ELEMEN *COMMUTING REGULAR* PADA GRUPOID BERHINGGA $\mathbb{Z}_n(\bar{t},\bar{u})$

SKRIPSI

oleh:

MUKHAMAD AFIF ALFARISY
155090400111007

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2019

ELEMEN *COMMUTING REGULAR*
PADA GRUPOID BERHINGGA $\mathbb{Z}_n(\bar{t}, \bar{u})$

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Matematika

oleh:
MUKHAMAD AFIF ALFARISY
155090400111007

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2019

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

ELEMEN *COMMUTING REGULAR*
PADA GRUPOID BERHINGGA $\mathbb{Z}_{n}(\bar{t},\bar{u})$

oleh:
MUKHAMAD AFIF ALFARISY
155090400111007

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji
pada tanggal 1 Maret 2019 dan dinyatakan memenuhi syarat
untuk memperoleh gelar Sarjana Matematika

Pembimbing

Dra. Ari Andari, M.S
NIP. 196105161987012001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si., M.Si., Ph.D
NIP. 197509082000031003

LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	**: Mukhamad Afif Alfarisy**
NIM	**: 155090400111007**
Jurusan	**: Matematika**
Judul Skripsi	**: Elemen *Commuting Regular* pada Grupoid Berhingga $\mathbb{Z}_n(\bar{t}, \bar{u})$**

dengan ini menyatakan sebagai berikut.

1. **Isi skripsi yang saya buat adalah benar-benar hasil dari pemikiran saya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain, selain nama-nama yang termaktub di isi dan tertulis di daftar pustaka dalam skripsi ini.**
2. **Apabila di kemudian hari ternyata skripsi yang saya buat ini terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala resiko akibat dari keadaan tersebut.**

Demikian pernyataan ini saya buat dengan segala kesadaran.

Malang, 1 Maret 2019
Yang menyatakan,

<u>Mukhamad Afif Alfarisy</u>
NIM. 155090400111007

ELEMEN *COMMUTING REGULAR* PADA GRUPOID BERHINGGA $\mathbb{Z}_{\boldsymbol{n}}(\bar{\boldsymbol{t}},\bar{\boldsymbol{u}})$

ABSTRAK

Elemen *commuting regular* merupakan perkembangan dari konsep elemen *regular*/ Von Neuman pada semigrup. Pada skripsi ini dibahas tentang elemen *commuting regular* dan eksistensi elemen tersebut pada grupoid berhingga $\mathbb{Z}_n(\bar{t},\bar{u})$. Dua elemen pada grupoid berhingga $\mathbb{Z}_n(\bar{t},\bar{u})$ merupakan elemen *commuting regular* jika elemen tersebut merupakan elemen *commuting regular* kiri dan elemen *commuting regular* kanan. Sifat dari elemen *commuting regular* juga mempengaruhi grupoid tersebut, yaitu jika setiap elemen pada grupoid berhingga $\mathbb{Z}_n(\bar{t},\bar{u})$ merupakan elemen *commuting regular*, maka grupoid berhingga $\mathbb{Z}_n(\bar{t},\bar{u})$ merupakan grupoid *commuting regular*.

Kata kunci: grupoid berhingga $\mathbb{Z}_n(\bar{t},\bar{u})$, *commuting regular*, *regular*, Von Neumann.

COMMUTING REGULAR ELEMENTS
ON THE FINITE GROUPOID $\mathbb{Z}_n(\bar{t},\bar{u})$

ABSTRACT

Commmuting regular elements are expansion of elements regular/ Von Neumann concept on semigroup. This final project define the notion and the exsistence of commuting regular elements and on the finite groupoid $\mathbb{Z}_n(\bar{t},\bar{u})$. Two elements on the finite groupoid $\mathbb{Z}_n(\bar{t},\bar{u})$ are commuting regular if they are both left commuting regular elements and right commuting regular elements. The properties of commuting regular elements also influence the groupoid, that is if for all elements on the finite groupoid $\mathbb{Z}_n(\bar{t},\bar{u})$ are commuting regular elements, then the groupoid $\mathbb{Z}_n(\bar{t},\bar{u})$ is commuting regular groupoid.

Keywords: finite groupoid $\mathbb{Z}_n(\bar{t},\bar{u})$, commuting regular, regular, Von Neumann.

KATA PENGANTAR

Puji syukur kepada Allah SWT atas segala rahmat, karunia, taufik dan hidayahNya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul **"Elemen *Commuting Regular* pada Grupoid Berhingga $\mathbb{Z}_{\boldsymbol{n}}(\bar{\boldsymbol{t}},\bar{\boldsymbol{u}})$"** dengan baik meskipun terdapat kekurangan di dalamnya. Penulisan skripsi ini dilakukan untuk memenuhi salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana pada Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Brawijaya.

Penulisan skripsi ini tidak dapat diselesaikan dengan baik tanpa bantuan, bimbingan, dan motivasi dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Dra. Ari Andari, M.S selaku Dosen Pembimbing Skripsi dan Dosen Penasihat Akademik atas bimbingan, arahan, saran, motivasi, nasihat, dan kesabaran yang telah diberikan selama penulisan skripsi ini dan menjadi mahasiswa di Universitas Brawijaya.
2. Drs. Bambang Sugandi, M.Si dan Drs. Abdul Rouf Alghofari, M.Sc., Ph.D selaku Dosen Penguji atas kritik dan saran yang telah diberikan untuk perbaikan skripsi ini.
3. Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si., M.Si., Ph.D selaku Ketua Jurusan Matematika dan Dr. Isnani Darti, S.Si., M.Si selaku Ketua Program Studi Matematika atas segala bantuan yang telah diberikan.
4. Seluruh dosen dan staff administrasi di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Brawijaya atas segala bantuannya.
5. Bapak Suparman, Ibu Siti Rowiyah, dan Bapak Tain serta seluruh keluarga tercinta yang telah memberikan doa, motivasi, dan dukungan baik moral maupun materil selama penulis menjadi mahasiswa di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu pengetahuna Alam, Universitas Brawijata.
6. Keluarga Besar Matematika 2015 atas kebersamaan dalam menjalani kehidupan perkuliahan di Universitas Brawijaya.
7. Teman Akikah and The Boys (Irma Kumala, Ilham Alifuddin Fitroini, Rifka Anisa, Putri Balqis Alkubro, dan Wahyu

Khumairoh) yang sudah setia menemani dalam suka dan duka selama kuliah dan sampai seterusnya.
8. Teman SD 56, yaitu M. Winarno A. dan Fian Eko S. atas apa yang telah diberikan.
9. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu persatu atas segala bantuannya.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih terdapat kekurangan. Oleh karena itu, kritik dan saran yang membangun sangat penulis harapkan. Kritik dan saran dapat dikirim melalui email penulis af.alfrsy11@gmail.com. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi pembaca khusunya mahasiswa Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Universitas Brawijaya, Malang.

Malang, 1 Maret 2019

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR SIMBOL

$\mathbb{N}$	: Himpunan semua bilangan asli.
$\mathbb{Z}$	: Himpunan semua bilangan bulat.
$\mathbb{Q}$	: Himpunan semua bilangan rasional.
$\mathbb{R}$	: Himpunan semua bilangan real.
$\mathbb{C}$	: Himpunan semua bilangan kompleks.
$\mathbb{Z}^+$	: Himpunan semua bilangan bulat positif.
$\mathbb{Z}_n$	: Himpunan semua bilangan bulat modulo n.
$\emptyset$	: Himpunan kosong.
$\in$	: Elemen atau anggota dari himpunan.
$\notin$	: Bukan elemen atau bukan anggota dari himpunan.
$A \times B$	: Hasil kali kartesius.
$\subseteq$	: Himpunan bagian atau *subset*.
$\cap$	: Irisan himpunan.
$\cup$	: Gabungan himpunan.
xRy	: x berelasi R dengan y.
$\wedge$	: Logika dan.
$\equiv$	: Kongruen.
$\exists$	: Terdapat.
$\forall$	: Untuk semua atau setiap.
$a \mid b$	: b habis dibagi oleh a.
$a \nmid b$	: b tidak habis dibagi oleh a.
$\setminus$	: Pengurangan himpunan.
$\blacksquare$	: Akhir dari pembuktian.

