$fuzzy$ *ring such as, Smarandache* Q-$fuzzy$ *ring, Smarandache* Q-$fuzzy$ *subring, Smarandache* Q-$fuzzy$ *ideal, Smarandache* Q-$fuzzy$ *coset, Smarandache coset of the Smarandache* Q-$fuzzy$ *ideal, Smarandache* Q-$fuzzy$ *quotient ring and Cartesian product of Smarandache* Q-$fuzzy$ *ring with their properties. For further research, it is expected to build definitions of homomorphism, isomorphism of Smarandache* Q-$fuzzy$ *ring, ect with their properties.*

Keywords: *Smarandache ring structure, the new structure of Smarandache* Q-$fuzzy$ *ring, Smarandache* Q-$fuzzy$ *semigroups.*

KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur penulis ucapkan kehadirat Allah SWT yang telah memberikan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan proposal tesis ini yang berjudul "**Sifat-Sifat Ring Q-$Fuzzy$ Smarandache**" sebagai salah satu syarat untuk melakukan penelitian tesis dalam bidang Matematika.

Keberhasilan dalam menyelesaikan proposal tesis ini tidak lepas dari kerja sama dan dukungan berbagai pihak. Oleh sebab itu, penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Prof. Dr. Marjono, M.Phil. selaku Ketua Komisi Pembimbing dan Dr. Noor Hidayat, M.Si. selaku Anggota Komisi Pembimbing yang telah meluangkan waktu untuk memberikan bimbingan, saran, dan motivasi kepada penulis selama pengerjaan dan penyusunan tesis ini.
2. Drs. Abdul Rouf Alghofari, M. Sc., Ph.D selaku dosen penguji I dan Ratno Bagus Edy Wibowo, S,Si., M.Si., Ph.D selaku dosen penguji II yang telah memberikan kritik dan saran selama pengerjaan dan penyusunan tesis ini.
3. Ratno Bagus Edy Wibowo, S,Si., M.Si., Ph.D. selaku Ketua Jurusan Matematika dan Dr. Noor Hidayat, M.Si., selaku Ketua program Studi Magister Matematika FMIPA Universitas Brawijaya.
4. Bapak dan Ibu Dosen Jurusan Matematika FMIPA Universitas Brawijaya yang telah memberikan ilmu kepada penulis, serta seluruh staf dan karyawan TU Jurusan Matematika atas segala bantuannya.
5. Ayahanda Firman Hidayat dan Ibunda Soegiartiningsih tercinta, terima kasih atas segala doa, motivasi, pengorbanan dan ketulusannya dalam mendampingi penulis demi selesainya tugas ini. Semoga Allah SWT senantiasa melimpahkan rahmat dan ridho-Nya kepada keduanya. Tak lupa untuk kedua saudariku Rahmawati Hidayat dan Novitasari Hidayat yang selalu

menghibur penulis serta kedua keponakanku Yasmin Raihana Anugrah dan Azam Rifqi Anugrah yang selalu mampu menjadi tempat beristirahat dan melepas penat yang luar biasa.

6. Sahabat-sahabat sealmamater dan seperjuangan di Pasca Matematika angkatan 2017 terutama “Tim Hore” yang tak pernah bosan memotivasi penulis demi selesainya tugas ini.
7. Semua pihak yang telah membantu dalam menyelesaikan tugas ini baik moril maupun materil.

Malang, 29 Juli 2019

Fatmawati Hidayat
NIM. 176090400111009

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Himpunan tegas (*crisp set*) didefinisikan sebagai suatu kumpulan benda-benda yang terdefinisi dengan baik (tegas/*crisp*). Pendefinisian yang jelas digunakan untuk mengelompokkan anggota himpunan tersebut atau tidak. Jika objek tersebut merupakan anggota dari suatu himpunan yang dimaksud maka nilai keanggotaannya 1 dan sebaliknya bernilai 0.

Seiring berkembangnya ilmu pengetahuan, teori himpunan tegas (*crisp set*) juga mengalami perkembangan menjadi himpunan $fuzzy$. Himpunan $fuzzy$ merupakan penemuan dari Zadeh pada tahun 1965 di mana, konsep himpunan $fuzzy$ A dalam semesta X dicirikan oleh fungsi karakteristik $\mu_A: X \to [0,1]$. Fungsi karakteristik inilah yang menghubungkan setiap anggota-anggota dalam X ke interval tertutup $[0,1]$.

Berdasarkan definisi himpunan $fuzzy$ inilah penelitian tentang aljabar $fuzzy$ mulai berkembang di antaranya Rosenfeld (1971) memperkenalkan $Fuzzy$ *Groups*, selanjutnya Solairaju dan Nangrajan (2009) Q-$Fuzzy$ *Groups* serta Priya, dkk (2013) *On* Q-$Fuzzy$ *Normal Subgroups*. Selain aljabar $fuzzy$, teori aljabar abstrak juga mengalami perluasan di antaranya struktur aljabar Smarandache yang dikembangkan oleh Raul dengan mengikuti sebuah paper yang ditulis oleh Smarandache Florentin dengan judul *Special Algebraic Structures.* Selanjutnya Kandasamy (2002) mengembangkan teori tersebut diantaranya adalah semigrup Smarandache, ring Smarandache, semiring Smarandache dll.

Pada tahun 2003, Kandasamy memperkenalkan teori baru yaitu *Smarandache* $Fuzzy$ *Algebra* yang merupakan perluasan dari teori $fuzzy$ dan aljabar Smarandache. Salah satunya adalah semigrup $fuzzy$ Smarandache yang didefinisikan sebagai himpunan $fuzzy\ A$ di H (H=semigrup Smarandache) yaitu $A = \{(x, \mu_A(x)) | x \in H\}$ disebut semigrup $fuzzy$ Smarandache jika μ_A yang dibatasi pada G memenuhi aksioma tertentu. Semigrup $fuzzy$ Smarandache dinotasikan sebagai (semigrup FS) kemudian Doss dan Suganya (2016) memperkenalkan suatu struktur baru yang diberi nama *Smarandache* Q-$fuzzy$ *Semigroups*. Pada paper tersebut dibahas tentang semigrup Q-$fuzzy$ Smarandache dan semigrup normal Q-$fuzzy$ Smarandache beserta sifat-sifatnya. Berdasarkan paper Doss dan Suganya serta Kandasamy penulis ingin mengembangkan struktur baru Ring Q-$fuzzy$ Smarandache beserta sifat-sifatnya.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan pemaparan dari latar belakang didapatkan beberapa rumusan masalah sebagai berikut:

1. Bagaimana struktur baru Ring Q-$fuzzy$ Smarandache?
2. Bagaimana sifat-sifat yang berkaitan dengan Ring Q-$fuzzy$ Smarandache?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang terkait diperoleh tujuan masalah sebagai berikut

1. Membangun struktur Ring Q-$fuzzy$ Smarandache
2. Menentukan dan membuktikan sifat-sifat Ring Q-$fuzzy$ Smarandache

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan diberikan definisi dan contoh dari grup dan ring beserta macam-macamnya yang dirujuk dari buku Noor Hidayat (2017), Raisinghania dan Anggarwal (2011).

2.1 Grup dan Ring

Definisi 2.1.1 (Operasi Biner)

Misalkan G adalah himpunan tidak kosong. Suatu operasi biner $*$ pada G adalah pemetaan dengan domain $G \times G$ dan kodomain G, di mana

$$(a, b) \mapsto * (a, b) \equiv a * b$$

untuk setiap $(a, b) \in G \times G$.

Berdasarkan Definisi 2.1.1, Raisinghania dan Anggarwal menyatakan bahwa suatu operasi $*$ pada G adalah biner jika dan hanya jika

$$a, b \in G \Rightarrow a * b \in G \quad \forall a, b \in G$$

Keadaan ini sering disebut sebagai sifat ketertutupan.

Definisi 2.1.2 (Grup)

Misalkan G adalah himpunan tidak kosong yang dilengkapi dengan satu operasi biner yaitu " $*$ ". $(G,*)$ disebut grup jika memenuhi aksioma berikut :

a. Operasi $*$ memenuhi hukum asosiatif yaitu, $\forall a, b, c \in G$ berlaku

   $(a * b) * c = a * (b * c)$

b. Terdapat elemen identitas yaitu $e \in G$ sedemikian sehingga

   $a * e = e * a = a \quad \forall a \in G$

c. Setiap elemen di G memuat invers yaitu, $\forall a \in G, \exists a^{-1} \in G$ sedemikian sehingga

   $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$

Contoh 2.1.3. Misalkan m adalah bilangan bulat tidak nol. Pandang himpunan yang didefinisikan sebagai berikut,

$$G = \{m^a; a \in \mathbb{Z}\}$$

Tunjukkan bahwa G membentuk grup atas operasi perkalian ". ".

Bukti:

i. Ambil sebarang $x, y \in G$. Misal $x = m^a$ dan $y = m^b$ untuk suatu $a, b \in \mathbb{Z}$. Diperoleh bahwa, $x.y = m^a \cdot m^b = m^{(a+b)} \in G$. Karena $a + b \in \mathbb{Z}$, sehingga $x.y \in G$. Jadi G tertutup terhadap operasi perkalian.

ii. Operasi perkalian memenuhi hukum asosiatif, dalam hal ini

   Ambil sebarang $x, y, z \in G$. Misal $x = m^a, y = m^b$ dan $z = m^c$ untuk suatu $a, b \in \mathbb{Z}$. Diperoleh bahwa,

   $(x.y).z = (m^a \cdot m^b) \cdot m^c = m^{(a+b)+c} = m^{a+(b+c)} = m^a \cdot (m^b \cdot m^c) = x.(y.z)$

iii. Terdapat elemen identitas terhadap operasi perkalian yaitu $m^0 \in G$

   $\forall x = m^a \in G$ berlaku, $x.m^0 = m^0.x = m^a$

iv. Setiap elemen di G memiliki invers terhadap operasi perkalian

   $\forall x = m^a \in G, \exists x^{-1} = m^{-a} \in G$ berlaku

   $x.x^{-1} = m^a \cdot m^{-a} = m^0$

   $x^{-1}.x = m^{-a} \cdot m^a = m^0$

   Berdasarkan i-iv diperoleh bahwa $(G, .)$ adalah grup

Definisi 2.1.4 (Ring)

Misalkan R adalah himpunan tidak kosong yang dilengkapi dengan dua operasi biner yaitu penjumlahan " + " dan perkalian ". ". $(R, +, \cdot)$ disebut ring jika memenuhi aksioma berikut :

i. $(R\,, +)$ adalah grup komutatif

ii. $(R, .)$ adalah semigrup

iii. Operasi $+$ dan $\cdot$ bersifat distributif di R baik distributif kiri maupun kanan

$$p \cdot (q \cdot r) = (p \cdot q) + (p \cdot r)$$

$$(p + q) \cdot r = (p \cdot r) + (q \cdot r)$$

Contoh 2.1.5. Misalkan $Q\sqrt{2}$ adalah himpunan yang didefinisikan sebagai berikut,

$$Q\sqrt{2} = \{a + b\sqrt{2}; a, b \in \mathbb{Q}\}$$

Tunjukkan bahwa $Q\sqrt{2}$ membentuk ring atas operasi penjumlahan " $+$ " dan perkalian ". ".

Bukti:

i. Ambil sebarang $x, y \in Q\sqrt{2}$. Misal $x = a + b\sqrt{2}$ dan $y = c + d\sqrt{2}$ untuk suatu $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$. Diperoleh bahwa,

   $$x + y = \left(a + b\sqrt{2}\right) + \left(c + d\sqrt{2}\right) = (a + c) + (b + d)\sqrt{2} \in Q\sqrt{2}$$

   karena $a + c \in \mathbb{Q}$ dan $b + d \in \mathbb{Q}$, sehingga $x + y \in Q\sqrt{2}$. Jadi $Q\sqrt{2}$ tertutup terhadap operasi penjumlahan.

ii. Operasi penjumlahan memenuhi hukum asosiatif, dalam hal ini

   Ambil sebarang $x, y, z \in Q\sqrt{2}$. Misal $x = a + b\sqrt{2}; y = c + d\sqrt{2}$ dan $z = e + f\sqrt{2}$ untuk suatu $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Q}$. Diperoleh bahwa,

$$\begin{aligned}
(x + y) + z &= \left(\left(a + b\sqrt{2}\right) + \left(c + d\sqrt{2}\right)\right) + \left(e + f\sqrt{2}\right) \\
&= \left((a + c) + (b + d)\sqrt{2}\right) + \left(e + f\sqrt{2}\right) \\
&= \left((a + c) + e\right) + \left((b + d) + f\right)\sqrt{2} \\
&= \left(a + (c + e)\right) + \left(b + (d + f)\right)\sqrt{2} \\
&= \left(a + b\sqrt{2}\right) + \left((c + e) + (d + f)\sqrt{2}\right)
\end{aligned}$$

$$= \left(a + b\sqrt{2}\right) + \left(\left(c + d\sqrt{2}\right) + \left(e + f\sqrt{2}\right)\right) = x + (y + z)$$

iii. Terdapat elemen identitas terhadap operasi penjumlahan yaitu $0 + 0\sqrt{2} \in Q\sqrt{2}$

$\forall x = a + b\sqrt{2}$ berlaku, $x + \left(0 + 0\sqrt{2}\right) = \left(0 + 0\sqrt{2}\right) + x = \left(a + b\sqrt{2}\right)$

iv. Setiap elemen di $Q\sqrt{2}$ memiliki invers terhadap operasi penjumlahan

$\forall x = a + b\sqrt{2} \in Q\sqrt{2}, \exists -x = \left(-a\right) + (-b)\sqrt{2} \in Q\sqrt{2},$ berlaku

$x + (-x) = \left(a + b\sqrt{2}\right) + \left((-a) + (-b)\sqrt{2}\right) = 0 + 0\sqrt{2}$

$(-x) + x = \left((-a) + (-b)\sqrt{2}\right) + \left(a + b\sqrt{2}\right) = 0 + 0\sqrt{2}$

v. Operasi penjumlahan memenuhi hukum komutatif, dalam hal ini

Ambil sebarang $x, y \in Q\sqrt{2}$. Misal $x = a + b\sqrt{2}$ dan $y = c + d\sqrt{2}$ untuk suatu $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$. Diperoleh bahwa,

$x + y = \left(a + b\sqrt{2}\right) + \left(c + d\sqrt{2}\right) = (c + a) + (d + b)\sqrt{2}$

$= \left(c + d\sqrt{2}\right) + \left(a + b\sqrt{2}\right) = y + x$

Berdasarkan i-v diperoleh bahwa $(Q\sqrt{2}, +)$ adalah grup komutatif.

vi. Ambil sebarang $x, y \in Q\sqrt{2}$. Misal $x = a + b\sqrt{2}; y = c + d\sqrt{2}$ untuk suatu $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$. Diperoleh bahwa,

$x.y = \left(\left(a + b\sqrt{2}\right) \cdot \left(c + d\sqrt{2}\right)\right) = \left((a \cdot c) + \left((a \cdot d) + (c \cdot b)\right)\sqrt{2} + 2(b \cdot d)\right)$

Karena $(a.c), (a.d), (c.b), (b.d) \in \mathbb{Q}$ sehingga $x.y \in Q\sqrt{2}$. Jadi $Q\sqrt{2}$ tertutup terhadap operasi perkalian.

vii. Operasi perkalian memenuhi hukum asosiatif, dalam hal ini

Ambil sebarang $x, y, z \in Q\sqrt{2}$. Misal $x = a + b\sqrt{2}; y = c + d\sqrt{2}$ dan $z = e + f\sqrt{2}$ untuk suatu $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Q}$. Diperoleh bahwa,

$(x.y).z = \left(\left(a + b\sqrt{2}\right) \cdot \left(c + d\sqrt{2}\right)\right) \cdot \left(e + f\sqrt{2}\right)$

$$= \left((a \cdot c) + \left((a \cdot d) + (b \cdot c)\right) + 2(b \cdot d)\right)\sqrt{2} \cdot \left(e + f\sqrt{2}\right)$$

$$= (a \cdot c) \cdot e \cdot \left((a \cdot d) \cdot e + (b \cdot c) \cdot e + (a \cdot c) \cdot f + 2(b \cdot d) \cdot f\right)\sqrt{2}$$

$$+ 2\left((a \cdot d) \cdot f) + \left((b \cdot c) \cdot f\right) + \left((b \cdot d) \cdot e\right)\right)$$

$$= a \cdot (c \cdot e) \cdot \left(a \cdot (d \cdot e) + b \cdot (c \cdot e) + a \cdot (c \cdot f) + b \cdot 2(d \cdot f)\right)\sqrt{2}$$

$$+ 2\left(a \cdot (d \cdot f) + \left(b \cdot (c \cdot f)\right) + \left(b \cdot (d \cdot e)\right)\right)$$

$$= \left(a + b\sqrt{2}\right)\left((c \cdot e) + \left((d \cdot e) + (c \cdot f)\right)\sqrt{2} + 2(d \cdot f)\right)$$

$$= \left(a + b\sqrt{2}\right) \cdot \left(\left(c + d\sqrt{2}\right) \cdot \left(e + f\sqrt{2}\right)\right) = x.(y.z)$$

viii. Operasi penjumlahan dan perkalian memenuhi hukum distributif.

Ambil sebarang $x, y, z \in Q\sqrt{2}$. Misal $x = a + b\sqrt{2}; y = c + d\sqrt{2}$ dan $z = e + f\sqrt{2}$ untuk suatu $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Q}$. Berlaku,

$$x.(y + z) = a + b\sqrt{2} \cdot \left(\left(c + d\sqrt{2}\right) + \left(e + f\sqrt{2}\right)\right)$$

$$= a + b\sqrt{2} \cdot \left((c + e) + (d + f)\sqrt{2}\right)$$

$$= a \cdot (c + e) + a \cdot (d + f)\sqrt{2} + b \cdot (c + e)\sqrt{2} + 2b \cdot (d + f)$$

$$= a \cdot (c + e) + \left(a \cdot (d + f) + b \cdot (c + e)\right)\sqrt{2} + 2b \cdot (d + f)$$

$$= a \cdot c + a \cdot e + (a \cdot d + a \cdot f + b \cdot c + b \cdot e)\sqrt{2} + 2b \cdot d + 2b \cdot f$$

$$= \left((a \cdot c) + (a \cdot d + b \cdot c)\sqrt{2} + (2b \cdot d)\right)$$

$$+ \left((a \cdot e) + (a \cdot f + b \cdot e)\sqrt{2} + (2b \cdot f)\right)$$

$$= \left(a + b\sqrt{2} \cdot \left(c + d\sqrt{2}\right)\right) + \left(a + b\sqrt{2} \cdot \left(e + f\sqrt{2}\right)\right) = (x.y) + (x.z)$$

Berdasarkan i-viii diperoleh bahwa $(Q\sqrt{2}, +, .)$ adalah ring.

Definisi 2.1.6 Macam-Macam Ring

a. Ring Komutatif (RK)

Suatu ring $(R, +, \cdot)$ disebut ring komutatif jika operasi perkalian bersifat komutatif di R.

b. Ring dengan Elemen Identitas

Suatu ring $(R, +, \cdot)$ disebut ring dengan elemen identitas jika R memiliki elemen identitas terhadap operasi perkalian.

c. Ring Komutatif dengan Elemen Identitas

Suatu ring $(R, +, \cdot)$ disebut ring komutatif dengan elemen identitas jika operasi perkalian bersifat komutatif di R dan memiliki elemen identitas.

d. Field

Suatu ring $(R, +, \cdot)$ disebut field jika ring R merupakan ring komutatif dengan elemen identitas dan setiap elemen yang tidak nol memiliki invers pada operasi perkalian.

Contoh 2.1.7. $(Q\sqrt{2}, +, \cdot)$ adalah ring sebagaimana contoh 2.1.5. Akan ditunjukkan bahwa $\left(Q\sqrt{2}, +, .\right)$ merupakan field.

Bukti:

a. Terdapat elemen identitas terhadap operasi perkalian yaitu $1 + 0\sqrt{2} \in Q\sqrt{2}$

   $\forall x = a + b\sqrt{2}$ berlaku $x \cdot \left(1 + 0\sqrt{2}\right) = \left(1 + 0\sqrt{2}\right) \cdot x = \left(a + b\sqrt{2}\right)$

b. Operasi perkalian memenuhi hukum komutatif, dalam hal ini

   Ambil sebarang $x, y \in Q\sqrt{2}$. Misal $x = a + b\sqrt{2}; y = c + d\sqrt{2}$ untuk suatu $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ berlaku,

   $$x.y = \left(a + b\sqrt{2}\right).\left(c + d\sqrt{2}\right) = \left(c.a + d\sqrt{2}.a + c.b\sqrt{2} + 2d.b\right)$$

   $$= \left(c + d\sqrt{2}\right).\left(a + b\sqrt{2}\right) = y.x$$

c. Setiap elemen tidak nol di $Q\sqrt{2}$ memiliki invers terhadap operasi perkalian

   $\forall x = \left(a + b\sqrt{2}\right), \exists x^{-1} = \frac{1}{a+b\sqrt{2}}$ sehingga,

$$x.x^{-1} = \left(\frac{1}{a + b\sqrt{2}}\right) \cdot \left(a + b\sqrt{2}\right) = 1 = 1 + 0\sqrt{2}$$

$$x^{-1}.x = \left(a + b\sqrt{2}\right).\left(\frac{1}{a + b\sqrt{2}}\right) = 1 = 1 + 0\sqrt{2}$$

Jadi $(Q\sqrt{2}, +, \cdot)$ adalah field.

Contoh 2.1.8. Misalkan $\mathbb{Z}_5 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}\}$. $(\mathbb{Z}_5, +, .)$ adalah ring terhadap operasi penjumlahan dan perkalian modulo 5. Akan ditunjukkan bahwa $\mathbb{Z}_5$ adalah field.

Bukti:

Tabel 2.1 Operasi Penjumlahan Modulo 5 pada $\mathbb{Z}_5$

$+$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$
$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$
$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$
$\hat{4}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$

Tabel 2.2 Operasi Perkalian Modulo 5 pada $\mathbb{Z}_5$

$.$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$
$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$
$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$	$\hat{1}$	$\hat{3}$
$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	$\hat{1}$	$\hat{4}$	$\hat{2}$
$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{4}$	$\hat{3}$	$\hat{2}$	$\hat{1}$

Diperoleh bahwa $(\mathbb{Z}_5, +, .)$ merupakan ring komutatif dengan elemen identitas dan semua elemen di $\mathbb{Z}_5$ selain $\hat{0}$ memiliki invers terhadap operasi perkalian modulo 5 yaitu, $\hat{1}^{-1} = \hat{1}, \hat{2}^{-1} = \hat{3}, \hat{3}^{-1} = \hat{2}, \hat{4}^{-1} = \hat{4}$ sehingga ring $(\mathbb{Z}_5, +, .)$ merupakan field.

2.2 Aljabar Smarandache

Aljabar Smarandache merupakan pengembangan dari struktur aljabar. Berikut akan diberikan definisi dari semigrup Smarandache, ring Smarandache subring Smarandache dan ideal Smarandache yang dirujuk dari buku Kandasamy (2003).

Definisi 2.2.1 (Semigrup Smaradanche)

Semigrup $(H,.)$ disebut semigrup Smaradanche jika terdapat himpunan bagian sejati G (dinotasikan dengan $G \subset H$) sedemikian sehingga G adalah grup.

Contoh 2.2.2. Misalkan $\mathbb{Z}_4 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}\}$. $(\mathbb{Z}_4,.)$ adalah semigrup terhadap operasi perkalian modulo 4. Pilih $G \subset \mathbb{Z}_4$ yaitu, $G = \{\hat{1}, \hat{3}\}$. Akan ditunjukkan bahwa $(\mathbb{Z}_4,.)$ adalah semigrup Smarandache.

Bukti:

Tabel 2.3 Operasi Perkalian Modulo 4 pada $\mathbb{Z}_4$

.	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$
$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$
$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	$\hat{2}$	$\hat{1}$

Diketahui bahwa $(\mathbb{Z}_4,.)$ adalah semigrup. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $(G,.)$ adalah grup sehingga $(\mathbb{Z}_4,.)$ adalah semigrup Smarandache.

Tabel 2.4 Operasi Perkalian Modulo 4 pada G

.	$\hat{1}$	$\hat{3}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{3}$
$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{1}$

Perhatikan Tabel 2.4 di atas diperoleh bahwa, G tertutup terhadap operasi perkalian modulo 4, operasi perkalian modulo 4 memenuhi hukum asosiatif, terdapat elemen identitas terhadap operasi perkalian modulo 4 yaitu $\hat{1} \in G$ dan setiap elemen di G memiliki invers terhadap operasi perkalian modulo 4 yaitu, $\hat{1}^{-1} = \hat{1}$ dan $\hat{3}^{-1} = \hat{3}$. Jadi, $(G,.)$ adalah grup sehingga $(\mathbb{Z}_4,.)$ adalah semigrup Smarandache.

Contoh 2.2.3. Misalkan $\mathbb{Z}_n = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \dots, \widehat{n-1}\}$. $(\mathbb{Z}_n,.)$ adalah semigrup terhadap operasi perkalian modulo n, untuk $n \geq 3$. Pillih $G \subset \mathbb{Z}_n$ yaitu $G = \{\hat{1}, \widehat{n-1}\}$. Akan ditunjukkan bahwa $(\mathbb{Z}_n,.)$ adalah semigrup Smarandache.

Bukti:

Akan ditunjukkan bahwa $(G,.)$ adalah grup sehingga $(\mathbb{Z}_n,.)$ adalah semigrup Smarandache.

Tabel 2.5 Operasi Perkalian Modulo n pada G

$.$	$\hat{1}$	$\widehat{n-1}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\widehat{n-1}$
$\widehat{n-1}$	$\widehat{n-1}$	$\hat{1}$

Perhatikan Tabel 2.5 di atas diperoleh bahwa, G tertutup terhadap operasi perkalian modulo n, Operasi perkalian modulo n memenuhi hukum asosiatif, terdapat elemen identitas terhadap operasi perkalian modulo n yaitu $\hat{1} \in G$ dan setiap elemen di G memiliki invers terhadap operasi perkalian modulo n yaitu, $\hat{1}^{-1} = \hat{1}$ dan $\widehat{n-1}^{-1} = \widehat{n-1}$. Jadi, $(G,.)$ adalah grup sehingga $(\mathbb{Z}_n,.)$ adalah semigrup Smarandache.

Contoh 2.2.4. Misalkan $\mathbb{N}$ adalah himpunan bilangan asli. $(\mathbb{N},+)$ adalah semigrup terhadap operasi penjumlahan. Ambil himpunan bagian sejati dari $\mathbb{N}$ berturut-turut yaitu, himpunan bilangan genap E, himpunan bilangan ganjil J, himpunan bilangan prima P, himpunan bilangan komposit K. Akan ditunjukkan bahwa $(\mathbb{N},+)$ semigrup Smarandache.

Bukti:

Diketahui bahwa $(\mathbb{N},+)$ adalah semigrup. Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $(E,+),(J,+),(P,+),(K,+)$ berturut-turut adalah grup sehingga $(\mathbb{N},+)$ semigrup Smarandache.

1. $(E,+)$ tidak memenuhi salah satu syarat dari grup yaitu, E tidak memiliki elemen identitas terhadap operasi penjumlahan. Jadi $(E,+)$ bukan grup.
2. $(J,+)$ tidak memenuhi salah satu syarat dari grup yaitu, $j_1, j_2 \in J$ tidak memenuhi $j_1 + j_2 \notin J$. Jadi J tidak tertutup terhadap operasi penjumlahan sehingga, $(J,+)$ bukan grup.
3. $(P,+)$ tidak memenuhi salah satu syarat dari grup yaitu, $p_1, p_2 \in P$ tidak selalu berakibat $p_1 + p_2 \in P$. Jadi P tidak tertutup terhadap operasi penjumlahan sehingga, $(P,+)$ bukan grup.
4. $(K,+)$ tidak memenuhi salah satu syarat dari grup yaitu, $k_1, k_2 \in K$ tidak selalu berakibat $k_1 + k_2 \in K$. Jadi K tidak tertutup terhadap operasi penjumlahan sehingga, $(K,+)$ bukan grup.

   Jadi $(\mathbb{N},+)$ bukan semigrup Smarandache.

Definisi 2.2.5 (Ring Smaradanche)

Ring $(R,+,.)$ disebut ring Smaradanche jika terdapat himpunan bagian sejati C (dinotasikan dengan $C \subset R$) sedemikian sehingga C adalah field.

Contoh 2.2.6. Misalkan $\mathbb{Z}_6 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}\}$. $(\mathbb{Z}_6, +, .)$ adalah ring terhadap operasi penjumlahan dan perkalian modulo 6. Pilih $C \subset \mathbb{Z}_6$ yaitu, $C = \{\hat{0}, \hat{2}, \hat{4}\}$. Akan ditunjukkan bahwa $(\mathbb{Z}_6, +, .)$ adalah ring Smarandache.

Bukti:

Tabel 2.6 Operasi Penjumlahan Modulo 6 pada $\mathbb{Z}_6$

$+$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\hat{0}$
$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$
$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$
$\hat{4}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{5}$	$\hat{5}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$

Tabel 2.7 Operasi Perkalian Modulo 6 pada $\mathbb{Z}_6$

$.$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$
$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$
$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$
$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$
$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{4}$	$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{4}$	$\hat{2}$
$\hat{5}$	$\hat{0}$	$\hat{5}$	$\hat{4}$	$\hat{3}$	$\hat{2}$	$\hat{1}$

Diketahui bahwa $(\mathbb{Z}_6, +, .)$ adalah ring. Kemudian akan ditunjukkan bahwa $(C, +, .)$ adalah field sehingga $(\mathbb{Z}_6, +, .)$ adalah ring Smarandache.

Tabel 2.8 Operasi Penjumlahan Modulo 6 pada C

$+$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$
$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$
$\hat{4}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$

Perhatikan Tabel 2.8 di atas diperoleh bahwa, C tertutup terhadap operasi penjumlahan modulo 6, operasi penjumlahan modulo 6 memenuhi hukum asosiatif, terdapat elemen identitas terhadap operasi penjumlahan modulo 6 yaitu

$\hat{0} \in C$, setiap elemen di C memiliki invers terhadap operasi penjumlahan modulo 6 dan operasi penjumlahan modulo 6 memenuhi hukum komutatif.

Tabel 2.9 Operasi Perkalian Modulo 6 pada C

$.$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$
$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{4}$	$\hat{2}$
$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$

Perhatikan Tabel 2.9 di atas diperoleh bahwa, C tertutup terhadap operasi perkalian modulo 6, operasi perkalian modulo 6 memenuhi hukum asosiatif, terdapat elemen identitas terhadap operasi perkalian modulo 6 yaitu $\hat{4} \in C$, setiap elemen di C selain $\hat{0}$ memiliki invers terhadap operasi perkalian modulo 6 yaitu, $\hat{2}^{-1} = \hat{2}, \hat{4}^{-1} = \hat{4}$, operasi perkalian modulo 6 memenuhi hukum komutatif serta operasi penjumlahan dan perkalian modulo 6 memenuhi hukum distributif. Jadi $(C, +, .)$ adalah field sehingga $(\mathbb{Z}_6, +, .)$ adalah ring Smarandache.

Contoh 2.2.7. Misalkan $\mathbb{Z}_4 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}\}$. $(\mathbb{Z}_4, +, .)$ adalah ring terhadap operasi penjumlahan dan perkalian modulo 4. Pilih $C \subset \mathbb{Z}_4$ yaitu, $C = \{\hat{1}, \hat{3}\}$. Akan ditunjukkan bahwa $(\mathbb{Z}_4, +, .)$ ring Smarandache.

Bukti:

Tabel 2.10 Operasi Penjumlahan Modulo 4 pada $\mathbb{Z}_4$

$+$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	3	$\hat{0}$
$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$
$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$

Tabel 2.11 Operasi Perkalian Modulo 4 pada $\mathbb{Z}_4$

$.$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$
$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$
$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	$\hat{2}$	$\hat{1}$

Diketahui $(\mathbb{Z}_4, +, .)$ adalah ring. Kemudian akan ditunjukkan bahwa $(C, +, .)$ field sehingga $(\mathbb{Z}_4, +, .)$ ring Smarandache.

Tabel 2.12 Operasi Penjumlahan Modulo 4 pada C

$+$	$\hat{1}$	$\hat{3}$
$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{0}$
$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$

Perhatikan Tabel 2.12 di atas, $\hat{1} + \hat{1} = \hat{2} \notin C$ sedemikian sehingga C tidak tertutup terhadap operasi penjumlahan modulo 4 sehingga $(C, +, .)$ bukan field. Jadi $(\mathbb{Z}_4, +, .)$ bukan ring Smarandache.

Contoh 2.2.8. Misalkan $\mathbb{R}$ adalah himpunan bilangan real. $(\mathbb{R}, +, .)$ merupakan ring terhadap operasi penjumlahan dan perkalian. Pilih $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ yaitu, himpunan bilangan rasional. Akan ditunjukkan bahwa $(\mathbb{R}, +, .)$ adalah ring Smarandache.

Bukti:

Diketahui bahwa $(\mathbb{R}, +, .)$ adalah ring. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $(\mathbb{Q}, +, .)$ adalah field sehingga $(\mathbb{R}, +, .)$ adalah ring Smarandache.

i. Ambil sebarang $x, y \in \mathbb{Q}$. Misal $x = \frac{a}{b}; y = \frac{d}{e}$ untuk suatu $a, b, d, e \in \mathbb{Z}$ & $b, e \neq 0$. Sekarang perhatikan $x + y = \frac{a}{b} + \frac{d}{e} = \frac{a+d}{b+e}$. Karena $(a + d), (b + e) \in \mathbb{Z}$ sehingga $x + y \in \mathbb{Q}$. Jadi $\mathbb{Q}$ tertutup terhadap operasi penjumlahan.

ii. Operasi penjumlahan memenuhi hukum asosiatif, dalam hal ini

Ambil sebarang $x, y, z \in \mathbb{Q}$. Misal $x = \frac{a}{b}; y = \frac{d}{e}; z = \frac{f}{g}$ untuk suatu

$a, b, d, e, f, g \in \mathbb{Z}$ & $b, e, g \neq 0$. Diperoleh bahwa,

$$(x + y) + z = \frac{a}{b} + \left(\frac{d}{e} + \frac{f}{q}\right) = \left(\frac{a}{b} + \frac{d}{e}\right) + \frac{f}{g} = x + (y + z)$$

iii. Terdapat elemen identitas terhadap operasi penjumlahan yaitu $0 \in \mathbb{Q}$

$\forall x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ berlaku $x + 0 = 0 + x = \frac{a}{b}$

iv. Setiap eleman di $\mathbb{Q}$ memiliki invers terhadap operasi penjumlahan

$\forall x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}, \exists -x = -\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ sehingga,

$$x + (-x) = \frac{a}{b} + \left(-\frac{a}{b}\right) = 0$$

$$(-x) + x = -\frac{a}{b} + \frac{a}{b} = 0$$

v. Operasi penjumlahan memenuhi hukum komutatif, dalam hal ini

Ambil sebarang $x, y \in \mathbb{Q}$. Misal $x = \frac{a}{b}; y = \frac{d}{e}$ untuk suatu $a, b, d, e \in \mathbb{Z}$ & $b, e \neq 0$.

$$x + y = \frac{a}{b} + \frac{d}{e} = \frac{d}{e} + \frac{a}{b} = y + x$$

vi. Ambil sebarang $x, y \in \mathbb{Q}$. Misal $x = \frac{a}{b}; y = \frac{d}{e}$ untuk suatu $a, b, d, e \in \mathbb{Z}$ & $b, e \neq 0$.

Sekarang perhatikan $x.y = \frac{a}{b}.\frac{d}{e} = \frac{ad}{be}$. Karena $(a.d), (b.e) \in \mathbb{Z}$ sehingga $x.y \in \mathbb{Q}$. Jadi $\mathbb{Q}$ tertutup terhadap operasi perkalian.

vii. Operasi perkalian memenuhi hukum asosiatif, dalam hal ini

Ambil sebarang $x, y, z \in \mathbb{Q}$. Misal $x = \frac{a}{b}; y = \frac{d}{e}; z = \frac{f}{g}$ untuk suatu

$a, b, d, e, f, g \in \mathbb{Z}$ & $b, e, g \neq 0$. Diperoleh bahwa,

$$(x.y).z = \frac{a}{b}.\left(\frac{d}{e}.\frac{f}{q}\right) = \left(\frac{a}{b}.\frac{d}{e}\right).\frac{f}{g} = x.(y.z)$$

viii. Operasi penjumlahan dan perkalian memenuhi hukum distributif yaitu,

$$\frac{a}{b}.\left(\frac{d}{e} + \frac{f}{g}\right) = \frac{ad}{be} + \frac{af}{bg} \in \mathbb{Q} \qquad \forall a, b, d, e, f, g \in \mathbb{Z}, \& \; be \neq 0, bg \neq 0$$

ix. Terdapat elemen identitas terhadap operasi perkalian yaitu $1 \in \mathbb{Q}$

$\forall x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ berlaku $x.1 = 1.x = \frac{a}{b}$

x. Operasi perkalian memenuhi sifat komutatif, dalam hal ini

Ambil sebarang $x, y \in \mathbb{Q}$. Misal $x = \frac{a}{b}; y = \frac{d}{e}$ untuk suatu $a, b, d, e \in \mathbb{Z}$ & $b, e \neq 0$.

berlaku $x.y = \frac{a}{b}.\frac{d}{e} = \frac{d}{e}.\frac{a}{b} = y.x$

xi. Setiap eleman di $\mathbb{Q}$ selain 0 memiliki invers terhadap operasi perkalian

$\forall x = \frac{a}{b}, \exists x^{-1} = \frac{b}{a}$ sedemikian sehingga

$$x.x^{-1} = \frac{a}{b}.\left(\frac{b}{a}\right) = 1$$

$$x^{-1}.x = \frac{b}{a}.\frac{a}{b} = 1$$

Jadi $(\mathbb{Q}, +, .)$ adalah field.

Diperoleh bahwa $(\mathbb{R}, +, .)$ merupakan ring Smarandache.

Contoh 2.2.9. Misalkan $\mathbb{Z}$ adalah himpunan bilangan bulat. $(\mathbb{Z}, +, .)$. merupakan ring terhadap operasi penjumlahan dan perkalian. Piilih himpunan bagian sejati dari $\mathbb{Z}$ berturut-turut yaitu, himpunan bilangan bulat negatif $\mathbb{Z}^{-}$, himpunan bilangan cacah C, himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$, himpunan bilangan genap E, himpunan bilangan ganjil J himpunan bilangan prima P, himpunan bilangan komposit K. Akan ditunjukkan bahwa $(\mathbb{Z}, +, .)$ ring Smarandache.

Bukti:

Diketahui $(\mathbb{Z}, +, .)$ adalah ring. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $(\mathbb{Z}^{-1}, +, .), (C, +, .), (\mathbb{N}, +, .), (E, +, .)(J, +, .), (P, +, .), (K, +, .)$ berturut-turut adalah field sehingga $(\mathbb{Z}, +, .)$ ring Smarandache.

a. $(\mathbb{Z}^{-1}, +, .)$ tidak memenuhi salah satu syarat dari field yaitu, $\mathbb{Z}^{-1}$ tidak memiliki elemen identitas terhadap operasi penjumlahan. Jadi $(\mathbb{Z}^{-1}, +, .)$ bukan field.

b. $(C, +, .)$ tidak memenuhi salah satu syarat dari field yaitu, setiap elemen di C tidak memiliki invers terhadap operasi penjumlahan sehingga, $(C, +, .)$ bukan field.

c. $(\mathbb{N}, +, .)$ tidak memenuhi salah satu syarat dari field yaitu, $\mathbb{N}$ tidak memiliki elemen identitas terhadap operasi penjumlahan. Jadi $(\mathbb{N}, +, .)$ bukan field.

d. Untuk pembuktian $(E, +, .)(J, +, .), (P, +, .), (K, +, .)$ analog dengan Contoh 2.2.4 sehingga $(E, +, .)(J, +, .), (P, +, .), (K, +, .)$ bukan field.

Jadi $(\mathbb{Z}, +, .)$ bukan ring Smarandache.

Definisi 2.2.10 (Subring Smaradanche)

Misalkan $(R, +, .)$ ring. $S \subset R$ merupakan subring dari R. $S \subset R$ disebut subring Smaradanche jika terdapat himpunan bagian sejati X (dinotasikan dengan $X \subset S$) sedemikian sehingga X adalah field.

Contoh 2.2.11. Misalkan $\mathbb{Z}_{12} = \{\hat{0}, \hat{1}, \dots, \widehat{11}\}$. $(\mathbb{Z}_{12}, +, .)$ adalah ring terhadap operasi penjumlahan dan perkalian modulo 12. Pilih $S \subset \mathbb{Z}_{12}$ yaitu,

$S = \{\hat{0}, \hat{2}, \hat{4}, \hat{6}, \hat{8}, \widehat{10}\}$ dan $X \subset S$ yaitu, $X = \{\hat{0}, \hat{4}, \hat{8}\}$. Akan ditunjukkan bahwa $(S, +, .)$ adalah subring Smarandache dari $(\mathbb{Z}_{12}, +, .)$ dengan beberapa kondisi berikut,

Bukti:

Tabel 2.13 Operasi Penjumlahan Modulo 12 pada $\mathbb{Z}_{12}$

$+$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\hat{6}$	$\hat{7}$	$\hat{8}$	$\hat{9}$	$\widehat{10}$	$\widehat{11}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\hat{6}$	$\hat{7}$	$\hat{8}$	$\hat{9}$	$\widehat{10}$	$\widehat{11}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\hat{6}$	$\hat{7}$	$\hat{8}$	$\hat{9}$	$\widehat{10}$	$\widehat{11}$	$\hat{0}$
$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\hat{6}$	$\hat{7}$	$\hat{8}$	$\hat{9}$	$\widehat{10}$	$\widehat{11}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$
$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\hat{6}$	$\hat{7}$	$\hat{8}$	$\hat{9}$	$\widehat{10}$	$\widehat{11}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$
$\hat{4}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\hat{6}$	$\hat{7}$	$\hat{8}$	$\hat{9}$	$\widehat{10}$	$\widehat{11}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{5}$	$\hat{5}$	$\hat{6}$	$\hat{7}$	$\hat{8}$	$\hat{9}$	$\widehat{10}$	$\widehat{11}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$
$\hat{6}$	$\hat{6}$	$\hat{7}$	$\hat{8}$	$\hat{9}$	$\widehat{10}$	$\widehat{11}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$
$\hat{7}$	$\hat{7}$	$\hat{8}$	$\hat{9}$	$\widehat{10}$	$\widehat{11}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\hat{6}$
$\hat{8}$	$\hat{8}$	$\hat{9}$	$\widehat{10}$	$\widehat{11}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\hat{6}$	$\hat{7}$
$\hat{9}$	$\hat{9}$	$\widehat{10}$	$\widehat{11}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\hat{6}$	$\hat{7}$	$\hat{8}$
$\widehat{10}$	$\widehat{10}$	$\widehat{11}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\hat{6}$	$\hat{7}$	$\hat{8}$	$\hat{9}$
$\widehat{11}$	$\widehat{11}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\hat{6}$	$\hat{7}$	$\hat{8}$	$\hat{9}$	$\widehat{10}$

Tabel 2.14 Operasi Perkalian Modulo 12 pada $\mathbb{Z}_{12}$

$.$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\hat{6}$	$\hat{7}$	$\hat{8}$	$\hat{9}$	$\widehat{10}$	$\widehat{11}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$
$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\hat{6}$	$\hat{7}$	$\hat{8}$	$\hat{9}$	$\widehat{10}$	$\widehat{11}$
$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$	$\hat{6}$	$\hat{8}$	$\widehat{10}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$	$\hat{6}$	$\hat{8}$	$\widehat{10}$
$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	$\hat{6}$	$\hat{9}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	$\hat{6}$	$\hat{9}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	$\hat{6}$	$\hat{9}$
$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{4}$	$\hat{8}$	$\hat{0}$	$\hat{4}$	$\hat{8}$	$\hat{0}$	$\hat{4}$	$\hat{8}$	$\hat{0}$	$\hat{4}$	$\hat{8}$
$\hat{5}$	$\hat{0}$	$\hat{5}$	$\widehat{10}$	$\hat{3}$	$\hat{8}$	$\hat{1}$	$\hat{6}$	$\widehat{11}$	$\hat{4}$	$\hat{9}$	$\hat{2}$	$\hat{7}$
$\hat{6}$	$\hat{0}$	$\hat{6}$	$\hat{0}$	$\hat{6}$	$\hat{0}$	$\hat{6}$	$\hat{0}$	$\hat{6}$	$\hat{0}$	$\hat{6}$	$\hat{0}$	$\hat{6}$
$\hat{7}$	$\hat{0}$	$\hat{7}$	$\hat{2}$	$\hat{9}$	$\hat{4}$	$\widehat{11}$	$\hat{6}$	$\hat{1}$	$\hat{8}$	$\hat{3}$	$\widehat{10}$	$\hat{5}$
$\hat{8}$	$\hat{0}$	$\hat{8}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{8}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{8}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{8}$	$\hat{4}$
$\hat{9}$	$\hat{0}$	$\hat{9}$	$\hat{6}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{9}$	$\hat{6}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{9}$	$\hat{6}$	$\hat{3}$
$\widehat{10}$	$\hat{0}$	$\widehat{10}$	$\hat{8}$	$\hat{6}$	$\hat{4}$	$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\widehat{10}$	$\hat{8}$	$\hat{6}$	$\hat{4}$	$\hat{2}$
$\widehat{11}$	$\hat{0}$	$\widehat{11}$	$\widehat{10}$	$\hat{9}$	$\hat{8}$	$\hat{7}$	$\hat{6}$	$\hat{5}$	$\hat{4}$	$\hat{3}$	$\hat{2}$	$\hat{1}$

Diketahui bahwa $(\mathbb{Z}_{12}, +, .)$ adalah ring. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $(S, +, .)$ adalah subring dari $\mathbb{Z}_{12}$.

Tabel 2.15 Operasi Penjumlahan Modulo 12 pada S

$+$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$	$\hat{6}$	$\hat{8}$	$\widehat{10}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$	$\hat{6}$	$\hat{8}$	$\widehat{10}$
$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$	$\hat{6}$	$\hat{8}$	$\widehat{10}$	$\hat{0}$
$\hat{4}$	$\hat{4}$	$\hat{6}$	$\hat{8}$	$\widehat{10}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$
$\hat{6}$	$\hat{6}$	$\hat{8}$	$\widehat{10}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$
$\hat{8}$	$\hat{8}$	$\widehat{10}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$	$\hat{6}$
$\widehat{10}$	$\widehat{10}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$	$\hat{6}$	$\hat{8}$

Perhatikan Tabel 2.15 di atas diperoleh bahwa, S tertutup terhadap operasi penjumlahan modulo 12, operasi penjumlahan modulo 12 memenuhi hukum asosiatif, terdapat elemen identitas terhadap operasi penjumlahan modulo 12 yaitu $\hat{0} \in S$, setiap elemen di S memiliki invers terhadap operasi penjumlahan modulo 12 dan operasi penjumlahan modulo 12 memenuhi hukum komutatif.

Tabel 2.16 Operasi Perkalian Modulo 12 pada S

$.$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$	$\hat{6}$	$\hat{8}$	$\widehat{10}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$
$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{4}$	$\hat{8}$	$\hat{0}$	$\hat{4}$	$\hat{8}$
$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{8}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{8}$	$\hat{4}$
$\hat{6}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$
$\hat{8}$	$\hat{0}$	$\hat{4}$	$\hat{8}$	$\hat{0}$	$\hat{4}$	$\hat{8}$
$\widehat{10}$	$\hat{0}$	$\hat{8}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{8}$	$\hat{4}$

Perhatikan Tabel 2.16 di atas diperoleh bahwa, S tertutup terhadap operasi perkalian modulo 12, operasi perkalian modulo 12 memenuhi hukum asosiatif serta operasi penjumlahan dan perkalian modulo 12 memenuhi hukum distributif. Jadi $(S,+,.)$ adalah subring dari $(R,+,.)$. Akan ditunjukkan bahwa $(X,+,.)$ adalah field dari $(S,+,.)$.

Tabel 2.17 Operasi penjumlahan modulo 12 pada X

$+$	$\hat{0}$	$\hat{4}$	$\hat{8}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{4}$	$\hat{8}$
$\hat{4}$	$\hat{4}$	$\hat{8}$	$\hat{0}$
$\hat{8}$	$\hat{8}$	$\hat{0}$	$\hat{4}$

Perhatikan Tabel 2.17 di atas diperoleh bahwa, X tertutup terhadap operasi penjumlahan modulo 12, operasi penjumlahan modulo 12 memenuhi hukum asosiatif, terdapat elemen identitas terhadap operasi penjumlahan modulo 12 yaitu $\hat{0} \in X$, setiap elemen di X memiliki invers terhadap operasi penjumlahan modulo 12 dan operasi penjumlahan modulo 12 memenuhi hukum komutatif.

Tabel 2.18 Operasi perkalian modulo 12 pada X

$.$	$\hat{0}$	$\hat{4}$	$\hat{8}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$
$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{4}$	$\hat{8}$
$\hat{8}$	$\hat{0}$	$\hat{8}$	$\hat{4}$

Perhatikan Tabel 2.18 di atas diperoleh bahwa, X tertutup terhadap operasi perkalian modulo 12, operasi perkalian modulo 12 memenuhi hukum asosiatif, terdapat elemen identitas terhadap operasi perkalian modulo 12 yaitu $\hat{4} \in C$, setiap elemen di X selain $\hat{0}$ memiliki invers terhadap operasi perkalian modulo 12 yaitu, $\hat{4}^{-1} = \hat{4}, \hat{8}^{-1} = \hat{8}$, operasi perkalian modulo 12 memenuhi hukum komutatif serta operasi penjumlahan dan perkalian modulo 12 memenuhi hukum distributif. Jadi $(X, +, .)$ adalah field sehingga $(S, +, .)$ adalah subring Smarandache.

Definisi 2.2.12 (Ideal Smaradanche)

Misalkan $(R, +, .)$ ring dan $(S, +, .)$ subring dari R. Ideal Smarandache didefinisikan sebagai ideal I dari R yang memuat himpunan bagian sejati X (dinotasikan dengan $X \subset I$) sedemikian sehingga X adalah field.

Contoh 2.2.13. Diberikan $(\mathbb{Z}_{12}, +, .)$ adalah ring terhadap operasi penjumlahan dan perkalian modulo 12 dan $(S, +, .)$ merupakan subring dari $\mathbb{Z}_{12}$ sebagaimana Contoh 2.2.11. Akan ditunjukkan bahwa I adalah ideal Smarandache dari $\mathbb{Z}_{12}$ dengan beberapa kondisi berikut:

Bukti:

a) Akan ditunjukkan bahwa I memenuhi aksioma ideal dari $\mathbb{Z}_{12}$

Untuk $\hat{0} \in I$ dan $r \in \mathbb{Z}_{12}$

$$\left.\begin{aligned} \hat{0}.\hat{0} &= \hat{0} \\ &\vdots \\ \hat{0}.\widehat{11} &= \hat{0} \end{aligned}\right\} \in I$$

Untuk $\hat{2} \in I$ dan $r \in \mathbb{Z}_{12}$

$$\left.\begin{aligned} \hat{2}.\hat{0} &= \hat{0} \\ &\vdots \\ \hat{2}.\widehat{11} &= \widehat{10} \end{aligned}\right\} \in I$$

Untuk $\hat{4} \in I$ dan $r \in \mathbb{Z}_{12}$

$$\left.\begin{aligned} \hat{4}.\hat{0} &= \hat{0} \\ &\vdots \\ \hat{4}.\widehat{11} &= \hat{8} \end{aligned}\right\} \in I$$

Untuk $\hat{6} \in I$ dan $r \in \mathbb{Z}_{12}$

$$\left.\begin{aligned} \hat{6}.\hat{0} &= \hat{0} \\ &\vdots \\ \hat{6}.\widehat{11} &= \hat{6} \end{aligned}\right\} \in I$$

Untuk $\hat{8} \in I$ dan $r \in \mathbb{Z}_{12}$

$$\left.\begin{aligned} \hat{0}.\hat{0} &= \hat{0} \\ &\vdots \\ \hat{8}.\widehat{11} &= \hat{4} \end{aligned}\right\} \in I$$

Untuk $\widehat{10} \in I$ dan $r \in \mathbb{Z}_{12}$

$$\left.\begin{aligned} 1\,\hat{0}.\hat{0} &= \hat{0} \\ &\vdots \\ \widehat{10}.\widehat{11} &= \hat{2} \end{aligned}\right\} \in I$$

Berdasarkan penjelasan di atas diperoleh bahwa I adalah ideal kanan. Karena operasi perkalian bersifat komutatif yaitu, $a.r = r.a$ sehingga untuk $a \in I$ dan $r \in \mathbb{Z}_{12}$ berlaku $r.a \in I$. Jadi I adalah ideal kiri. Telah diperoleh bahwa I adalah ideal kanan maupun kiri sehingga I adalah ideal dari $\mathbb{Z}_{12}$.

b) $X \subset I$ adalah field sebagaimana Contoh 2.2.11.

Jadi I adalah ideal Smarandache dari $\mathbb{Z}_{12}$.

Definisi 2.2.14. (Produk Cartesian dari Ring Smaradanche)

Misalkan $(R_1, +, .)$ adalah ring Smarandache di mana $C \subset R_1$ sedemikian sehingga C adalah field dan misalkan $(R_2, +, .)$ adalah ring Smarandache di mana $D \subset R_2$ sedemikian sehingga D adalah field. Terlebih dahulu akan ditunjukkan bahwa $R_1 \times R_2$ adalah ring Smarandache.

Teorema 2.2.15. Jika $(R_1, +, .)$ dan $(R_2, +, .)$ ring Smarandache di mana $C \subset R_1$ dan $D \subset R_2$ berturut-turut adalah field maka $R_1 \times R_2 = \{(x, y) | x \in R_1, y \in R_2\}$ adalah ring Smarandache.

Bukti:

Didefinisikan operasi penjumlahan $\oplus$ dan perkalian $\otimes$ pada $R_1 \times R_2$ sebagai berikut,

$$(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$(x_1, y_1) \otimes (x_2, y_2) = (x_1 . x_2, y_1 . y_2)$$

untuk setiap $x_1, x_2 \in R_1$ dan $y_1, y_2 \in R_2$

1. Akan ditunjukkan bahwa $(R_1 \times R_2, \oplus, \otimes)$ adalah ring.
   a. Akan ditunjukkan bahwa $R_1 \times R_2$ bersifat tertutup terhadap operasi penjumlahan. Ambil sebarang $x, y \in R_1 \times R_2$. Misal $x = (x_1, y_1)$ dan $y = (x_2, y_2)$, untuk suatu $x_1, x_2 \in R_1$ dan $y_1, y_2 \in R_2$

      $x \oplus y = (x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

      karena $x_1, x_2 \in R_1$ dan $y_1, y_2 \in R_2$ sehingga, $x_1 + x_2 \in R_1$ dan $y_1 + y_2 \in R_2$. Dengan demikian $x \oplus y \in R_1 \times R_2$. Jadi $R_1 \times R_2$ bersifat tertutup terhadap operasi penjumlahan.
   b. Akan ditunjukkan bahwa operasi penjumlahan memenuhi hukum asosiatif. Ambil sebarang $x, y, z \in R_1 \times R_2$. Misal $x = (x_1, y_1), y = (x_2, y_2)$ dan $z = (x_3, y_3)$, untuk suatu $x_1, x_2, x_3 \in R_1$ dan $y_1, y_2, y_3 \in R_2$

$$(x \oplus y) \oplus z = \big((x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2)\big) \oplus (x_3, y_3)$$

$$= \big(x_1 + (x_2 + x_3), y_1 + (y_2 + y_3)\big)$$

$$= (x_1, y_1) \oplus \big((x_2, y_2) \oplus (x_3, y_3)\big) = x \oplus (y \oplus z)$$

terbukti bahwa operasi penjumlahan memenuhi hukum asosiatif.

c. Akan ditunjukkan bahwa terdapat elemen identitas terhadap operasi penjumlahan yaitu, $0 = \big(0_{R_1}, 0_{R_2}\big) \in R_1 \times R_2$. Ambil sebarang $x \in R_1 \times R_2$. Misal $x = (x_1, y_1)$, untuk suatu $x_1 \in R_1$ dan $y_1 \in R_2$

$$0 \oplus x = \big(0_{R_1}, 0_{R_2}\big) \oplus (x_1, y_1) = \big(0_{R_1} + x_1, 0_{R_2} + y_1\big) = (x_1, y_1) = x$$

$$x \oplus 0 = (x_1, y_1) \oplus \big(0_{R_1}, 0_{R_2}\big) = \big(x_1 + 0_{R_1}, y_1 + 0_{R_2}\big) = (x_1, y_1) = x$$

terbukti bahwa $0 \in R_1 \times R_2$ merupakan elemen identitas terhadap operasi penjumlahan.

d. Akan ditunjukkan bahwa setiap x elemen dari $R_1 \times R_2$ memiliki invers terhadap operasi penjumlahan. Ambil sebarang $x \in R_1 \times R_2$. Misal $x = (x_1, y_1)$, untuk suatu $x_1 \in R_1$ dan $y_1 \in R_2$. Karena $(R_1, +)$ dan $(R_2, +)$ merupakan grup sehingga $\exists (-x_1) \in R_1, (-y_1) \in R_2$ sedemikian sehingga $x_1 + (-x_1) = (-x_1) + x_1 = 0_{R_1}$ dan $y_1 + (-y_1) = (-y_1) + y_1 = 0_{R_2}$.

Selanjutnya, misalkan $(-x) = (-x_1, -y_1)$

$$(x \oplus -x) = (x_1, y_1) \oplus (-x_1, -y_1) = (x_1 - x_1, y_1 - y_1) = \big(0_{R_1}, 0_{R_2}\big) = 0$$

$$(-x \oplus x) = (-x_1, -y_1) \oplus (x_1, y_1) = (-x_1 + x_1, -y_1 + y_1) = \big(0_{R_1}, 0_{R_2}\big) = 0$$

terbukti bahwa setiap $x \in R_1 \times R_2$ mempunyai invers berbentuk $-x = (-x_1, -y_1) \in R_1 \times R_2$.

e. Akan ditunjukkan bahwa operasi penjumlahan memenuhi hukum komutatif Ambil sebarang $x, y \in R_1 \times R_2$. Misal $x = (x_1, y_1)$ dan $y = (x_2, y_2)$, untuk suatu $x_1, x_2 \in R_1$ dan $y_1, y_2 \in R_2$

$$x \oplus y = (x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$= (x_2 + x_1, y_2 + y_1) = (x_2, y_2) \oplus (x_1, y_1) = y \oplus x$$

jadi operasi penjumlahan memenuhi hukum komutatif.

f. Akan ditunjukkan bahwa $R_1 \times R_2$ bersifat tertutup terhadap operasi perkalian. Ambil sebarang $x, y \in R_1 \times R_2$. Misal $x = (x_1, y_1)$ dan $y = (x_2, y_2)$, untuk suatu $x_1, x_2 \in R_1$ dan $y_1, y_2 \in R_2$

$$x \otimes y = (x_1, y_1) \otimes (x_2, y_2) = (x_1 . x_2, y_1 . y_2)$$

karena $x_1, x_2 \in R_1$ dan $y_1, y_2 \in R_2$ sehingga, $x_1 . x_2 \in R_1$ dan $y_1 . y_2 \in R_2$. Dengan demikian $x \otimes y \in R_1 \times R_2$. Jadi $R_1 \times R_2$ bersifat tertutup terhadap operasi perkalian.

g. Akan ditunjukkan bahwa operasi perkalian memenuhi hukum asosiatif. Ambil sebarang $x, y \in R_1 \times R_2$. Misal $x = (x_1, y_1), y = (x_2, y_2)$ dan $z = (x_3, y_3)$, untuk suatu $x_1, x_2, x_3 \in R_1$ dan $y_1, y_2, y_3 \in R_2$

$$(x \otimes y) \otimes z = \big((x_1, y_1) \otimes (x_2, y_2)\big) \otimes (x_3, y_3)$$

$$= \big(x_1 . (x_2 . x_3), y_1 . (y_2 . y_3)\big)$$

$$= (x_1, y_1) \otimes \big((x_2, y_2) \otimes (x_3, y_3)\big) = x \otimes (y \otimes z)$$

terbukti bahwa operasi penjumlahan memenuhi hukum asosiatif.

h. Akan ditunjukkan bahwa operasi penjumlahan dan perkalian memenuhi hukum distributif. Ambil sebarang $x, y \in R_1 \times R_2$. Misal $x = (x_1, y_1)$, $y = (x_2, y_2)$ dan $z = (x_3, y_3)$, untuk suatu $x_1, x_2, x_3 \in R_1$ dan $y_1, y_2, y_3 \in R_2$

$$x \otimes (\mathrm{y} \oplus \mathrm{z}) = (x_1, y_1) \otimes \big((x_2, y_2) \oplus (\mathrm{x}_3, \mathrm{y}_3)\big)$$

$$= (x_1, y_1) \otimes (x_2 + x_3, y_2 + y_3)$$

$$= (x_1 . (x_2 + x_3), y_1 . (y_2 + y_3))$$

$$= (x_1 . x_2 + x_1 . x_3, y_1 . y_2 + y_1 . y_3)$$

$$= (x_1 . x_2, y_1 . y_2) + (x_1 . x_3, y_1 . y_3)$$

$$= \big((x_1, y_1) \otimes (x_2, y_2)\big) \oplus \big((x_1, y_1) \otimes (x_3, y_3)\big)$$

$$= (x \otimes \mathrm{y}) \oplus (x \otimes \mathrm{z})$$

terbukti bahwa operasi penjumlahan dan perkalian memenuhi hukum distributif

2. Karena $(R_1 \times R_2, \oplus, \otimes)$ adalah ring, selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $R_1 \times R_2$ adalah ring Smarandache.

   a. Akan dibuktikan bahwa $C \times D \subset R_1 \times R_2$

      $C \subset R_1$ berarti bahwa C merupakan himpunan bagian sejati dari R_1.

      $D \subset R_2$ berarti pula bahwa D merupakan himpunan bagian sejati dari R_2. Diperoleh Teorema 2.2.15 yaitu, $R_1 \times R_2 = \{(x, y) | x \in R_1, y \in R_2\}$.

      Berdasarkan definisi himpunan bagian diperoleh bahwa

      $C \times D \subset R_1 \times R_2$ berarti bahwa $C \times D$ merupakan himpunan bagian sejati dari $R_1 \times R_2$. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $C \times D$ merupakan field.

      i. Akan ditunjukkan bahwa $C \times D$ tertutup terhadap operasi penjumlahan

         Ambil sebarang $x, y \in C \times D$. Misal $x = (x_1, y_1)$ dan $y = (x_2, y_2)$, untuk suatu $x_1, x_2 \in C$ dan $y_1, y_2 \in D$

         $x \oplus y = (x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

         karena $x_1, x_2 \in C$ dan $y_1, y_2 \in D$ sehingga, $x_1 + x_2 \in C$ dan $y_1 + y_2 \in D$. Dengan demikian $x \oplus y \in C \times D$. Jadi $C \times D$ tertutup terhadap operasi penjumlahan.

      ii. Akan ditunjukkan bahwa operasi penjumlahan memenuhi hukum asosiatif.

         Ambil sebarang $x, y, z \in C \times D$. Misal $x = (x_1, y_1), y = (x_2, y_2)$ dan $z = (x_3, y_3)$, untuk suatu $x_1, x_2, x_3 \in C$ dan $y_1, y_2, y_3 \in D$

         $$(x \oplus y) \oplus z = \big((x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2)\big) \oplus (x_3, y_3)$$

         $$= \big(x_1 + (x_2 + x_3), y_1 + (y_2 + y_3)\big)$$

         $$= (x_1, y_1) \oplus [(x_2, y_2) \oplus (x_3, y_3)] = x \oplus (y \oplus z)$$

         terbukti bahwa bahwa operasi penjumlahan memenuhi hukum asosiatif

iii. Akan ditunjukkan bahwa terdapat elemen identitas terhadap operasi penjumlahan yaitu, $0 = (0_C, 0_D) \in C \times D$. Ambil sebarang $x \in C \times D$. Misal $x = (x_1, y_1)$, untuk suatu $x_1 \in C$ dan $y_1 \in D$

$0 \oplus x = (0_C, 0_D) \oplus (x_1, y_1) = (0_C + x_1, 0_D + y_1) = (x_1, y_1) = x$

$x \oplus 0 = (x_1, y_1) \oplus (0_C, 0_D) = (x_1 + 0_C, y_1 + 0_D) = (x_1, y_1) = x$

terbukti bahwa $0 \in C \times D$ merupakan elemen identitas terhadap operasi penjumlahan.

iv. Akan ditunjukkan bahwa setiap x elemen dari $C \times D$ memiliki invers terhadap operasi penjumlahan. Ambil sebarang $x \in C \times D$.

Misal $x = (x_1, y_1)$, untuk suatu $x_1 \in C$ dan $y_1 \in D$. Karena $(C, +)$ dan $(D, +)$ merupakan grup sehingga $\exists(-x_1) \in C, (-y_1) \in D$ sedemikian sehingga $x_1 + (-x_1) = (-x_1) + x_1 = 0_A$ dan

$y_1 + (-y_1) = (-y_1) + y_1 = 0_D$. Selanjutnya, misalkan $-x = (-x_1, -y_1)$

$(x \oplus -x) = (x_1, y_1) \oplus (-x_1, -y_1) = (x_1 - x_1, y_1 - y_1) = (0_C, 0_D) = 0$

$(-x \oplus x) = (-x_1, -y_1) \oplus (x_1, y_1) = (-x_1 + x_1, -y_1 + y_1) = (0_C, 0_D) = 0$

terbukti bahwa setiap $x \in C \times D$ memiliki invers berbentuk $-x \in C \times D$

v. Akan ditunjukkan bahwa operasi penjumlahan memenuhi hukum komutatif. Ambil sebarang $x, y \in C \times D$. Misal $x = (x_1, y_1)$ dan $y = (x_2, y_2)$, untuk suatu $x_1, x_2 \in C$ dan $y_1, y_2 \in D$

$x \oplus y = (x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

$= (x_2 + x_1, y_2 + y_1) = (x_2, y_2) \oplus (x_1, y_1) = y \oplus x$

terbukti bahwa operasi penjumlahan memenuhi hukum komutatif.

vi. Akan ditunjukkan bahwa $C \times D$ tertutup terhadap operasi perkalian. Ambil sebarang $x, y \in C \times D$. Misal $x = (x_1, y_1)$ dan $y = (x_2, y_2)$, untuk suatu $x_1, x_2 \in C$ dan $y_1, y_2 \in D$

$x \otimes y = (x_1, y_1) \otimes (x_2, y_2) = (x_1 . x_2, y_1 . y_2)$

Karena $x_1, x_2 \in C$ dan $y_1, y_2 \in D$ sehingga, $x_1 . x_2 \in C$ dan $y_1 . y_2 \in D$. Dengan demikian $x \otimes y \in C \times D$. Jadi $C \times D$ tertutup terhadap operasi perkalian.

vii. Akan ditunjukkan bahwa operasi perkalian memenuhi hukum asosiatif. Ambil sebarang $x, y \in C \times D$. Misal $x = (x_1, y_1), y = (x_2, y_2)$ dan $z = (x_3, y_3)$, untuk suatu $x_1, x_2, x_3 \in C$ dan $y_1, y_2, y_3 \in D$

$$
\begin{aligned}
(x \otimes y) \otimes z &= \big((x_1, y_1) \otimes (x_2, y_2)\big) \otimes (x_3, y_3) \\
&= \big(x_1 . (x_2 . x_3), y_1 . (y_2 . y_3)\big) \\
&= (x_1, y_1) \otimes [(x_2, y_2) \otimes (x_3, y_3)] \\
&= x \otimes (y \otimes z)
\end{aligned}
$$

Terbukti bahwa operasi perkalian memenuhi hukum asosiatif

viii. Akan ditunjukkan bahwa operasi penjumlahan dan perkalian memenuhi hukum distributif. Ambil sebarang $x, y \in C \times D$. Misal $x = (x_1, y_1)$, $y = (x_2, y_2)$ dan $z = (x_3, y_3)$, untuk suatu $x_1, x_2, x_3 \in C$ dan $y_1, y_2, y_3 \in D$

$$
\begin{aligned}
x \otimes (\mathrm{y} \oplus \mathrm{z}) &= (x_1, y_1) \otimes \big((x_2, y_2) \oplus (\mathrm{x}_3, \mathrm{y}_3)\big) \\
&= (x_1, y_1) \otimes (x_2 + x_3, y_2 + y_3) \\
&= (x_1 . (x_2 + x_3), y_1 . (y_2 + y_3)) \\
&= (x_1 . x_2 + x_1 . x_3, y_1 . y_2 + y_1 . y_3) \\
&= (x_1 . x_2, y_1 . y_2) + (x_1 . x_3, y_1 . y_3) \\
&= \big((x_1, y_1) \otimes (x_2, y_2)\big) \oplus \big((x_1, y_1) \otimes (x_3, y_3)\big) \\
&= (x \otimes \mathrm{y}) \oplus (x \otimes \mathrm{z})
\end{aligned}
$$

Terbukti bahwa operasi penjumlahan dan perkalian memenuhi hukum distributif

ix. Akan ditunjukkan bahwa operasi perkalian memenuhi hukum komutatif. Ambil sebarang $x, y \in C \times D$. Misal $x = (x_1, y_1), y = (x_2, y_2)$, untuk suatu $x_1, x_2 \in C$ dan $y_1, y_2 \in D$

$$x \otimes y = (x_1, y_1) \otimes (x_2, y_2) = (x_1 . x_2, y_1 . y_2) = (x_2 . x_1, y_2 . y_1)$$

$$= (x_2, y_2) \otimes (x_1, y_1) = y \otimes x$$

Terbukti bahwa operasi perkalian memenuhi hukum komutatif

x. Akan ditunjukkan bahwa terdapat elemen identitas terhadap operasi perkalian yaitu, $1 = (1_C, 1_D) \in C \times D$. Ambil sebarang $x \in C \times D$. Misal $x = (x_1, y_1)$, untuk suatu $x_1 \in C$ dan $y_1 \in D$.

$$1 \otimes x = (1_C, 1_D) \otimes (x_1, y_1) = (1_C . x_1, 1_D . y_1) = (x_1, y_1) = x$$

$$x \otimes 1 = (x_1, y_1) \otimes (1_C, 1_D) = (x_1 . 1_C, y_1 . 1_D) = (x_1, y_1) = x$$

Jadi $1 \in C \times D$ merupakan elemen identitas terhadap operasi perkalian

xi. Akan ditunjukkan bahwa setiap elemen tidak nol di $C \times D$ memiliki invers terhadap operasi perkalian. Ambil sebarang $x \in C \times D$ dengan $x = (x_1, y_1)$, untuk suatu $x_1 \in C$ dan $y_1 \in D$. Karena $(C, .)$ dan $(D, .)$ merupakan grup sehingga $\exists (x_1^{-1}) \in C, (y_1^{-1}) \in D$ sedemikian sehingga $x_1 . (x_1^{-1}) = (x_1^{-1}) . x_1 = 1_C$ dan $y_1 . (y_1^{-1}) = (y_1^{-1}) . y_1 = 1_D$. Selanjutnya, misalkan $(x^{-1}) = (x_1^{-1}, y_1^{-1})$

$$(x \otimes x^{-1}) = (x_1, y_1) \otimes (x_1^{-1}, y_1^{-1})$$

$$= (x_1 . x^{-1}, y_1 . y^{-1}) = (1_C, 1_D) = 1$$

$$(x^{-1} \otimes x) = (x_1^{-1}, y_1^{-1}) \otimes (x_1, y_1)$$

$$= (x_1^{-1} . x_1, y_1^{-1} . y_1) = (1_C, 1_D) = 1$$

Jadi setiap $x \in C \times D$ memiliki invers berbentuk $-x \in C \times D$

Terbukti bahwa $C \times D$ adalah field sehingga $R_1 \times R_2$ adalah ring Smarandache.