DAFTAR TABEL

Halaman

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Aljabar merupakan salah satu bidang ilmu matematika yang mengalami banyak perkembangan. Aljabar sangat erat kaitanya dengan struktur aljabar. Struktur aljabar merupakan salah satu bidang kajian dalam matematika yang dikembangkan untuk memahami struktur bilangan.

Struktur atau sistem aljabar didefinisikan sebagai suatu himpunan tidak kosong yang dilengkapi dengan satu atau lebih operasi biner dan memenuhi aksioma tertentu. Dalam aljabar, dipelajari berbagai jenis struktur aljabar. Salah satu jenis struktur aljabar adalah grupoid. Grupoid adalah suatu struktur aljabar yang dilengkapi dengan satu operasi biner dan memenuhi aksioma tertutup.

Dalam struktur aljabar, tentunya pembahasan elemen di dalam suatu struktur aljabar juga merupakan suatu hal yang penting untuk dilakukan penelitian. Elemen di dalam suatu struktur aljabar dapat memenuhi sifat tertentu, misalkan elemen idempoten, elemen nilpoten, elemen nil, dan lain sebagainya.

Perkembangan jenis elemen dalam suatu struktur aljabar sudah banyak dilakukan penelitian oleh para ilmuwan. Salah satunya pada tahun 1995, Howie menjelaskan elemen *regular* dalam semigrup. Kemudian pada tahun 2007 Doostie dan Pourfaraj memperkenalkan elemen *commuting regular* pada semigrup. Doostie dan Pourfaraj juga memperkenalkan semigrup *commuting regular*. Selanjutnya pada tahun 2012 Pourfaraj melakukan penelitian tentang eksistensi dari elemen *commuting regular* pada grupoid berhingga $\mathbb{Z}_n(\bar{t},\bar{u})$. Pada hasil penelitiannya tersebut dibahas definisi, contoh, teorema, proposisi, dan akibat yang berkaitan dengan elemen *commuting regular* pada grupoid berhingga $\mathbb{Z}_n(\bar{t},\bar{u})$.

Pada artikel penelitian Pourfaraj tahun 2012 terdapat hal yang baru dan menarik untuk dibahas sebagai bukti perkembangan aljabar, yaitu definisi, contoh, teorema, proposisi, dan akibat yang berkaitan dengan elemen *commuting regular* pada grupoid berhingga $\mathbb{Z}_n(\bar{t},\bar{u})$. Oleh karena itu, skripsi ini mengulas kembali elemen *commuting regular* pada grupoid berhingga $\mathbb{Z}_n(\bar{t},\bar{u})$.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, maka rumusan masalah yang dibahas pada skripsi ini sebagai berikut.

1. Bagaimana sifat elemen *commuting regular* pada grupoid $\mathbb{Z}_n(\bar{t}, \bar{u})$?
2. Bagaimana sifat grupoid *commuting regular* $\mathbb{Z}_n(\bar{t}, \bar{u})$?

1.3 Tujuan

Berdasarkan rumusan masalah tersebut, maka tujuan pada skripsi ini adalah sebagai berikut.

1. Membuktikan sifat elemen *commuting regular* pada grupoid $\mathbb{Z}_n(\bar{t}, \bar{u})$.
2. Membuktikan sifat grupoid *commuting regular* $\mathbb{Z}_n(\bar{t}, \bar{u})$.

BAB II
DASAR TEORI

Pada bab ini diberikan beberapa definisi dan contoh mengenai teori-teori yang berkaitan dengan pembahasan dalam skripsi ini, dengan tujuan untuk mempermudah dalam memahami pembahasan dalam skripsi ini.

2.1 Himpunan

Konsep himpunan merupakan suatu hal yang sangat fundamental dalam ilmu matematika, terutama dalam bidang aljabar. Berikut diberikan definisi dan contoh yang berkaitan dengan konsep himpunan berdasarkan Bhattacharya dkk. (1986) dan Whitelaw (1995).

Definisi 2.1.1 (Himpunan)
Himpunan adalah kumpulan objek atau elemen. Jika S merupakan himpunan dan x adalah elemen pada himpunan S, maka x anggota S atau dapat ditulis $x \in S$. Sebuah elemen pada himpunan S disebut juga dengan anggota himpunan S. Jika x bukan elemen pada himpunan S, maka dapat ditulis $x \notin S$.

Contoh 2.1.2
Berikut diberikan contoh beberapa notasi standar untuk himpunan yang sering dijumpai.

$\mathbb{N}$: Himpunan semua bilangan asli, yaitu $\{1, 2, 3, \ldots\}$.
$\mathbb{Z}$: Himpunan semua bilangan bulat, yaitu $\{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$.
$\mathbb{Q}$: Himpunan semua bilangan rasional, yaitu $\left\{ {}^{a}/_{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$.
$\mathbb{R}$: Himpunan semua bilangan real.
$\mathbb{C}$: Himpunan semua bilangan kompleks, yaitu $\{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$.

Definisi 2.1.3 (Hasil Kali Kartesius)
Misalkan A dan B merupakan himpunan. Himpunan semua pasangan (x, y), dengan $x \in A, y \in B$ disebut hasil kali kartesius dari A dan B, dinotasikan dengan $A \times B = \{(x, y) | x \in A, y \in A\}$.

Contoh 2.1.4
Diberikan himpunan A ={1, 2} dan B ={a, b, c}, maka

$$A\times B=\{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}.$$

Definisi 2.1.5 (Himpunan Berhingga dan Order Himpunan)
Himpunan S dikatakan berhingga jika banyaknya elemen yang berbeda pada himpunan S berhingga. Jika himpunan S berhingga, maka banyaknya elemen pada S disebut order atau kardinalitas S yang dinotasikan dengan $|S|$.

Contoh 2.1.6
Diberikan himpunan S ={1,3,5,7}. Banyaknya elemen yang berbeda pada himpunan S adalah empat, sehingga himpunan S merupakan himpunan berhingga dengan order/kardinalitas $|S|$ = 4.

Definisi 2.1.7 (Himpunan Bagian/*Subset*)
Misalkan A dan B merupakan himpunan. A dikatakan himpunan bagian/*subset* himpunan B (A termuat dalam B) jika dan hanya jika setiap elemen himpunan A juga merupakan elemen himpunan B, yang dinotasikan dengan $A \subseteq B$.

Jika $A \subseteq B$ dan $A \neq B$, maka himpunan A merupakan *proper subset* himpunan B (A termuat dengan tepat dalam B) yang dinotasikan dengan $A \subset B$. Jika A dan B merupakan himpunan bagian/*subset* himpunan S, pernyataan "$A \subseteq B$" ekuivalen dengan $x \in A \Rightarrow x \in B$ $(x \in S)$, sedangkan pernyataan "$A = B$" ekuivalen dengan $x \in A \Leftrightarrow x \in B$ $(x \in S)$.

Definisi 2.1.8 (Gabungan, Irisan, dan Selisih Himpunan)
Misalkan A dan B merupakan himpunan bagian/*subset* himpunan U.
Gabungan (*union*) dari A dan B, atau dapat ditulis $A \cup B$,

$$A \cup B = \{x \in U | x \in A \text{ atau } x \in B\}.$$

Irisan (*intersection*) dari A dan B, atau dapat ditulis $A \cap B$,

$$A \cap B = \{x \in U | x \in A \text{ dan } x \in B\}.$$

Selisih (*difference*) dari A dan B, atau dapat ditulis $A - B$,

$$A - B = \{x \in U | x \in A \text{ dan } x \notin B\}.$$

Jika $B \subset A$, maka $A - B$ disebut komplemen (*complement*) B di dalam A. A dan B dikatakan disjoint jika $A \cap B$ merupakan himpunan kosong ($A \cap B = \emptyset$).

Contoh 2.1.9
Diberikan himpunan $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{3, 4, 5\}$, sehingga $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A \cap B = \{3\}$,
$A - B = \{1, 2\}$, dan $B - A = \{4, 5\}$.

2.2 Relasi, Pemetaan, dan Operasi Biner

Dalam struktur aljabar, elemen pada himpunan tidak kosong dapat dikaitkan dengan operasi biner, antara lain operasi penjumlahan, operasi pergandaan atau beberapa operasi biner lainnya. Berikut diberikan definisi beserta contoh yang berhubungan dengan relasi, pemetaan, dan operasi biner berdasarkan Bhattacharya dkk. (1986), Marsudi (2010), dan Dummit dan Foote (2002).