Preposisi 2.2.16

Jika $R_1, \dots, R_n$ merupakan ring Smarandache di mana $C_i \subset R_i$ untuk $(i = 1, \dots, n)$ adalah field maka

$$R_1 \times \dots \times R_n = \{(x_1, \dots, x_n) | x_i \in R_i, i = 1, \dots, n\}$$

merupakan ring Smarandache yang didefinisikan dengan operasi penjumlahan $\oplus$ dan perkalian $\otimes$ sebagai berikut,

$$(x_1, \dots, x_n) \oplus (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

$$(x_1, \dots, x_n) \otimes (y_1, \dots, y_n) = (x_1 . y_1, \dots, x_n . y_n)$$

Bukti:

Untuk membuktikan $R_1 \times \dots \times R_n$ adalah ring Smarandache, akan digunakan induksi matematika sebagai berikut,

a. Untuk $n = 2$ telah terbukti dalam Teorema 2.2.15

b. Diasumsikan benar untuk $n = k$ yaitu, $R_1 \times \dots \times R_k$ adalah ring Smarandache. Akan dibuktikan untuk $n = k + 1$

   Misalkan $R = R_1 \times \dots \times R_k$. Karena R adalah ring Smarandache sehingga menurut Teorema 2.2.15 diperoleh bahwa $R \times R_{k+1}$ adalah ring Smarandache atau

$$(R_1 \times \dots \times R_k) \times R_{k+1} = R_1 \times \dots \times R_k \times R_{k+1}$$

   adalah ring Smarandache. Jadi benar untuk $n = k + 1$.

2.3 Himpunan *Fuzzy*

Himpunan *fuzzy* merupakan himpunan yang anggotanya memiliki derajat keanggotaan tertentu yang ditentukan oleh fungsi keanggotaan atau fungsi karateristik. Berikut akan diberikan definisi himpunan *fuzzy* beserta operasi-operasi yang berlaku di dalamnya yang dikutip dari Zadeh (1965) dan Susilo (2006). Untuk pendefinisian produk cartesian himpunan *fuzzy* akan dikutip dari Malik dan Moderson (1991).

Definisi 2.3.1 (Himpunan $Fuzzy$)

Misalkan X adalah himpunan semesta. Himpunan $fuzzy$ A pada X ditandai dengan fungsi keangotaan μ_A yang menghubungkan setiap anggota-anggota dalam X ke interval tertutup $[0,1]$ yaitu,

$$\mu_A : X \to [0,1]$$

karena μ_A adalah suatu pemetaan maka μ_A dapat dinyatakan dalam himpunan pasangan terurut.

$$A = \{(x, \mu_A(x)) | x \in X\}$$

dengan nilai fungsi $\mu_A(x)$ menyatakan derajat keanggotaan unsur $x \in X$ dalam himpunan $fuzzy$ A.

Contoh 2.3.2. Misalkan semesta $X = \{0,1,2,3\}$. Didefinisikan fungsi keanggotaan μ_A yaitu, $\mu_A : X \to [0,1]$ sedemikian sehingga

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0.3, & x \in \{0,3\}; \\ 1, & x \in \{1,2\}. \end{cases}$$

Himpunan $fuzzy$ A pada X dapat direpresentasikan dengan pasangan berurutan sebagai berikut,

$$A = \{(0,0.3), (1,1), (2,1), (3,0.3)\}$$

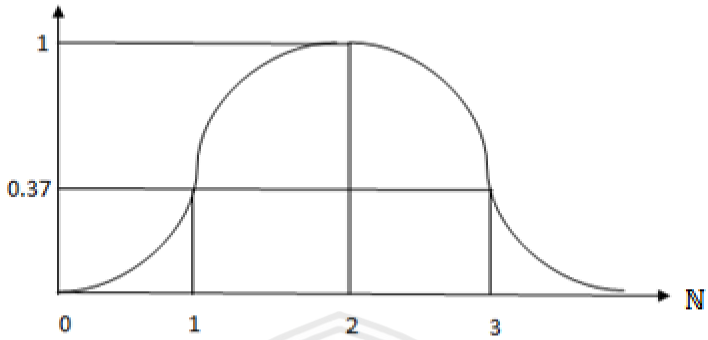
Contoh 2.3.3. Misalkan semesta X adalah himpunan semua bilangan asli $\mathbb{N}$. Didefinisikan fungsi keanggotaan μ_A yaitu, $\mu_A : \mathbb{N} \to [0,1]$ sebagai suatu formula matematis sedemikian sehingga

$$\mu_A(x) = e^{-(x-2)^2}.$$

Himpunan $fuzzy$ A pada $\mathbb{N}$ dapat direpresentasikan dengan pasangan berurutan sebagai berikut,

$$A = \{(1, e^{-(1-2)^2}), (2, e^{-(2-2)^2}), (3, e^{-(3-2)^2}), \dots\}$$

atau dapat disajikan dalam bentuk grafik sebagai berikut,



Gambar 2.1 Grafik Fungsi Keanggotaan Himpunan $Fuzzy$ Bilangan Asli

Bilangan 2 memiliki derajat keanggotaan 1 yaitu $\mu_A(2) = 1$, sedangkan 1 dan 3 memiliki derajat keanggotaan 0.37 yaitu, $\mu_A(1) = \mu_A(3) = 0.37$.

Definisi 2.3.4 (Himpunan Bagian dari Himpunan $Fuzzy$)

Dua himpunan $fuzzy$ A dan B dalam semesta X dikatakan sama, yang dinotasikan dengan $A = B$ jika dan hanya jika

$$\mu_A(x) = \mu_B(x) \text{ untuk setiap } x \in X.$$

Himpunan $fuzzy$ A adalah himpunan bagian dari himpunan $fuzzy$ B, dengan lambang $A \subseteq B$ jika dan hanya jika

$$\mu_A(x) \leq \mu_B(x) \text{ untuk setiap } x \in X.$$

Jadi $A = B$ jika dan hanya jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$.

Contoh 2.3.5. Berdasarkan Contoh 2.3.2 diperoleh bahwa himpunan $fuzzy$ A adalah $A = \{(0,0.3), (1,1), (2,1), (3,0.3)\}$. Didefinisikan fungsi keanggotaan μ_B yaitu $\mu_B: X \to [0,1]$ sedemikian sehingga,

$$\mu_B(x) = \begin{cases} 0.5, & x \in \{0,3\}; \\ 1, & x \in \{1,2\}. \end{cases}$$

Diperoleh himpunan $fuzzy$ B adalah,

$$B = \{(0,0.5), (1,1), (2,1), (3,0.5)\}$$

Jadi himpunan $fuzzy\ A$ adalah himpunan bagian dari himpunan $fuzzy\ B$

Definisi 2.3.6 (Operasi-Operasi Himpunan $\boldsymbol{Fuzzy}$)

a) Komplemen Himpunan $Fuzzy$

Misalkan X adalah himpunan tidak kosong. Komplemen dari himpunan $fuzzy$ A dinotasikan dengan A^c yang didefinisikan sebagai berikut,

$$A^c = \{(x, \mu_{A^c}(x)) | x \in X\}$$

di mana,

$$\mu_{A^c}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

untuk setiap $x \in X$.

b) Gabungan Himpunan $Fuzzy$

Misalkan X adalah himpunan tidak kosong. A dan B merupakan dua himpunan $fuzzy$ di X dengan masing-masing fungsi keanggotaan μ_A dan μ_B. Gabungan dari dua himpunan $fuzzy\ A$ dan B didefinisikan sebagai berikut,

$$A \cup B = \{(x, \mu_{A \cup B}(x)) | x \in X\}$$

di mana,

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

untuk setiap $x \in X$.

c) Irisan Himpunan $Fuzzy$

Misalkan X adalah himpunan tidak kosong. A dan B adalah dua himpunan $fuzzy$ di X dengan masing-masing fungsi keanggotaan μ_A dan μ_B.

Irisan dari dari dua himpunan $fuzzy\ A$ dan B didefinisikan sebagai berikut,

$$A \cap B = \{(x, \mu_{A \cap B}(x)) | x \in X\}$$

di mana,

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

untuk setiap $x \in X$.

Contoh 2.3.7. Misalkan semesta $X = \{-2, -1, 0, 1\}$. Didefinisikan fungsi keanggotaan μ_A dan μ_B berturut-turut yaitu, $\mu_A: X \to [0,1]$ dan $\mu_B: X \to [0,1]$ sedemikian sehingga,

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0.5, & x \in \{-2, 1\}; \\ 1, & x \in \{-1, 0\}. \end{cases}$$

$$\mu_B(x) = \begin{cases} 0.7, & x \in \{-2, -1, 1\}; \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Bukti:

Himpunan $fuzzy$ A dan B pada X masing-masing dapat direpresentasikan dengan pasangan berurutan sebagai berikut,

$$A = \{(-2, 0.5), (-1, 1), (0, 1), (1, 0.5)\}$$

$$B = \{(-2, 0.7), (-1, 0.7), (0, 1), (1, 0.7)\}$$

Akan ditentukan komplemen dari A, gabungan dan irisan dari dua himpunan $fuzzy$ A dan B

$$A^c = \{(-2, 0.5), (-1, 0), (0, 0), (1, 0.5)\}$$

$$A \cup B = \{(-2, 0.7), (-1, 1), (0, 1), (1, 0.7)\}$$

$$A \cap B = \{(-2, 0.5), (-1, 0.7), (0, 1), (1, 0.5)\}$$

Definisi 2.3.8 (Produk Cartesian Himpunan $Fuzzy$)

Misalkan X adalah himpunan tidak kosong. A dan B adalah dua himpunan $fuzzy$ di X dengan masing-masing fungsi keanggotaan μ_A dan μ_B. Produk cartesian dari dua himpunan $fuzzy$ A dan B dalam semesta $X \times X$ didefinisikan sebagai berikut,

$$A \times B = \left\{\left((x, y), \mu_{A \times B}(x, y)\right) \middle| (x, y) \in X \times X\right\}$$

di mana

$$\mu_{A\times B}(x,y)=\min\{\mu_A(x),\mu_B(y)\}$$

untuk setiap $x, y \in X$.

2.4 Subgrup *Fuzzy*

Pada subbab ini akan diberikan definisi subgrup $fuzzy$ yang dikutip dari Rosenfeld (1971)

Definisi 2.4.1 (Subgrup *Fuzzy*)

Misalkan $(G,*)$ adalah grup dan $A=\{(x,\mu_A(x))|x\in G\}$ adalah himpunan $fuzzy$ di G. A disebut subgrup $fuzzy$ dari G jika untuk setiap $x, y \in G$ berlaku,

i. $\mu_A(xy)\geq \min\{\mu_A(x),\mu_A(y)\}$

ii. $\mu_A(x^{-1})=\mu_A(x)$

Contoh 2.4.2. Diberikan suatu grup $(\mathbb{Z}_6,+)$ dengan operasi penjumlahan modulo 6. Didefinisikan fungsi keanggotaan μ_A yaitu, $\mu_A:\mathbb{Z}_6\to[0,1]$ sedemikian sehingga,

$$\mu_A(x)=\begin{cases}0.3, & x\in\{\hat{1},\hat{2},\hat{4},\hat{5}\};\\ 0.7, & x=\hat{3};\\ 1, & x=\hat{0}.\end{cases}$$

Akan ditunjukkan bahwa A adalah subgrup $fuzzy$ dari $\mathbb{Z}_6$.

Bukti:

Akan ditunjukkan bahwa A memenuhi,

1. $\mu_A(xy)\geq \min\{\mu_A(x),\mu_A(y)\}$
2. $\mu_A(x^{-1})=\mu_A(x)$.

Dari Tabel 2.19 dan Tabel 2.20 diperoleh bahwa A memenuhi 1 dan 2 sehingga A adalah subgrup $fuzzy$ dari $\mathbb{Z}_6$.

Tabel 2.19 Hasil Operasi $\mu_A(x+y) \geq \min\{\mu_A(x), \mu_A(y)\}$

x	y	$x+y$	$\mu_A(x)$	$\mu_A(y)$	$\mu_A(x+y)$	$\min(\mu_A(x), \mu_A(y))$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	1	1	1	1
	$\hat{1}$	$\hat{1}$		0.3	0.3	0.3
	$\hat{2}$	$\hat{2}$		0.3	0.3	0.3
	$\hat{3}$	$\hat{3}$		0.7	0.7	0.7
	$\hat{4}$	$\hat{4}$		0.3	0.3	0.3
	$\hat{5}$	$\hat{5}$		0.3	0.3	0.3
$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	0.3	1	0.3	0.3
	$\hat{1}$	$\hat{2}$		0.3	0.3	0.3
	$\hat{2}$	$\hat{3}$		0.3	0.7	0.3
	$\hat{3}$	$\hat{4}$		0.7	1	0.3
	$\hat{4}$	$\hat{5}$		0.3	0.3	0.3
	$\hat{5}$	$\hat{0}$		0.3	1	0.3
$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	0.3	1	0.3	0.3
	$\hat{1}$	$\hat{3}$		0.3	0.7	0.3
	$\hat{2}$	$\hat{4}$		0.3	1	0.3
	$\hat{3}$	$\hat{5}$		0.7	0.3	0.3
	$\hat{4}$	$\hat{0}$		0.3	1	0.3
	$\hat{5}$	$\hat{1}$		0.3	0.3	0.3
$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	0.7	1	0.7	0.7
	$\hat{1}$	$\hat{4}$		0.3	1	0.3
	$\hat{2}$	$\hat{5}$		0.3	0.3	0.3
	$\hat{3}$	$\hat{0}$		0.7	1	0.7
	$\hat{4}$	$\hat{1}$		0.3	0.3	0.3
	$\hat{5}$	$\hat{2}$		0.3	0.3	0.3
$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{4}$	0.3	1	1	0.3
	$\hat{1}$	$\hat{5}$		0.3	0.3	0.3
	$\hat{2}$	$\hat{0}$		0.3	1	0.3
	$\hat{3}$	$\hat{1}$		0.7	0.3	0.3
	$\hat{4}$	$\hat{2}$		0.3	0.3	0.3
	$\hat{5}$	$\hat{3}$		0.3	0.7	0.3
$\hat{5}$	$\hat{0}$	$\hat{5}$	0.3	1	0.3	0.3
	$\hat{1}$	$\hat{0}$		0.3	1	0.3
	$\hat{2}$	$\hat{1}$		0.3	0.3	0.3
	$\hat{3}$	$\hat{2}$		0.7	0.3	0.3
	$\hat{4}$	$\hat{3}$		0.3	0.7	0.3
	$\hat{5}$	$\hat{4}$		0.3	0.3	0.3

Tabel 2.20 Hasil operasi $\mu_A(x^{-1}) = \mu_A(x)$

x	$-x$	$\mu(x)$	$\mu(-x)$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	1	1
$\hat{1}$	$\hat{5}$	0.3	0.3
$\hat{2}$	$\hat{4}$	0.3	0.3
$\hat{3}$	$\hat{3}$	0.7	0.7
$\hat{4}$	$\hat{2}$	0.3	0.3
$\hat{5}$	$\hat{1}$	0.3	0.3

2.5 Himpunan Q-$Fuzzy$ dan Subgrup Q-$Fuzzy$

Dalam subbab ini akan dikutip definisi dari himpunan Q-$fuzzy$ dan subgrup Q-$fuzzy$ dari jurnal Priya,dkk (2013).

Definisi (2.5.1) Himpunan Q-$Fuzzy$

Misalkan X dan Q adalah himpunan tidak kosong. Himpunan Q-$fuzzy$ A pada X ditandai dengan fungsi keangotaan μ_A yang menghubungkan setiap anggota-anggota dalam $X \times Q$ ke interval tertutup $[0,1]$ yaitu,

$$\mu_A : X \times Q \to [0,1]$$

karena μ_A adalah suatu pemetaan maka μ_A dapat dinyatakan dalam himpunan pasangan terurut.

$$A = \{((x,q), \mu_A(x,q)) | (x,q) \in X \times Q\}$$

dengan nilai fungsi $\mu_A(x,q)$ menyatakan derajat keanggotaan unsur $(x,q) \in X \times Q$ dalam himpunan Q-$fuzzy$ A.

Contoh 2.5.2. Misalkan $X = \{7,8,9\}$ dan $Q = \{1,2\}$. Didefinisikan fungsi keanggotaan μ_A yaitu, $\mu_A: X \times Q \to [0,1]$ sedemikian sehingga,

$$\mu_A(x,q) = \begin{cases} \frac{0.4}{q}, & (x,q) \in \{(7,1),(8,1),(7,2)\}; \\ \frac{1}{q}, & (x,q) = \{(9,1),(8,2),(9,2)\}. \end{cases}$$

Himpunan Q-$fuzzy$ A pada X dapat direpresentasikan dengan pasangan berurutan sebagai berikut,

$$A = \{((7,1), 0.4), ((8,1), 0.4), ((9,1), 1), ((7,2), 0.2), ((8,2), 0.5), ((9,2), 0.5)\}$$

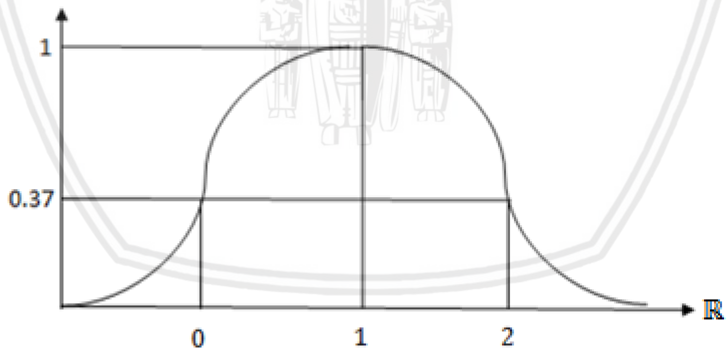
Contoh 2.5.3. Misalkan semesta X adalah himpunan semua bilangan real $\mathbb{R}$ dan Q adalah himpunan tidak kosong yaitu, $Q = \{1\}$. Didefinisikan fungsi keanggotaan μ_A yaitu, $\mu_A: \mathbb{R} \times Q \to [0,1]$ sebagai suatu formula matematis sedemikian sehingga;

$$\mu_A(x, q) = e^{-(x-q)^2}.$$

Himpunan Q-$fuzzy$ A pada $\mathbb{R}$ dapat direpresentasikan dengan pasangan berurutan sebagai berikut,

$$A = \{\dots, (0, e^{-(0-1)^2}), (1, e^{-(1-1)^2}), (2, e^{-(2-1)^2}), \dots\}$$

atau dapat disajikan dalam bentuk grafik sebagai berikut,



Gambar 2.2 Grafik Fungsi Keanggotaan Himpunan Q-$fuzzy$ Bilangan Real

Bilangan 2 memiliki derajat keanggotaan 1 yaitu $\mu_A(1,1) = 1$, sedangkan 0 dan 2 memiliki derajat keanggotaan 0.37 yaitu, $\mu_A(0,1) = \mu_A(2,1) = 0.37$.

Definisi (2.5.4) Subgrup Q-$Fuzzy$

Misalkan $(G,*)$ adalah grup dan Q merupakan himpunan tidak kosong. $A = \{((x,q), \mu_A(x,q)) | (x,q) \in G \times Q\}$ adalah himpunan Q-$fuzzy$ di G. A disebut subgrup Q-$fuzzy$ dari G jika untuk setiap $x, y \in G$ dan $q \in Q$ berlaku,

i. $\mu_A(xy,q) \geq \min\{\mu_A(x,q), \mu_A(y,q)\}$

ii. $\mu_A(x^{-1},q) = \mu_A(x,q)$

Contoh 2.5.5. Diberikan suatu grup $(\mathbb{Z}_4, +)$ dengan operasi penjumlahan modulo 4 dan himpunan tidak kosong $Q = \{4\}$. Didefinisikan fungsi keanggotaan μ_A yaitu, $\mu_A: \mathbb{Z}_4 \times Q \to [0,1]$ sedemikian sehingga,

$$\mu_A(x,q) = \begin{cases} \dfrac{0.5}{q}, & (x,q) \in \{(\hat{1},4), (\hat{3},4)\}; \\ \dfrac{0.8}{q}, & (x,q) = (\hat{2},4); \\ \dfrac{1}{q}, & (x,q) = (\hat{0},4). \end{cases}$$

Bukti

Akan ditunjukkan bahwa A memenuhi,

a. $\mu_A(xy,q) \geq \min\{\mu_A(x,q), \mu_A(y,q)\}$

b. $\mu_A(x^{-1},q) = \mu_A(x,q)$.

Dari Tabel 2.21 hingga Tabel 2.22 diperoleh bahwa A memenuhi a dan b sehingga A merupakan subgrup Q-$fuzzy$ dari $\mathbb{Z}_4$.

Tabel 2.21 Hasil Operasi $\mu_A(x+y,4) \geq \min\{\mu_A(x,4), \mu_A(y,4)\}$

x	y	$x+y$	$\mu_A(x,4)$	$\mu_A(y,4)$	$\mu_A(x+y,4)$	$\min(\mu_A(x,4), \mu(y,4))$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	0.25	0.25	0.25	0.25
	$\bar{1}$	$\bar{1}$		0.125	0.125	0.125
	$\bar{2}$	$\bar{2}$		0.2	0.2	0.2
	$\bar{3}$	$\bar{3}$		0.125	0.125	0.125
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	0.125	0.25	0.125	0.125
	$\bar{1}$	$\bar{2}$		0.125	0.2	0.125
	$\bar{2}$	$\bar{3}$		0.2	0.125	0.125
	$\bar{3}$	$\bar{0}$		0.125	0.25	0.125
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	0.2	0.25	0.2	0.2
	$\bar{1}$	$\bar{3}$		0.125	0.125	0.125
	$\bar{2}$	$\bar{0}$		0.2	0.25	0.2
	$\bar{3}$	$\bar{1}$		0.125	0.125	0.125
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	0.125	0.25	0.125	0.125
	$\bar{1}$	$\bar{0}$		0.125	0.25	0.125
	$\bar{2}$	$\bar{1}$		0.2	0.125	0.125
	$\bar{3}$	$\bar{2}$		0.125	0.2	0.125

Tabel 2.22 Hasil Operasi $\mu_A(x^{-1},4) = \mu_A(x,4)$

x	$-x$	$\mu_A(x,4)$	$\mu_A(-x,4)$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	0.25	0.25
$\bar{1}$	$\bar{3}$	0.125	0.125
$\bar{2}$	$\bar{2}$	0.2	0.2
$\bar{3}$	$\bar{1}$	0.125	0.125

2.6 Semigrup *Fuzzy* Smarandache dan Ring *Fuzzy* Smarandache

Dalam subbab ini akan dikutip definisi dari semigrup *fuzzy* Smarandache dan ring *fuzzy* Smarandache dari Kandasamy (2003).

Definisi 2.6.1 (Semigrup *Fuzzy* Smarandache)

Misalkan H adalah semigrup Smarandache di mana $G \subset H$ adalah grup. Himpunan *fuzzy* A di H yaitu, $A = \{(x, \mu_A(x)) | x \in H\}$ disebut semigrup *fuzzy* Smarandache jika μ_A yang dibatasi pada G dinotasikan dengan μ_G, memenuhi aksioma berikut,

1. $\mu_G(xy) \geq \min\{\mu_G(x), \mu_G(y)\}$

2. $\mu_G(x) = \mu_G(x^{-1})$

Contoh 2.6.2. Diberikan semigrup $(\mathbb{Z}_4, .)$ dengan operasi perkalian modulo 4. Didefinisikan fungsi keanggotaan μ_A yaitu, $\mu_A : \mathbb{Z}_4 \to [0,1]$ sedemikian sehingga,

$$\mu(x) = \begin{cases} 0.3, & x \in \{\hat{1}, \hat{3}\}; \\ 0.7, & x = \hat{2}; \\ 1, & x = \hat{0}. \end{cases}$$

Ambil himpunan bagian sejati dari $\mathbb{Z}_4$ yaitu, $G = \{\hat{1}, \hat{3}\}$ sebagaimana Contoh 2.2.2. Akan ditunjukkan bahwa A adalah semigrup FS dari $\mathbb{Z}_4$.

Bukti:

Akan ditunjukkan bahwa A memenuhi

a. $\mu_G(xy) \geq \min\{\mu_G(x), \mu_G(y)\}$

b. $\mu_G(x^{-1}) = \mu_G(x)$.

Dari Tabel 2.23 dan Tabel 2.24 diperoleh bahwa A memenuhi a dan b sehingga A merupakan semigrup FS dari $\mathbb{Z}_4$.

Tabel 2.23 Hasil Operasi $\mu_G(x.y) \geq \min\{\mu_G(x), \mu_G(y)\}$

x	y	$x.y$	$\mu_G(x)$	$\mu_G(y)$	$\mu_G(x.y)$	$\min(\mu_G(x), \mu_G(y))$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{1}$	0.3	0.3	0.3	0.3
	$\hat{3}$	$\hat{3}$		0.3	0.3	0.3
$\hat{3}$	$\hat{1}$	$\hat{3}$	0.3	0.3	0.3	0.3
	$\hat{3}$	$\hat{1}$		0.3	0.3	0.3

Tabel 2.24 Hasil Operasi $\mu_G(x^{-1}) = \mu_G(x)$

x	$-x$	$\mu_G(x)$	$\mu_G(-x)$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	0.3	0.3
$\hat{3}$	$\hat{3}$	0.3	0.3

Definisi 2.6.3 (Ring $Fuzzy$ Smarandache)

Misalkan R adalah ring Smarandache di mana $A \subset R$ adalah field. Himpunan $fuzzy$ A di R yaitu, $A = \{(x, \mu_A(x)) | x \in R\}$ disebut ring $fuzzy$ Smarandache jika μ_A yang dibatasi pada C dinotasikan dengan μ_C, memenuhi aksioma berikut,

1. $\mu_C(x - y) \geq \min\{\mu_C(x), \mu_C(y)\}$
2. $\mu_C(xy^{-1}) \geq \min\{\mu_C(x), \mu_C(y)\}$

   $\forall x, y \in C, y \neq 0.$

Ring $fuzzy$ smarandache dinotasikan sebagai (ring FS).

Contoh 2.6.4. Diberikan $(\mathbb{Z}_6, +, .)$ ring atas operasi penjumlahan dan perkalian modulo 6. Pilih $C \subset \mathbb{Z}_6$ yaitu, $C = \{\hat{0}, \hat{2}, \hat{4}\}$ sebagaimana Contoh 2.2.6. Didefinisikan fungsi keanggotaan μ_A yaitu, $\mu_A : \mathbb{Z}_6 \to [0,1]$ sebagai berikut

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0.5, & x \in \{\hat{2}, \hat{4}\}; \\ 1, & x \in \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{3}, \hat{5}\}. \end{cases}$$

Akan ditunjukkan bahwa A merupakan ring FS dari $\mathbb{Z}_6$

Bukti :

Akan ditunjukkan bahwa A memenuhi

a. $\mu_C(x - y) \geq \min\{\mu_C(x), \mu_C(y)\}$

b. $\mu_C(xy^{-1}) \geq \min\{\mu_C(x), \mu_C(y)\}$.

Dari Tabel 2.25 hingga Tabel 2.26 diperoleh bahwa A memenuhi a dan b sehingga A adalah ring FS dari $\mathbb{Z}_6$.

Tabel 2.25 Hasil Operasi $\mu_C(x-y) \geq \min\{\mu_C(x), \mu_C(y)\}$

x	y	$\mu_C(x)$	$\mu_C(y)$	$\mu_C(x-y)$	$\min\{\mu_C(x), \mu_C(y)\}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	1	1	1	1
	$\hat{2}$		0.5	0.5	0.5
	$\hat{4}$		0.5	0.5	0.5
$\hat{2}$	$\hat{0}$	0.5	1	0.5	0.5
	$\hat{2}$		0.5	1	0.5
	$\hat{4}$		0.5	0.5	0.5
$\hat{4}$	$\hat{0}$	0.5	1	0.5	0.5
	$\hat{2}$		0.5	0.5	
	$\hat{4}$		0.5	1	

Tabel 2.26 Hasil Operasi $\mu_C(xy^{-1}) \geq \min\{\mu_C(x), \mu_C(y)\}$

x	y	y^{-1}	$\mu_C(x)$	$\mu_C(y)$	$\mu_C(xy^{-1})$	$\min\{\mu_C(x), \mu_C(y)\}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	1	1	1	0.5
	$\hat{2}$	$\hat{2}$		0.5		
	$\hat{4}$	$\hat{4}$		0.5		
$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	0.5	1	1	0.5
	$\hat{2}$	$\hat{2}$		0.5	0.5	
	$\hat{4}$	$\hat{4}$		0.5	0.5	
$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	0.5	1	1	0.5
	$\hat{2}$	$\hat{2}$		0.5	0.5	
	$\hat{4}$	$\hat{4}$		0.5	0.5	

2.7 Semigrup Q-$Fuzzy$ Smaradanche

Pada subbab ini akan dibahas mengenai definisi, contoh beserta sifat-sifat dari semigrup Q-$fuzzy$ Smarandache dan semigrup normal Q-$fuzzy$ Smarandache yang dikutip dari paper Doss dan Suganya (2016).

Definisi 2.7.1 (Semigrup Q-$Fuzzy$ Smaradanche atau Semigrup QFS)

Misalkan H adalah semigrup Smaradanche di mana $G \subset H$ adalah grup dan Q merupakan himpunan tidak kosong. Himpunan Q-$fuzzy$ A di H yaitu, $A = \{((x,q), \mu_A(x,q)) | (x,q) \in H \times Q\}$ disebut semigrup Q-$fuzzy$ Smarandache jika μ_A yang dibatasi pada $G \times Q$ dinotasikan dengan μ_G, memenuhi aksioma berikut,

1. $\mu_G(xy, q) \geq \min\{\mu_G(x, q), \mu_G(y, q)\}$
2. $\mu_G(x, q) = \mu_G(x^{-1}, q)$

   $\forall x, y \in G$ dan $q \in Q$.

Contoh 2.7.2. Diberikan semigrup $(\mathbb{Z}_4, .)$ terhadap operasi perkalian modulo 4. Pilih $G \subset \mathbb{Z}_4$ di mana $G = \{\hat{1}, \hat{3}\}$ sebagaimana contoh 2.2.2 dan $Q \neq \emptyset$, $Q = \{2\}$. Didefinisikan fungsi keanggotaan μ_A yaitu $\mu_A: \mathbb{Z}_4 \times Q \to [0,1]$ sedemikian sehingga,

$$\mu_A(x, q) = \begin{cases} \dfrac{0.5}{q}, & (x, q) \in \{(\hat{1}, 2), (\hat{3}, 2)\}; \\ \dfrac{0.8}{q}, & (x, q) = (\hat{2}, 2); \\ \dfrac{1}{q}, & (x, q) = (\hat{0}, 2). \end{cases}$$

Akan ditunjukkan bahwa A adalah semigrup QFS dari $\mathbb{Z}_4$

Bukti:

Akan ditunjukkan bahwa A memenuhi

a. $\mu_G(x.y, q) \geq \min\{\mu_G(x, q), \mu_G(y, q)\}$

b. $\mu_G(x^{-1}, q) = \mu_G(x, q)$.

Berdasarkan Tabel 2.27 dan Tabel 2.28 diperoleh bahwa A memenuhi a dan b sehingga A merupakan semigrup QFS dari $\mathbb{Z}_4$.

Tabel 2.27 Hasil Operasi $\mu_G(x.y, 2) \geq \min\{\mu_G(x, 2), \mu_G(y, 2)\}$

x	y	$x.y$	$\mu_G(x,1)$	$\mu_G(y,2)$	$\mu_G(x.y,2)$	min$(\mu_G(x,2), \mu_G(y,2))$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{1}$	0.25	0.25	0.25	0.25
	$\hat{3}$	$\hat{3}$		0.25	0.25	0.25
$\hat{3}$	$\hat{1}$	$\hat{3}$	0.25	0.25	0.25	0.25
	$\hat{3}$	$\hat{1}$		0.25	0.25	0.25

Tabel 2.28 Hasil operasi $\mu_G(x^{-1},2) = \mu_G(x,2)$

x	$-x$	$\mu_G(x,2)$	$\mu_G(-x,2)$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	0.25	0.25
$\hat{3}$	$\hat{3}$	0.25	0.25

Proposisi 2.7.3. Misalkan H adalah semigrup Smarandache di mana $G \subset H$ adalah grup dan Q merupakan himpunan tidak kosong. Jika A adalah semigrup QFS dari H maka berlaku,

i. $\mu_G(e,q) \geq \mu_G(x,q)$ untuk e adalah elemen identitas dari G

ii. $\mu_G(x^{-1},q) \geq \mu_G(x,q)$ untuk setiap $x \in G$ dan $q \in Q$

Bukti: Diketahui A adalah semigrup QFS dari H.

Akan dibuktikan $\mu_G(e,q) \geq \mu_G(x,q)$ dan $\mu_G(x^{-1},q) \geq \mu_G(x,q)$

i. Misalkan e adalah elemen identitas di G

$$\begin{aligned}\mu_G(e,q) &= \mu_G(xx^{-1},q) \\ &\geq \min\{\mu_G(x,q), \mu_G(x^{-1},q)\} \\ &= \min\{\mu_G(x,q), \mu_G(x,q)\} \\ &= \mu_G(x,q)\end{aligned}$$

Jadi $\mu_G(e,q) \geq \mu_G(x,q)$ □

ii. Untuk setiap $x \in G$ dan $q \in Q$ berlaku,

$$\begin{aligned}\mu_G(x^{-1},q) &= \mu_G(ex^{-1},q) \\ &\geq \min\{\mu_G(e,q), \mu_G(x^{-1},q)\} \\ &= \min\{\mu_G(e,q), \mu_G(x,q)\} \\ &= \mu_G(x,q)\end{aligned}$$

Jadi $\mu_G(x^{-1},q) \geq \mu_G(x,q)$ □

Teorema 2.7.4. Misalkan H adalah semigrup Smarandache di mana $G \subset H$ adalah grup dan $Q \neq \emptyset$. A adalah semigrup QFS dari H jika $\mu_G(xy^{-1}, q) = \mu_G(e, q)$ maka $\mu_G(x, q) = \mu_G(y, q), \forall x, y \in G \subset H$

Bukti: Diketahui A adalah semigrup QFS dari H dan $\mu_G(xy^{-1}, q) = \mu_G(e, q)$ untuk setiap $x, y \in G; q \in Q$. Akan dibuktikan bahwa $\mu_G(x, q) = \mu_G(y, q)$.

i. Untuk $\mu_G(x, q) = \mu_G(y, q)$

$$\begin{aligned} \mu_G(x, q) &= \mu_G(xy^{-1}y, q) \\ &\geq \min\{\mu_G(xy^{-1}, q), \mu_G(y, q)\} \\ &= \min\{\mu_G(e, q), \mu_G(y, q)\} \\ &= \mu_G(y, q) \end{aligned}$$

ii. Untuk $\mu_G(y, q) = \mu_G(x, q)$

$$\begin{aligned} \mu_G(y, q) &= \mu_G(yx^{-1}, q) \\ &\geq \min\{\mu_G(yx^{-1}, q), \mu_G(x, q)\} \\ &= \min\{\mu_G((yx^{-1})^{-1}, q)\}, \mu_G(x, q) \\ &= \min\{\mu_G(xy^{-1}, q), \mu_G(x, q)\} \\ &= \min\{\mu_G(e, q), \mu_G(x, q)\} \\ &= \mu_G(x, q) \end{aligned}$$

Dari (i) dan (ii) terbukti bahwa $\mu_G(x, q) = \mu_G(y, q)$ □

Teorema 2.7.5. Misalkan H adalah semigrup Smarandache di mana $G \subset H$ adalah grup dan $Q \neq \emptyset$. Irisan dari dua semigrup QFS juga merupakan semigrup QFS.

Bukti: Diketahui H adalah semigrup Smarandache. Misalkan A dan B keduanya merupakan semigrup QFS dari H. Akan dibuktikan bahwa irisan dari keduanya adalah semigrup QFS. Ambil $x, y \in G$ dan $q \in Q$

i. $(\mu_G \cap \beta_G)(xy, q) = \min\{\mu_G(xy, q), \beta_G(xy, q)\}$

$$\geq \min\{\min\{\mu_G(x, q), \mu_G(y, q)\}, \min\{\beta_G(x, q), \beta_G(y, q)\}\}$$

$$= \min\{\min\{\mu_G(x, q), \beta_G(x, q)\}, \min\{\mu_G(y, q), \beta_G(y, q)\}\}$$

$$= \min\{(\mu_G \cap \beta_G)(x, q), (\mu_G \cap \beta_G)(y, q)\}$$

$$= \min\{(\mu_G \cap \beta_G)(x, q), (\mu_G \cap \beta_G)(y, q)\}$$

ii. $(\mu_G \cap \beta_G)(x^{-1}, q) = \min\{\mu_G(x^{-1}, q), \beta_G(x^{-1}, q)\}$

$$= \min\{\mu_G(x, q), \beta_G(x, q)\}$$

$$= (\mu_G \cap \beta_G)(x, q)$$

Berdasarkan (i) dan (ii) terpenuhi, maka terbukti bahwa $A \cap B$ merupakan semigrup QFS. □

Teorema 2.7.6. Misalkan H adalah semigrup Smarandache dan $Q \neq \emptyset$. Jika A adalah semigrup QFS dari H maka A^C juga merupakan semigrup QFS dari H.

Bukti:

1) $\mu_G^c(xy, q) = 1 - \mu_G(xy, q)$

$$\leq 1 - \min\{\mu_G(x, q), \mu_G(y, q)\}$$

$$= \max\{1 - \mu_G(x, q), 1 - \mu_G(y, q)\}$$

$$= \max\{\mu_G^c(x, q), \mu_G^c(y, q)\}$$

2) $\mu_G^c(x^{-1}, q) = 1 - \mu_G(x^{-1}, q)$

$$= 1 - \mu_G(x, q)$$

$$= \mu_G^c(x, q)$$

Terbukti bahwa A^c adalah semigrup QFS dari H. □

Definisi 2.7.7 (Semigrup Normal Q-$Fuzzy$ Smarandache atau Semigrup NQFS)

Misalkan H adalah semigrup Smaradanche di mana $G \subset H$ adalah grup. Semigrup QFS A dari H disebut Semigrup NQFS jika untuk setiap $x, y \in G \subset H$ dan $q \in Q$ berlaku,

$$\mu_G(xy, q) = \mu_G(yx, q) \text{ atau } \mu_G(x, q) = \mu_G(yxy^{-1}, q)$$

Contoh 2.7.8

Diberikan suatu semigrup $(\mathbb{Z}_4, .)$ terhadap operasi perkalian modulo 4 dan himpunan tidak kosong $Q = \{2\}$. A adalah semigrup QFS dari $\mathbb{Z}_4$ sebagaimana pada Contoh 2.7.2. Akan ditunjukkan bahwa A adalah semigrup NQFS dari $\mathbb{Z}_4$.

Bukti:

Akan ditunjukkan bahwa A memenuhi,

a. $\mu_G(xy, q) = \mu_G(yx, q)$ atau $\mu_G(x, q) = \mu_G(yxy^{-1}, q)$

Dari Tabel 2.29 diperoleh bahwa A di $\mathbb{Z}_4$ memenuhi a sehingga A merupakan semigrup NQFS di $\mathbb{Z}_4$.

Tabel 2.29 Hasil Operasi semigrup NQFS

x	y	y^{-1}	$y.x.y^{-1}$	$\mu_G(x, 2)$	$\mu_G(y.x.y^{-1}, 2)$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{1}$	0.125	0.125
	$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{1}$		0.125
$\hat{3}$	$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{3}$	0.125	0.125
	$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{3}$		0.125

Teorema 2.7.9. Misalkan H adalah semigrup Smarandache di mana $G \subset H$ adalah grup dan $Q \neq \emptyset$. Irisan dari dua semigrup QFS juga merupakan semigrup NQFS.

Bukti: Diketahui H adalah semigrup Smarandache. Misalkan A dan B keduanya merupakan semigrup NQFS dari H. Akan dibuktikan bahwa irisan dari keduanya adalah semigrup QFS. Ambil $x, y \in G$ dan $q \in Q$

$$\begin{aligned}(\mu_G \cap \beta_G)(xyx^{-1}, q) &= \min\{\mu_G(xyx^{-1}, q), \beta_G(xyx^{-1}, q)\} \\ &= \min\{\mu_G(y, q), \beta_G(y, q)\} \\ &= (\mu_G \cap \beta_G)(y, q)\end{aligned}$$

BAB III

HASIL DAN PEMBAHASAN

Dalam bab ini akan dibangun struktur baru ring Q-$fuzzy$ Smarandache di antaranya, ring Q-$fuzzy$ Smarandache, subring Q-$fuzzy$ Smarandache, ideal Q-$fuzzy$ Smarandache, koset Q-$fuzzy$ Smarandache, ring kuosien Q-$fuzzy$ Smarandache beserta sifat-sifatnya yang dirujuk dari Kandasamy (2003) serta Doss & Suganya (2016).

3.1 Struktur Baru Ring Q-$Fuzzy$ Smarandache

Definisi (3.1.1) Ring Q-$Fuzzy$ Smarandache

Misalkan R adalah ring Smarandache di mana $C \subset R$ adalah field. Q merupakan himpunan tidak kosong. Himpunan Q-$fuzzy$ A di R yaitu,

$A = \{((x,q), \mu_A(x,q)) | (x,q) \in R \times Q\}$ disebut ring Q-$fuzzy$ Smarandache jika μ_A yang dibatasi pada $C \times Q$ dinotasikan dengan μ_C, memenuhi aksioma berikut,

1. $\mu_C(x - y, q) \geq \min\{\mu_C(x,q), \mu_C(y,q)\}$
2. $\mu_C(xy^{-1}, q) \geq \min\{\mu_C(x,q), \mu_C(y,q)\}$

   $\forall x, y \in C, y \neq 0$ dan $q \in Q$

Ring Q-$fuzzy$ Smarandache dinotasikan dengan ring QFS

Contoh 3.1.2. Diberikan $(\mathbb{Z}_6, +, .)$ ring terhadap operasi penjumlahan dan perkalian modulo 6. Pilih $C \subset \mathbb{Z}_6$ yaitu, $C = \{\hat{0}, \hat{2}, \hat{4}\}$ berbentuk field sebagaimana Contoh 2.2.6. Diberikan $Q = \{1,2\}$. Didefinisikan fungsi keanggotaan μ_A yaitu, $\mu_A: \mathbb{Z}_6 \times Q \to [0,1]$ sedemikian sehingga

$$\mu_A(x,q) = \begin{cases} \dfrac{0.5}{q}, (x,q) \in \{(\hat{1},1)(\hat{1},2)(\hat{3},2)(\hat{5},2)\}; \\ \dfrac{0.8}{q}, (x,q) \in \{(\hat{2},1)(\hat{4},1)(\hat{2},2)(\hat{4},2)\}; \\ \dfrac{1}{q}, (x,q) \in \{(\hat{0},1)(\hat{3},1)(\hat{5},1)(\hat{0},2)\}. \end{cases}$$

Akan ditunjukkan bahwa A merupakan ring QFS dari $\mathbb{Z}_6$.

Bukti:

Akan ditunjukkan bahwa A memenuhi,

a. $\mu_C(x-y,q) \geq \min\{\mu_C(x,q), \mu_A(y,q)\}$

b. $\mu_C(xy^{-1},q) \geq \min\{\mu_C(x,q), \mu_C(y,q)\}$.

Dari Tabel 3.1 hingga 3.4 diperoleh bahwa A memenuhi a dan b sehingga A merupakan ring QFS di $\mathbb{Z}_6$.

Tabel 3.1 Hasil Operasi $\mu_C(x-y,1) \geq \min\{\mu_C(x,1), \mu_C(y,1)\}$

x	y	$\mu_C(x,1)$	$\mu_C(y,1)$	$\mu_C(x-y,1)$	$\min\{\mu_C(x,1), \mu_C(y,1)\}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	1	1	1	1
	$\hat{2}$		0.8	0.8	0.8
	$\hat{4}$		0.8	0.8	0.8
$\hat{2}$	$\hat{0}$	0.8	1	0.8	0.8
	$\hat{2}$		0.8	1	
	$\hat{4}$		0.8	0.8	
$\hat{4}$	$\hat{0}$	0.8	1	0.8	0.8
	$\hat{2}$		0.8	0.8	
	$\hat{4}$		0.8	1	

Tabel 3.2 Hasil Operasi $\mu_C(xy^{-1},1) \geq \min\{\mu_C(x,1), \mu_C(y,1)\}$.

x	y	y^{-1}	$\mu_C(x,1)$	$\mu_C(y,1)$	$\mu_C(xy^{-1},1)$	$\min\{\mu_C(x,1), \mu_C(y,1)\}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	1	1	1	0.8
	$\hat{2}$	$\hat{2}$		0.8		
	$\hat{4}$	$\hat{4}$		0.8		
$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	0.8	1	1	0.8
	$\hat{2}$	$\hat{2}$		0.8	0.8	
	$\hat{4}$	$\hat{4}$		0.8	0.8	
$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	0.8	1	1	0.8
	$\hat{2}$	$\hat{2}$		0.8	0.8	
	$\hat{4}$	$\hat{4}$		0.8	0.8	

Tabel 3.3 Hasil Operasi $\mu_C(x-y,2) \geq \min\{\mu_C(x,2), \mu_C(y,2)\}$

x	y	$\mu_C(x,2)$	$\mu_C(y,2)$	$\mu_C(x-y,2)$	$\min\{\mu_C(x,2),\mu_C(y,2)\}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	0.5	0.5	0.5	0.5
	$\hat{2}$		0.4	0.4	0.4
	$\hat{4}$		0.4	0.4	0.4
$\hat{2}$	$\hat{0}$	0.4	0.5	0.4	0.4
	$\hat{2}$		0.4	0.5	
	$\hat{4}$		0.4	0.4	
$\hat{4}$	$\hat{0}$	0.4	0.5	0.4	0.4
	$\hat{2}$		0.4	0.4	
	$\hat{4}$		0.4	0.5	

Tabel 3.4 Hasil Operasi $\mu_C(xy^{-1},2) \geq \min\{\mu_C(x,2), \mu_C(y,2)\}$.

x	y	y^{-1}	$\mu_C(x,2)$	$\mu_C(y,2)$	$\mu_C(xy^{-1},2)$	$\min\{\mu_C(x,2),\mu_C(y,2)\}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	0.5	0.5	0.5	0.4
	$\hat{2}$	$\hat{2}$		0.4		
	$\hat{4}$	$\hat{4}$		0.4		
$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	0.4	0.5	0.5	0.4
	$\hat{2}$	$\hat{2}$		0.4	0.4	
	$\hat{4}$	$\hat{4}$		0.4	0.4	
$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	0.4	0.5	0.5	0.4
	$\hat{2}$	$\hat{2}$		0.4	0.4	
	$\hat{4}$	$\hat{4}$		0.4	0.4	

Contoh 3.1.3. Diberikan ring Smarandache $(\mathbb{R},+,.)$ di mana $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ adalah field sebagaimana contoh 2.2.8 dan $Q = \{1\}$. Didefinisikan fungsi keanggotaan μ_A yaitu, $\mu_A: \mathbb{R} \times Q \to [0,1]$ sebagai suatu formula matematis sedemikian sehingga

$$\mu_A(x,q) = e^{-((x)^2+q)}.$$

Akan ditunjukkan bahwa A adalah ring QFS dari $\mathbb{R}$.

Bukti:

Pilih $x, y \in \mathbb{Q}$ yaitu $x = \frac{1}{2}$ dan $y = \frac{1}{4}$ dan $Q = \{1\}$. Sekarang perhatikan,

a. $\mu_{\mathbb{Q}}(xy^{-1},q) \geq \min\{\mu_{\mathbb{Q}}(x,q), \mu_{\mathbb{Q}}(y,q)\}$

$$e^{-\left(\left(\frac{1}{2}.4\right)^2+q\right)} \geq \min\left\{e^{-\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2+q\right)}, e^{-\left(\left(\frac{1}{4}\right)^2+1\right)}\right\}.$$

$$0.006 \leq \min\{0.28, 0.34\}.$$

Karena kondisi di atas tidak terpenuhi sehingga A bukan ring QFS dari $\mathbb{R}$.

Teorema 3.1.4. Misalkan $(R, +, .)$ adalah ring Smarandache di mana $C \subset R$ adalah field. Jika A adalah ring QFS dari R maka berlaku,

1. $\mu_C(0, q) \geq \mu_C(x, q)$
2. $\mu_C(e, q) \geq \mu_C(x, q)$
3. $\mu_C(-x, q) \geq \mu_C(x, q)$

untuk setiap $x, -x \in C$ dan $q \in Q$. 0 dan e berturut-turut merupakan elemen identitas atas operasi penjumlahan dan perkalian dari C.

Bukti:

Diketahui bahwa R adalah ring Smarandache dan A merupakan ring QFS dari R. Akan ditunjukkan bahwa ketiga kondisi tersebut terpenuhi,

1. Akan ditunjukkan bahwa $\mu_C(0, q) \geq \mu_C(x, q)$, untuk setiap $x \in C$ dan $q \in Q$.
   Selanjutnya, ambil sebarang $x \in C$ dan $q \in Q$. Karena C adalah field sehingga terdapat $-x \in C$ sedemikian sehingga $x + (-x) = (-x) + x = 0$. Dengan menggunakan aksioma 1 dari Definisi 3.1.1 didapat,
   $$\mu_C(0, q) = \mu_C(x + (-x), q) \geq \min\{\mu_C(x, q), \mu_C(x, q)\} = \mu_C(x, q)$$
2. Akan ditunjukkan bahwa $\mu_C(e, q) \geq \mu_C(x, q)$, untuk setiap $x \in C$ dan $q \in Q$.
   Selanjutnya, ambil sebarang $x \in C$ dan $q \in Q$. Karena C adalah field sehingga terdapat $x^{-1} \in C$ sedemikian sehingga $x . x^{-1} = x^{-1} . x = e$. Dengan menggunakan aksioma 2 dari Definisi 3.1.1 didapat,
   $$\mu_C(e, q) = \mu_C(x . x^{-1}, q) \geq \min\{\mu_C(x, q), \mu_C(x, q)\} = \mu_C(x, q)$$
3. Akan ditunjukkan bahwa $\mu_C(-x, q) \geq \mu_C(x, q)$, untuk setiap $x \in C$ dan $q \in Q$

Selanjutnya, ambil sebarang $0 \in C$ dan $q \in Q$. Karena C adalah field sehingga terdapat $0 \in C$ sedemikian sehingga $-x + 0 = 0 + (-x) = -x$. Dengan menggunakan aksioma 1 dari Definisi 3.1.1 didapat,

$$\mu_C(-x, q) = \mu_C(0 + (-x), q) \geq \min\{\mu_C(0, q), \mu_C(x, q)\} = \mu_C(x, q).$$

Terbukti bahwa ketiga kondisi diatas berlaku □

Teorema 3.1.5. Misalkan $(R, +, .)$ adalah ring Smarandache di mana $C \subset R$ adalah field dan A adalah ring QFS dari R.

1. Jika $\mu_C(x - y, q) = \mu_C(0, q)$ maka $\mu_C(x, q) = \mu_C(y, q)$
2. Jika $\mu_C(xy^{-1}, q) = \mu_C(e, q)$ maka $\mu_C(x, q) = \mu_C(y, q)$

   untuk setiap $x, y \in C$ dan $q \in Q$

Bukti:

Diketahui bahwa R adalah ring Smarandache dan A merupakan ring QFS. Akan dibuktikan bahwa $\mu_C(x, q) = \mu_C(y, q)$

1. $$\begin{aligned} \mu_C(x, q) &= \mu_C(x - y + y, q) \\ &\geq \min\{\mu_C(x - y, q), \mu_C(y, q)\} \\ &= \min\{\mu_C(0, q), \mu_C(y, q)\} \\ &= \mu_C(y, q) \end{aligned} \qquad (1)$$

   dan

   $$\begin{aligned} \mu_C(y, q) &= \mu_C(y - x + x, q) \\ &\geq \min\{\mu_C(y - x, q), \mu_C(x, q)\} \\ &= \min\{\mu_C(-(y - x), q), \mu_C(x, q)\} \\ &= \min\{\mu_C(x - y), \mu_C(x, q)\} \\ &= \min\{\mu_C(0, q), \mu_C(x, q)\} \\ &= \mu_C(x, q). \end{aligned} \qquad (2)$$

Berdasarkan (1) dan (2) diperoleh bahwa $\mu_C(x,q) = \mu_C(y,q)$ □

2. $\mu_C(x,q) = \mu_C(xy^{-1}y,q)$

$$\geq \min\{\mu_C(xy^{-1},q), \mu_C(y,q)\}$$

$$= \min\{\mu_C(e,q), \mu_C(y,q)\}$$

$$= \mu_C(y,q) \quad (3)$$

dan

$\mu_C(y,q) = \mu_C(xx^{-1}y,q)$

$$\geq \min\{\mu_C(x,q), \mu_C(x^{-1}y,q)\}$$

$$= \min\{\mu_C(x,q), \mu_C((x^{-1}y)^{-1},q)\}$$

$$= \min\{\mu_C(x,q), \mu_C(xy^{-1},q)\}$$

$$= \min\{\mu_C(x,q), \mu_C(e,q)\}$$

$$= \mu_C(x,q). \quad (4)$$

Berdasarkan (3) dan (4) diperoleh bahwa $\mu_C(x,q) = \mu_C(y,q)$ □

Teorema 3.1.6. Misalkan $(R,+,.)$ adalah ring Smarandache di mana $C \subset R$ adalah field. Irisan dari dua ring QFS juga merupakan ring QFS.

Bukti:

Diketahui $(R,+,.)$ adalah ring Smaradance Misalkan A dan B adalah dua ring QFS. Akan dibuktikan bahwa irisan dari keduanya adalah ring QFS.

Ambil $x,y \in C$ dan $q \in Q$

1. $(\mu_C \cap \beta_C)(x-y,q) = \min\{\mu_C(x-y,q), \beta_C(x-y,q)\}$

$$\geq \min\{\min\{\mu_C(x,q), \mu_C(y,q)\}, \min\{\beta_C(x,q), \beta_C(y,q)\}\}$$

$$= \min\{\min\{\mu_C(x,q), \beta_C(x,q)\}, \min\{\mu_C(y,q), \beta_C(y,q)\}\}$$

$$= \min\{(\mu_C \cap \beta_C)(x,q), (\mu_C \cap \beta_C)(y,q)\}$$

2. $(\mu_C \cap \beta_C)(xy^{-1},q) = \min\{\mu_C(xy^{-1},q), \beta_C(xy^{-1},q)\}$

$$\geq \min\{\min\{\mu_C(x,q),\mu_C(y,q)\},\min\{\beta_C(x,q),\beta_C(y,q)\}\}$$

$$= \min\{\min\{\mu_C(x,q),\beta_C(x,q)\},\min\{\mu_C(y,q),\beta_C(y,q)\}\}$$

$$= \min\{(\mu_C \cap \beta_C)(x,q),(\mu_C \cap \beta_C)(y,q)\}$$

Berdasarkan 1 dan 2, terbukti bahwa $A \cap B$ merupakan ring QFS. □

Teorema 3.1.7. Misalkan $(R,+,.)$ adalah ring Smarandache di mana $C \subset R$ adalah field. Jika A adalah ring QFS maka A^c juga merupakan ring QFS.

Bukti:

Diketahui $(R,+,.)$ adalah ring Smaradance dan A adalah ring QFS. Akan ditunjukkan bahwa A^c juga merupakan ring QFS.

Ambil $x,y \in C$ dan $q \in Q$

a. $\mu_C^c(x-y,q) = 1-\mu_C(x-y,q)$

$$\leq 1-\min\{\mu_C(x,q),\mu_C(y,q)\}$$

$$= \max\{1-\mu_C(x,q),1-\mu_C(y,q)\}$$

$$= \max\{\mu_C^c(x,q),\mu_C^c(y,q)\}.$$

b. $\mu_C^c(xy^{-1},q) = 1-\mu_C(xy^{-1},q)$

$$\leq 1-\min\{\mu_C(x,q),\mu_C(y,q)\}$$

$$= \max\{1-\mu_C(x,q),1-\mu_C(y,q)\}$$

$$= \max\{\mu_C^c(x,q),\mu_C^c(y,q)\}.$$

Jadi terbukti bahwa A^c adalah ring QFS □

Definisi (3.1.8) Subring Q-$Fuzzy$ Smarandache

Misalkan R ring. S merupakan subring Smarandache dari R di mana $X \subset S$ adalah field.Q adalah himpunan tidak kosong. Himpunan Q-$fuzzy$ A_S di R yaitu,

$A_S = \{((x,q), \mu_A(x,q)) | (x,q) \in R \times Q\}$ disebut subring $Q\text{-}fuzzy$ Smarandache jika μ_{A_S} memenuhi kondisi berikut,

1. μ_{A_S} dibatasi pada $S \times Q$ dinotasikan dengan μ_S, memenuhi aksioma berikut,
   i. $\mu_S(x-y,q) \geq \min\{\mu_S(x,q), \mu_S(y,q)\}$
   ii. $\mu_S(xy,q) \geq \min\{\mu_S(x,q), \mu_S(y,q)\}$
   $\forall x, y \in S, y \neq 0$ dan $q \in Q$
2. μ_{A_S} dibatasi pada $X \times Q$ dinotasikan dengan μ_X, memenuhi aksioma berikut,
   i. $\mu_X(x-y,q) \geq \min\{\mu(x,q), \mu(y,q)\}$
   ii. $\mu_X(xy^{-1},q) \geq \min\{\mu(x,q), \mu(y,q)\}$
   $\forall x, y \in X, y \neq 0$ dan $q \in Q$

Subring $Q\text{-}fuzzy$ Smarandache dinotasikan dengan subring QFS

Contoh 3.1.9. Diberikan $(\mathbb{Z}_{12}, +, .)$ ring terhadap operasi penjumlahan dan perkalian modulo 12. $S \subset \mathbb{Z}_{12}$ adalah subring dari $\mathbb{Z}_{12}$ yaitu $S = \{\hat{0}, \hat{2}, \hat{4}, \hat{6}, \hat{8}, \widehat{10}\}$. $X \subset S$ yaitu, $X = \{\hat{0}, \hat{4}, \hat{8}\}$ berbentuk field sebagaimana Contoh 2.2.11. Diberikan $Q = \{1\}$. Didefinisikan fungsi keanggotaan μ_{A_S} yaitu, $\mu_{A_S}: \mathbb{Z}_{12} \times Q \to [0,1]$ sedemikian sehingga

$$\mu_A(x,q) = \begin{cases} 0.5, & (x,q) \in \{(\hat{2},1)(\hat{6},1)(\widehat{10},1)\}; \\ 0.1, & (x,q) \in \{(\hat{1},1)(\hat{3},1)(\hat{5},1)(\hat{7},1)(\hat{9},1)(\widehat{11},1)\}; \\ 1, & (x,q) \in \{(\hat{0},1)(\hat{4},1)(\hat{8},1)\}. \end{cases}$$

Akan ditunjukkan bahwa A_S adalah subring QFS dari $\mathbb{Z}_{12}$.

Bukti:

Berdasarkan Contoh 2.2.11 diperoleh bahwa $\mathbb{Z}_{12}$ adalah ring dan $S \subset \mathbb{Z}_{12}$ merupakan subring Smarandache. Akan ditunjukkan bahwa A_S memenuhi

a. $\mu_S(x-y,q) \geq \min\{\mu_S(x,q), \mu_S(y,q)\}$

b. $\mu_S(xy, q) \geq \min\{\mu_S(x, q), \mu_S(y, q)\}$

c. $\mu_X(x - y, q) \geq \min\{\mu_X(x, q), \mu_X(y, q)\}$

d. $\mu_X(xy^{-1}, q) \geq \min\{\mu_X(x, q), \mu_X(y, q)\}$.

Perhatikan Tabel 3.5 hingga Tabel 3.8 berikut ini,

Tabel 3.5 Hasil Operasi $\mu_S(x - y, 1) \geq \min\{\mu_S(x, 1), \mu_S(y, 1)$

x	y	$\mu_S(x,1)$	$\mu_S(y,1)$	$\mu_S(x-y,1)$	$\min\{\mu_S(x,1), \mu_S(y,1)\}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	1	1	1	1
	$\hat{2}$		0.5	0.5	0.5
	$\hat{4}$		1	1	1
	$\hat{6}$		0.5	0.5	0.5
	$\hat{8}$		1	1	1
	$\widehat{10}$		0.5	0.5	0.5
$\hat{2}$	$\hat{0}$	0.5	1	0.5	0.5
	$\hat{2}$		0.5	1	0.5
	$\hat{4}$		1	0.5	0.5
	$\hat{6}$		0.5	1	0.5
	$\hat{8}$		1	0.5	0.5
	$\widehat{10}$		0.5	1	0.5
$\hat{4}$	$\hat{0}$	1	1	1	1
	$\hat{2}$		0.5	0.5	0.5
	$\hat{4}$		1	1	1
	$\hat{6}$		0.5	0.5	0.5
	$\hat{8}$		1	1	1
	$\widehat{10}$		0.5	0.5	0.5
$\hat{6}$	$\hat{0}$	0.5	1	0.5	0.5
	$\hat{2}$		0.5	1	0.5
	$\hat{4}$		1	0.5	0.5
	$\hat{6}$		0.5	1	0.5
	$\hat{8}$		1	0.5	0.5
	$\widehat{10}$		0.5	1	0.5
$\hat{8}$	$\hat{0}$	1	1	1	0.5
	$\hat{2}$		0.5	0.5	0.5
	$\hat{4}$		1	1	1
	$\hat{6}$		0.5	0.5	0.5
	$\hat{8}$		1	1	1
	$\widehat{10}$		0.5	0.5	0.5
$\widehat{10}$	$\hat{0}$	0.5	1	0.5	0.5
	$\hat{2}$		0.5	1	0.5
	$\hat{4}$		1	0.5	0.5
	$\hat{6}$		0.5	1	0.5
	$\hat{8}$		1	0.5	0.5
	$\widehat{10}$		0.5	1	0.5

Tabel 3.6 Hasil Operasi $\mu_S(xy,1) \geq \min\{\mu_S(x,1), \mu_S(y,1)\}$

x	y	$\mu_S(x,1)$	$\mu_S(y,1)$	$\mu_S(xy,1)$	$\min\{\mu_S(x,1), \mu_S(y,1)\}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	1	1	1	1
	$\hat{2}$		0.5	1	0.5
	$\hat{4}$		1	1	1
	$\hat{6}$		0.5	1	0.5
	$\hat{8}$		1	1	1
	$\widehat{10}$		0.5	1	0.5
$\hat{2}$	$\hat{0}$	0.5	1	1	0.5
	$\hat{2}$		0.5	1	0.5
	$\hat{4}$		1	1	0.5
	$\hat{6}$		0.5	1	0.5
	$\hat{8}$		1	1	0.5
	$\widehat{10}$		0.5	1	0.5
$\hat{4}$	$\hat{0}$	1	1	1	1
	$\hat{2}$		0.5	1	0.5
	$\hat{4}$		1	1	1
	$\hat{6}$		0.5	1	0.5
	$\hat{8}$		1	1	1
	$\widehat{10}$		0.5	1	0.5
$\hat{6}$	$\hat{0}$	0.5	1	1	0.5
	$\hat{2}$		0.5	1	0.5
	$\hat{4}$		1	1	0.5
	$\hat{6}$		0.5	1	0.5
	$\hat{8}$		1	1	0.5
	$\widehat{10}$		0.5	1	0.5
$\hat{8}$	$\hat{0}$	1	1	1	0.5
	$\hat{2}$		0.5	1	0.5
	$\hat{4}$		1	1	1
	$\hat{6}$		0.5	1	0.5
	$\hat{8}$		1	1	1
	$\widehat{10}$		0.5	1	0.5
$\widehat{10}$	$\hat{0}$	0.5	1	1	0.5
	$\hat{2}$		0.5	1	0.5
	$\hat{4}$		1	1	0.5
	$\hat{6}$		0.5	1	0.5
	$\hat{8}$		1	1	0.5
	$\widehat{10}$		0.5	1	0.5

Tabel 3.7 Hasil Operasi $\mu_X(x-y,1) \geq \min\{\mu_X(x,1), \mu_X(y,1)\}$

x	y	$\mu_X(x,1)$	$\mu_X(y,1)$	$\mu_X(x-y,1)$	$\min\{\mu_X(x,1),\mu_X(y,1)\}$
	$\hat{0}$		1	1	
$\hat{0}$	$\hat{4}$	1	1	1	
	$\hat{8}$		1	1	
	$\hat{0}$		1	1	
$\hat{4}$	$\hat{4}$	1	1	1	1
	$\hat{8}$		1	1	
	$\hat{0}$		1	1	
$\hat{8}$	$\hat{4}$	1	1	1	
	$\hat{8}$		1	1	

Tabel 3.8 Hasil Operasi $\mu_X(xy^{-1},1) \geq \min\{\mu_X(x,1), \mu_X(y,1)\}$

x	y	y^{-1}	$\mu_X(x,1)$	$\mu_X(y,1)$	$\mu_X(xy^{-1},1)$	$\min\{\mu_X(x,1),\mu_X(y,1)\}$
	$\hat{0}$	$\hat{0}$		1	1	
$\hat{0}$	$\hat{4}$	$\hat{4}$	1	1	1	1
	$\hat{8}$	$\hat{8}$		1	1	
	$\hat{0}$	$\hat{0}$	1	1	1	
$\hat{4}$	$\hat{4}$	$\hat{4}$		1	1	1
	$\hat{8}$	$\hat{8}$		1	1	
	$\hat{0}$	$\hat{0}$	1	1	1	
$\hat{8}$	$\hat{4}$	$\hat{4}$		1	1	1
	$\hat{8}$	$\hat{8}$		1	1	

Berdasarkan Tabel 3.5 hingga Tabel 3.8 diperoleh bahwa A_S merupakan subring QFS.

Teorema 3.1.10. Misalkan $(R, +, .)$ ring. Misalkan pula bahwa $(S, +, .)$ merupakan subring Smarandache dari R di mana $X \subset S$ adalah field. Irisan dari dua subring QFS juga merupakan subring QFS.

Bukti:

Diketahui $(R, +, .)$ adalah ring dan $(S, +, .)$ merupakan subring Smarandache Misalkan A_S dan B_S adalah dua subring QFS. Akan dibuktikan bahwa irisan dari dua subring QFS juga merupakan subring QFS.

Ambil sebarang $x, y \in S$ dan $q \in Q$

1) $(\mu_S \cap \beta_S)(x-y,q) = \min\{\mu_S(x-y,q), \beta_S(x-y,q)\}$

$$\geq \min\{\min\{\mu_S(x,q), \mu_S(y,q)\}, \min\{\beta_S(x,q), \beta_S(y,q)\}\}$$

$$= \min\{\min\{\mu_S(x,q), \beta_S(x,q)\}, \min\{\mu_S(y,q), \beta_S(y,q)\}\}$$

$$= \min\{(\mu_S \cap \beta_S)(x,q), (\mu_S \cap \beta_S)(y,q)\}$$

2) $(\mu_S \cap \beta_S)(xy,q) = \min\{\mu_S(xy,q), \beta_S(xy,q)\}$

$$\geq \min\{\min\{\mu_S(x,q), \mu_S(y,q)\}, \min\{\beta_S(x,q), \beta_S(y,q)\}\}$$

$$= \min\{\min\{\mu_S(x,q), \beta_S(x,q)\}, \min\{\mu_S(y,q), \beta_S(y,q)\}\}$$

$$= \min\{(\mu_S \cap \beta_S)(x,q), (\mu_S \cap \beta_S)(y,q)\}$$

dan ambil sebarang $x, y \in X$ dan $q \in Q$

3) $(\mu_X \cap \beta_X)(x-y,q) = \min\{\mu_X(x-y,q), \beta_X(x-y,q)\}$

$$\geq \min\{\min\{\mu_X(x,q), \mu_X(y,q)\}, \min\{\beta_X(x,q), \beta_X(y,q)\}\}$$

$$= \min\{\min\{\mu_X(x,q), \beta_X(x,q)\}, \min\{\mu_X(y,q), \beta_X(y,q)\}\}$$

$$= \min\{(\mu_X \cap \beta_X)(x,q), (\mu_X \cap \beta_X)(y,q)\}$$

4) $(\mu_X \cap \beta_X)(xy^{-1},q) = \min\{\mu_X(xy^{-1},q), \beta_X(xy^{-1},q)\}$

$$\geq \min\{\min\{\mu_X(x,q), \mu_X(y,q)\}, \min\{\beta_X(x,q), \beta_X(y,q)\}\}$$

$$= \min\{\min\{\mu_X(x,q), \beta_X(x,q)\}, \min\{\mu_X(y,q), \beta_X(y,q)\}\}$$

$$= \min\{(\mu_X \cap \beta_X)(x,q), (\mu_X \cap \beta_X)(y,q)\}.$$

Berdasarkan 1) hingga 4), terbukti bahwa $A_S \cap B_S$ merupakan subring QFS. □

Teorema 3.1.11. Misalkan $(R,+,.)$ adalah ring. Misalkan pula bahwa $(S,+,.)$ merupakan subring Smarandache dari R di mana $X \subset S$ adalah field X. Jika A_S adalah subring QFS maka A_S^c juga merupakan subring QFS.