Definisi 2.2.1 (Relasi)
Diberikan himpunan tak kosong A dan B. R himpunan bagian/*subset* $A \times B$. R disebut sebuah relasi dari A ke B. Jika $(x, y) \in R$, maka x berelasi R dengan y, dinotasikan xRy.

Definisi 2.2.2 (*Domain* dan *Range* Relasi)
Himpunan semua komponen pertama pada pasangan terurut dalam relasi R disebut *domain* R. Himpunan semua komponen kedua pada pasangan terurut dalam relasi R disebut *range* R.

Contoh 2.2.3
Diberikan himpunan $A = \{1, 2\}$ dan $B = \{a, b, c\}$.
$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$, sehingga salah satu relasi R dari A ke B adalah $R = \{(1, a), (2, b), (2, c)\}$.

Definisi 2.2.4 (Relasi Ekuivalensi)
Misalkan R adalah relasi pada A,
a. R refleksif jika dan hanya jika $\forall x \in A[x \in A \rightarrow xRx]$.
b. R simetrik jika dan hanya jika $\forall x, y \in A[xRy \rightarrow yRx]$.

c. R antisimetrik jika dan hanya jika
   $\forall x, y \in A[xRy \wedge yRx \rightarrow x = y]$.
d. R transitif jika dan hanya jika $\forall x, y, z \in A[xRy \wedge yRz \rightarrow xRz]$.

Jika R refleksif, simetrik, dan transitif, maka R disebut relasi ekuivalensi.

Contoh 2.2.5

Diketahui $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} | n$ pembagi $x - y, n \in \mathbb{Z}^+\}$ dan xRy ditulis sebagai $x \equiv y\ (mod\ n)$ atau dibaca "x kongruen $b\ mod\ n$". R merupakan relasi ekuivalensi.

Bukti:

a. R refleksif, karena $n|(x - x)$, $\forall x \in\ A$.
b. Jika $x \equiv y\ (mod\ n)$, maka $n|(x - y)$ atau $x - y = nk$, $k \in \mathbb{Z}$. Maka $y - x = n(-k)$, sehingga $n|(y - x)$ dan $y \equiv x\ (mod\ n)$. Jadi, R simetrik.
c. Misalkan $x \equiv y\ (mod\ n)$ dan $y \equiv z\ (mod\ n)$, maka $x - y = nk_1$, $y - z = nk_2$, $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, sehingga $x - z = nk$, $k = k_1 + k_2 \in \mathbb{Z}$. Hal ini berarti $n|(x - z)$ dan $x \equiv z (mod\ n)$. Jadi, R transitif.

Karena R merupakan relasi refleksif, simetrik, dan transitif, sehingga R merupakan relasi ekuivalensi.■

Definisi 2.2.6 (Pemetaan)

Misalkan A dan B merupakan himpunan tak kosong. Sebuah relasi f dari A ke B disebut pemetaan dari A ke B jika untuk setiap elemen $x \in A$ terdapat tepat satu elemen $y \in B$ sedemikian sehingga x berada dalam relasi f ke y, dinotasikan dengan $f(x) = y$.

Definisi 2.2.7 (*Domain* dan *Codomain* Pemetaan)

Pemetaan f dari A ke B dapat ditulis dengan $f: A \rightarrow B$. Himpunan A disebut dengan daerah asal (*domain*), sedangkan himpunan B disebut daerah kawan (*codomain*) pemetaan.

Contoh 2.2.8

Diberikan himpunan $A = \{1, 2, 3, 4\}$ dan $B = \{a, b, c, d, e\}$, maka $f = \{(1, a), (2, a), (3, c), (4, e)\}$ merupakan fungsi.

Definisi 2.2.9 (Pemetaan Injektif, Surjektif, dan Bijektif)
Suatu pemetaan $f: A \to B$ bersifat,
a. injektif (1-1), yaitu $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$,
b. surjektif (*onto*), yaitu $\forall y \in B, y = f(x)$ untuk suatu $x \in A$,
c. bijektif, jika pemetaan tersebut injektif dan surjektif.

Jika $f: A \to B$ merupakan pemetaan yang bijektif, maka $f: A \to B$ juga disebut sebagai pemetaan yang berkorespondensi satu-satu.

Contoh 2.2.10
Diberikan himpunan $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dan $B = \{a, b, c, d, e\}$. Didefinisikan suatu pemetaan $f: A \to B$ sebagai berikut,

$$f = \{(1,a), (2,c), (3,b), (4,d), (5,e)\}.$$

Maka pemetaan f injektif karena $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ dan pemetaan f surjektif karena $\forall y \in B, y = f(x)$ untuk suatu $x \in A$. Dengan demikian pemetaan $f: A \to B$ bijektif.

Definisi 2.2.11 (Operasi Biner)
Pemetaan $*: S \times S \to S$ disebut operasi biner pada himpunan S. Sebuah operasi biner pada S yang demikian merupakan pasangan berurut elemen di $S \times S$ ke tepat satu elemen di S.

Operasi biner biasanya direpresentasikan dengan simbol $*$, $\cdot$, $+$, dan $\circ$ sebagai pengganti f, g, dan lainnya. *Image* (x, y) atas operasi biner $*$, dapat ditulis dengan $*(x, y) \equiv x * y$.

Contoh 2.2.12
Penjumlahan $(+)$ dan pergandaan $(\cdot)$ dalam himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ atau secara umum dalam himpunan bilangan bulat merupakan contoh operasi biner.

$$+: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$
$$(a, b) \mapsto +(a, b) = a + b \text{ dan}$$
$$\cdot: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$
$$(a, b) \mapsto \cdot(a, b) = a \cdot b.$$

2.3 Grup, Grupoid, dan Semigrup

Suatu struktur aljabar yang dilengkapi dengan satu operasi biner dan memenuhi beberapa aksioma tertentu disebut grup. Berikut ini diberikan definisi beserta contoh grup, grupoid, dan semigrup berdasarkan Andari (2015).

Definisi 2.3.1 (Grup, Grupoid, dan Semigrup)
Misalkan G adalah himpunan tidak kosong. $(G,*)$ disebut grup jika memenuhi aksioma sebagai berikut.

1. Tertutup
   $\forall a, b \in G,\ \exists!\, c \in G, a * b = c.$
2. Asosiatif
   $\forall a, b, c \in G, (a * b) * c = a * (b * c).$
3. Mempunyai elemen netral
   $(\exists e \in G)(\forall a \in G),\ e * a = a * e = a.$
4. Setiap elemen mempunyai invers
   $(\forall a \in G)(\exists a^{-1} \in G), a * a^{-1} = a^{-1} * a = e.$

Suatu himpunan tak kosong G yang dilengkapi dengan satu operasi biner misalkan $(G,*)$ disebut grupoid jika memenuhi aksioma (1). Sedangkan $(G,*)$ disebut semigrup jika memenuhi aksioma (1) dan (2). Suatu Grup pasti merupakan grupoid dan semigrup, tetapi belum berlaku sebaliknya.
Suatu grup $(G,*)$ disebut grup komutatif jika memenuhi aksioma komutatif terhadap operasi biner $*$.

5. Komutatif
   $\forall a, b \in G,\ a * b = b * a.$

Contoh 2.3.2
Suatu himpunan $\mathbb{Z}_5$ yang dilengkapi dengan operasi biner yaitu penjumlahan $(\mathbb{Z}_5, +)$ merupakan grup komutatif.
Bukti:
$\mathbb{Z}_5 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$. Untuk mempermudah dalam membuktikan $\mathbb{Z}_5$ merupakan grup komutatif, diberikan hasil operasi biner + dalam $\mathbb{Z}_5$ pada tabel berikut.