Bukti:

Diketahui $(R,+,.)$ adalah ring dan $(S,+,.)$ merupakan subring Smarandache dari R. Ambil sebarang $x, y \in S$ dan $q \in Q$

a. $\mu_S^c(x-y,q) = 1-\mu_S(x-y,q)$

$\leq 1-\min\{\mu_S(x,q),\mu_S(y,q)\}$

$= \max\{1-\mu_S(x,q),1-\mu_S(y,q)\}$

$= \max\{\mu_S^c(x,q),\mu_S^c(y,q)\}$.

b. $\mu_S^c(xy,q) = 1-\mu_S(xy,q)$

$\leq 1-\min\{\mu_S(x,q),\mu_S(y,q)\}$

$= \max\{1-\mu_S(x,q),1-\mu_S(y,q)\}$

$= \max\{\mu_S^c(x,q),\mu_S^c(y,q)\}$

dan ambil sebarang $x,y \in X$ dan $q \in Q$

c. $\mu_X^c(x-y,q) = 1-\mu_X(x-y,q)$

$\leq 1-\min\{\mu_X(x,q),\mu_X(y,q)\}$

$= \max\{1-\mu_X(x,q),1-\mu_X(y,q)\}$

$= \max\{\mu_X^c(x,q),\mu_X^c(y,q)\}$.

d. $\mu_X^c(xy^{-1},q) = 1-\mu_X(xy^{-1},q)$

$\leq 1-\max\{\mu_X(x,q),\mu_X(y,q)\}$

$= \min\{1-\mu_X(x,q),1-\mu_X(y,q)\}$

$= \min\{\mu_X^c(x,q),{\mu_X}^c(y,q)\}$

Berdasarkan a hingga d terbukti bahwa A_S^c merupakan subring QFS. □

Definisi (3.1.12) Ideal $\boldsymbol{Q}$-$\boldsymbol{Fuzzy}$ Smarandache

Misalkan $(R,+,.)$ ring. I ideal Smarandache dari R di mana $X \subset I$ adalah field. Q merupakan himpunan tidak kosong. Himpunan Q-$fuzzy$ A_I di R yaitu, $A_I = \{((x,q),\mu_A(x,q))|(x,q) \in R \times Q\}$ disebut ideal Q-$fuzzy$ Smarandache jika μ_{A_I}, memenuhi beberapa kondisi berikut,

1. μ_{A_I} dibatasi pada $I \times Q$ dinotasikan dengan μ_I, memenuhi aksioma berikut,

   a) $\mu_I(x-y,q) \geq \min\{\mu_I(x,q),\mu_I(y,q)\}$

b) $\mu_I(xy,q) \geq \max\{\mu_I(x,q),\mu_I(y,q)\}$

$\forall x,y \in I, y \neq 0$ dan $q \in Q$

2. μ_{A_I} dibatasi pada $X \times Q$ dinotasikan dengan μ_X, memenuhi aksioma berikut,

a) $\mu_X(x-y,q) \geq \min\{\mu_X(x,q),\mu_X(y,q)\}$

b) $\mu_X(xy^{-1},q) \geq \min\{\mu_X(x,q),\mu_X(y,q)\}$

$\forall x,y \in X, y \neq 0$ dan $q \in Q$

Ideal Q-$fuzzy$ Smarandache dinotasikan dengan ideal QFS

Contoh 3.1.13

Berdasarkan Contoh 3.1.9 kondisi kedua telah terpenuhi. Selanjutnya akan ditunjukkan μ_{A_I} yang dibatasi pada $I \times Q$ memenuhi aksioma berikut,

i. $\mu_I(x-y,q) \geq \min\{\mu_I(x,q),\mu_I(y,q)\}$

Misalkan $K = \{\hat{0},\hat{4},\hat{8}\}$ dan $L = \{\hat{2},\hat{6},\widehat{10}\}$ sehingga beberapa kemungkinan yang terjadi adalah,

a. Ambil sebarang $x \in K$ dan $y \in L$ maka $(x-y) \in L$

$\mu_I(x-y,q) = 0.5$ danmin$\{\mu_I(x,q),\mu_I(y,q)\} = \min\{1{,}0.5\} = 0.5$ sehingga kondisi i terpenuhi.

b. Ambil sebarang $x \in L$ dan $y \in K$ maka $(x-y) \in L$

$\mu_I(x-y,q) = 0.5$ dan $\min\{\mu_I(x,q),\mu_I(y,q)\} = \min\{1{,}0.5\} = 0.5$ sehingga kondisi i terpenuhi.

c. Ambil sebarang $x,y \in K$ maka $(x-y) \in K$

$\mu_I(x-y,q) = 1$ dan $\min\{\mu_I(x,q),\mu_I(y,q)\} = \min\{1{,}1\} = 1$ sehingga kondisi i terpenuhi.

d. Ambil sebarang $x,y \in L$ maka $(x-y) \in L$

$\mu_I(x-y,q) = 0.5$ dan $\min\{\mu_I(x,q),\mu_I(y,q)\} = \min\{0.5{,}0.5\} = 0.5$ sehingga kondisi i terpenuhi.

ii. $\mu_I(xy,q) \geq \max\{\mu_I(x,q),\mu_I(y,q)\}$

a. Ambil sebarang $x \in K$ dan $y \in L$ maka $(xy) \in K$

$\mu_I(xy,q) = 1$ dan $\max\{\mu_I(x,q),\mu_I(y,q)\} = \max\{1,0.5\} = 1$ sehingga kondisi ii terpenuhi.

b. Ambil sebarang $x \in L$ dan $y \in K$ maka $(xy) \in K$

$\mu_I(xy,q) = 1$ dan $\max\{\mu_I(x,q),\mu_I(y,q)\} = \max\{0.5,1\} = 1$ sehingga kondisi ii terpenuhi.

c. Ambil sebarang $x, y \in K$ maka $(xy) \in K$

$\mu_I(xy,q) = 1$ dan $\max\{\mu_I(x,q),\mu_I(y,q)\} = \max\{1,1\} = 1$ sehingga kondisi ii terpenuhi.

d. Ambil sebarang $x, y \in L$ maka $(xy) \in K$

$\mu_I(xy,q) = 1$ dan $\max\{\mu_I(x,q),\mu_I(y,q)\} = \max\{1,1\} = 1$ sehingga kondisi ii terpenuhi.

Dari hasil perhitungan diperoleh bahwa kedua kondisi telah terpenuhi sehingga A_I merupakan ideal QFS dari $\mathbb{Z}_{12}$.

Teorema 3.1.14. Misalkan $(R,+,.)$ ring. Misalkan pula bahwa $(I,+,.)$ merupakan ideal Smarandache dari R di mana $X \subset I$ adalah field. Irisan dari dua ideal QFS juga merupakan ideal QFS.

Bukti:

Diketahui $(R,+,.)$ adalah ring dan $(I,+,.)$ merupakan ideal Smarandache. Dimisalkan A_I dan B_I adalah dua ideal QFS. Akan dibuktikan irisan dari dua ideal QFS juga merupakan ideal QFS.

a. Ambil $x, y \in I$ dan $q \in Q$

1. $(\mu_I \cap \beta_I)(x-y,q) = \min\{\mu_I(x-y,q),\beta_I(x-y,q)\}$

$$\geq \min\{\min\{\mu_I(x,q),\mu_I(y,q)\},\min\{\beta_I(x,q),\beta_I(y,q)\}\}$$

$$= \min\{\min\{\mu_I(x,q),\beta_I(x,q)\},\min\{\mu_I(y,q),\beta_I(y,q)\}\}$$

$$= \min\{(\mu_I \cap \beta_I)(x,q),(\mu_I \cap \beta_I)(y,q)\}$$

2. $(\mu_I \cap \beta_I)(xy,q) = \max\{\mu_I(xy,q),\beta_I(xy,q)\}$

$$\geq \max\{\max\{\mu_I(x,q),\mu_I(y,q)\},\max\{\beta_I(x,q),\beta_I(y,q)\}\}$$

$$= \max\{\max\{\mu_I(x,q),\beta_I(x,q)\},\max\{\mu_I(y,q),\beta_I(y,q)\}\}$$

$$= \max\{(\mu_I \cap \beta_I)(x,q),(\mu_I \cap \beta_I)(y,q)\}$$

b. Ambil $x,y \in X$ dan $q \in Q$

1. $(\mu_X \cap \beta_X)(x-y,q) = \min\{\mu_X(x-y,q),\beta_X(x-y,q)\}$

$$\geq \min\{\min\{\mu_X(x,q),\mu_X(y,q)\},\min\{\beta_X(x,q),\beta_X(y,q)\}\}$$

$$= \min\{\min\{\mu_X(x,q),\beta_X(x,q)\},\min\{\mu_X(y,q),\beta_X(y,q)\}\}$$

$$= \min\{(\mu_X \cap \beta_X)(x,q),(\mu_X \cap \beta_X)(y,q)\}$$

2. $(\mu_X \cap \beta_X)(xy^{-1},q) = \min\{\mu_X(xy^{-1},q),\beta_X(xy^{-1},q)\}$

$$\geq \min\{\min\{\mu_X(x,q),\mu_X(y,q)\},\min\{\beta_X(x,q),\beta_X(y,q)\}\}$$

$$= \min\{\min\{\mu_X(x,q),\beta_X(x,q)\},\min\{\mu_X(y,q),\beta_X(y,q)\}\}$$

$$= \min\{(\mu_X \cap \beta_X)(x,q),(\mu_X \cap \beta_X)(y,q)\}$$

Berdasarkan a dan b terbukti bahwa $A_I \cap B_I$ merupakan ideal QFS. □

Teorema 3.1.15. Misalkan $(R,+,.)$ adalah ring. Misalkan pula bahwa $(I,+,.)$ merupakan ideal Smarandache dari R di mana $X \subset I$ adalah field. Jika A_I adalah ideal QFS maka A_I^c juga merupakan ideal QFS.

Bukti:

Diketahui $(R,+,.)$ adalah ring dan $(I,+,.)$ merupakan ideal Smarandache dari R. Akan ditunjukkan bahwa A_I^c juga merupakan ideal QFS.

Ambil $x,y \in I$ dan $q \in Q$

a. $\mu_I^c(x-y,q) = 1-\mu_I(x-y,q)$

$$\leq 1-\min\{\mu_I(x,q),\mu_I(y,q)\}$$

$$= \max\{1-\mu_I(x,q),1-\mu_I(y,q)\}$$

$$= \max\{\mu_I^c(x,q),\mu_I^c(y,q)\}.$$

b. $\mu_I^c(xy^{-1},q) = 1-\mu_I(xy^{-1},q)$

$$\leq 1-\max\{\mu_I(x,q),\mu_I(y,q)\}$$

$$= \min\{1-\mu_I(x,q),1-\mu_I(y,q)\}$$

$$= \min\{\mu_I^c(x,q),\mu_I^c(y,q)\}$$

dan ambil $x, y \in X$ dan $q \in Q$

c. $\mu_X^c(x-y,q) = 1-\mu_X(x-y,q)$

$$\leq 1-\min\{\mu_X(x,q),\mu_X(y,q)\}$$

$$= \max\{1-\mu_X(x,q),1-\mu_X(y,q)\}$$

$$= \max\{\mu_X^c(x,q),\mu_X^c(y,q)\}.$$

d. $\mu_X^c(xy^{-1},q) = 1-\mu_X(xy^{-1},q)$

$$\leq 1-\max\{\mu_X(x,q),\mu_X(y,q)\}$$

$$= \min\{1-\mu_X(x,q),1-\mu_X(y,q)\}$$

$$= \min\{\mu_X^c(x,q),{\mu_X}^c(y,q)\}$$

Berdasarkan a hingga d terbukti bahwa A_I^c merupakan ideal QFS. □

Teorema 3.1.16. Misalkan $(I,+,.)$ adalah ideal Smarandache dari ring R di mana $X \subset I$ adalah field. A_I adalah ideal QFS dari R jika dan hanya jika,

$$\mu_I(x,q) = \mu_I(e,q) \leq \mu_I(0,q) \text{ dan } \mu_X(x,q) = \mu_X(e,q) \leq \mu_X(0,q)$$

Untuk setiap $x \in I$ dan $x \in X$. 0 dan e berturut-turut merupakan elemen identitas dari I dan X. Untuk setiap $q \in Q$.

Bukti:

($\Rightarrow$) Diketahui bahwa I adalah ideal Smarandache dan A_I adalah ideal QFS.

a. Ambil sebarang $0, e, x, \in I$ dan $q \in Q$.

$$\mu_I(0,q) = \mu_I(e + (-e), q) \geq \min\{\mu_I(e,q), \mu_I(e,q)\} = \mu_I(e,q)$$

jika $x \in I, x \neq 0$ maka

$$\mu_I(x,q) = \mu_I(x.e,q) \geq \min\{\mu_I(x,q), \mu_I(e,q)\} = \mu_I(e,q)$$

$$\mu_I(e,q) = \mu_I(x^{-1}.x,q) \geq \min\{\mu_I(x,q), \mu_I(x,q)\} = \mu_I(x,q)$$

b. Ambil sebarang $0, e, x, \in X$ dan $q \in Q$

$$\mu_X(0,q) = \mu_X(e + (-e), q) \geq \min\{\mu_X(e,q), \mu_X(e,q)\} = \mu_X(e,q)$$

jika $x \in X, x \neq 0$ maka

$$\mu_X(x,q) = \mu_X(x.e,q) \geq \min\{\mu_X(x,q), \mu_X(e,q)\} = \mu_X(e,q)$$

$$\mu_X(e,q) = \mu_X(x^{-1}.x,q) \geq \min\{\mu_X(x,q), \mu_X(x,q)\} = \mu_X(x,q).$$

Telah terbukti bahwa,

$$\mu_I(x,q) = \mu_I(e,q) \leq \mu_I(0,q) \text{ dan } \mu_X(x,q) = \mu_X(e,q) \leq \mu_X(0,q)$$

($\Leftarrow$) Diketahui bahwa I adalah ideal Smarandache dan

$\mu_I(x,q) = \mu_I(e,q) \leq \mu_I(0,q)$ dan $\mu_X(x,q) = \mu_X(e,q) \leq \mu_X(0,q)$.

a. Untuk setiap $x, y \in I$, jika $x \neq y$ maka

$$\mu_I(x - y, q) = \mu_I(e,q) \geq \min\{\mu_I(x,q), \mu_I(y,q)\}$$

dan jika $x = y$ maka

$$\mu_I(x - y, q) = \mu_I(0,q) \geq \min\{\mu_I(x,q), \mu_I(y,q)\}$$

b. Untuk setiap $x, y \in I$, jika $x = 0$ atau $y = 0$ maka

$$\mu_I(x.y,q) \geq \max\{\mu_I(x,q), \mu_I(y,q)\}$$

dan jika $x \neq 0, y \neq 0$ maka

$$\mu_I(x.y,q) = \mu_I(e,q) \geq \max\{\mu_I(x,q), \mu_I(y,q)\}$$

c. Untuk setiap $x, y \in X$, jika $x \neq y$ maka

$$\mu_X(x - y, q) = \mu_X(e,q) \geq \min\{\mu_X(x,q), \mu_X(y,q)\}$$

dan jika $x = y$ maka

$$\mu_X(x - y, q) = \mu_X(0, q) \geq \min\{\mu_X(x, q), \mu_X(y, q)\}$$

d. Untuk setiap $x, y \in X$, jika $x = 0$ atau $y = 0$ maka

$$\mu_X(x.y^{-1}, q) \geq \min\{\mu_X(x, q), \mu_X(y, q)\}$$

dan jika $x \neq 0, y \neq 0$ maka

$$\mu_X(x.y^{-1}, q) = \mu_X(e, q) \geq \min\{\mu_X(x, q), \mu_X(y, q)\}.$$

Telah terbukti bahwa A_I adalah ideal QFS dari ring R. □

Definisi 3.1.17 (Koset Q-$Fuzzy$ Smarandache)

Misalkan R ring Smarandache di mana $X \subset I$ adalah field. Misalkan A_I adalah ideal QFS dari R. Himpunan Q-$fuzzy$ A_x dari R (di mana $x \in C \subset R$) yaitu, $A_x = \left\{\left((r, q), \mu_{A_x}(r, q)\right) | (r, q) \in R \times Q\right\}$ disebut koset Q-$fuzzy$ Smarandache jika μ_{A_x} didefinisikan dengan,

$$\mu_{A_x}(r, q) = \mu_{A_I}(r - x, q)$$

untuk setiap $(r, q) \in R \times Q$.

Koset Q-$fuzzy$ Smarandache dinotasikan dengan koset QFS.

Contoh 3.1.18. Diberikan $(\mathbb{Z}_{12}, +, .)$ ring Smarandache di mana $C \subset \mathbb{Z}_{12}$ yaitu $C = \{\hat{0}, \hat{4}, \hat{8}\}$ adalah field. Diberikan A_I ideal QFS sebagaimana Contoh 3.1.13. Akan ditunjukkan A_x adalah koset QFS.

Bukti:

Akan ditunjukkan A_x koset QFS yang memenuhi

$$\mu_{A_x}(r, q) = \mu_{A_I}(r - x, q) \tag{1}$$

ambil sebarang $x \in C, r \in R$ dan $q \in Q$.

Berdasarkan Tabel 3.9 diperoleh bahwa A_x memenuhi (1) sehingga A_x adalah koset QFS.

Tabel 3.9 Hasil Operasi Koset QFS

r	x	$(r-x)$	$\mu_{A_I}(r-x,1)$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	1
	$\hat{4}$	$\hat{8}$	1
	$\hat{8}$	$\hat{4}$	1
$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	0.1
	$\hat{4}$	$\hat{9}$	0.1
	$\hat{8}$	$\hat{5}$	0.1
$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	0.5
	$\hat{4}$	$\widehat{10}$	0.5
	$\hat{8}$	$\hat{6}$	0.5
$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	0.1
	$\hat{4}$	$\widehat{11}$	0.1
	$\hat{8}$	$\hat{7}$	0.1
$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{4}$	1
	$\hat{4}$	$\hat{0}$	1
	$\hat{8}$	$\hat{8}$	1
$\hat{5}$	$\hat{0}$	$\hat{5}$	0.1
	$\hat{4}$	$\hat{1}$	0.1
	$\hat{8}$	$\hat{9}$	0.1
$\hat{6}$	$\hat{0}$	$\hat{6}$	0.5
	$\hat{4}$	$\hat{2}$	0.5
	$\hat{8}$	$\widehat{10}$	0.5
$\hat{7}$	$\hat{0}$	$\hat{7}$	0.1
	$\hat{4}$	$\hat{3}$	0.1
	$\hat{8}$	$\widehat{11}$	0.1
$\hat{8}$	$\hat{0}$	$\hat{8}$	1
	$\hat{4}$	$\hat{4}$	1
	$\hat{8}$	$\hat{0}$	1
$\hat{9}$	$\hat{0}$	$\hat{9}$	0.1
	$\hat{4}$	$\hat{5}$	0.1
	$\hat{8}$	$\hat{1}$	0.1
$\widehat{(10)}$	$\hat{0}$	$\widehat{10}$	0.5
	$\hat{4}$	$\hat{6}$	0.5
	$\hat{8}$	$\hat{2}$	0.5
$\widehat{(11)}$	$\hat{0}$	$\widehat{11}$	0.1
	$\hat{4}$	$\hat{7}$	0.1
	$\hat{8}$	$\hat{3}$	0.1

Teorema 3.1.19. Misalkan R ring Smarandache di mana $C \subset R$ adalah field. Jika A_I adalah ideal QFS dari ring R maka

$$\mu_{A_x}(x+r,q) = \mu_{A_x}(r+x,q) = \mu_{A_I}(r,q)$$

untuk setiap $x \in C, r \in R$ dan $q \in Q$

Bukti:

Diketahui R ring Smarandache dan A_I ideal QFS dari ring R. Akan ditunjukkan bahwa

$$\mu_{A_x}(x+r,q) = \mu_{A_x}(r+x,q) = \mu_{A_I}(r,q)$$

untuk suatu $x \in C, r \in R$ dan $q \in Q$

$$\begin{aligned} \mu_{A_x}(x+r,q) &= \mu_{A_x}(x+r-x,q) \\ &= \mu_{A_I}(r,q) \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \mu_{A_x}(r+x,q) &= \mu_{A_x}(r+x-x,q) \\ &= \mu_{A_I}(r,q). \end{aligned}$$

Terbukti bahwa $\mu_{A_x}(x+r,q) = \mu_{A_x}(r+x,q) = \mu_{A_I}(r,q)$ □.

Definisi 3.1.20 (Koset Smarandache dari Ideal QFS)

Misalkan R ring. I ideal Smarandache dari ring R di mana $X \subset I$ adalah field dan A_I ideal QFS dari ring R. Himpunan Q-$fuzzy$ $x + A_I$ dari R (di mana $x \in X$) yaitu, $x + A_I = \{((x+y,q), \mu_{x+A}(y,q)) | (y,q) \in R \times Q\}$ disebut koset Smarandache dari ideal QFS jika $x + A_I$ didefinisikan dengan,

$$\mu_{x+A_I}(y,q) = \mu_{A_I}(y-x,q)$$

untuk setiap $(y,q) \in X \times Q$

Contoh 3.1.21. Diberikan $(\mathbb{Z}_{12}, +, .)$ ring. $(I, +, .)$ ideal Smarandache dari $\mathbb{Z}_{12}$ di mana $X \subset I$ yaitu $X = \{\hat{0}, \hat{4}, \hat{8}\}$ adalah field dari I. A_I ideal QFS sebagaimana Contoh 3.1.13. Akan ditunjukkan $x + A_I$ adalah koset Smarandache dari ideal QFS.

Bukti:

Akan ditunjukkan $x + A_I$ adalah koset Smarandache dari ideal QFS yang memenuhi,

$$\mu_{x+A_I}(y, q) = \mu_A(y - x, q) \tag{2}$$

ambil sebarang $x, y \in X$ dan $q \in Q$.

Berdasarkan Tabel 3.10 diperoleh bahwa $x + A_I$ memenuhi (2) sehingga $x + A_I$ adalah koset Smarandache dari ideal QFS.

Tabel 3.10 Hasil Operasi Koset Smarandache dari Ideal QFS

y	x	$(y - x)$	$\mu_{A_I}(y - x, 1)$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	1
	$\hat{4}$	$\hat{8}$	1
	$\hat{8}$	$\hat{4}$	1
$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{4}$	1
	$\hat{4}$	$\hat{0}$	1
	$\hat{8}$	$\hat{8}$	1
$\hat{8}$	$\hat{0}$	$\hat{8}$	1
	$\hat{4}$	$\hat{4}$	1
	$\hat{8}$	$\hat{0}$	1

Teorema 3.1.22. Misalkan R ring. I ideal Smarandache dari R di mana $X \subset I$ adalah field. Misalkan A_I ideal QFS dari R. Jika R/A_I adalah himpunan semua koset-koset dari ideal QFS A_I di R maka R/A_I adalah ring dari koset Smarandache pada ideal QFS A_I.

Bukti:

Didefinisikan operasi penjumlahan + dan perkalian . pada R/A_I sebagai berikut,

$$(x + A_I) + (y + A_I) = (x + y) + A_I$$

$$(x + A_I).(y + A_I) = (x.y) + A_I$$

untuk setiap $x, y \in R$ dan $q \in Q$

A. Akan ditunjukkan bahwa $(R/A_I, +, .)$ adalah ring

1. Akan ditunjukkan bahwa $(R/A_I\ , +)$ merupakan grup komutatif

   a. Akan ditunjukkan bahwa R/A_I tertutup terhadap operasi penjumlahan

      Ambil sebarang $x + A_I, y + A_I \in R/A_I$

      $(x + A_I) + (y + A_I) = (x + y) + A_I$

   b. Akan ditunjukkan bahwa operasi penjumlahan memenuhi hukum asosiatif

      Ambil sebarang $x + A_I, y + A_I, z + A_I \in R/A_I$

      $$\begin{aligned}\big((x + A_I) + (y + A_I)\big) + (z + A_I) &= (x + y) + A_I + z + A_I \\ &= (x + y) + z + A_I \\ &= (x + (y + z) + A_I) \\ &= (x + A_I) + \big((y + A_I) + (z + A_I)\big)\end{aligned}$$

   c. Akan ditunjukkan bahwa $0 + A_I \in R/A_I$ adalah elemen identitas terhadap operasi penjumlahan. Ambil sebarang $x + A_I \in R/A_I$ berlaku,

      $(x + A_I) + (0 + A_I) = (0 + A_I) + (x + A_I) = (x + A_I)$

   d. Akan ditunjukkan bahwa setiap elemen di R/A_I memiliki invers terhadap operasi penjumlahan. $\forall (x + A_I) \in R/A_I, \exists\ -(x + A_I) \in R/A_I$ sedemikia sehingga

      $(x + A_I) + \big(-(x + A_I)\big) = (x - x) + A_I = 0 + A_I$

      $(-x + A_I) + (x + A_I) = (-x + x) + A_I = 0 + A_I$

   e. Akan ditunjukkan bahwa operasi penjumlahan memenuhi hukum komutatif

      Ambil sebarang $x + A_I, y + A_I \in R/A_I$

$(x + A_I) + (y + A_I) = (x + y) + A_I$

$= (y + x) + A_I$

$= (y + A_I) + (x + A_I)$

Terbukti bahwa $(R/A_I\,, +)$ adalah grup komutatif.

2. Akan ditunjukkan bahwa $(R/A_I\,, .)$ merupakan semigrup

   a. Akan ditunjukkan bahwa R/A_I tertutup terhadap operasi perkalian

      Ambil sebarang $x.A_I, y.A_I \in R/A_I$

      $(x.A_I) + (y.A_I) = (x.y) + A_I$

   b. Akan ditunjukkan bahwa operasi perkalian memenuhi hukum asosiatif

      Ambil sebarang $x.A_I, y.A_I, z.A_I \in R/A_I$

      $\big((x + A_I).(y + A_I)\big).(z + A_I) = (x.y) + A_I.z + A_I$

      $= (x.y).z + A_I$

      $= (x.(y.z) + A_I)$

      $= (x + A_I).\big((y + A_I).(z + A_I)\big)$

   Terbukti bahwa $(R/A\,, .)$ adalah semigrup.

3. Akan ditunjukkan bahwa operasi penjumlahan dan perkalain memenuhi hukum distributif. Ambil sebarang $x + A_I\,, y + A_I\,, z + A_I \in R/A_I$

   $(x + A_I).\big((y + A_I) + (z + A_I)\big) = (x + A_I).(y + z) + A_I$

   $= x.(y + z) + A_I$

   $= \big((x.y) + (x.z)\big) + A_I$

   $= (x.y + A_I) + (x.z + A_I)$

   $= \big((x + A_I).(y + A_I)\big) + \big((x + A_I).(z + A_I)\big)$

   Berdasarkan 1, 2 dan 3 terbukti bahwa $(R/A_I\,, +, .)$ adalah ring

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $(X/A_I, +, .)$ adalah field

B. Akan ditunjukkan bahwa $(X/A_I, +, .)$ adalah field

1. Akan ditunjukkan bahwa $(X/A_I\,, +)$ merupakan grup komutatif

(a) Akan ditunjukkan bahwa R/A_I tertutup terhadap operasi penjumlahan

Ambil sebarang $x + A_I, y + A_I \in X/A_I$

$(x + A_I) + (y + A_I) = (x + y) + A_I$

(b) Akan ditunjukkan bahwa operasi penjumlahan memenuhi hokum asosiatif. Ambil sebarang $x + A_I, y + A_I, z + A_I \in X/A_I$

$$\big((x + A_I) + (y + A_I)\big) + (z + A_I) = (x + y) + A_I + z + A_I$$

$$= (x + y) + z + A_I$$

$$= (x + (y + z) + A_I)$$

$$= (x + A_I) + \big((y + A_I) + (z + A_I)\big)$$

(c) Akan ditunjukkan bahwa $0 + A_I \in X/A_I$ adalah elemen identitas terhadap operasi penjumlahan. Ambil sebarang $x + A_I \in X/A_I$ berlaku,

$(x + A_I) + (0 + A_I) = (0 + A_I) + (x + A_I) = (x + A_I)$

(d) Akan ditunjukkan bahwa setiap elemen $x + A_I \in X/A_I$ memeiliki invers $(-x + A_I) \in X/A_I$ sedemikia sehingga

$(x + A_I) + (-x + A_I) = (x - x) + A_I = 0 + A_I$

$(-x + A_I) + (x + A_I) = (-x + x) + A_I = 0 + A_I$

(e) Akan ditunjukkan bahwa operasi penjumlahan memenuhi hukum komutatif. Ambil sebarang $x + A_I, y + A_I \in X/A_I$

$$(x + A_I) + (y + A_I) = (x + y) + A_I$$

$$= (y + x) + A_I$$

$$= (y + A_I) + (x + A_I)$$

Terbukti bahwa $(X/A_I\,, +)$ adalah grup komutatif.

2. Akan ditunjukkan bahwa $(X/A_I\,, .)$ merupakan semigrup

(a) Akan ditunjukkan bahwa X/A_I tertutup terhadap operasi perkalian

Ambil sebarang $x.A_I, y.A_I \in X/A_I$

$$(x.A_I) + (y.A_I) = (x.y) + A_I$$

(b) Akan ditunjukkan bahwa operasi perkalian memenuhi hukum asosiatif

Ambil sebarang $x.A_I, y.A_I, z.A_I \in X/A_I$

$$\big((x + A_I).(y + A_I)\big).(z + A_I) = (x.y) + A_I.z + A_I$$
$$= (x.y).z + A_I$$
$$= (x.(y.z) + A_I)$$
$$= (x + A_I).\big((y + A_I).(z + A_I)\big)$$

Terbukti bahwa $(X/A_I\,, .)$ adalah semigrup.

3. Akan ditunjukkan operasi penjumlahan dan perkalain memenuhi hukum distributif. Ambil sebarang $x + A_I\,, y + A_I\,, z + A_I \in X/A_I$

$$(x + A_I).\big((y + A_I) + (z + A_I)\big) = (x + A_I).\big((y + z) + A_I\big)$$
$$= x.(y + z) + A_I$$
$$= \big((x.y) + (x.z)\big) + A_I$$
$$= (x.y + A_I) + (x.z + A_I)$$
$$= \big((x + A_I).(y + A_I)\big) + \big((x + A_I).(z + A_I)\big)$$

4. Akan ditunjukkan bahwa $1 + A_I \in X/A_I$ adalah elemen identitas terhadap operasi perkalian. Ambil sebarang $x + A_I \in X/A_I$

$(x + A_I).(1 + A_I) = (1 + A_I).(x + A_I) = (x + A_I)$

5. Akan ditunjukkan bahwa setiap elemen tidak nol di X/A_I memiliki invers terhadap operasi perkalian. $\forall(x + A_I) \in X/A_I, \exists(x^{-1} + A_I) \in X/A_I$ sedemikia sehingga

$(x + A_I).(x^{-1} + A_I) = (x.x^{-1}) + A_I = 1 + A_I$

$(x^{-1} + A_I).(x + A_I) = (x^{-1}.x) + A_I = 1 + A_I$

6. Akan ditunjukkan bahwa operasi penjumlahan memenuhi hukum komutatif. Ambil sebarang $x + A_I, y + A_I \in X/A_I$

$$(x + A_I).(y + A_I) = (x.y) + A_I$$
$$= (y.x) + A_I$$

$$= (y + A_I).(x + A_I)$$

Terbukti bahwa $(X/A_I, +, .)$ adalah field. □

Jadi R/A_I adalah ring dari koset Smarandache pada A_I sehingga R/A_I disebut sebagai ring kuosien Smarandache dari R oleh A_I atau ring kuosien QFS.

3.2 Produk Cartesian dari Ring Q-$Fuzzy$ Smarandache

Dalam subbab ini akan dibentuk struktur baru dua atau lebih ring QFS pada satu ring Smarandache dan beda ring Smarandache beserta sifat-sifatnya yang berlaku di dalam paper Malik dan Moderson (1991), Ray (1999), serta Aktas dll (2006).

Definisi 3.2.1 (Produk Cartesian Himpunan Q-$Fuzzy$)

Misalkan A dan B berturut-turut merupakan himpunan Q-$fuzzy$ dari himpunan X dengan masing-masing fungsi keanggotaan μ_A dan μ_B. Produk cartesian dari dua himpunan Q-$fuzzy$ A dan B dalam semesta $X \times X \times Q$ didefinisikan sebagai berikut,

$$A \times B = \{((x, y, q), \mu_{A\times B}(x, y, q)) | (x, y, q) \in X \times X \times Q\}$$

di mana

$$\mu_{A\times B}((x, y), q) = \min\{\mu_A(x, q), \mu_B(y, q)\}$$

untuk setiap $x, y \in X \times X$ dan $Q = \{q\}$

Teorema 3.2.2. Misalkan $(R, +, .)$ adalah ring Smarandache di mana $C \subset R$ dan $D \subset R$ berturut-turut adalah field. Jika A dan B masing-masing adalah ring QFS dari R maka $A \times B$ adalah ring QFS dari $(R \times R)$.

Bukti:

Diketahui bahwa R adalah ring Smarandache. A dan B masing-masing merupakan ring QFS dari R. Akan dibuktikan bahwa $A \times B$ adalah ring QFS dari $(R \times R)$.