Tabel 2.1 Hasil operasi penjumlahan pada $\mathbb{Z}_5$

$+$	$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{\mathbf{1}}$	$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{\mathbf{3}}$	$\bar{\mathbf{4}}$
$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{\mathbf{1}}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$
$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{\mathbf{3}}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{\mathbf{4}}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$

Berdasarkan Tabel 2.1 maka $(\mathbb{Z}_5, +)$ merupakan grup komutatif dengan uraian sebagai berikut.

a. Tertutup.
   Misalkan $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_5$ dan $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, sehingga $\bar{a} = a + 5k_1$ dan $\bar{b} = b + 5k_2$. Maka $\mathbb{Z}_5$ terhadap operasi penjumlahan memenuhi aksioma tertutup yang ditunjukkan sebagai berikut,
   $$\begin{aligned}\bar{a} + \bar{b} &= a + 5k_1 + b + 5k_2 \\ &= a + b + 5(k_1 + k_2), \text{ misalkan } k_1 + k_2 = z \in \mathbb{Z} \\ &= (a + b) + 5z \in \mathbb{Z}_5.\end{aligned}$$
b. Asosiatif.
   Misalkan $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_5$, $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$, sehingga $\bar{a} = a + 5k_1$, $\bar{b} = b + 5k_2$ dan $\bar{c} = c + 5k_3$. Maka $\mathbb{Z}_5$ terhadap operasi penjumlahan memenuhi aksioma asosiatif yang ditunjukkan sebagai berikut,
   $$\begin{aligned}(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} &= (a + 5k_1 + b + 5k_2) + c + 5k_3 \\ &= (a + b) + 5(k_1 + k_2) + c + 5k_3 \\ &= ((a + b) + c) + 5\,((k_1 + k_2) + k_3) \\ &= (a + (b + c)) + 5(k_1 + (k_2 + k_3)) \\ &= a + 5k_1 + (b + c) + 5(k_2 + k_3) \\ &= a + 5k_1 + (b + 5k_2 + c + 5k_3) \\ &= \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}).\end{aligned}$$
c. Mempunyai elemen netral.
   Elemen netral pada $\mathbb{Z}_5$ terhadap operasi penjumlahan adalah $\bar{0}$. Karena $\forall\ \bar{a} \in \mathbb{Z}_5,\ \bar{0} + \bar{a} = \bar{a} + \bar{0} = \bar{a}$.
d. Setiap elemen mempunyai invers.
   Berdasarkan Tabel 2.1 diperoleh bahwa invers dari $\bar{0}$ adalah $\bar{0}$, karena $\bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$. Invers dari $\bar{1}$ adalah $\bar{4}$, karena $\bar{1} + \bar{4} = \bar{0}$. Invers dari $\bar{2}$ adalah $\bar{3}$, karena $\bar{2} + \bar{3} = \bar{0}$. Invers dari $\bar{3}$ adalah $\bar{2}$,

karena $\bar{3} + \bar{2} = \bar{0}$. Invers dari $\bar{4}$ adalah $\bar{1}$, karena $\bar{4} + \bar{1} = \bar{0}$, sehingga setiap elemen pada $\mathbb{Z}_5$ memiliki invers yang juga anggota pada $\mathbb{Z}_5$.

e. Komutatif.

Misalkan $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_5$ dan $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, sehingga $\bar{a} = a + 5k_1$ dan $\bar{b} = b + 5k_2$. Maka $\mathbb{Z}_5$ terhadap operasi penjumlahan memenuhi aksioma tertutup yang ditunjukkan sebagai berikut,

$$\begin{aligned}\bar{a} + \bar{b} &= a + 5k_1 + b + 5k_2\\ &= a + b + 5(k_1 + k_2)\\ &= b + a + 5(k_2 + k_1)\\ &= b + 5k_2 + a + 5k_1\\ &= \bar{b} + \bar{a}. \blacksquare\end{aligned}$$

Definisi 2.3.3 (Grupoid Berhingga)

Grupoid berhingga adalah suatu grupoid dengan banyaknya elemen yang berbeda dalam grupoid tersebut berhingga.

Contoh 2.3.4

Diberikan himpunan $A = \{1,2,3,4,5\}$. A merupakan grupoid dengan operasi biner $*$ yang didefinisikan pada tabel berikut.

Tabel 2.2 Hasil operasi biner $*$ pada A

$*$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	5	4	3	2	1
2	4	3	2	1	5
3	3	2	1	5	4
4	2	1	5	4	3
5	1	5	4	3	2

Akan ditunjukkan A merupakan grupoid berhingga.

Bukti:

Berdasarkan Tabel 2.2, A merupakan grupoid. Karena banyaknya elemen yang berbeda pada grupoid tersebut berhingga yaitu lima, maka $(A,*)$ merupakan grupoid berhingga. ■

2.4 Subgrup, Subgrupoid, dan Subsemigrup

Suatu struktur aljabar yang dilengkapi dengan satu operasi biner dan memenuhi beberapa aksioma tertentu disebut grup. Suatu struktur aljabar memiliki *subset* yang juga merupakan struktur aljabar juga. Berikut ini diberikan definisi beserta contoh subgrup, subgrupoid, dan subsemigrup berdasarkan Andari (2015).

Definisi 2.4.1 (Subgrup)

Misalkan G adalah grup. H adalah *subset* dalam G, H adalah himpunan tak kosong. H disebut subgrup pada G dinotasikan dengan $H \leq G$, jika terhadap operasi biner yang sama dengan G, H juga merupakan grup.

Contoh 2.4.2

Diketahui $(\mathbb{Z}_6, +)$ adalah grup dengan hasil operasi biner dan uraian sebagai berikut.

Tabel 2.3 Hasil operasi biner penjumlahan pada $\mathbb{Z}_6$

$+$	$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{\mathbf{1}}$	$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{\mathbf{3}}$	$\bar{\mathbf{4}}$	$\bar{\mathbf{5}}$
$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{\mathbf{1}}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$
$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{\mathbf{3}}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{\mathbf{4}}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{\mathbf{5}}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$

a. Tertutup.

   Misalkan $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_6$ dan $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, sehingga $\bar{a} = a + 6k_1$ dan $\bar{b} = b + 6k_2$. Maka $\mathbb{Z}_5$ terhadap operasi penjumlahan memenuhi aksioma tertutup yang ditunjukkan sebagai berikut,

   $$\begin{aligned} \bar{a} + \bar{b} &= a + 6k_1 + b + 6k_2 \\ &= a + b + 6(k_1 + k_2), \text{ misalkan } k_1 + k_2 = z \in \mathbb{Z} \\ &= a + b + 6z \in \mathbb{Z}_6. \end{aligned}$$

b. Asosiatif.

   Misalkan $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_6$, $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$, sehingga $\bar{a} = a + 6k_1$,

$\bar{b} = b + 6k_2$ dan $\bar{c} = c + 6k_3$. Maka $\mathbb{Z}_6$ terhadap operasi penjumlahan memenuhi aksioma asosiatif yang ditunjukkan sebagai berikut,

$$
\begin{aligned}
(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} &= (a + 6k_1 + b + 6k_2) + c + 6k_3 \\
&= (a + b) + 6(k_1 + k_2) + c + 6k_3 \\
&= \big((a + b) + c\big) + 6\,\big((k_1 + k_2) + k_3\big) \\
&= \big(a + (b + c)\big) + 6\big(k_1 + (k_2 + k_3)\big) \\
&= a + 6k_1 + (b + c) + 6(k_2 + k_3) \\
&= a + 6k_1 + (b + 6k_2 + c + 6k_3) \\
&= \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}).
\end{aligned}
$$

c. Mempunyai elemen netral.
   Elemen netral pada $\mathbb{Z}_6$ terhadap operasi penjumlahan adalah $\bar{0}$. Karena $\forall\, \bar{a} \in \mathbb{Z}_6,\ \bar{0} + \bar{a} = \bar{a} + \bar{0} = \bar{a}$.
d. Setiap elemen mempunyai invers.
   Berdasarkan Tabel 2.3 diperoleh bahwa invers dari $\bar{0}$ adalah $\bar{0}$, invers dari $\bar{1}$ adalah $\bar{5}$, invers dari $\bar{2}$ adalah $\bar{4}$, invers dari $\bar{3}$ adalah $\bar{3}$, invers dari $\bar{4}$ adalah $\bar{2}$, dan invers dari $\bar{5}$ adalah $\bar{1}$. Sehingga setiap elemen pada $\mathbb{Z}_6$ memiliki invers yang juga anggota pada $\mathbb{Z}_6$.

Akan ditunjukkan $H = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$ merupakan subgrup pada $(\mathbb{Z}_6, +)$.

Bukti:

Untuk menunjukkan bahwa H merupakan subgrup pada $\mathbb{Z}_6$, maka akan ditunjukkan bahwa $(H, +)$ juga merupakan grup. Untuk mempermudah dalam membuktikannya diberikan tabel berikut.

Tabel 2.4 Hasil operasi penjumlahan pada H

$+$	$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{\mathbf{4}}$
$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$
$\bar{\mathbf{4}}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$

Berdasarkan Tabel 2.4 maka $(H, +)$ merupakan grup dengan uraian sebagai berikut.

a. Tertutup.
   Misalkan $\bar{a}, \bar{b} \in H \subset \mathbb{Z}_6$ dan $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, sehingga

$\bar{a} = a + 6k_1$ dan $\bar{b} = b + 6k_2$. H terhadap operasi penjumlahan memenuhi aksioma tertutup yang ditunjukkan sebagai berikut,

$$\begin{aligned}\bar{a} + \bar{b} &= a + 6k_1 + b + 6k_2 \\ &= a + b + 6(k_1 + k_2), \text{ misalkan } k_1 + k_2 = z \in \mathbb{Z} \\ &= a + b + 6z \in H.\end{aligned}$$

b. Asosiatif.

Misalkan $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in H \subset \mathbb{Z}_6$, $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$, sehingga $\bar{a} = a + 6k_1$, $\bar{b} = b + 6k_2$ dan $\bar{c} = c + 6k_3$. H terhadap operasi penjumlahan memenuhi aksioma asosiatif yang ditunjukkan sebagai berikut,

$$\begin{aligned}(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} &= (a + 6k_1 + b + 6k_2) + c + 6k_3 \\ &= (a + b) + 6(k_1 + k_2) + c + 6k_3 \\ &= ((a + b) + c) + 6\left((k_1 + k_2) + k_3\right) \\ &= (a + (b + c)) + 6(k_1 + (k_2 + k_3)) \\ &= a + 6k_1 + (b + c) + 6(k_2 + k_3) \\ &= a + 6k_1 + (b + 6k_2 + c + 6k_3) \\ &= \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}).\end{aligned}$$

c. Mempunyai elemen netral.

Elemen netral pada H terhadap operasi penjumlahan adalah $\bar{0}$. Karena $\forall\ \bar{a} \in H$, $\bar{0} + \bar{a} = \bar{a} + \bar{0} = \bar{a}$.

d. Setiap elemen mempunyai invers.

Berdasarkan Tabel 2.2 diperoleh bahwa invers dari $\bar{0}$ adalah $\bar{0}$, karena $\bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$. Invers dari $\bar{2}$ adalah $\bar{4}$, karena $\bar{2} + \bar{4} = \bar{0}$. Invers dari $\bar{4}$ adalah $\bar{2}$, karena $\bar{4} + \bar{2} = \bar{0}$, sehingga setiap elemen pada H memiliki invers yang juga anggota pada H. ■

Definisi 2.4.3 (Subgrupoid)

Misalkan G adalah grupoid. H adalah *subset* dalam G, H adalah himpunan tak kosong. H disebut subgrupoid pada G, jika terhadap operasi biner yang sama dengan G, H juga merupakan grupoid.

Contoh 2.4.4

Perhatikan Contoh 2.3.4, diketahui $(A,*)$ merupakan grupoid. Akan ditentukan subgrupoid pada A.

Bukti:
Berdasarkan Tabel 2.2, maka subgrupoid pada A adalah $B = \{4\}$ dan A itu sendiri. Hal tersebut dikarenakan A dan B memenuhi aksioma tertutup terhadap operasi $*$ yang didefiniskan pada Tabel 2.2. ■

Definisi 2.4.5 (Subsemigrup)
Misalkan G adalah semigrup. H adalah *subset* dalam G, H adalah himpunan tak kosong. H disebut subsemigrup pada G, jika terhadap operasi biner yang sama dengan G, H juga merupakan semigrup.

Contoh 2.4.6
Diketahui $(\mathbb{Z}_4,*)$ adalah grup, yang operasi binernya didefinisikan sebagai berikut.

Tabel 2.5 Hasil operasi biner $*$ pada $\mathbb{Z}_4$

$*$	$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{\mathbf{1}}$	$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{\mathbf{3}}$
$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{\mathbf{1}}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$
$\bar{\mathbf{3}}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$

Berdasarkan Tabel 2.5 dapat dilihat bahwa $\mathbb{Z}_4$ terhadap operasi biner $*$ memenuhi aksioma tertutup yaitu $\forall a, b \in G, \exists! c \in G, a * b = c$ dan aksioma asosiatif yaitu $\forall a, b, c \in G, (a * b) * c = a * (b * c)$. Akan ditunjukkan $M = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ merupakan subsemigrup pada $(\mathbb{Z}_4,*)$.
Bukti:
Untuk menunjukkan bahwa M merupakan subsemigrup pada $\mathbb{Z}_4$, maka akan ditunjukkan bahwa $(M,*)$ juga merupakan semigrup yaitu memenuhi aksima tertutup dan asosiatif terhadap operasi yang pada $\mathbb{Z}_4$. Untuk mempermudah dalam membuktikannya diberikan tabel berikut.

Tabel 2.6 Hasil operasi biner $*$ pada M

$+$	$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{\mathbf{2}}$
$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$

Berdasarkan Tabel 2.6 maka $(M,*)$ merupakan semigrup dengan uraian sebagai berikut.

a. Tertutup.
   Karena misalkan $\bar{a}, \bar{b} \in M \subset \mathbb{Z}_4$, berlaku $\forall a, b \in G, \exists! c \in G$, sehingga $a * b = c$.
b. Asosiatif.
   Untuk membuktikan M memenuhi aksioma asosiatif, maka diberikan tabel berikut.

Tabel 2.7 Hasil operasi aksioma asosiatif pada M

$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \in \boldsymbol{M}$	$\boldsymbol{a} * (\boldsymbol{b} * \boldsymbol{c})$	$(\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b}) * \boldsymbol{c}$
$(\bar{0}, \bar{0}, \bar{0})$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$(\bar{2}, \bar{0}, \bar{0})$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$(\bar{0}, \bar{2}, \bar{0})$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$(\bar{0}, \bar{0}, \bar{2})$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$(\bar{2}, \bar{2}, \bar{0})$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$(\bar{2}, \bar{0}, \bar{2})$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$(\bar{0}, \bar{2}, \bar{2})$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$(\bar{2}, \bar{2}, \bar{2})$	$\bar{2}$	$\bar{2}$

Berdasarkan Tabel 2.7, M memenuhi aksioma tertutup dan asosiatif, maka M juga merupaka semigrup, sehingga M merupakan subsemigrup pada $(\mathbb{Z}_4,*)$.■

2.5 Keterbagian

Konsep keterbagian merupakan salah satu konsep dalam teori bilangan. Konsep ini diterapkan pada himpunan bilangan bulat. Berikut diberikan definisi, contoh, dan teorma yang berkaitan dengan keterbagian berdasarkan Niven dkk. (1991) dan Muhsetyo (1995).

Definisi 2.5.1 (Keterbagian)
Suatu bilangan $b \in \mathbb{Z}$ dikatakan habis dibagi oleh $a \in \mathbb{Z}$, jika terdapat $x \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $b = ax$, dinotasikan dengan $a|b$. b tidak habis dibagi a dinotasikan dengan $a \nmid b$.

Contoh 2.5.2

1. $3|30$, karena terdapat bilangan bulat 3 sedemikian sehingga $30 = 3.10$.
2. $-5|25$, karena terdapat bilangan bulat -5 sedemikian sehingga $25 = -5.-5$.
3. $3 \nmid 7$, karena tidak terdapat bilangan bulat x sedemikian sehingga $7 = 3.x$.

Teorema 2.5.3

Untuk setiap bilangan bulat $a, b,$ dan c berlaku:

1. Jika $a|b$, maka $a|bc$.
2. Jika $a|b$ dan $b|c$, maka $a|c$.
3. Jika $a|b$ dan $a|c$, maka $a|(b+c)$.
4. Jika $a|b$ dan $a|c$, maka $a|(bn+cm)$, $\forall n, m \in \mathbb{Z}$.
5. Jika $a|b$ dan $b|a$, maka $a = \pm b$.