Ambil $x_1, x_2 \in C, y_1, y_2 \in D$ dan $q \in Q$

a. $$\begin{aligned}(\mu_C \times \mu_D)\big((x_1, y_1) - (x_2, y_2), q\big) &= (\mu_C \times \mu_D)\big((x_1 - x_2, y_1 - y_2), q\big)\\ &= \min\{\mu_C(x_1 - x_2, q), \mu_D(y_1 - y_2, q)\}\\ &\geq \min\left\{\min\begin{Bmatrix}\{\mu_C(x_1, q), \mu_C(x_2, q)\},\\ \{\mu_D(y_1, q), \mu_D(y_2, q)\}\end{Bmatrix}\right\}\\ &= \min\begin{Bmatrix}min\{\mu_C(x_1, q), \mu_D(y_1, q)\},\\ min\{\mu_C(x_2, q), \mu_D(y_2, q)\}\end{Bmatrix}\\ &= \min\begin{Bmatrix}(\mu_C \times \mu_D)\big((x_1, q), (y_1, q)\big),\\ (\mu_C \times \mu_D)\big((x_2, q), (y_2, q)\big)\end{Bmatrix}\end{aligned}$$

b. $$\begin{aligned}(\mu_C \times \mu_D)\big((x_1, y_1).(x_2 y_2)^{-1}, q\big) &= (\mu_C \times \mu_D)\left((x_1.x_2^{-1}, y_1.y_2^{-1}), q\right)\\ &= \min\{\mu_C(x_1.x_2^{-1}, q), \mu_D(y_1.y_2^{-1}, q)\}\\ &\geq \min\left\{\min\begin{Bmatrix}\{\mu_C(x_1, q), \mu_C(x_2, q)\},\\ \{\mu_D(y_1, q), \mu_D(y_2, q)\}\end{Bmatrix}\right\}\\ &= \min\begin{Bmatrix}min\{\mu_C(x_1, q), \mu_D(y_1, q)\},\\ min\{\mu_C(x_2, q), \mu_D(y_2, q)\}\end{Bmatrix}\\ &= \min\begin{Bmatrix}(\mu_C \times \mu_D)\big((x_1, q), (y_1, q)\big),\\ (\mu_C \times \mu_D)\big((x_2, q), (y_2, q)\big)\end{Bmatrix}\end{aligned}$$

Jadi $A \times B$ adalah ring QFS dari $(R \times R)$. □

Teorema 3.2.3. Misalkan $(R, +, .)$ adalah ring Smarandache di mana $C \subset R$ dan $D \subset R$ berturut-turut adalah field. Misalkan pula 0 dan e berturut-turut merupakan elemen identitas atas operasi penjumlahan dan perkalian dari R. Jika $A \times B$ adalah ring QFS dari $(R \times R)$ maka berlaku

i. $(\mu_C \times \mu_D)\big((0,0), q\big) \geq (\mu_C \times \mu_D)\big((x, y), q\big)$

ii. $(\mu_C \times \mu_D)\big((e,e),q\big) \geq (\mu_C \times \mu_D)\big((x,y),q\big)$

Bukti:

Diketahui bahwa R adalah ring Smarandache. A dan B merupakan ring QFS. Ambil sebarang $x \in C, y \in D, q \in Q$ serta 0 dan e masing-masing merupakan elemen identitas dari R.

i. $(\mu_C \times \mu_D)\big((0,0),q\big) = \mu_C \times \mu_D\Big(\big(x + (-x)\big), \big(y + (-y)\big), q\Big)$

$$= \min\{\mu_C(x + (-x), q), \mu_D(x + (-x), q)\}$$

$$\geq \min\big\{\min\big\{\{\mu_C(x,q), \mu_C(-x,q)\}, \{\mu_D(y,q), \mu_D(-y,q)\}\big\}\big\}$$

$$= \min\{\min\{\mu_C(x,q), \mu_C(x,q)\}, \min\{\mu_D(y,q), \mu_D(y,q)\}\}$$

$$= \min\big\{\{\mu_C(x,q)\}, \{\mu_D(y,q)\}\big\}$$

$$= (\mu_C \times \mu_D)\big((x,y),q\big) \square$$

ii. $(\mu_C \times \mu_D)\big((e,e),q\big) = (\mu_C \times \mu_D)\Big(\big((xx^{-1}),(yy^{-1})\big),q\Big)$

$$= \min\{\mu_C(xx^{-1},q), \mu_D(xx^{-1},q)\}$$

$$\geq \min\big\{\min\big\{\{\mu_C(x,q), \mu_C(x^{-1},q)\}, \{\mu_D(y,q), \mu_D(y^{-1},q)\}\big\}\big\}$$

$$= \min\big\{\min\{\mu_C(x,q), \mu_C(x,q)\}, \min\{\mu_D(y,q), \mu_D(y,q)\}\big\}$$

$$= \min\Big\{\{\mu_C(x,q)\}, \{\mu_D(y,q)\}\Big\}$$

$$= \big(\mu_C \times \mu_D\big)\big((x,y),q\big) \square$$

Teorema 3.2.4. Misalkan $(R,+,.)$ adalah ring Smarandache di mana $C \subset R$ dan $D \subset R$ berturut-turut adalah field, dan e elemen identitas dari R. Jika $A \times B$ adalah ring QFS dari $(R \times R)$ maka berlaku,

1. $\mu_C(x,q) \leq \mu_C(e,q)$ atau $\mu_D(x,q) \leq \mu_D(e,q)$
2. $\mu_D(e,q) \geq \mu_C(x,q)$ untuk setiap $x \in C$ atau $\mu_D(x,q) \leq \mu_D(e,q)$
3. $\mu_C(e,q) \geq \mu_D(x,q)$ untuk setiap $x \in D$ atau $\mu_C(x,q) \leq \mu_C(e,q)$

Bukti:

Diketahui bahwa R adalah ring Smarandache. Diketahui pula bahwa $A \times B$ adalah ring QFS dari $(R \times R)$.

1. Misalkan $x \in C, y \in D, e \in R$ dan $q \in Q$. Andaikan $\mu_C(x,q) > \mu_C(e,q)$ dan $\mu_D(y,q) > \mu_D(e,q)$

$$\mu_C \times \mu_D((x,y),q) = \min\left(\mu_C(x,q), \mu_D(y,q)\right)$$
$$> \min\left(\mu_C(e,q), \mu_D(e,q)\right)$$
$$= \mu_C \times \mu_D((e,e),q)$$

   tampak terdapat kontradiksi pada $\mu_C \times \mu_D((x,y),q) > \mu_C \times \mu_D((e,e),q)$ sehingga, pengandaian salah. Jadi $A \times B$ adalah ring QFS dari $(R \times R)$.

2. Misalkan $x \in C, y \in D$ dan $q \in Q$. Andaikan $\mu_C(x,q) > \mu_D(e,q)$ dan $\mu_D(y,q) > \mu_D(e,q)$

$$\mu_C \times \mu_D = \min\left(\mu_C(x), \mu_D(y)\right)$$
$$> \min(\mu_D(e), \mu_D(e))$$
$$= \mu_D \times \mu_D((e,e),q)$$

   tampak terdapat kontradiksi pada $\mu_C \times \mu_D((x,y),q) > \mu_D \times \mu_D((e,e),q)$ sehingga, pengandaian salah. Jadi $A \times B$ adalah ring QFS dari $(R \times R)$.

3. Bukti analog dengan 2

Terbukti bahwa ketiga kondisi di atas terpenuhi □

Teorema 3.2.5. Misalkan $(R, +, .)$ adalah ring Smarandache di mana $C \subset R$ dan $D \subset R$ berturut-turut adalah field. Misalkan pula 0 elemen identitas atas operasi penjumlahan dari R. Jika $A \times B$ adalah ring QFS dari $(R \times R)$ maka berlaku,

1. $\mu_C(x,q) \leq \mu_C(0,q)$ atau $\mu_D(x,q) \leq \mu_D(0,q)$

2. $\mu_D(0,q) \geq \mu_C(x,q)$ untuk setiap $x \in C$ atau $\mu_D(x,q) \leq \mu_D(0,q)$

3. $\mu_D(0,q) \geq \mu_D(x,q)$ untuk setiap $x \in D$ atau $\mu_C(x,q) \leq \mu_C(0,q)$

Bukti: analog dengan Teorema 3.2.4. □

Teorema 3.2.6. Misalkan $(R,+,.)$ adalah ring Smarandache di mana $C \subset R$ dan $D \subset R$ berturut-turut adalah field. Misalkan A dan B merupakan ring QFS.

1. Jika $\mu_D(e,q) \geq \mu_C(x,q)$ maka $\mu_C \times \mu_D\big((x,e),q\big) = \mu_C(x,q)$
2. Jika $\mu_D(0,q) \geq \mu_C(x,q)$ maka $\mu_C \times \mu_D\big((x,0),q\big) = \mu_C(x,q)$
3. Jika $\mu_C(e,q) \geq \mu_D(x,q)$ maka $\mu_C \times \mu_D\big((e,x),q\big) = \mu_D(x,q)$
4. Jika $\mu_C(0,q) \geq \mu_D(x,q)$ maka $\mu_C \times \mu_D\big((0,x),q\big) = \mu_D(x,q)$

Bukti:

1. Diketahui $\mu_D(e,q) \geq \mu_C(x,q)$. Ambil $x \in C, e \in R$ dan $q \in Q$

$$\mu_C \times \mu_D\big((x,e),q\big) = \min\{\mu_C(x,q), \mu_D(e,q)\}$$
$$= \mu_C(x,q) \ \square$$

2. Bukti analog dengan 1 □
3. Diketahui $\mu_C(e,q) \geq \mu_D(x,q)$. Ambil $x \in C, e \in R$ dan $q \in Q$

$$\mu_C \times \mu_D\big((e,x),q\big) = \min\{\mu_C(e,q), \mu_D(x,q)\}$$
$$= \mu_D(x,q) \ \square$$

4. Bukti analog dengan 3 □

Teorema 3.2.7. Misalkan $(R,+,.)$ adalah ring Smarandache di mana $C \subset R$ dan $D \subset R$ berturut-turut adalah field. Dimisalkan pula bahwa $\mu_D(e,,q) \geq \mu_C(x,q)$ dan $\mu_D(0,q) \geq \mu_C(x,q)$. Jika $A \times B$ adalah ring QFS dari $(R \times R)$ maka A adalah ring QFS dari dari R.

Bukti:

Diketahui bahwa R adalah ring Smarandache. $A \times B$ adalah ring QFS dari $R \times R$. Akan dibuktikan bahwa A adalah ring QFS dari R dengan menggunakan $\mu_D(e,q) \geq \mu_C(x,q)$ dan $\mu_D(0,q) \geq \mu_C(x,q)$.

1. Ambil $x \in C, y \in D, 0 \in R$ dan $q \in Q$

$$\begin{aligned}
\mu_C(x-y,q) &= \mu_C \times \mu_D\big((x-y,0),q\big) \\
&\geq \min\Big(\mu_C \times \mu_D\big((x,0),q\big), \mu_C \times \mu_D\big((y,0),q\big)\Big) \\
&= \min\Big(\min\Big(\big(\mu_C(x,q),\mu_D(0,q)\big), \min\big(\mu_C(y,q),\mu_D(0,q)\big)\Big)\Big) \\
&= \min\big(\mu_C(x,q),\mu_C(y,q)\big)
\end{aligned}$$

2. Ambil $x \in C, y \in D, e \in R$ dan $q \in Q$

$$\begin{aligned}
\mu_C(xy^{-1},q) &= \mu_C \times \mu_D\big((x.y^{-1},e),q\big) \\
&\geq \min\Big(\mu_C \times \mu_D\big((x,e),q\big), \mu_C \times \mu_D\big((y,e),q\big)\Big) \\
&= \min\big(\min\big(\mu_C(x,q),\mu_D(e,q)\big), \min\big(\mu_C(y,q),\mu_D(e,q)\big)\big) \\
&= \min\big(\mu_C(x,q),\mu_C(y,q)\big)
\end{aligned}$$

Jadi A adalah ring QFS dari dari R.□

Teorema 3.2.8. Misalkan $(R,+,.)$ adalah ring Smarandache di mana $C \subset R$ dan $D \subset R$ berturut-turut adalah field. Dimisalkan pula bahwa $\mu_C(e,q) \geq \mu_D(x,q)$ dan $\mu_C(0,q) \geq \mu_D(x,q)$. Jika $A \times B$ adalah ring QFS dari $(R \times R)$ maka B adalah ring QFS dari dari R.

Bukti: Analog dengan Teorema 3.2.7. □

Sebelumnya telah dibangun struktur baru tentang produk cartesian dari dua himpunan Q-$fuzzy$ sebagaimana Definisi 3.2.1. Selanjutnya, akan dilakukan generalisasi pada produk cartesian dari dua himpunan Q-$fuzzy$. Berikut pendefinisiannya,

Definisi 3.2.9

Misalkan $A_1, \ldots, A_n$ adalah himpunan-himpunan Q-$fuzzy$ dalam (berturut-turut) $X, \ldots, X$ dengan masing-masing fungsi keanggotaan $\mu_{A_1}, \ldots, \mu_{A_n}$. Produk cartesian dari $A_1, \ldots, A_n$ dalam semesta $X \times \ldots \times X \times Q$ didefinisikan sebagai

$$A_1 \times \ldots \times A_n = \left\{ \begin{matrix} \left(\left((x_1, \ldots, x_n), q \right), \mu_{A_1 \times \ldots \times A_n}\left((x_1, \ldots, x_n), q \right) \right) \mid \\ \left((x_1, \ldots, x_n), q \right) \in X \times \ldots \times X \times Q \end{matrix} \right\}$$

di mana,

$$\mu_{A_1 \times \ldots \times A_n}\left((x_1, \ldots, x_n), q \right) = \min\{\mu_{A_1}(x_1, q), \ldots, \mu_{A_n}(x_n, q)\}$$

untuk setiap $x_1, \ldots, x_n \in X, \ldots, X$ dan $Q = \{q\}$

Teorema 3.2.10. Misalkan $(R, +, .)$ adalah ring Smarandache di mana $C_i \subset R$, (untuk $i = 1,2, \ldots, n$) berturut-turut merupakan field. Jika $A_1, \ldots, A_n$ adalah ring QFS maka $A_1 \times \ldots \times A_n$ adalah ring QFS dari $R \times \ldots \times R$.

Bukti:

Diketahui bahwa R adalah ring Smarandache. Diketahui pula bahwa $A_1, \ldots, A_n$ adalah ring QFS dari R. Akan dibuktikan bahwa $A_1 \times \ldots \times A_n$ adalah ring QFS dari $R \times \ldots \times R$. Ambil $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in C_i$ serta $q \in Q$

a. $\left(\mu_{C_1} \times \ldots \times \mu_{C_n}\right)\left((x_1, \ldots, x_n) - (y_1, \ldots, y_n), q\right)$

$= \left(\mu_{C_1} \times \ldots \times \mu_{C_n}\right)\left((x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n), q\right)$

$= \min\{\mu_{C_1}(x_1 - y_1, q), \ldots, \mu_{C_n}(x_n - y_n, q)\}$

$\geq \min\left\{\min\left\{\{\mu_{C_1}(x_1, q), \mu_{C_1}(y_1, q)\}, \ldots, \{\mu_{C_n}(x_n, q), \mu_{C_n}(y_n, q)\}\right\}\right\}$

$$= \min\left\{min\{\mu_{C_n}(x_1,q),\dots,\mu_{C_n}(x_n,q)\}, min\{\mu_{C_1}(y_1,q),\dots,\mu_{C_n}(y_n,q)\}\right\}$$

$$= \min\{(\mu_{C_1}\times\dots\times\mu_{C_n})((x_1,q),\dots,(x_n,q)),(\mu_{C_1}\times\dots\times\mu_{C_n})((y_1,q),\dots,(y_n,q))\}$$

b. $(\mu_{C_1}\times\dots\times\mu_{C_n})((x_1,\dots,x_n).(y_1,\dots,y_n)^{-1},q)$

$$= (\mu_{C_1}\times\dots\times\mu_{C_n})\left((x_1y_1^{-1},\dots,x_n.y_n^{-1}),q\right)$$

$$= \min\{\mu_{C_1}(x_1.y_1^{-1},q),\dots,\mu_{C_n}(x_n.y_n^{-1},q)\}$$

$$\geq \min\left\{\min\left\{\{\mu_{C_1}(x_1,q),\mu_{C_1}(y_1,q)\},\dots,\{\mu_{C_n}(x_n,q),\mu_{C_n}(y_n,q)\}\right\}\right\}$$

$$= \min\left\{min\{\mu_{C_n}(x_1,q),\dots,\mu_{C_n}(x_n,q)\}, min\{\mu_{C_1}(y_1,q),\dots,\mu_{C_n}(y_n,q)\}\right\}$$

$$= \min\{(\mu_{C_1}\times\dots\times\mu_{C_n})((x_1,q),\dots,(x_n,q)),(\mu_{C_1}\times\dots\times\mu_{C_n})((y_1,q),\dots,(y_n,q))\}$$

Jadi $A_1\times\dots\times A_n$ adalah ring QFS dari $R\times\dots\times R$. □

Teorema 3.2.11. Misalkan $(R,+,.)$ adalah ring Smarandache di mana $C_i\subset R$, (untuk $i=1,2,\dots,n$) berturut-turut merupakan field. Jika $A_1\times\dots\times A_n$ adalah ring QFS dari $(R\times\dots\times R)$ maka berlaku

i. $(\mu_{C_1}\times\dots\times\mu_{C_n})\left((0_{C_1},\dots,0_{C_n}),q\right)\geq(\mu_{C_1}\times\dots\times\mu_{C_n})((x_1,\dots,x_n),q)$

ii. $(\mu_{C_1}\times\dots\times\mu_{C_n})\left((e_{C_1},\dots,e_{C_n}),q\right)\geq(\mu_{C_1}\times\dots\times\mu_{C_n})((x_1,\dots,x_n),q)$

Bukti:

Diketahui bahwa R adalah ring Smarandache. Begitu juga dengan $Q=\{q\}$ serta diketahui bahwa $A_1\times\dots\times A_n$ adalah ring QFS dari $(R\times\dots\times R)$. Akan dibuktikan bahwa kedua kondisi di atas terpenuhi,

i. Ambil $(x_1,\dots,x_n),(-x_1,\dots,-x_n)\in C_i$ untuk $i=1,\dots,n, q\in Q$

$$(\mu_{C_1}\times\dots\times\mu_{C_n})\left((0_{A_1},\dots,0_{A_n}),q\right)$$

$$= (\mu_{C_1}\times\dots\times\mu_{C_n})\left(\left(x_1+(-x_1),\dots,(x_n+(-x_n))\right),q\right)$$

$$= \min\{\mu_{C_1}(x_1 + (-x_1), q), \dots, \mu_{C_n}(x_n + (-x_n), q)\}$$

$$\geq \min\{\min\{\mu_{C_1}(x_1, q), \mu_{C_1}(x_1, q)\}, \dots, \min\{\mu_{C_n}(x_n, q), \mu_{C_n}(x_n, q)\}\}$$

$$= \min\{\{\mu_{C_1}(x_1, q)\}, \dots, \{\mu_{C_n}(x_n, q)\}\}$$

$$= (\mu_{C_1} \times \dots \times \mu_{C_n})((x_1, \dots, x_n), q)$$

ii. Ambil $(x_1, \dots, x_n), (-x_1, \dots, -x_n) \in C_i$ untuk $i = 1, \dots, n, q \in Q$

$$(\mu_{C_1} \times \dots \times \mu_{C_n})\left((e_{A_1}, \dots, e_{A_n}), q\right)$$

$$= (\mu_{C_1} \times \dots \times \mu_{C_n})\left(\left(x_1 . x_1^{-1} . \dots . (x_n . x_n^{-1})\right), q\right)$$

$$= \min\{\mu_{C_1}(x_1 . x_1^{-1}, q), \dots, \mu_{C_n}(x_n . x_n^{-1}, q)\}$$

$$\geq \min\{\min\{\mu_{C_1}(x_1, q), \mu_{C_1}(x_1, q)\}, \dots, \min\{\mu_{C_n}(x_n, q), \mu_{C_n}(x_n, q)\}\}$$

$$= \min\{\{\mu_{C_1}(x_1, q)\}, \dots, \{\mu_{C_n}(x_n, q)\}\}$$

$$= (\mu_{C_1} \times \dots \times \mu_{C_n})((x_1, \dots, x_n), q).$$

Terbukti bahwa kedua kondisi tersebut terpenuhi. □

Teorema 3.2.12. Misalkan $(R, +, .)$ adalah ring Smarandache di mana $C_i \subset R$, (untuk $i = 1,2, \dots, n$) berturut-turut merupakan field. Dimisalkan pula bahwa $\left(\mu_{C_1} \times \dots \times \mu_{C_n}\right)\left((0_{C_1}, \dots, 0_{C_n}), q\right) \geq \left(\mu_{C_1} \times \dots \times \mu_{C_n}\right)((x_1, \dots, x_n), q)$ dan $\left(\mu_{C_1} \times \dots \times \mu_{C_n}\right)\left((e_{C_1}, \dots, e_{C_n}), q\right) \geq \left(\mu_{C_1} \times \dots \times \mu_{C_n}\right)((x_1, \dots, x_n), q)$.

Jika $A_1 \times \dots \times A_n$ adalah ring QFS dari $(R \times \dots \times R)$ maka A_i $(i = 1, \dots, n)$ merupakan ring QFS dari $(R \times \dots \times R)$.

Bukti:

Diketahui bahwa R adalah ring Smarandache. Begitu juga dengan $Q = \{q\}$ serta diketahui bahwa $A_1 \times \dots \times A_n$ adalah ring QFS dari $(R \times \dots \times R)$**.** Akan dibuktikan bahwa A_i $(i = 1, \dots, n)$ adalah ring QFS dari $(R \times \dots \times R)$ dengan menggunakan

$\left(\mu_{C_1} \times \dots \times \mu_{C_n}\right)\left((0_{C_1}, \dots, 0_{C_n}), q\right) \geq \left(\mu_{C_1} \times \dots \times \mu_{C_n}\right)\left((x_1, \dots, x_n), q\right)$ dan

$\left(\mu_{C_1} \times \dots \times \mu_{C_n}\right)\left((e_{C_1}, \dots, e_{C_n}), q\right) \geq \left(\mu_{C_1} \times \dots \times \mu_{C_n}\right)\left((x_1, \dots, x_n), q\right)$.

i. Ambil $(x_i), (y_i), (0_i) \in C_i (i = 1,2, \dots, n)$ serta $Q = \{q\}$.

$$
\begin{aligned}
\mu_{C_i}(x_i - y_i, q) &= (\mu_{C_1} \times \dots \times \mu_{C_n})\big((x_i - y_i, 0_i), q\big) \\
&\geq \min\{(\mu_{C_1} \times \dots \times \mu_{C_n})\big((x_i, 0_i), q\big), (\mu_{C_1} \times \dots \times \mu_{C_n})\big((y_i, 0_i), q\big)\} \\
&= \min\left\{\begin{matrix}\{(\mu_{C_1} \times \dots \times \mu_{C_n})(x_i, q), (\mu_{C_1} \times \dots \times \mu_{C_n})(0_i, q)\}, \\ \{(\mu_{C_1} \times \dots \times \mu_{C_n})(y_i, q), (\mu_{C_1} \times \dots \times \mu_{C_n})(0_i, q)\}\end{matrix}\right\} \\
&= \min\left\{\begin{matrix}\{(\mu_{C_1} \times \dots \times \mu_{C_n})(x_i, q), (\mu_{C_1} \times \dots \times \mu_{C_n})(x_i, q)\}, \\ \{(\mu_{C_1} \times \dots \times \mu_{C_n})(y_i, q), (\mu_{C_1} \times \dots \times \mu_{C_n})(y_i, q)\}\end{matrix}\right\} \\
&= \min\{(\mu_{C_1} \times \dots \times \mu_{C_n})(x_i, q), (\mu_{C_1} \times \dots \times \mu_{C_n})(y_i, q)\} \\
&= \min\left\{\min\left\{\{\mu_{C_1}(x_1, q), \dots, \mu_{C_n}(x_n, q)\}, \{\mu_{C_1}(y_1, q), \dots, \mu_{C_n}(y_n, q)\}\right\}\right\} \\
&= \min(\mu_{C_i}(x_i, q), \mu_{C_i}(y_i, q)
\end{aligned}
$$

ii. Ambil $(x_i), (y_i), (e_i) \in C_i (i = 1,2, \dots n)$ serta $Q = \{q\}$.

$$
\begin{aligned}
\mu_{C_i}(x_i y_i^{-1}, q) &= (\mu_{C_1} \times \dots \times \mu_{C_n})\left((x_i y_i^{-1}, e_i), q\right) \\
&\geq \min\{(\mu_{C_1} \times \dots \times \mu_{C_n})\big((x_i, e_i), q\big), (\mu_{C_1} \times \dots \times \mu_{C_n})\big((y_i, e_i), q\big)\} \\
&= \min\left\{\begin{matrix}\{(\mu_{C_1} \times \dots \times \mu_{C_n})(x_i, q), (\mu_{C_1} \times \dots \times \mu_{C_n})(e_i, q)\}, \\ \{(\mu_{C_1} \times \dots \times \mu_{C_n})(y_i, q), (\mu_{C_1} \times \dots \times \mu_{C_n})(e_i, q)\}\end{matrix}\right\} \\
&= \min\left\{\begin{matrix}\{(\mu_{C_1} \times \dots \times \mu_{C_n})(x_i, q), (\mu_{C_1} \times \dots \times \mu_{C_n})(x_i, q)\}, \\ \{(\mu_{C_1} \times \dots \times \mu_{C_n})(y_i, q), (\mu_{C_1} \times \dots \times \mu_{C_n})(y_i, q)\}\end{matrix}\right\} \\
&= \min\{(\mu_{C_1} \times \dots \times \mu_{C_n})(x_i, q), (\mu_{C_1} \times \dots \times \mu_{C_n})(y_i, q)\} \\
&= \min\left\{\min\left\{\{\mu_{C_1}(x_1, q), \dots, \mu_{C_n}(x_n, q)\}, \{\mu_{C_1}(y_1, q), \dots, \mu_{C_n}(y_n, q)\}\right\}\right\} \\
&= \min(\mu_{C_i}(x_i, q), \mu_{C_i}(y_i, q) \ \square
\end{aligned}
$$

Selanjutnya diberikan produk cartesian ring QFS dari ring Smarandache yang berbeda. Untuk pembuktian Teorema akan merujuk Teorema 3.2.2 hingga Teorema 3.2.12.

Teorema 3.2.13. Misalkan $(R_1,+,.)$ dan $(R_2,+,.)$ keduanya adalah ring Smarandache di mana $C \subset R_1$ serta $M \subset R_2$ berturut-turut adalah field. Jika A dan B berturut-turut adalah ring QFS dari R_1 dan R_2 maka $A \times B$ adalah ring QFS dari $(R_1 \times R_2)$.

Bukti:

Diketahui bahwa R_1 dan R_2 adalah ring Smarandache. Diketahui pula bahwa A dan B merupakan ring QFS dari R_1 dan R_2. Akan dibuktikan bahwa $A \times B$ adalah ring QFS dari $(R_1 \times R_2)$.

Ambil $x_1, x_2 \in C$ dan $y_1, y_2 \in M$ serta $q \in Q$

a. $(\mu_C \times \mu_M)\big((x_1,y_1)-(x_2y_2),q\big) = (\mu_C \times \mu_M)\big((x_1-x_2,y_1-y_2),q\big)$

$$= \min\{\mu_C(x_1-x_2,q),\mu_M(y_1-y_2,q)\}$$

$$\geq \min\left\{\min\left\{\begin{matrix}\{\mu_C(x_1,q),\mu_C(x_2,q)\},\\ \{\mu_M(y_1,q),\mu_M(y_2,q)\}\end{matrix}\right\}\right\}$$

$$= \min\left\{\begin{matrix}\min\{\mu_C(x_1,q),\mu_M(y_1,q)\},\\ \min\{\mu_C(x_2,q),\mu_M(y_2,q)\}\end{matrix}\right\}$$

$$= \min\left\{\begin{matrix}(\mu_C \times \mu_M\big((x_1,q),(y_1,q)\big),\\ \mu_C \times \mu_M\big((x_2,q),(y_2,q)\big)\end{matrix}\right\}$$

b. $(\mu_C \times \mu_M)\big((x_1,y_1).(x_2y_2)^{-1},q\big) = (\mu_C \times \mu_M)\left((x_1.x_2^{-1},y_1.y_2^{-1}),q\right)$

$$= \min\{\mu_C(x_1.x_2^{-1},q),\mu_M(y_1.y_2^{-1},q)\}$$

$$\geq \min\left\{\min\left\{\begin{matrix}\{\mu_C(x_1,q),\mu_C(x_2,q)\},\\ \{\mu_M(y_1,q),\mu_M(y_2,q)\}\end{matrix}\right\}\right\}$$

$$= \min\left\{\begin{matrix}\min\{\mu_C(x_1,q),\mu_M(y_1,q)\},\\ \min\{\mu_C(x_2,q),\mu_M(y_2,q)\}\end{matrix}\right\}$$

$$= \min\left\{\begin{matrix}(\mu_C \times \mu_M\big((x_1,q),(y_1,q)\big),\\ \mu_C \times \mu_M\big((x_2,q),(y_2,q)\big)\end{matrix}\right\}$$

Jadi $A \times B$ adalah ring QFS dari $(R_1 \times R_2)$. □

Teorema 3.2.14. Misalkan $(R_1,+,.)$ dan $(R_2,+,.)$ keduanya adalah ring Smarandache di mana $C \subset R_1$ serta $M \subset R_2$ berturut-turut adalah field. Misalkan pula 0 dan e berturut-turut merupakan elemen identitas atas operasi penjumlahan dan perkalian dari C dan M. Jika A dan B berturut-turut adalah ring QFS dari R_1 dan R_2 maka berlaku,

i. $(\mu_C \times \mu_M)\big((0_C, 0_M), q\big) \geq (\mu_C \times \mu_M)\big((x,y), q\big)$

ii. $(\mu_C \times \mu_M)\big((e_C, e_M), q\big) \geq (\mu_C \times \mu_M)\big((x,y), q\big)$

Bukti:

Diketahui bahwa $(R_1,+,.)$ dan $(R_2,+,.)$ adalah ring Smarandache. Diketahui pula bahwa A dan B merupakan ring QFS dari R_1 dan R_2. Akan dibuktikan bahwa kedua sifat di atas terpenuhi.

i. Ambil $x, -x, 0 \in C$ dan $y, -y, 0 \in M$ serta $q \in Q$

$$(\mu_C \times \mu_M)\big((0_C, 0_M), q\big) = (\mu_C \times \mu_M)\Big(\big(x + (-x)\big), \big(y + (-y)\big), q\Big)$$

$$= \min\{\mu_C(x + (-x), q), \mu_M(y + (-y), q)\}$$

$$\geq \min\{min\{\{\mu_C(x,q), \mu_C(x,q)\}, \{\mu_M(y,q), \mu_M(y,q)\}\}\}$$

$$= \min\Big\{\{\mu_C(x,q)\}, \{\mu_M(y,q)\}\Big\}$$

$$= (\mu_C \times \mu_M)\big((x,q),(y,q)\big)$$

ii. Ambil $x, -x, e \in C$ dan $y, -y, e \in M$ serta $q \in Q$

$$(\mu_C \times \mu_M)\big((e_A, e_M), q\big) = (\mu_C \times \mu_M)\Big(\big(x.(x^{-1})\big), \big(y.(y^{-1})\big), q\Big)$$

$$= \min\{\mu_A(x.(x^{-1}), q), \mu_M(y.(y^{-1}), q)\}$$

$$\geq \min\{min\{\{\mu_A(x,q), \mu_A(x,q)\}, \{\mu_M(y,q), \mu_M(y,q)\}\}\}$$

$$= \min\{\{\mu_A(x,q)\}, \{\mu_M(y,q)\}\}$$

$$= (\mu_A \times \mu_M)\big((x,q),(y,q)\big)$$

Terbukti bahwa kedua kondisi tersebut terpenuhi. □

Teorema 3.2.15. Misalkan $(R_1,+,.)$ dan $(R_2,+,.)$ keduanya adalah ring Smarandache di mana $C \subset R_1$ serta $M \subset R_2$ berturut-turut adalah field. Misalkan pula e berturut-turut elemen identitas dari C dan M. Jika $A \times B$ adalah ring QFS dari $R_1 \times R_2$ maka berlaku,

1. $\mu_C(x,q) \leq \mu_C(e,q)$ atau $\mu_M(x,q) \leq \mu_M(e,q)$
2. $\mu_M(e,q) \geq \mu_C(x,q)$ untuk setiap $x \in C$ atau $\mu_M(x,q) \leq \mu_M(e,q)$
3. $\mu_C(e,q) \geq \mu_M(x,q)$ untuk setiap $y \in M$ atau $\mu_C(x,q) \leq \mu_C(e,q)$

Bukti:

Diketahui bahwa R_1 dan R_2 adalah ring Smarandache. Diketahui pula bahwa $A \times B$ adalah ring QFS dari $R_1 \times R_2$. Akan dibuktikan ketiga kondisi tersebut.

1. Misalkan $x, e \in C, y, e' \in M$ dan $q \in Q$. Andaikan $\mu_C(x,q) > \mu_C(e,q)$ dan $\mu_M(y,q) > \mu_M(e,q)$

$$\begin{aligned} \mu_C \times \mu_M\big((x,y),q\big) &= \min\big(\mu_C(x,q), \mu_M(y,q)\big) \\ &> \min\big(\mu_C(e,q), \mu_M(e,q)\big) \\ &= \mu_C \times \mu_M\big((e,e),q\big) \end{aligned}$$

   Tampak terdapat kontradiksi pada $\mu_C \times \mu_M\big((x,y),q\big) > \mu_C \times \mu_M\big((e,e),q\big)$ sehingga, pengandaian salah. Jadi $A \times B$ adalah ring QFS dari $(R_1 \times R_2)$.

2. Misalkan $x, e \in C, y, e \in M$ dan $q \in Q$. Andaikan $\mu_C(x,q) > \mu_M(e,q)$ dan $\mu_M(y,q) > \mu_M(e',q)$

$$\begin{aligned} \mu_C \times \mu_M\big((x,y),q\big) &= \min\big(\mu_C(x,q), \mu_M(y,q)\big) \\ &> \min\big(\mu_M(e,q), \mu_M(e,q)\big) \\ &= \mu_M \times \mu_M\big((e,e),q\big) \end{aligned}$$

   Tampak terdapat kontradiksi pada $\mu_C \times \mu_M\big((x,y),q\big) > \mu_M \times \mu_M\big((e,e),q\big)$ sehingga, pengandaian salah. Jadi $A \times B$ adalah ring QFS dari $(R_1 \times R_2)$.

3. Bukti analog dengan 2.

Terbukti bahwa ketiga kondisi di atas terpenuhi. □

Teorema 3.2.16. Misalkan $(R_1,+,.)$ dan $(R_2,+,.)$ keduanya adalah ring Smarandache di mana $C \subset R_1$ serta $M \subset R_2$ berturut-turut adalah field. Misalkan pula 0 berturut-turut elemen identitas atas operasi penjumlahan dari C dan M. Jika $A \times B$ adalah ring QFS dari $R_1 \times R_2$ maka berlaku,

1. $\mu_C(x,q) \leq \mu_C(0,q)$ atau $\mu_M(x,q) \leq \mu_M(0,q)$
2. $\mu_M(0,q) \geq \mu_C(x,q)$ untuk setiap $x \in C$ atau $\mu_M(x,q) \leq \mu_M(0,q)$
3. $\mu_C(0,q) \geq \mu_M(x,q)$ untuk setiap $y \in M$ atau $\mu_C(x,q) \leq \mu_C(0,q)$

Bukti: Analog dengan Teorema 3.2.14. □

Teorema 3.2.17. Misalkan $(R_1,+,.)$ dan $(R_2,+,.)$ keduanya adalah ring Smarandache di mana $C \subset R_1$ serta $M \subset R_2$ berturut-turut adalah field.

1. Jika $\mu_M(e,q) \geq \mu_C(x,q)$ maka $\mu_C \times \mu_M\big((x,e),q\big) = \mu_C(x,q)$
2. Jika $\mu_M(0,q) \geq \mu_C(x,q)$ maka $\mu_C \times \mu_M\big((x,0),q\big) = \mu_C(x,q)$
3. Jika $\mu_C(e,q) \geq \mu_M(x,q)$ maka $\mu_C \times \mu_M\big((e,x),q\big) = \mu_M(x,q)$
4. Jika $\mu_C(0,q) \geq \mu_M(x,q)$ maka $\mu_C \times \mu_M\big((0,x),q\big) = \mu_M(x,q)$

Bukti:

1. Diketahui $\mu_M(e,q) \geq \mu_C(x,q)$. Ambil $x \in C, y \in M, e \in M$ dan $q \in Q$

$$\mu_C \times \mu_M\big((x,e),q\big) = \min\{\mu_C(x,q), \mu_M(e,q)\}$$
$$= \mu_C(x,q). \square$$

2. Bukti analog dengan 1. □
3. Diketahui $\mu_C(e,q) \geq \mu_M(x,q)$. Ambil $x \in C, y \in M, e \in C$ dan $q \in Q$

$$\mu_C \times \mu_M\big((e,x),q\big) = \min\{\mu_C(e,q), \mu_M(x,q)\}$$

$$= \mu_M(x, q). \square$$

4. Bukti analog dengan 3. □

Teorema 3.2.18. Misalkan $(R_1, +, .)$ dan $(R_2, +, .)$ keduanya adalah ring Smarandache di mana $C \subset R_1$ serta $M \subset R_2$ berturut-turut adalah field. Dimisalkan pula bahwa $\mu_M(e, q) \geq \mu_C(x, q)$ dan $\mu_M(0, q) \geq \mu_C(x, q)$.