Bukti:

1. Diketahui $a|b$, berdasarkan Definisi 2.5.1, terdapat $x \in \mathbb{Z}$ sedemikan sehingga $b = ax$. Hal ini berarti bahwa $bc = axc$ atau $bc = a(xc)$ sehingga $a|bc$.
2. Diketahui $a|b$ dan $b|c$, berdasarkan Definisi 2.5.1, terdapat $x, y \in \mathbb{Z}$ sedemikan sehingga $b = ax$ dan $c = by$.
   $c = by$
   $c = (ax)y$
   $c = a(xy)$, sehingga $a|c$.
3. Diketahui $a|b$ dan $a|c$, berdasarkan Definisi 2.5.1, terdapat $x, y \in \mathbb{Z}$ sedemikan sehingga $b = ax$ dan $c = ay$.
   $b + c = ax + ay$
   $b + c = a(x + y)$, sehingga $a|(b+c)$.
4. Diketahui $a|b$ dan $a|c$, berdasarkan Definisi 2.5.1, terdapat $x, y \in \mathbb{Z}$ sedemikan sehingga $b = ax$ dan $c = ay$.
   $bn + cm = (ax)n + (ay)m$
   $bn + cm = a(xn) + a(ym)$
   $bn + cm = a(xn + ym)$, sehingga $a|(bn + ym)$.
5. Diketahui $a|b$ dan $b|a$, berdasarkan Definisi 2.5.1, terdapat $x, y \in \mathbb{Z}$ sedemikan sehingga $b = ax$ dan $a = by$.
   $b = ax$
   $b = (by)x$
   $b = b(yx)$

$b = (yx)b$
$1. b = (yx). b,$
sehingga $yx = 1$. Dengan demikian, karena $x, y \in \mathbb{Z}$ dan $yx = 1$, maka diperoleh $x = y = -1$ atau $x = y = 1$. Jika $x = y = -1$, maka $a = -b$. Jika $x = y = 1$, maka $a = b$. ■

Contoh 2.5.4

1. Jika $3|6$, maka $3|6.4$, karena terdapat bilangan bulat 8 sedimikian sehingga $6.4 = 24 = 3.8$.
2. Jika $2|4$ dan $4|36$, maka $2|36$, karena terdapat bilangan bulat 18 sedimikian sehingga $36 = 2.18$.
3. Jika $-3|9$ dan $-3|27$, maka $-3|(9 + 27)$, karena terdapat bilangan bulat -12 sedimikian sehingga
   $9 + 27 = 36 = -3. -12$.
4. Jika $4|8$ dan $4|12$, maka $4|(8.2 + 12.3)$, karena terdapat bilangan bulat 13 sedimikian sehingga $8.2 + 12.3 = 52 = 4.13$.
5. Jika $6| - 6$, maka terdapat bilangan bulat -1 sedemikian sehingga $-6 = 6. -1$ dan $-6|6$, maka maka terdapat bilangan bulat -1 sedemikian sehingga $6 = -6. -1$. Sehingga
   $6 = -(-6) = 6$.

2.6 Faktor Persekutuan Terbesar (FPB)

Dalam matematika, faktor perdekutuan terbersar (fpb) dari dua bilangan adalah bilangan bulat positif terbesar yang dapat membagi habis dua bilangan tersebut. Berikut diberikan definisi dan contoh faktor persekutuan terbesar (fpb) berdasarkan Munir (2004).

Definisi 2.6.1 (Faktor Persekutuan Terbesar)
Misalkan a dan b merupakan bilangan bulat tidak nol. Faktor persekutuan terbesar (fpb) dari a dan b adalah bilangan bulat terbesar c sedemikian sehingga $c|a$ dan $c|b$ dan dinotasikan dengan $\text{FPB}(a, b) = c$.

Contoh 2.6.2
Faktor pembagi 45: 1,3,5,9,15,45.
Faktor pembagi 36: 1,2,3,4,9,12,18,38.
Sehingga $\text{FPB}(45,36) = 9$.

2.7 Relatif Prima

Salah satu sifat pada bilangan bulat yaitu relatif prima. Berikut diberikan definisi dan contoh bilangan relatif prima berdasarkan Munir (2004).

Definisi 2.7.1
Dua bilangan bulat a dan b dikatakan relatif prima jika
$\mathrm{FPB}(a, b) = 1$ atau dapat dinotasikan dengan $(a, b) = 1$.

Contoh 2.7.2
Jika diambil $a = 20$ dan $b = 3$, maka 20 dan 3 relatif prima, karena $\mathrm{FPB}(20,3) = 1$

2.8 Aritmetika Modulo

Dalam matematika operasi modulo atau modulus adalah sebuah operasi yang menghasilkan sisa pembagian dari suatu bilangan terhadap bilangan lainnya. Berikut diberikan definisi dan contoh yang berkaitan dengan aritmetika modulo berdasarkan Munir (2004).

Definisi 2.8.1 (Operasi Modulo)
Misalkan a adalah bilangan bulat dan $m > 0$ merupakan bilanagn bulat. Operasi $a\ (mod\ m)$ memberikan sisa jika a dibagi dengan m. Notasi $a\ (mod\ m) = r$, dapat dinyatakan dengan $a = mq + r$, untuk suatu $q, r \in \mathbb{Z}$ dan $0 \leq r \leq m$. Bilangan m disebut modulo, hasil aritmetika modulo m terletak dalam himpunan $\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \dots, \overline{m-1}\}$.

Contoh 2.8.2
1. $23\ (mod\ 5) = 3$ dapat dinyatakan dengan $23 = 5.4 + 3$.
2. $0\ (mod\ 12) = 0$ dapat dinyatakan dengan $0 = 12.0 + 0$.
3. $-41\ (mod\ 9) = 4$ dapat dinyatakan dengan $-41 = 9.-5 + 4$.
4. $36\ (mod\ 12) = 0$ dapat dinyatakan dengan $36 = 12.3 + 0$.

2.9 Kongruensi

Kongruensi merupakan kelanjutan pada konsep keterbagian, dan didefinisikan berdasarkan konsep keterbagian. Berikut diberikan definisi dan contoh yang berkaitan dengan kongruensi berdasarkan Munir (2004).

Definisi 2.9.1 (Kongruen)
Misalkan $a, b,$ dan m merupakan bilangan bulat dengan $m > 0$. Jika $m|(a - b)$, maka $a \equiv b \ (mod\ m)$. Jika a tidak kongruen dengan b dalam modulo m, maka dinotasikan $a \not\equiv b(mod\ m)$. Kekongruenan $a \equiv b \ (mod\ m)$ dapat juga dinyatakan dalam hubungan
$a = b + km$, dengan k merupakan bilangan bulat.

Contoh 2.9.2
1. $17 \equiv 2 \ (mod\ 3)$, karena $3|(17 - 2)$.
2. $-7 \equiv 15 \ (mod\ 11)$, karena $11|(-7 - 15)$.
3. $12 \equiv 2 \ (mod\ 7)$, karena $7 \nmid (12 - 2)$.

Teorema 2.9.3
Misalkan $a, b,$ dan m merupakan bilangan bulat dengan $m > 0$. Jika $a \equiv b \ (mod\ m)$ dan c adalah sembarang bilangan bulat, maka:
1. $(a + c) \equiv (b + c)(mod\ m)$.
2. $ac \equiv bc(mod\ m)$.

Bukti:
1. Diketahui $a \equiv b \ (mod\ m)$, berdasarkan Definisi 2.9.1 berarti,
   $a = b + km$
   $a + c = b + km + c$
   $(a + c) = (b + c) + km$, sehingga $(a + c) \equiv (b + c)(mod\ m)$.
2. Diketahui $a \equiv b \ (mod\ m)$, berdasarkan Definisi 2.9.1 berarti,
   $a = b + km$
   $a - b = km$
   $(a - b)c = (km)c$
   $ac - bc = (ck)m$
   $ac = bc + xm$, sehingga $ac \equiv bc(mod\ m)$. ■

Contoh 2.9.4
1. Jika $17 \equiv 2 \ (mod\ 3)$, maka
   $17 + 5 \equiv 2 + 5 \ (mod\ 3) \Leftrightarrow 22 \equiv 7(mod\ 3)$.
2. Jika $17 \equiv 2 \ (mod\ 3)$, maka
   $17.5 \equiv 2.5 \ (mod\ 3) \Leftrightarrow 85 \equiv 10(mod\ 3)$.