Jika $A \times B$ adalah ring QFS dari $(R_1 \times R_2)$ maka A adalah ring QFS dari R_1.

Bukti:

Diketahui bahwa $(R_1, +, .)$ dan $(R_2, +, .)$ adalah ring Smarandache. Diketahui pula bahwa $A \times B$ merupakan ring QFS dari $(R_1 \times R_2)$. Akan dibuktikan bahwa A adalah ring QFS dari R_1 dengan menggunakan $\mu_M(e, q) \geq \mu_C(x, q)$ dan $\mu_M(0, q) \geq \mu_C(x, q)$.

Ambil $x \in C, y \in M, q \in Q$ serta $0, e$ adalah elemen identitas dari M.

$$\begin{aligned}
\mu_C(x - y, q) &= \mu_C \times \mu_M\big((x - y, 0), q\big) \\
&\geq \min\Big(\mu_C \times \mu_M\big((x, 0), q\big), \mu_C \times \mu_M\big((y, 0), q\big)\Big) \\
&= \min\big(\min\big(\mu_C(x, q), \mu_M(0, q)\big), \min\big(\mu_C(y, q), \mu_M(0, q)\big)\big) \\
&= \min\big(\mu_C(x, q), \mu_C(y, q)\big)
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
\mu_C(xy^{-1}, q) &= \mu_C \times \mu_M\big((x.y^{-1}, e), q\big) \\
&\geq \min\Big(\mu_C \times \mu_M\big((x, e), q\big), \mu_C \times \mu_M\big((y^{-1}, e), q\big)\Big) \\
&= \min\Big(\mu_C \times \mu_M\big((x, e), q\big), \mu_C \times \mu_M\big((y, e), q\big)\Big) \\
&= \min\big(\min\big(\mu_C(x, q), \mu_M(e, q)\big), \min\big(\mu_C(y, q), \mu_M(e, q)\big)\big) \\
&= \min\big(\mu_C(x, q), \mu_C(y, q)\big)
\end{aligned}$$

Terbukti bahwa A adalah ring QFS dari R_1. □

Teorema 3.2.19. Misalkan $(R_1, +, .)$ dan $(R_2, +, .)$ keduanya adalah ring Smarandache di mana $C \subset R_1$ serta $M \subset R_2$ berturut-turut adalah field. Dimisalkan pula bahwa $\mu_C(e, q) \geq \mu_M(x, q)$ dan $\mu_C(0, q) \geq \mu_M(x, q)$. Jika $A \times B$ adalah ring QFS dari $(R_1 \times R_2)$ maka B adalah ring QFS dari R_2.

Bukti: analog dengan Teorema 3.2.17. □

Teorema 3.2.20. Misalkan $R_1, \dots, R_n$ dengan n berhingga adalah ring Smarandache di mana $C_1, \dots, C_n \subset R_1, \dots, R_n$ (berturut-turut) berbentuk field. Jika $A_1, \dots, A_n$ adalah ring QFS dari $(R_1), \dots, (R_n)$ maka $A_1 \times \dots \times A_n$ adalah ring QFS dari $(R_1 \times \dots \times R_n)$.

Bukti:

Diketahui bahwa $R_1, \dots, R_n$ dengan n berhingga adalah ring Smarandache dan $A_1, \dots, A_n$ adalah ring QFS dari $(R_1), \dots, (R_n)$. Akan dibuktikan bahwa $A_1 \times \dots \times A_n$ adalah ring QFS dari $(R_1 \times \dots \times R_n)$

Ambil $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in C_i$ serta $Q = \{q\}$

a. $\left(\mu_{C_1} \times \dots \times \mu_{C_n}\right)\left((x_1, \dots, x_n) - (y_1, \dots, y_n), q\right)$

$= \left(\mu_{C_1} \times \dots \times \mu_{C_n}\right)\left((x_1 - y_1, \dots, x_n - y_n), q\right)$

$= \min\left\{\mu_{C_1}(x_1 - y_1, q), \dots, \mu_{C_n}(x_n - y_n, q)\right\}$

$\geq \min\left\{\min\left\{\mu_{C_1}(x_1, q), \mu_{C_1}(y_1, q)\right\}, \dots, \min\left\{\mu_{C_n}(x_n, q), \mu_{C_n}(y_n, q)\right\}\right\}$

$= \min\left\{\min\left\{\mu_{C_1}(x_1, q), \dots, \mu_{C_n}(x_n, q)\right\}, \min\left\{\mu_{C_1}(y_1, q), \dots, \mu_{C_n}(y_n, q)\right\}\right\}$

$= \min\left\{\left(\mu_{C_1} \times \dots \times \mu_{C_n}\right)\left((x_1, q), \dots, (x_n, q)\right), \left(\mu_{C_1} \times \dots \times \mu_{C_n}\right)\left((y_1, q), \dots, (y_n, q)\right)\right\}.$

b. $\left(\mu_{C_1} \times \dots \times \mu_{C_n}\right)\left((x_1, \dots, x_n).(y_1, \dots, y_n)^{-1}, q\right)$

$= \left(\mu_{C_1} \times \dots \times \mu_{C_n}\right)\left((x_1.y_1^{-1}, \dots, x_n.y_n^{-1}), q\right)$

$= \min\left\{\mu_{C_1}(x_1.y_1^{-1}, q), \dots, \mu_{C_n}(x_n.y_n^{-1}, q)\right\}$

$\geq \min\{\min\{\mu_{C_1}(x_1,q),\mu_{C_1}(y_1,q)\},\dots,\min\{\mu_{C_n}(x_n,q),\mu_{C_n}(y_n,q)\}\}$

$= \min\{\min\{\mu_{C_1}(x_1,q),\dots,\mu_{C_n}(x_n,q)\},\min\{\mu_{C_1}(y_1,q),\dots,\mu_{C_n}(y_n,q)\}\}$

$= \min\{(\mu_{C_1}\times\dots\times\mu_{C_n})((x_1,q),\dots,(x_n,q)),(\mu_{C_1}\times\dots\times\mu_{C_n})((y_1,q),\dots,(y_n,q))\}$.

Jadi $A_1\times\dots\times A_n$ adalah ring QFS dari $(R_1\times\dots\times R_n)$. □

Teorema 3.2.21. Misalkan $R_1,\dots,R_n$ dengan n berhingga adalah ring Smarandache di mana $C_1,\dots,C_n\subset R_1,\dots,R_n$ (berturut-turut) berbentuk field. Jika $A_1\times\dots\times A_n$ adalah ring QFS dari $(R_1),\dots,(R_n)$ maka berlaku,

a. $(\mu_{C_1}\times\dots\times\mu_{C_n})\left((0_{C_1},\dots,0_{C_n}),q\right)\geq(\mu_{C_1}\times\dots\times\mu_{C_n})((x_1,\dots,x_n),q)$

b. $(\mu_{C_1}\times\dots\times\mu_{C_n})\left((e_{C_1},\dots,e_{C_n}),q\right)\geq(\mu_{C_1}\times\dots\times\mu_{C_n})((x_1,\dots,x_n),q)$

Bukti:

Diketahui bahwa $R_1,R_2,\dots,R_n$ dengan n berhingga adalah ring Smarandache dan $A_1\times\dots\times A_n$ adalah ring QFS dari $(R_1),\dots,(R_n)$. Akan dibuktikan bahwa kedua sifat di atas terpenuhi,

i. Ambil $(x_1,\dots,x_n),(-x_1,\dots,-x_n)\in A_i$ untuk $i=1,\dots,n, q\in Q$

$(\mu_{C_1}\times\dots\times\mu_{C_n})\left((0_{C_1},\dots,0_{C_n}),q\right)$

$= (\mu_{C_1}\times\dots\times\mu_{C_n})\left(\left((x_1+(-x_1)),\dots,(x_n+(-x_n))\right),q\right)$

$= \min\{\mu_{C_1}(x_1+(-x_1),q),\dots,\mu_{C_n}(x_n+(-x_n),q)\}$

$\geq \min\{\min\{\mu_{C_1}(x_1,q),\mu_{C_1}(x_1,q)\},\dots,\min\{\mu_{C_n}(x_n,q),\mu_{C_n}(x_n,q)\}\}$

$= \min\{\{\mu_C(x_1,q)\},\dots,\{\mu_{C_n}(x_n,q)\}\}$

$= (\mu_{C_1}\times\dots\times\mu_{C_n})((x_1,\dots,x_n),q)$

ii. Ambil $(x_1,\dots,x_n),(-x_1,\dots,-x_n)\in A_i$ untuk $i=1,\dots,n, q\in Q$

$(\mu_{C_1}\times\dots\times\mu_{C_n})\left((e_{A_1},\dots,e_{A_n}),q\right)$

$= (\mu_{C_1} \times \ldots \times \mu_{C_n})\left(\left(x_1 . x_1^{-1} . \ldots . (x_n . x_n^{-1})\right), q\right)$

$= \min\{\mu_{C_1}(x_1 . x_1^{-1}, q), \ldots, \mu_{C_n}(x_n . x_n^{-1}, q)\}$

$\geq \min\{\min\{\mu_{C_1}(x_1, q), \mu_{C_1}(x_1, q)\}, \ldots, \min\{\mu_{C_n}(x_n, q), \mu_{C_n}(x_n, q)\}\}$

$= \min\{\{\mu_{C_1}(x_1, q)\}, \ldots, \{\mu_{C_n}(x_n, q)\}\}$

$= (\mu_{C_1} \times \ldots \times \mu_{C_n})((x_1, \ldots, x_n), q)$.

Terbukti kedua kondisi tersebut terpenuhi. □

Teorema 3.2.22. Misalkan $R_1, \ldots, R_n$ dengan n berhingga adalah ring Smarandache di mana $C_1, \ldots, C_n \subset R_1, \ldots, R_n$ (berturut-turut) merupakan field. Dimisalkan pula bahwa

$(\mu_{C_1} \times \ldots \times \mu_{C_n})\left((0_{C_1}, \ldots, 0_{C_n}), q\right) \geq (\mu_{C_1} \times \ldots \times \mu_{C_n})((x_1, \ldots, x_n), q)$ dan

$(\mu_{C_1} \times \ldots \times \mu_{C_n})\left((e_{C_1}, \ldots, e_{C_n}), q\right) \geq (\mu_{C_1} \times \ldots \times \mu_{C_n})((x_1, \ldots, x_n), q)$.

Jika $A_1 \times \ldots \times A_n$ adalah ring QFS dari $(R_1 \times \ldots \times R_n)$ maka A_i $(i = 1, \ldots, n)$ merupakan ring QFS dari $(R_1), \ldots, (R_n)$.

Bukti:

Diketahui bahwa $R_1, \ldots, R_n$ dengan n berhingga adalah ring Smarandache dan $A_1 \times \ldots \times A_n$ adalah ring QFS dari $(R_1 \times \ldots \times R_n)$. Akan dibuktikan bahwa $A_i (i = 1, \ldots, n)$ adalah ring QFS dari $(R_1), \ldots, (R_n)$ dengan menggunakan

$(\mu_{C_1} \times \ldots \times \mu_{C_n})\left((0_{C_1}, \ldots, 0_{C_n}), q\right) \geq (\mu_{C_1} \times \ldots \times \mu_{C_n})((x_1, \ldots, x_n), q)$ dan

$(\mu_{C_1} \times \ldots \times \mu_{C_n})\left((e_{C_1}, \ldots, e_{C_n}), q\right) \geq (\mu_{C_1} \times \ldots \times \mu_{C_n})((x_1, \ldots, x_n), q)$.

i. Ambil $(x_i), (y_i), (0_i) \in C_i (i = 1,2, \ldots, n)$ serta $Q = \{q\}$.

$\mu_{C_i}(x_i - y_i, q) = (\mu_{C_1} \times \ldots \times \mu_{C_n})((x_i - y_i, 0_i), q)$

$\geq \min\{(\mu_{C_1} \times \ldots \times \mu_{C_n})((x_i, 0_i), q), (\mu_{C_1} \times \ldots \times \mu_{C_n})((y_i, 0_i), q)\}$

$$= \min\{(\mu_{C_1} \times \ldots \times \mu_{C_n})(x_i, q), (\mu_{C_1} \times \ldots \times \mu_{C_n})(y_i, q)\}$$

$$= \min\left\{\min\left\{\{\mu_{C_1}(x_1, q), \ldots, \mu_{C_n}(x_n, q)\}, \{\mu_{C_1}(y_1, q), \ldots, \mu_{C_n}(y_n, q)\}\right\}\right\}$$

$$= \min(\mu_{C_i}(x_i, q), \mu_{C_i}(y_i, q)$$

ii. Ambil $(x_i), (y_i), (e_i) \in C_i (i = 1,2, \ldots n)$ serta $Q = \{q\}$.

$$\mu_{C_i}(x_i y_i^{-1}, q) = (\mu_{C_1} \times \ldots \times \mu_{C_n})\left((x_i y_i^{-1}, e_i), q\right)$$

$$\geq \min\{(\mu_{C_1} \times \ldots \times \mu_{C_n})((x_i, e_i), q), (\mu_{C_1} \times \ldots \times \mu_{C_n})((y_i, e_i), q)\}$$

$$= \min\left\{\begin{matrix}\{(\mu_{C_1} \times \ldots \times \mu_{C_n})(x_i, q), (\mu_{C_1} \times \ldots \times \mu_{C_n})(e_i, q)\}, \\ \{(\mu_{C_1} \times \ldots \times \mu_{C_n})(y_i, q), (\mu_{C_1} \times \ldots \times \mu_{C_n})(e_i, q)\}\end{matrix}\right\}$$

$$= \min\{(\mu_{C_1} \times \ldots \times \mu_{C_n})(x_i, q), (\mu_{C_1} \times \ldots \times \mu_{C_n})(y_i, q)\}$$

$$= \min\left\{\min\left\{\{\mu_{C_1}(x_1, q), \ldots, \mu_{C_n}(x_n, q)\}, \{\mu_{C_1}(y_1, q), \ldots, \mu_{C_n}(y_n, q)\}\right\}\right\}$$

$$= \min(\mu_{C_i}(x_i, q), \mu_{C_i}(y_i, q). \square$$

Contoh 3.2.22a. Misalkan $(\mathbb{R}, +, .)$ adalah ring. Ambil himpunan bagian sejati dari $\mathbb{R}$ yaitu, $(\mathbb{Z}_3, +, .)$ dengan operasi penjumlahan dan perkalian modulo 3 serta $(\mathbb{Z}_5, +, .)$ dengan operasi penjumlahan dan perkalian modulo 5. Akan ditunjukkan bahwa $(\mathbb{R}, +, .)$.

Bukti:

Sebagaimana Contoh 2.2.8 $(\mathbb{R}, +, .)$ adalah ring. Selanjutnya sebagaimana Contoh 2.1.8 $(\mathbb{Z}_5, +, .)$ adalah field. Sekarang akan dibuktikan bahwa $(\mathbb{Z}_3, +, .)$ adalah field.

Tabel 3.11 Operasi Penjumlahan Modulo 3 pada $\mathbb{Z}_3$

$+$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{0}$
$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$

Perhatikan Tabel 3.11 di atas diperoleh bahwa, $\mathbb{Z}_3$ tertutup terhadap operasi penjumlahan modulo 3, operasi penjumlahan modulo 3 memenuhi hukum asosiatif, terdapat elemen identitas terhadap operasi penjumlahan modulo 3 yaitu $\hat{0} \in \mathbb{Z}_3$, setiap elemen di $\mathbb{Z}_3$ memiliki invers terhadap operasi penjumlahan modulo 3 dan operasi penjumlahan modulo 3 memenuhi hukum komutatif.

Tabel 3.12 Operasi perkalian modulo 3 pada $\mathbb{Z}_3$

.	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$
$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$
$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{1}$

Perhatikan Tabel 3.12 di atas diperoleh bahwa, $\mathbb{Z}_3$ tertutup terhadap operasi perkalian modulo 3, operasi perkalian modulo 3 memenuhi hukum asosiatif, terdapat elemen identitas terhadap operasi perkalian modulo 3 yaitu $\hat{1} \in \mathbb{Z}_3$, setiap elemen di $\mathbb{Z}_3$ selain $\hat{0}$ memiliki invers terhadap operasi perkalian modulo 3 yaitu, $\hat{1}^{-1} = \hat{1}, \hat{2}^{-1} = \hat{2}$, operasi perkalian modulo 3 memenuhi hukum komutatif serta operasi penjumlahan dan perkalian modulo 3 memenuhi hukum distributif. Jadi $(\mathbb{Z}_3, +, .)$ merupakan field sehingga $(\mathbb{R}, +, .)$ adalah ring Smarandache.

Contoh 3.2.22b. Diberikan $(\mathbb{R}, +, .)$ adalah ring Smarandache dengan himpunan bagian sejati $(\mathbb{Z}_3, +, .)$ dan $(\mathbb{Z}_5, +, .)$ berturut-turut adalah field sebagaimana Contoh 3.2.22a. $Q \neq \emptyset$ yaitu, $Q = \{5\}$. Didefinisikan fungsi keanggotaan μ_A dan μ_B berturut-turut yaitu, $\mu_A: \mathbb{R} \times Q \to [0,1]$ dan $\mu_B: \mathbb{R} \times Q \to [0,1]$ sedemikian sehingga,

$$\mu_A(x, q) = \begin{cases} \dfrac{0.1}{q}, & (x, q) \text{ yang lainnya;} \\ \dfrac{1}{q}, & (x, q) \in \{(\hat{0}, 5)(\hat{1}, 5), (\hat{2}, 5)\}. \end{cases}$$

$$\mu_B(x,q) = \begin{cases} \dfrac{1}{q}, & (x,q) \text{ yang lainnya;} \\ \dfrac{0.9}{q}, & (x,q) \in \{(\hat{0},5),(\hat{1},5),(\hat{2},5),(\hat{3},5),(\hat{4},5)\}. \end{cases}$$

Akan ditunjukkan bahwa A dan B adalah ring QFS dari $\mathbb{R}$.

Bukti:

1. Akan ditunjukkan bahwa A memenuhi,

   a. $\mu_{\mathbb{Z}_3}(x-y,q) \geq \min\{\mu_{\mathbb{Z}_3}(x,q), \mu_{\mathbb{Z}_3}(y,q)\}$

   b. $\mu_{\mathbb{Z}_3}(xy^{-1},q) \geq \min\{\mu_{\mathbb{Z}_3}(x,q), \mu_{\mathbb{Z}_3}(y,q)\}$

   Dari Tabel 3.13 dan Tabel 3.14 diperoleh bahwa A memenuhi a dan b sehingga A merupakan ring QFS di $\mathbb{R}$.

Tabel 3.13 Hasil Operasi $\mu_{\mathbb{Z}_3}(x-y,1) \geq \min\{\mu_{\mathbb{Z}_3}(x,1), \mu_{\mathbb{Z}_3}(y,1)\}$

x	y	$\mu_{\mathbb{Z}_3}(x,1)$	$\mu_{\mathbb{Z}_3}(y,1)$	$\mu_{\mathbb{Z}_3}(x-y,1)$	$\min\{\mu_{\mathbb{Z}_3}(x,1), \mu_{\mathbb{Z}_3}(y,1)\}$
	$\hat{0}$		0.2	0.2	
$\hat{0}$	$\hat{1}$	0.2	0.2	0.2	
	$\hat{2}$		0.2	0.2	
	$\hat{0}$		0.2	0.2	
$\hat{1}$	$\hat{1}$	0.2	0.2	0.2	0.2
	$\hat{2}$		0.2	0.2	
	$\hat{0}$		0.2	0.2	
$\hat{2}$	$\hat{1}$	0.2	0.2	0.2	
	$\hat{2}$		0.2	0.2	

Tabel 3.14 Hasil Operasi $\mu_{\mathbb{Z}_3}(xy^{-1},1) \geq \min\{\mu_{\mathbb{Z}_3}(x,1), \mu_{\mathbb{Z}_3}(y,1)\}$

x	y	y^{-1}	$\mu_{\mathbb{Z}_3}(x,1)$	$\mu_{\mathbb{Z}_{3_3}}(y,1)$	$\mu_{\mathbb{Z}_{3_3}}(xy^{-1},1)$	$\min\{\mu_{\mathbb{Z}_3}(x,1), \mu_{\mathbb{Z}_3}(y,1)\}$
	$\hat{0}$	$\hat{0}$		0.2	0.2	
$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{1}$	0.2	0.2	0.2	0.2
	$\hat{2}$	$\hat{2}$		0.2	0.2	
	$\hat{0}$	$\hat{0}$		0.2	0.2	0.2
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{1}$	0.2	0.2	0.2	
	$\hat{2}$	$\hat{2}$		0.2	0.2	
	$\hat{0}$	$\hat{0}$		0.2	0.2	0.2
$\hat{2}$	$\hat{1}$	$\hat{1}$	0.2	0.2	0.2	
	$\hat{2}$	$\hat{2}$		0.2	0.2	

2. Akan ditunjukkan bahwa B memenuhi,

   a. $\mu_{\mathbb{Z}_5}(x-y,q) \geq \min\{\mu_{\mathbb{Z}_5}(x,q), \mu_{\mathbb{Z}_5}(y,q)\}$

   b. $\mu_{\mathbb{Z}_5}(xy^{-1},q) \geq \min\{\mu_{\mathbb{Z}_5}(x,q), \mu_{\mathbb{Z}_5}(y,q)\}$

   Dari Tabel 3.15 dan Tabel 3.16 diperoleh bahwa B memenuhi a dan b sehingga B merupakan ring QFS di $\mathbb{R}$.

Tabel 3.15 Hasil Operasi $\mu_{\mathbb{Z}_5}(x-y,1) \geq \min\{\mu_{\mathbb{Z}_5}(x,1), \mu_{\mathbb{Z}_5}(y,1)$

x	y	$\mu_{\mathbb{Z}_{5_5}}(x,1)$	$\mu_{\mathbb{Z}_5}(y,1)$	$\mu_{\mathbb{Z}_5}(x-y,1)$	$\min\{\mu_{\mathbb{Z}_5}(x,1), \mu_{\mathbb{Z}_5}(y,1)\}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	0.18	0.18	0.18	0.18
	$\hat{1}$		0.18	0.18	
	$\hat{2}$		0.18	0.18	
	$\hat{3}$		0.18	0.18	
	$\hat{4}$		0.18	0.18	
$\hat{1}$	$\hat{0}$	0.18	0.18	0.18	
	$\hat{1}$		0.18	0.18	
	$\hat{2}$		0.18	0.18	
	$\hat{3}$		0.18	0.18	
	$\hat{4}$		0.18	0.18	
$\hat{2}$	$\hat{0}$	0.18	0.18	0.18	
	$\hat{1}$		0.18	0.18	
	$\hat{2}$		0.18	0.18	
	$\hat{3}$		0.18	0.18	
	$\hat{4}$		0.18	0.18	
$\hat{3}$	$\hat{0}$	0.18	0.18	0.18	
	$\hat{1}$		0.18	0.18	
	$\hat{2}$		0.18	0.18	
	$\hat{3}$		0.18	0.18	
	$\hat{4}$		0.18	0.18	
$\hat{4}$	$\hat{0}$	0.18	0.18	0.18	
	$\hat{1}$		0.18	0.18	
	$\hat{2}$		0.18	0.18	
	$\hat{3}$		0.18	0.18	
	$\hat{4}$		0.18	0.18	

Tabel 3.16 Hasil Operasi $\mu_{\mathbb{Z}_5}(xy^{-1},1) \geq \min\{\mu_{\mathbb{Z}_5}(x,1),\mu_{\mathbb{Z}_5}(y,1)\}$

x	y	y^{-1}	$\mu_{\mathbb{Z}_5}(x,1)$	$\mu_{\mathbb{Z}_5}(y,1)$	$\mu_{\mathbb{Z}_5}(xy^{-1},1)$	$\min\{\mu_{\mathbb{Z}_5}(x,1),\mu_{\mathbb{Z}_5}(y,1)\}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	0.18	0.18	0.18	0.18
	$\hat{1}$	$\hat{1}$	0.18	0.18	0.18	0.18
	$\hat{2}$	$\hat{2}$	0.18	0.18	0.18	0.18
	$\hat{3}$	$\hat{3}$	0.18	0.18	0.18	0.18
	$\hat{4}$	$\hat{4}$	0.18	0.18	0.18	0.18
$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	0.18	0.18	0.18	0.18
	$\hat{1}$	$\hat{1}$	0.18	0.18	0.18	0.18
	$\hat{2}$	$\hat{2}$	0.18	0.18	0.18	0.18
	$\hat{3}$	$\hat{3}$	0.18	0.18	0.18	0.18
	$\hat{4}$	$\hat{4}$	0.18	0.18	0.18	0.18
$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	0.18	0.18	0.18	0.18
	$\hat{1}$	$\hat{1}$	0.18	0.18	0.18	0.18
	$\hat{2}$	$\hat{2}$	0.18	0.18	0.18	0.18
	$\hat{3}$	$\hat{3}$	0.18	0.18	0.18	0.18
	$\hat{4}$	$\hat{4}$	0.18	0.18	0.18	0.18
$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	0.18	0.18	0.18	0.18
	$\hat{1}$	$\hat{1}$	0.18	0.18	0.18	0.18
	$\hat{2}$	$\hat{2}$	0.18	0.18	0.18	0.18
	$\hat{3}$	$\hat{3}$	0.18	0.18	0.18	0.18
	$\hat{4}$	$\hat{4}$	0.18	0.18	0.18	0.18
$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	0.18	0.18	0.18	0.18
	$\hat{1}$	$\hat{1}$	0.18	0.18	0.18	0.18
	$\hat{2}$	$\hat{2}$	0.18	0.18	0.18	0.18
	$\hat{3}$	$\hat{3}$	0.18	0.18	0.18	0.18
	$\hat{4}$	$\hat{4}$	0.18	0.18	0.18	0.18

Contoh 3.2.22c. Diberikan $(\mathbb{R},+,.)$ ring Smarandache dengan himpunan bagian sejati $(\mathbb{Z}_3,+,.)$ dan $(\mathbb{Z}_5,+,.)$ berturut-turut berbentuk field. Diberikan A dan B berturut-turut merupakan ring QFS dari $\mathbb{R}$. Akan ditunjukkan Produk kartesian $A \times B$ dari $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ adalah ring QFS.

Bukti:

Akan ditunjukkan bahwa $A \times B$ memenuhi

a. $\left(\mu_{\mathbb{Z}_3} \times \mu_{\mathbb{Z}_5}\right)\left((x_1,y_1)-(x_2y_2),q\right) \geq \min\begin{Bmatrix}\mu_{\mathbb{Z}_3} \times \mu_{\mathbb{Z}_5}\left((x_1,q),(y_1,q)\right), \\ \mu_{\mathbb{Z}_3} \times \mu_{\mathbb{Z}_5}\left((x_2,q),(y_2,q)\right)\end{Bmatrix}$

b. $\left(\mu_{\mathbb{Z}_3} \times \mu_{\mathbb{Z}_5}\right)\left((x_1,y_1).(x_2y_2)^{-1},q\right) \geq \min\begin{Bmatrix}\mu_{\mathbb{Z}_3} \times \mu_{\mathbb{Z}_5}\left((x_1,q),(y_1,q)\right), \\ \mu_{\mathbb{Z}_3} \times \mu_{\mathbb{Z}_5}\left((x_2,q),(y_2,q)\right)\end{Bmatrix}.$

Melalui Lampiran 1 dan 2 diperoleh bahwa $A \times B$ memenuhi a dan b sehingga $A \times B$ merupakan ring QFS dari $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Contoh 3.2.23a. Diberikan $(\mathbb{Z}_6, +, .)$ dan $(\mathbb{Z}_{12}, +, .)$ berturut-turut adalah ring Smarandache terhadap operasi penjumlahan dan perkalian modulo 6 dan 12 dimana $C \subset \mathbb{Z}_6 = \{\hat{0}, \hat{2}, \hat{4}\}$ dan $M \subset \mathbb{Z}_{12} = \{\hat{0}, \hat{4}, \hat{8}\}$ berturut-turut adalah field sebagaimana Contoh 2.2.6 dan 2.2.11. $Q \neq \emptyset$ yaitu, $Q = \{1,2\}$. Didefinisikan fungsi keanggotaan μ_A dan μ_B berturut-turut yaitu, $\mu_A: \mathbb{Z}_6 \times Q \to [0,1]$ dan $\mu_B: \mathbb{Z}_{12} \times Q \to [0,1]$ $Q = \{1\}$ sedemikian sehingga,

$$\mu_A(x,q) = \begin{cases} \frac{0.5}{q}, (x,q) \in \{(\hat{1},1)(\hat{1},2)(\hat{3},2)(\hat{5},2)\}; \\ \frac{0.8}{q}, (x,q) \in \{(\hat{2},1)(\hat{4},1)(\hat{2},2)(\hat{4},2)\}; \\ \frac{1}{q}, (x,q) \in \{(\hat{0},1)(\hat{3},1)(\hat{5},1)(\hat{0},2)\}. \end{cases}$$

$$\mu_B(x,q) = \begin{cases} \frac{0.5}{q}, (x,q) \in \{(\hat{2},1)(\hat{6},1)(\widehat{10},1)(\hat{1},2)(\hat{3},2)(\hat{5},2)(\hat{7},2)(\hat{9},2)(\widehat{11},2)\}; \\ \frac{0.1}{q}, (x,q) \in \{(\hat{1},1)(\hat{3},1)(\hat{5},1)(\hat{7},1)(\hat{9},1)(\widehat{11},1)(\hat{2},2)(\hat{6},2)(\widehat{10},2)\}; \\ \frac{1}{q}, (x,q) \in \{(\hat{0},1)(\hat{4},1)(\hat{8},1)(\hat{0},2)(\hat{4},2)(\hat{8},2)\}. \end{cases}$$

Akan ditunjukkan bahwa A dan B berturut-turut merupakan ring QFS dari $\mathbb{Z}_6$ dan $\mathbb{Z}_{12}$. Sebagaimana Contoh 3.1.2 diperoleh bahwa A adalah ring QFS. Akan ditunjukkan bahwa B adalah ring QFS dari Z_{12}

Bukti:

Akan ditunjukkan bahwa B memenuhi

a. $\mu_M(x-y,q) \geq \min\{\mu_M(x,q), \mu_M(y,q)\}$

b. $\mu_M(xy^{-1},q) \geq \min\{\mu_M(x,q), \mu_M(y,q)\}$.

Dari Tabel 3.17 hingga 3.20 diperoleh bahwa B memenuhi a dan b sehingga B merupakan ring QFS di $\mathbb{Z}_{12}$.

Tabel 3.17 Hasil Operasi $\mu_M(x-y,1) \geq \min\{\mu_M(x,1), \mu_M(y,1)\}$

x	y	$\mu_M(x,1)$	$\mu_M(y,1)$	$\mu_M(x-y,1)$	$\min\{\mu_M(x,1), \mu_M(y,1)\}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	1	1	1	1
	$\hat{4}$		1	1	
	$\hat{8}$		1	1	
$\hat{4}$	$\hat{0}$	1	1	1	
	$\hat{4}$		1	1	
	$\hat{8}$		1	1	
$\hat{8}$	$\hat{0}$	1	1	1	
	$\hat{4}$		1	1	
	$\hat{8}$		1	1	

Tabel 3.18 Hasil Operasi $\mu_M(xy^{-1},1) \geq \min\{\mu_M(x,1), \mu_M(y,1)\}$

x	y	y^{-1}	$\mu_M(x,1)$	$\mu_M(y,1)$	$\mu_M(xy^{-1},1)$	$\min\{\mu_M(x,1), \mu_M(y,1)\}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	1	1	1	1
	$\hat{4}$	$\hat{4}$		1	1	
	$\hat{8}$	$\hat{8}$		1	1	
$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	1	1	1	1
	$\hat{4}$	$\hat{4}$		1	1	
	$\hat{8}$	$\hat{8}$		1	1	
$\hat{8}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	1	1	1	1
	$\hat{4}$	$\hat{4}$		1	1	
	$\hat{8}$	$\hat{8}$		1	1	

Tabel 3.19 Hasil Operasi $\mu_M(x-y,2) \geq \min\{\mu_M(x,2), \mu_M(y,2)\}$

x	y	$\mu_M(x,2)$	$\mu_M(y,2)$	$\mu_M(x-y,2)$	$\min\{\mu_M(x,2), \mu_M(y,2)\}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	0.5	0.5	0.5	0.5
	$\hat{4}$		0.5	0.5	
	$\hat{8}$		0.5	0.5	
$\hat{4}$	$\hat{0}$	0.5	0.5	0.5	
	$\hat{4}$		0.5	0.5	
	$\hat{8}$		0.5	0.5	
$\hat{8}$	$\hat{0}$	0.5	0.5	0.5	
	$\hat{4}$		0.5	0.5	
	$\hat{8}$		0.5	0.5	

Tabel 3.20 Hasil Operasi $\mu_M(xy^{-1},2) \geq \min\{\mu_M(x,2),\mu_M(y,2)\}$

x	y	y^{-1}	$\mu_M(x,2)$	$\mu_M(y,2)$	$\mu_M(xy^{-1},2)$	$\min\{\mu_M(x,2),\mu_M(y,2)\}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	0.5	0.5	0.5	0.5
	$\hat{4}$	$\hat{4}$		0.5	0.5	
	$\hat{8}$	$\hat{8}$		0.5	0.5	
$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	0.5	0.5	0.5	0.5
	$\hat{4}$	$\hat{4}$		0.5	0.5	
	$\hat{8}$	$\hat{8}$		0.5	0.5	
$\hat{8}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	0.5	0.5	0.5	0.5
	$\hat{4}$	$\hat{4}$		0.5	0.5	
	$\hat{8}$	$\hat{8}$		0.5	0.5	

Contoh 3.2.23b. Diberikan $(\mathbb{Z}_6,+,.)$ dan $(\mathbb{Z}_{12},+,.)$ keduanya adalah ring Smarandache dimana $C \subset \mathbb{Z}_6$ yaitu, $C = \{\hat{0},\hat{2},\hat{4}\}$ dan $M \subset \mathbb{Z}_{12}$ yaitu, $M = \{\hat{0},\hat{4},\hat{8}\}$ berturut-turut adalah field sebagaimana Contoh 2.2.6 dan 2.2.11. Diberikan A dan B berturut-turut adalah ring QFS. Akan ditunjukkan Produk kartesian $A \times B$ dari $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{12}$ adalah ring QFS.