Teorema 2.9.5
Misalkan $a, b,$ dan m merupakan bilangan bulat dengan $m > 0$. Jika $a \equiv b\ (mod\ m)$ dan $c \equiv d\ (mod\ m)$, maka:
1. $(a + c) \equiv (b + d)(mod\ m)$.
2. $ac \equiv bd(mod\ m)$.

Bukti:
1. Diketahui $a \equiv b\ (mod\ m)$ dan $c \equiv d\ (mod\ m)$, berdasarkan Definisi 2.9.1 berarti $a = b + k_1 m$ dan $c = d + k_2 m$.
   $(a + c) = b + k_1 m + d + k_2 m$
   $(a + c) = (b + d) + k_1 m + k_2 m$
   $(a + c) = (b + d) + (k_1 + k_2)m$
   $(a + c) = (b + d) + km, k = k_1 + k_2$, sehingga
   $(a + c) \equiv (b + d)(mod\ m)$.
2. Diketahui $a \equiv b\ (mod\ m)$ dan $c \equiv d\ (mod\ m)$, berdasarkan Definisi 2.9.1 berarti $a = b + k_1 m$ dan $c = d + k_2 m$.
   $(a.c) = (b + k_1 m).(d + k_2 m)$
   $(a.c) = (b.d) + dk_1 m + dk_2 m + k_1 m.k_2 m$
   $(a.c) = (b.d) + km, k = dk_1 m + dk_2 m + k_1 m.k_2 m,$
   sehingga $(ac) \equiv (bd)(mod\ m)$. ■

Contoh 2.9.6
1. Jika $17 \equiv 2\ (mod\ 3)$ dan $10 \equiv 4\ (mod\ 3)$, maka
   $17 + 10 \equiv 2 + 4\ (mod\ 3) \Leftrightarrow 27 \equiv 6(mod\ 3)$.
2. Jika $17 \equiv 2\ (mod\ 3)$ dan $10 \equiv 4\ (mod\ 3)$, maka
   $17.10 \equiv 2.4\ (mod\ 3) \Leftrightarrow 170 \equiv 8(mod\ 3)$.

2.10 Grupoid $\mathbb{Z}_n(\bar{t}, \bar{u})$

Salah satu jenis struktur aljabar adalah grupoid. Salah satu jenis grupoid yaitu grupoid $\mathbb{Z}_n(\bar{t}, \bar{u})$ yang akan berkaitan dengan pembahasan dalam skripsi ini. Berikut diberikan definisi dan contoh pada grupoid $\mathbb{Z}_n(\bar{t}, \bar{u})$ berdasarkan Kandasmy (2001).

Definisi 2.10.1 (Grupoid $\mathbb{Z}_n(\bar{t}, \bar{u})$)
Misalkan $\mathbb{Z}_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \dots, \overline{n-1}\}, n \geq \bar{3}$. Grupoid $(\mathbb{Z}_n(\bar{t}, \bar{u}),*)$ merupakan grupoid dengan operasi biner $*$ yang didefinisikan sebagai berikut. $\forall \bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_n$ berlaku $\bar{a} * \bar{b} \equiv \overline{ta} + \overline{ub}\ (mod\ n)$ dengan $\bar{t}, \bar{u} \in \mathbb{Z}_n$. Grupoid $(\mathbb{Z}_n(\bar{t}, \bar{u}),*)$ dinotasikan dengan $\mathbb{Z}_n(\bar{t}, \bar{u})$.

Contoh 2.10.2

Diberikan himpunan $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$. Akan ditunjukkan $\mathbb{Z}_6(\bar{2}, \bar{3})$ merupakan grupoid.

Bukti:

Untuk membuktikan $\mathbb{Z}_6(\bar{2}, \bar{3})$ merupakan grupoid perhatikan tabel di bawah berikut.

Tabel 2.8 Hasil operasi biner $*$ pada $\mathbb{Z}_6(\bar{2}, \bar{3})$

$\overline{\boldsymbol{a}}$	$\overline{\boldsymbol{b}}$	$\overline{\boldsymbol{a}} * \overline{\boldsymbol{b}} \equiv \overline{\boldsymbol{ta}} + \overline{\boldsymbol{ub}}\ (\boldsymbol{mod\ n})$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0} * \bar{0} \equiv \bar{2} \cdot \bar{0} + \bar{3} \cdot \bar{0}\ (mod\ 6) = \bar{0}$
	$\bar{1}$	$\bar{0} * \bar{1} \equiv \bar{2} \cdot \bar{0} + \bar{3} \cdot \bar{1}\ (mod\ 6) = \bar{3}$
	$\bar{2}$	$\bar{0} * \bar{2} \equiv \bar{2} \cdot \bar{0} + \bar{3} \cdot \bar{2}\ (mod\ 6) = \bar{0}$
	$\bar{3}$	$\bar{0} * \bar{3} \equiv \bar{2} \cdot \bar{0} + \bar{3} \cdot \bar{3}\ (mod\ 6) = \bar{3}$
	$\bar{4}$	$\bar{0} * \bar{4} \equiv \bar{2} \cdot \bar{0} + \bar{3} \cdot \bar{4}\ (mod\ 6) = \bar{0}$
	$\bar{5}$	$\bar{0} * \bar{5} \equiv \bar{2} \cdot \bar{0} + \bar{3} \cdot \bar{5}\ (mod\ 6) = \bar{3}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1} * \bar{0} \equiv \bar{2} \cdot \bar{1} + \bar{3} \cdot \bar{0}\ (mod\ 6) = \bar{2}$
	$\bar{1}$	$\bar{1} * \bar{1} \equiv \bar{2} \cdot \bar{1} + \bar{3} \cdot \bar{1}\ (mod\ 6) = \bar{5}$
	$\bar{2}$	$\bar{1} * \bar{2} \equiv \bar{2} \cdot \bar{1} + \bar{3} \cdot \bar{2}\ (mod\ 6) = \bar{2}$
	$\bar{3}$	$\bar{1} * \bar{3} \equiv \bar{2} \cdot \bar{1} + \bar{3} \cdot \bar{3}\ (mod\ 6) = \bar{5}$
	$\bar{4}$	$\bar{1} * \bar{4} \equiv \bar{2} \cdot \bar{1} + \bar{3} \cdot \bar{4}\ (mod\ 6) = \bar{2}$
	$\bar{5}$	$\bar{1} * \bar{5} \equiv \bar{2} \cdot \bar{1} + \bar{3} \cdot \bar{5}\ (mod\ 6) = \bar{5}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2} * \bar{0} \equiv \bar{2} \cdot \bar{2} + \bar{3} \cdot \bar{0}\ (mod\ 6) = \bar{4}$
	$\bar{1}$	$\bar{2} * \bar{1} \equiv \bar{2} \cdot \bar{2} + \bar{3} \cdot \bar{1}\ (mod\ 6) = \bar{1}$
	$\bar{2}$	$\bar{2} * \bar{2} \equiv \bar{2} \cdot \bar{2} + \bar{3} \cdot \bar{2}\ (mod\ 6) = \bar{4}$
	$\bar{3}$	$\bar{2} * \bar{3} \equiv \bar{2} \cdot \bar{2} + \bar{3} \cdot \bar{3}\ (mod\ 6) = \bar{1}$
	$\bar{4}$	$\bar{2} * \bar{4} \equiv \bar{2} \cdot \bar{2} + \bar{3} \cdot \bar{4}\ (mod\ 6) = \bar{4}$
	$\bar{5}$	$\bar{2} * \bar{5} \equiv \bar{2} \cdot \bar{2} + \bar{3} \cdot \bar{5}\ (mod\ 6) = \bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3} * \bar{0} \equiv \bar{2} \cdot \bar{3} + \bar{3} \cdot \bar{0}\ (mod\ 6) = \bar{0}$
	$\bar{1}$	$\bar{3} * \bar{1} \equiv \bar{2} \cdot \bar{3} + \bar{3} \cdot \bar{1}\ (mod\ 6) = \bar{3}$
	$\bar{2}$	$\bar{3} * \bar{2} \equiv \bar{2} \cdot \bar{3} + \bar{3} \cdot \bar{2}\ (mod\ 6) = \bar{0}$
	$\bar{3}$	$\bar{3} * \bar{3} \equiv \bar{2} \cdot \bar{3} + \bar{3} \cdot \bar{3}\ (mod\ 6) = \bar{3}$
	$\bar{4}$	$\bar{3} * \bar{4} \equiv \bar{2} \cdot \bar{3} + \bar{3} \cdot \bar{4}\ (mod\ 6) = \bar{0}$
	$\bar{5}$	$\bar{3} * \bar{5} \equiv \bar{2} \cdot \bar{3} + \bar{3} \cdot \bar{5}\ (mod\ 6) = \bar{3}$