Bukti:

Akan ditunjukkan $A \times B$ dari $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{12}$ memenuhi,

a. $(\mu_C \times \mu_M)\big((x_1,y_1) - (x_2y_2),q\big) \geq \min\left\{\begin{matrix}(\mu_C \times \mu_M)\big((x_1,q),(y_1,q)\big), \\ (\mu_C \times \mu_M)\big((x_2,q),(y_2,q)\big)\end{matrix}\right\}$

b. $(\mu_C \times \mu_M)\big((x_1,y_1).(x_2y_2)^{-1},q\big) \geq \min\left\{\begin{matrix}(\mu_C \times \mu_M)\big((x_1,q),(y_1,q)\big), \\ (\mu_C \times \mu_M)\big((x_2,q),(y_2,q)\big)\end{matrix}\right\}.$

Dari Lampiran 3 hingga 6 diperoleh bahwa $A \times B$ memenuhi a dan b sehingga $A \times B$ merupakan ring QFS dari $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{12}$.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan dapat diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Beberapa struktur baru ring $Q\text{-}fuzzy$ Smarandache (ring QFS) yang diperoleh dalam penelitian ini di ataranya, ring QFS, subring QFS, ideal QFS, koset QFS, koset Smarandache dari ideal QFS dan produk kartesian ring QFS.
2. Untuk sifat-sifat yang berkaitan dengan ring QFS diperoleh, irisan dari dua ring QFS adalah ring QFS, komplemen dari ring QFS juga merupakan ring QFS, irisan dari dua subring QFS merupakan subring QFS, komplemen dari subring QFS juga merupakan ring QFS, irisan dari dua ideal QFS merupakan subring QFS, komplemen dari ideal QFS juga merupakan ideal QFS, jika A dan B berturut-turut adalah ring QFS dari R maka produk kartesian $A \times B$ juga merupakan ring QFS dari $R \times R$, jika produk kartesian $A \times B$ adalah ring QFS dari $R \times R$ maka A dan B berturut-turut adalah ring QFS dari R, jika $A_1, \ldots, A_n$ berturut-turut adalah ring QFS dari R maka produk kartesian $A_1 \times \ldots \times A_n$ juga merupakan ring QFS dari $R \times R$, jika produk kartesian $A_1 \times \ldots \times A_n$ adalah ring QFS dari $R \times R$ maka $A_1, \ldots, A_n$ berturut-turut adalah ring QFS dari R, jika A dan B berturut-turut adalah ring QFS dari R_1 dan R_2 maka produk kartesian $A \times B$ juga merupakan ring QFS dari $R_1 \times R_2$, jika produk kartesian $A \times B$ adalah ring QFS dari $R_1 \times R_2$ maka A dan B berturut-turut adalah ring QFS dari R_1 dan R_2, jika $A_1, \ldots, A_n$ berturut-turut adalah ring QFS dari $(R_1), \ldots, (R_n)$ maka produk kartesian $A_1 \times \ldots \times A_n$ juga merupakan ring QFS dari $(R_1 \times \ldots \times R_n)$, jika produk kartesian

$A_1 \times \ldots \times A_n$ adalah ring QFS dari $(R_1 \times \ldots \times R_n)$ maka $A_1, \ldots, A_n$ berturut-turut adalah ring QFS dari $(R_1), \ldots, (R_n)$.

4.2 Saran

Penelitian ini membahas struktur baru dari ring QFS beserta sifat-sifatnya diantaranya, ring QFS, subring QFS, ideal QFS, koset QFS, ring kuosien QFS, produk kartesian ring QFS pada satu ring Smarandache dan produk kartesian ring QFS pada beda ring Smarandache. Bagi penelitian selanjutnya diharapkan dapat menemukan struktur homomorfisma, isomorfisma dll beserta sifat-sifatnya.

DAFTAR PUSTAKA

Aktas, H dan Cagman, N., "Generalized Product of Fuzzy Subgroups and t-level Subgroups". *Mathematical Comunications,* vol. 11, hal. 121-128, 2006.

Doss, A.R dan Suganya, S., "Smarandache Q-Fuzzy Semigroups". *Advances in Fuzzy Mathematics*, vol. 11 (1). hal. 89-97, 2016.

Hidayat, Noor. 2017. *Cara Mudah Memahami Struktur Aljabar*. Malang: Penerbit Universitas Brawijaya (UB Press).

Kandasamy, W.B. 2002. *Smarandache Rings*. New York: American Research press.

Kandasamy, W.B. 2003. *Smarandache Fuzzy Algebra*. New York: American Research press.

Malik, D.S dan Moderson, J.N., "Fuzzy Relation on Rings and Groups". *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 43. hal: 117-123, 1991.

Padila, Raul., "Smarandache Algebraic Structure". *Bulletin of Pure and Applied Sciences,* vol. 17, hal:119-121, 1998.

Priya, T., Ramachandran, T., dan Nagalakshmi, K.T., "On Q-Fuzzy Normal Subgroups". *International Journal of Computer & Organization Trends*, vol. 3 (11). hal: 574-578, 2013.

Raisinghania, M.D dan Aggarwal, R.S. 1980. *Modern Algebra*. New Delhi: S. Chand & Company LTD.

Ray, K.A., "On Product of Fuzzy Subgroup". *Fuzzy Sets and Systems 105,* hal. 181-183, 1999.

Rosenfeld, A., "Fuzzy Groups". *Journal of Mathematical Analysis and Aplications*, vol 35, hal. 512-517, 1971.

Solairaju, A dan Nagarajan, R. 2009. A New Structure and Construction of Q-Fuzzy Groups. *Advances in Fuzzy Mathematics*. Vol. 4 (1). hal: 23-29.

Zadeh, A.L., "Fuzzy Sets". *Information and Control*, vol 8, hal. 338-353, 1965.

LAMPIRAN

Lampiran 1 Hasil Operasi $\mu_{Z_3} \times \mu_{Z_5}(x_1 - x_2, y_1 - y_2, 5) \geq \min\{\mu_{Z_3} \times \mu_{Z_5}((x_1, 5), (y_1, 5)), \mu_{Z_3} \times \mu_{Z_5}((x_2, 5), (y_2, 5))\}$

(x_1, y_1)	(x_2, y_2)	$(x_1 - x_2, y_1 - y_2)$	$\mu_{Z_3} \times \mu_{Z_5}(x_1 - x_2, y_1 - y_2, 5)$	$\min\{\mu_{Z_3} \times \mu_{Z_5}((x_1, 5), (y_1, 5)), \mu_{Z_3} \times \mu_{Z_5}((x_2, 5), (y_2, 5))\}$
$(\widehat{0_3}, \hat{0}_5)$	$(\widehat{0_3}, \hat{0}_5)$	$(\widehat{0_3}, \hat{0}_5)$	0.18	0.18
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$(\widehat{2_3}, \hat{4}_5)$	$(\widehat{1_3}, \hat{1}_5)$	0.18	0.18
$(\widehat{0_3}, \hat{1}_5)$	$(\widehat{0_3}, \hat{0}_5)$	$(\widehat{0_3}, \hat{1}_5)$	0.18	0.18
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$(\widehat{2_3}, \hat{4}_5)$	$(\widehat{1_3}, \hat{2}_5)$	0.18	0.18
$(\widehat{0_3}, \hat{2}_5)$	$(\widehat{0_3}, \hat{0}_5)$	$(\widehat{0_3}, \hat{2}_5)$	0.18	0.18
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$(\widehat{2_3}, \hat{4}_5)$	$(\widehat{1_3}, \hat{3}_5)$	0.18	0.18
$(\widehat{0_3}, \hat{3}_5)$	$(\widehat{0_3}, \hat{0}_5)$	$(\widehat{0_3}, \hat{3}_5)$	0.18	0.18
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$(\widehat{2_3}, \hat{4}_5)$	$(\widehat{1_3}, \hat{4}_5)$	0.18	0.18
$(\widehat{0_3}, \hat{4}_5)$	$(\widehat{0_3}, \hat{0}_5)$	$(\widehat{0_3}, \hat{4}_5)$	0.18	0.18
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$(\widehat{2_3}, \hat{4}_5)$	$(\widehat{2_3}, \hat{0}_5)$	0.18	0.18
$(\widehat{1_3}, \hat{0}_5)$	$(\widehat{0_3}, \hat{0}_5)$	$(\widehat{1_3}, \hat{0}_5)$	0.18	0.18
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$(\widehat{2_3}, \hat{4}_5)$	$(\widehat{2_3}, \hat{1}_5)$	0.18	0.18
$(\widehat{1_3}, \hat{1}_5)$	$(\widehat{0_3}, \hat{0}_5)$	$(\widehat{1_3}, \hat{1}_5)$	0.18	0.18
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$(\widehat{2_3}, \hat{4}_5)$	$(\widehat{2_3}, \hat{2}_5)$	0.18	0.18
$(\widehat{1_3}, \hat{2}_5)$	$(\widehat{0_3}, \hat{0}_5)$	$(\widehat{1_3}, \hat{2}_5)$	0.18	0.18
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$(\widehat{2_3}, \hat{4}_5)$	$(\widehat{2_3}, \hat{3}_5)$	0.18	0.18
$(\widehat{1_3}, \hat{3}_5)$	$(\widehat{0_3}, \hat{0}_5)$	$(\widehat{1_3}, \hat{3}_5)$	0.18	0.18
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$(\widehat{2_3}, \hat{4}_5)$	$(\widehat{2_3}, \hat{4}_5)$	0.18	0.18
$(\widehat{1_3}, \hat{4}_5)$	$(\widehat{0_3}, \hat{0}_5)$	$(\widehat{1_3}, \hat{4}_5)$	0.18	0.18
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$(\widehat{2_3}, \hat{4}_5)$	$(\widehat{2_3}, \hat{0}_5)$	0.18	0.18
$(\widehat{2_3}, \hat{0}_5)$	$(\widehat{0_3}, \hat{0}_5)$	$(\widehat{2_3}, \hat{0}_5)$	0.18	0.18
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$(\widehat{2_3}, \hat{4}_5)$	$(\widehat{0_3}, \hat{1}_5)$	0.18	0.18
$(\widehat{2_3}, \hat{1}_5)$	$(\widehat{0_3}, \hat{0}_5)$	$(\widehat{2_3}, \hat{1}_5)$	0.18	0.18
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$(\widehat{2_3}, \hat{4}_5)$	$(\widehat{0_3}, \hat{2}_5)$	0.18	0.18

Lanjutan Lampiran 1

(x_1, y_1)	(x_2, y_2)	$(x_1 - x_2, y_1 - y_2)$	$\mu_{Z_3} \times \mu_{Z_5}(x_1 - x_2, y_1 - y_2, 1)$	$\min\{\mu_{Z_3} \times \mu_{Z_5}((x_1, 1), (y_1, 1)), \mu_{Z_3} \times \mu_{Z_5}((x_2, 1), (y_2, 1))\}$
$(\widehat{2_3}, \hat{2}_5)$	$(\widehat{0_3}, \hat{0}_5)$	$(\widehat{2_3}, \hat{2}_5)$	0.18	0.18
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$(\widehat{2_3}, \hat{4}_5)$	$(\widehat{0_3}, \hat{3}_5)$	0.18	0.18
$(\widehat{2_3}, \hat{3}_5)$	$(\widehat{0_3}, \hat{0}_5)$	$(\widehat{2_3}, \hat{3}_5)$	0.18	0.18
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$(\widehat{2_3}, \hat{4}_5)$	$(\widehat{0_3}, \hat{4}_5)$	0.18	0.18
$(\widehat{2_3}, \hat{4}_5)$	$(\widehat{0_3}, \hat{0}_5)$	$(\widehat{2_3}, \hat{4}_5)$	0.18	0.18
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$(\widehat{2_3}, \hat{4}_5)$	$(\widehat{0_3}, \hat{0}_5)$	0.18	0.18

Lampiran 2 Hasil Operasi $\mu_{Z_3} \times \mu_{Z_5}(x_1.x_2^{-1}, y_1.y_2^{-1}, 1) \geq \min\{\mu_{Z_3} \times \mu_{Z_5}((x_1,1),(y_1,1)), \mu_{Z_3} \times \mu_{Z_5}((x_2,1),(y_2,1))\}$

(x_1, y_1)	$(x_2, y_2)^{-1}$	$(x_1.x_2^{-1}, y_1.y_2^{-1})$	$\mu_{Z_3} \times \mu_{Z_5}(x_1.x_2^{-1}, y_1.y_2^{-1}, 1)$	$\min\{\mu_{Z_3} \times \mu_{Z_5}((x_1,1),(y_1,1)), \mu_{Z_3} \times \mu_{Z_5}((x_2,1),(y_2,1))\}$
$(\widehat{0_3},\hat{0}_5)$	$(\widehat{0_3},\hat{0}_5)$	$(\widehat{0_3},\hat{0}_5)$	0.18	0.18
	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
	$(\widehat{2_3},\hat{4}_5)$		0.18	0.18
$(\widehat{0_3},\hat{1}_5)$	$(\widehat{0_3},\hat{0}_5)$	$(\widehat{0_3},\hat{0}_5)$	0.18	0.18
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$(\widehat{2_3},\hat{4}_5)$	$(\widehat{0_3},\hat{4}_5)$	0.18	0.18
$(\widehat{0_3},\hat{2}_5)$	$(\widehat{0_3},\hat{0}_5)$	$(\widehat{0_3},\hat{0}_5)$	0.18	0.18
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$(\widehat{2_3},\hat{4}_5)$	$(\widehat{0_3},\hat{3}_5)$	0.18	0.18
$(\widehat{0_3},\hat{3}_5)$	$(\widehat{0_3},\hat{0}_5)$	$(\widehat{0_3},\hat{0}_5)$	0.18	0.18
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$(\widehat{2_3},\hat{4}_5)$	$(\widehat{0_3},\hat{2}_5)$	0.18	0.18
$(\widehat{0_3},\hat{4}_5)$	$(\widehat{0_3},\hat{0}_5)$	$(\widehat{0_3},\hat{0}_5)$	0.18	0.18
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$(\widehat{2_3},\hat{4}_5)$	$(\hat{0},\hat{1}_5)$	0.18	0.18
$(\widehat{1_3},\hat{0}_5)$	$(\widehat{0_3},\hat{0}_5)$	$(\widehat{0_3},\hat{0}_5)$	0.18	0.18
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$(\widehat{2_3},\hat{4}_5)$	$(\widehat{2_3},\hat{0}_5)$	0.18	0.18
$(\widehat{1_3},\hat{1}_5)$	$(\widehat{0_3},\hat{0}_5)$	$(\widehat{0_3},\hat{0}_5)$	0.18	0.18
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$(\widehat{2_3},\hat{4}_5)$	$(\widehat{2_3},\hat{4}_5)$	0.18	0.18
$(\widehat{1_3},\hat{2}_5)$	$(\widehat{0_3},\hat{0}_5)$	$(\widehat{0_3},\hat{0}_5)$	0.18	0.18
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$(\widehat{2_3},\hat{4}_5)$	$(\widehat{2_3},\hat{3}_5)$	0.18	0.18
$(\widehat{1_3},\hat{3}_5)$	$(\widehat{0_3},\hat{0}_5)$	$(\widehat{0_3},\hat{0}_5)$	0.18	0.18
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$(\widehat{2_3},\hat{4}_5)$	$(\widehat{2_3},\hat{2}_5)$	0.18	0.18
$(\widehat{1_3},\hat{4}_5)$	$(\widehat{0_3},\hat{0}_5)$	$(\widehat{0_3},\hat{0}_5)$	0.18	0.18
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$(\widehat{2_3},\hat{4}_5)$	$(\widehat{2_3},\hat{1}_5)$	0.18	0.18
$(\widehat{2_3},\hat{0}_5)$	$(\widehat{0_3},\hat{0}_5)$	$(\widehat{0_3},\hat{0}_5)$	0.18	0.18
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$(\widehat{2_3},\hat{4}_5)$	$(\widehat{1_3},\hat{0}_5)$	0.18	0.18
$(\widehat{2_3},\hat{1}_5)$	$(\widehat{0_3},\hat{0}_5)$	$(\widehat{0_3},\hat{0}_5)$	0.18	0.18
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$(\widehat{2_3},\hat{4}_5)$	$([\hat{1}]_3,[\hat{4}]_5)$	0.18	0.18
$(\widehat{2_3},\hat{2}_5)$	$(\widehat{0_3},\hat{0}_5)$	$(\widehat{0_3},\hat{0}_5)$	0.18	0.18
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$(\widehat{2_3},\hat{4}_5)$	$([\hat{1}]_3,[\hat{3}]_5)$	0.18	0.18

Lanjutan Lampiran 2

(x_1, y_1)	$(x_2, y_2)^{-1}$	$(x_1.x_2^{-1}, y_1.y_2^{-1})$	$\mu_{Z_3} \times \mu_{Z_5}(x_1.x_2^{-1}, y_1.y_2^{-1}, 1)$	$\min\{\mu_{Z_3} \times \mu_{Z_5}((x_1, 1), (y_1, 1)), \mu_{Z_3} \times \mu_{Z_5}((x_2, 1), (y_2, 1))\}$
$(\widehat{2_3}, \hat{3}_5)$	$(\widehat{0_3}, \hat{0}_5)$	$(\widehat{0_3}, \hat{0}_5)$	0.18	0.18
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$(\widehat{2_3}, \hat{4}_5)$	$(\widehat{1_3}, \hat{2}_5)$	0.18	0.18
$(\widehat{2_3}, \hat{4}_5)$	$(\widehat{0_3}, \hat{0}_5)$	$(\widehat{0_3}, \hat{0}_5)$	0.18	0.18
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$(\widehat{2_3}, \hat{4}_5)$	$(\widehat{1_3}, \hat{1}_5)$	0.18	0.18

Lampiran 3 Hasil Operasi $(\mu_C \times \mu_M)\big((x_1, y_1) - (x_2 y_2), 1\big) \geq \min\{\mu_C \times \mu_M\big((x_1, 1), (y_1, 1)\big), \mu_C \times \mu_M\big((x_2, 1), (y_2, 1)\big)\}$

(x_1, y_1)	(x_2, y_2)	$(x_1 - x_2, y_1 - y_2)$	$\mu_C \times \mu_M(x_1 - x_2, y_1 - y_2, 1)$	$\min\{\mu_C \times \mu_M\big((x_1, 1), (y_1, 1)\big), \mu_C \times \mu_M\big((x_2, 1), (y_2, 1)\big)\}$
$(\hat{\hat{0}}_6, \hat{0}_{12})$	$(\hat{\hat{0}}_6, \hat{0}_{12})$	$(\widehat{\hat{0}_6}, \hat{0}_{12})$	1	1
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$(\hat{\hat{4}}_6, \hat{8}_{12})$	$(\hat{\hat{4}}_6, \hat{4}_{12})$	0.8	0.8
$(\hat{\hat{0}}_6, \hat{4}_{12})$	$(\hat{\hat{0}}_6, \hat{0}_{12})$	$(\hat{\hat{0}}_6, \hat{4}_{12})$	1	1
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$(\hat{\hat{4}}_6, \hat{8}_{12})$	$(\hat{\hat{2}}_6, \hat{8}_{12})$	0.8	0.8
$(\hat{\hat{0}}_6, \hat{8}_{12})$	$(\hat{\hat{0}}_6, \hat{0}_{12})$	$(\hat{\hat{0}}_6, \hat{8}_{12})$	1	1
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$(\hat{\hat{4}}_6, \hat{8}_{12})$	$(\hat{\hat{2}}_6, \hat{0}_{12})$	0.8	0.8
$(\hat{\hat{2}}_6, \hat{0}_{12})$	$(\hat{\hat{0}}_6, \hat{0}_{12})$	$(\hat{\hat{2}}_6, \hat{0}_{12})$	0.8	0.8
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$(\hat{\hat{4}}_6, \hat{8}_{12})$	$(\hat{\hat{4}}_6, \hat{4}_{12})$	0.8	0.8
$(\hat{\hat{2}}_6, \hat{4}_{12})$	$(\hat{\hat{0}}_6, \hat{0}_{12})$	$(\hat{\hat{2}}_6, \hat{4}_{12})$	0.8	0.8
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$(\hat{\hat{4}}_6, \hat{8}_{12})$	$(\hat{\hat{4}}_6, \hat{8}_{12})$	0.8	0.8
$(\hat{\hat{2}}_6, \hat{8}_{12})$	$(\hat{\hat{0}}_6, \hat{0}_{12})$	$(\hat{\hat{2}}_6, \hat{8}_{12})$	0.8	0.8
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$(\hat{\hat{4}}_6, \hat{8}_{12})$	$(\hat{\hat{4}}_6, \hat{0}_{12})$	0.8	0.8
$(\hat{\hat{4}}_6, \hat{0}_{12})$	$(\hat{\hat{0}}_6, \hat{0}_{12})$	$(\hat{\hat{4}}_6, \hat{0}_{12})$	0.8	0.8
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$(\hat{\hat{4}}_6, \hat{8}_{12})$	$(\hat{\hat{0}}_6, \hat{4}_{12})$	1	0.8
$(\hat{\hat{4}}_6, \hat{4}_{12})$	$(\hat{\hat{0}}_6, \hat{0}_{12})$	$(\hat{\hat{4}}_6, \hat{4}_{12})$	0.8	0.8
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$(\hat{\hat{4}}_6, \hat{8}_{12})$	$(\hat{\hat{0}}_6, \hat{8}_{12})$	1	0.8
$(\hat{\hat{4}}_6, \hat{8}_{12})$	$(\hat{\hat{0}}_6, \hat{0}_{12})$	$(\hat{\hat{4}}_6, \hat{8}_{12})$	0.8	0.8
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$(\hat{\hat{4}}_6, \hat{8}_{12})$	$(\hat{\hat{0}}_6, \hat{0}_{12})$	1	0.8

Lampiran 4 Hasil Operasi $(\mu_C \times \mu_M)\big((x_1, y_1).(x_2y_2)^{-1}, 1\big) \geq \min\big\{(\mu_C \times \mu_M\big((x_1, 1), (y_1, 1)\big), \mu_C \times \mu_M\big((x_2, 1), (y_2, 1)\big)\big\}$

(x_1, y_1)	$(x_2, y_2)^{-1}$	$(x_1.x_2^{-1}, y_1.y_2^{-1})$	$\mu_C \times \mu_M(x_1.x_2^{-1}, y_1.y_2^{-1}, 1)$	$\min\{\mu_C \times \mu_M\big((x_1, 1), (y_1, 1)\big), \mu_C \times \mu_M\big((x_2, 1), (y_2, 1)\big)\}$
$\left(\hat{\hat{0}}_6, \hat{0}_{12}\right)$	$\left(\hat{\hat{0}}_6, \hat{0}_{12}\right)$	$\left(\hat{\hat{0}}_6, \hat{0}_{12}\right)$	1	1
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$\left(\hat{\hat{4}}_6, \hat{8}_{12}\right)$	$\left(\hat{\hat{0}}_6, \hat{0}_{12}\right)$		0.8
$\left(\hat{\hat{0}}_6, \hat{4}_{12}\right)$	$\left(\hat{\hat{0}}_6, \hat{0}_{12}\right)$	$\left(\hat{\hat{0}}_6, \hat{0}_{12}\right)$	1	1
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$\left(\hat{\hat{4}}_6, \hat{8}_{12}\right)$	$\left(\hat{\hat{0}}_6, \hat{8}_{12}\right)$		0.8
$\left(\hat{\hat{0}}_6, \hat{8}_{12}\right)$	$\left(\hat{\hat{0}}_6, \hat{0}_{12}\right)$	$\left(\hat{\hat{0}}_6, \hat{0}_{12}\right)$	1	1
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$\left(\hat{\hat{4}}_6, \hat{8}_{12}\right)$	$\left(\hat{\hat{0}}_6, \hat{4}_{12}\right)$		0.8
$\left(\hat{\hat{2}}_6, \hat{0}_{12}\right)$	$\left(\hat{\hat{0}}_6, \hat{0}_{12}\right)$	$\left(\hat{\hat{0}}_6, \hat{0}_{12}\right)$	1	0.8
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$\left(\hat{\hat{4}}_6, \hat{8}_{12}\right)$	$\left(\hat{\hat{2}}_6, \hat{0}_{12}\right)$	0.8	0.8
$\left(\hat{\hat{2}}_6, \hat{4}_{12}\right)$	$\left(\hat{\hat{0}}_6, \hat{0}_{12}\right)$	$\left(\hat{\hat{0}}_6, \hat{0}_{12}\right)$	1	0.8
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$\left(\hat{\hat{4}}_6, \hat{8}_{12}\right)$	$\left(\hat{\hat{2}}_6, \hat{8}_{12}\right)$	0.8	0.8
$\left(\hat{\hat{2}}_6, \hat{8}_{12}\right)$	$\left(\hat{\hat{0}}_6, \hat{0}_{12}\right)$	$\left(\hat{\hat{0}}_6, \hat{0}_{12}\right)$	1	0.8
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$\left(\hat{\hat{4}}_6, \hat{8}_{12}\right)$	$\left(\hat{\hat{2}}_6, \hat{4}_{12}\right)$	0.8	0.8
$\left(\hat{\hat{4}}_6, \hat{0}_{12}\right)$	$\left(\hat{\hat{0}}_6, \hat{0}_{12}\right)$	$\left(\hat{\hat{0}}_6, \hat{0}_{12}\right)$	1	0.8
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$\left(\hat{\hat{4}}_6, \hat{8}_{12}\right)$	$\left(\hat{\hat{4}}_6, \hat{0}_{12}\right)$	0.8	0.8
$\left(\hat{\hat{4}}_6, \hat{4}_{12}\right)$	$\left(\hat{\hat{0}}_6, \hat{0}_{12}\right)$	$\left(\hat{\hat{0}}_6, \hat{0}_{12}\right)$	1	1
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$\left(\hat{\hat{4}}_6, \hat{8}_{12}\right)$	$\left(\hat{\hat{4}}_6, \hat{8}_{12}\right)$	0.8	0.8
$\left(\hat{\hat{4}}_6, \hat{8}_{12}\right)$	$\left(\hat{\hat{0}}_6, \hat{0}_{12}\right)$	$\left(\hat{\hat{0}}_6, \hat{0}_{12}\right)$	1	0.8
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$\left(\hat{\hat{4}}_6, \hat{8}_{12}\right)$	$\left(\hat{\hat{4}}_6, \hat{4}_{12}\right)$	0.8	0.8

Lampiran 5 Hasil Operasi $(\mu_C \times \mu_M)\left((x_1, y_1) - (x_2 y_2), 2\right) \geq \min\{\mu_C \times \mu_M\left((x_1, 2), (y_1, 2)\right), \mu_C \times \mu_M\left((x_2, 2), (y_2, 2)\right)\}$

(x_1, y_1)	(x_2, y_2)	$(x_1 - x_2, y_1 - y_2)$	$\mu_C \times \mu_M(x_1 - x_2, y_1 - y_2, 2)$	$\min\{\mu_C \times \mu_M\left((x_1, 2), (y_1, 2)\right), \mu_C \times \mu_M\left((x_2, 2), (y_2, 2)\right)\}$
$\left(\hat{\hat{0}}_6, \hat{0}_{12}\right)$	$\left(\hat{\hat{0}}_6, \hat{0}_{12}\right)$	$\left(\widehat{\hat{0}_6}, \hat{0}_{12}\right)$	0.5	0.5
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$\left(\hat{\hat{4}}_6, \hat{8}_{12}\right)$	$\left(\hat{\hat{4}}_6, \hat{4}_{12}\right)$	0.2	0.2
$\left(\hat{\hat{0}}_6, \hat{4}_{12}\right)$	$\left(\hat{\hat{0}}_6, \hat{0}_{12}\right)$	$\left(\hat{\hat{0}}_6, \hat{4}_{12}\right)$	0.5	0.5
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$\left(\hat{\hat{4}}_6, \hat{8}_{12}\right)$	$\left(\hat{\hat{2}}_6, \hat{8}_{12}\right)$	0.2	0.2
$\left(\hat{\hat{0}}_6, \hat{8}_{12}\right)$	$\left(\hat{\hat{0}}_6, \hat{0}_{12}\right)$	$\left(\hat{\hat{0}}_6, \hat{8}_{12}\right)$	0.5	0.5
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$\left(\hat{\hat{4}}_6, \hat{8}_{12}\right)$	$\left(\hat{\hat{2}}_6, \hat{0}_{12}\right)$	0.2	0.2
$\left(\hat{\hat{2}}_6, \hat{0}_{12}\right)$	$\left(\hat{\hat{0}}_6, \hat{0}_{12}\right)$	$\left(\hat{\hat{2}}_6, \hat{0}_{12}\right)$	0.2	0.2
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$\left(\hat{\hat{4}}_6, \hat{8}_{12}\right)$	$\left(\hat{\hat{4}}_6, \hat{4}_{12}\right)$	0.2	0.2
$\left(\hat{\hat{2}}_6, \hat{4}_{12}\right)$	$\left(\hat{\hat{0}}_6, \hat{0}_{12}\right)$	$\left(\hat{\hat{2}}_6, \hat{4}_{12}\right)$	0.2	0.2
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$\left(\hat{\hat{4}}_6, \hat{8}_{12}\right)$	$\left(\hat{\hat{4}}_6, \hat{8}_{12}\right)$	0.2	0.2
$\left(\hat{\hat{2}}_6, \hat{8}_{12}\right)$	$\left(\hat{\hat{0}}_6, \hat{0}_{12}\right)$	$\left(\hat{\hat{2}}_6, \hat{8}_{12}\right)$	0.2	0.2
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$\left(\hat{\hat{4}}_6, \hat{8}_{12}\right)$	$\left(\hat{\hat{4}}_6, \hat{0}_{12}\right)$	0.2	0.2
$\left(\hat{\hat{4}}_6, \hat{0}_{12}\right)$	$\left(\hat{\hat{0}}_6, \hat{0}_{12}\right)$	$\left(\hat{\hat{4}}_6, \hat{0}_{12}\right)$	0.2	0.2
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$\left(\hat{\hat{4}}_6, \hat{8}_{12}\right)$	$\left(\hat{\hat{0}}_6, \hat{4}_{12}\right)$	0.5	0.2
$\left(\hat{\hat{4}}_6, \hat{4}_{12}\right)$	$\left(\hat{\hat{0}}_6, \hat{0}_{12}\right)$	$\left(\hat{\hat{4}}_6, \hat{4}_{12}\right)$	0.2	0.2
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$\left(\hat{\hat{4}}_6, \hat{8}_{12}\right)$	$\left(\hat{\hat{0}}_6, \hat{8}_{12}\right)$	0.5	0.2
$\left(\hat{\hat{4}}_6, \hat{8}_{12}\right)$	$\left(\hat{\hat{0}}_6, \hat{0}_{12}\right)$	$\left(\hat{\hat{4}}_6, \hat{8}_{12}\right)$	0.2	0.2
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$\left(\hat{\hat{4}}_6, \hat{8}_{12}\right)$	$\left(\hat{\hat{0}}_6, \hat{0}_{12}\right)$	0.5	0.2

Lampiran 6 Hasil Operasi $(\mu_C \times \mu_M)\big((x_1, y_1).(x_2 y_2)^{-1}, 2\big) \geq \min\{\mu_C \times \mu_M\big((x_1, 2), (y_1, 2)\big), \mu_C \times \mu_M\big((x_2, 2), (y_2, 2)\big)\}$

(x_1, y_1)	$(x_2, y_2)^{-1}$	$(x_1.x_2^{-1}, y_1.y_2^{-1})$	$\mu_C \times \mu_M(x_1.x_2^{-1}, y_1.y_2^{-1}, 2)$	$\min\{\mu_C \times \mu_M\big((x_1, 2), (y_1, 2)\big), \mu_C \times \mu_M\big((x_2, 2), (y_2, 2)\big)\}$
$\big([\hat{0}]_6, [\hat{0}]_{12}\big)$	$\big(\hat{\hat{0}}_6, \hat{0}_{12}\big)$	$\big(\hat{\hat{0}}_6, \hat{0}_{12}\big)$	0.5	0.5
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$\big(\hat{\hat{4}}_6, \hat{8}_{12}\big)$	$\big(\hat{\hat{0}}_6, \hat{0}_{12}\big)$		0.2
$\big([\hat{0}]_6, [\hat{4}]_{12}\big)$	$\big(\hat{\hat{0}}_6, \hat{0}_{12}\big)$	$\big(\hat{\hat{0}}_6, \hat{0}_{12}\big)$	0.5	0.5
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$\big(\hat{\hat{4}}_6, \hat{8}_{12}\big)$	$\big(\hat{\hat{0}}_6, \hat{8}_{12}\big)$		0.2
$\big([\hat{0}]_6, [\hat{8}]_{12}\big)$	$\big(\hat{\hat{0}}_6, \hat{0}_{12}\big)$	$\big(\hat{\hat{0}}_6, \hat{0}_{12}\big)$	0.5	0.5
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$\big(\hat{\hat{4}}_6, \hat{8}_{12}\big)$	$\big(\hat{\hat{0}}_6, \hat{4}_{12}\big)$		0.2
$\big([\hat{2}]_6, [\hat{0}]_{12}\big)$	$\big(\hat{\hat{0}}_6, \hat{0}_{12}\big)$	$\big(\hat{\hat{0}}_6, \hat{0}_{12}\big)$	0.5	0.2
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$\big(\hat{\hat{4}}_6, \hat{8}_{12}\big)$	$\big(\hat{\hat{2}}_6, \hat{0}_{12}\big)$	0.2	0.2
$\big([\hat{2}]_6, [\hat{4}]_{12}\big)$	$\big(\hat{\hat{0}}_6, \hat{0}_{12}\big)$	$\big(\hat{\hat{0}}_6, \hat{0}_{12}\big)$	0.5	0.2
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$\big(\hat{\hat{4}}_6, \hat{8}_{12}\big)$	$\big(\hat{\hat{2}}_6, \hat{8}_{12}\big)$	0.2	0.2
$\big([\hat{2}]_6, [\hat{8}]_{12}\big)$	$\big(\hat{\hat{0}}_6, \hat{0}_{12}\big)$	$\big(\hat{\hat{0}}_6, \hat{0}_{12}\big)$	0.5	0.2
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$\big(\hat{\hat{4}}_6, \hat{8}_{12}\big)$	$\big(\hat{\hat{2}}_6, \hat{4}_{12}\big)$	0.2	0.2
$\big([\hat{4}]_6, [\hat{0}]_{12}\big)$	$\big(\hat{\hat{0}}_6, \hat{0}_{12}\big)$	$\big(\hat{\hat{0}}_6, \hat{0}_{12}\big)$	0.5	0.2
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$\big(\hat{\hat{4}}_6, \hat{8}_{12}\big)$	$\big(\hat{\hat{4}}_6, \hat{0}_{12}\big)$	0.2	0.2
$\big([\hat{4}]_6, [\hat{4}]_{12}\big)$	$\big(\hat{\hat{0}}_6, \hat{0}_{12}\big)$	$\big(\hat{\hat{0}}_6, \hat{0}_{12}\big)$	0.5	0.5
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$\big(\hat{\hat{4}}_6, \hat{8}_{12}\big)$	$\big(\hat{\hat{4}}_6, \hat{8}_{12}\big)$	0.2	0.2
$\big([\hat{4}]_6, [\hat{8}]_{12}\big)$	$\big(\hat{\hat{0}}_6, \hat{0}_{12}\big)$	$\big(\hat{\hat{0}}_6, \hat{0}_{12}\big)$	0.5	0.2
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$\big(\hat{\hat{4}}_6, \hat{8}_{12}\big)$	$\big(\hat{\hat{4}}_6, \hat{4}_{12}\big)$	0.2	0.2