$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{a} * \bar{b} \equiv \overline{ta} + \overline{ub}\ (mod\ n)$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4} * \bar{0} \equiv \bar{2} \cdot \bar{4} + \bar{3} \cdot \bar{0}\ (mod\ 6) = \bar{2}$
	$\bar{1}$	$\bar{4} * \bar{1} \equiv \bar{2} \cdot \bar{4} + \bar{3} \cdot \bar{1}\ (mod\ 6) = \bar{5}$
	$\bar{2}$	$\bar{4} * \bar{2} \equiv \bar{2} \cdot \bar{4} + \bar{3} \cdot \bar{2}\ (mod\ 6) = \bar{2}$
	$\bar{3}$	$\bar{4} * \bar{3} \equiv \bar{2} \cdot \bar{4} + \bar{3} \cdot \bar{3}\ (mod\ 6) = \bar{5}$
	$\bar{4}$	$\bar{4} * \bar{4} \equiv \bar{2} \cdot \bar{4} + \bar{3} \cdot \bar{4}\ (mod\ 6) = \bar{2}$
	$\bar{5}$	$\bar{4} * \bar{5} \equiv \bar{2} \cdot \bar{4} + \bar{3} \cdot \bar{5}\ (mod\ 6) = \bar{5}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5} * \bar{0} \equiv \bar{2} \cdot \bar{5} + \bar{3} \cdot \bar{0}\ (mod\ 6) = \bar{4}$
	$\bar{1}$	$\bar{5} * \bar{1} \equiv \bar{2} \cdot \bar{5} + \bar{3} \cdot \bar{1}\ (mod\ 6) = \bar{1}$
	$\bar{2}$	$\bar{5} * \bar{2} \equiv \bar{2} \cdot \bar{5} + \bar{3} \cdot \bar{2}\ (mod\ 6) = \bar{4}$
	$\bar{3}$	$\bar{5} * \bar{3} \equiv \bar{2} \cdot \bar{5} + \bar{3} \cdot \bar{3}\ (mod\ 6) = \bar{1}$
	$\bar{4}$	$\bar{5} * \bar{4} \equiv \bar{2} \cdot \bar{5} + \bar{3} \cdot \bar{4}\ (mod\ 6) = \bar{4}$
	$\bar{5}$	$\bar{5} * \bar{5} \equiv \bar{2} \cdot \bar{5} + \bar{3} \cdot \bar{5}\ (mod\ 6) = \bar{1}$

Berdasarkan Tabel 2.8, maka pada $\mathbb{Z}_6(\bar{2},\bar{3})$ berlaku hukum tertutup, karena hasil operasi biner pada $\mathbb{Z}_6(\bar{2},\bar{3})$ juga merupakan anggota pada $\mathbb{Z}_6(\bar{2},\bar{3})$, sehingga $\mathbb{Z}_6(\bar{2},\bar{3})$ merupakan grupoid. ■

Teorema 2.10.3
Grupoid $\mathbb{Z}_n(\bar{t},\bar{u})$ merupakan semigrup jika dan hanya jika $\bar{t}^2 \equiv \bar{t}(mod\ n)$, $\bar{u}^2 \equiv \bar{u}(mod\ n)$ dengan $\bar{t},\bar{u} \in \mathbb{Z}_n \backslash \{\bar{0}\}$ dan (t,u) =1.

Bukti:

(⇒) Diketahui grupoid $\mathbb{Z}_n(\bar{t},\bar{u})$ merupakan semigrup. Akan ditunjukkan bahwa $\bar{t}^2 \equiv \bar{t}(mod\ n)$, $\bar{u}^2 \equiv \bar{u}(mod\ n)$ dengan $\bar{t},\bar{u} \in \mathbb{Z}_n \backslash \{0\}$ dan (t,u) =1.
Karena $\mathbb{Z}_n(\bar{t},\bar{u})$ merupakan semigrup, sehingga berlaku hukum asosiatif.
$\bar{a} * (\bar{b} * \bar{c}) = (\bar{a} * \bar{b}) * \bar{c}$
$\overline{ta} + \overline{utb} + \overline{u^2c}(mod\ n) = \overline{t^2a} + \overline{utb} + \overline{uc}(mod\ n)$
$(\bar{t} - \bar{t}^2)\bar{a} + (\bar{u}^2 - \bar{u})\bar{c}(mod\ n) = \bar{0}(mod\ n)$.
Dengan demikian didapat $\bar{t}^2 \equiv \bar{t}(mod\ n)$ dan $\bar{u}^2 \equiv \bar{u}(mod\ n)$.

(⇐) Diketahui $\bar{t}^2 \equiv \bar{t}(mod\ n)$, $\bar{u}^2 \equiv \bar{u}(mod\ n)$ dengan $\bar{t},\bar{u} \in \mathbb{Z}_n \backslash \{\bar{0}\}$ dan (t,u) =1. Akan ditunjukkan bahwa grupoid $\mathbb{Z}_n(\bar{t},\bar{u})$ merupakan semigrup.

Misalkan diambil $\bar{a},\bar{b},\bar{c} \in M$. Akan ditunjukkan
$\left(\bar{a} * \bar{b}\right) * \bar{c} = \bar{a} * (\bar{b} * \bar{c})$.

$$
\begin{aligned}
\left(\bar{a} * \bar{b}\right) * \bar{c} &\equiv \left(\bar{t}\bar{a} + \bar{u}\bar{b}\right)(mod\ n) * \bar{c} \\
&\equiv \overline{t^2a} + \overline{utb} + \overline{uc}(mod\ n) \\
&\equiv \overline{ta} + \overline{utb} + \overline{uc}(mod\ n), \text{ karena } \bar{t}^2 \equiv \bar{t}(mod\ n). \\
\bar{a} * (\bar{b} * \bar{c}) &\equiv \bar{a} * (\bar{t}\bar{b} + \bar{u}\bar{c})(mod\ n) \\
&\equiv \overline{ta} + \overline{utb} + \overline{u^2c}(mod\ n) \\
&\equiv \overline{ta} + \overline{utb} + \overline{uc}(mod\ n), \text{ karena } \bar{u}^2 \equiv \bar{u}(mod\ n).
\end{aligned}
$$

Berdasarkan uraian di atas maka terbukti grupoid $\mathbb{Z}_n(\bar{t},\bar{u})$ memenuhi aksioma asosiatif, sehingga grupoid $\mathbb{Z}_n(\bar{t},\bar{u})$ merupakan semigrup. ■

Contoh 2.10.4

Diberikan $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{5}\}$. Akan ditunjukkan grupoid $\mathbb{Z}_6(\bar{3},\bar{4})$ merupakan semigrup.

Bukti:

Pada grupoid $\mathbb{Z}_6(\bar{3},\bar{4})$, $\bar{3}^2 \equiv \bar{3}(mod\ 6), \bar{4}^2 \equiv \bar{4}(mod\ 6)$, dan $(3{,}4) = 1$. Untuk mempermudah dalam membuktikan grupoid $\mathbb{Z}_6(\bar{3},\bar{4})$ merupakan semigrup, perhatikan hasil operasi biner $*$ pada $\mathbb{Z}_6(\bar{3},\bar{4})$ pada tabel berikut.

Tabel 2.9 Hasil operasi biner $*$ pada $\mathbb{Z}_6(\bar{3},\bar{4})$

$*$	$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{\mathbf{1}}$	$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{\mathbf{3}}$	$\bar{\mathbf{4}}$	$\bar{\mathbf{5}}$
$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{\mathbf{1}}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{5}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{5}$
$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{\mathbf{3}}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{5}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{5}$
$\bar{\mathbf{4}}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{\mathbf{5}}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{5}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{5}$

Berdasarkan Tabel 2.9, berlaku aksioma asosiatif yaitu $\forall a,b,c \in \mathbb{Z}_6, \left(\bar{a} * \bar{b}\right) * \bar{c} = \bar{a} * \left(\bar{b} * \bar{c}\right)$. ■

2.11 Elemen Idempoten

Pembahasan elemen di dalam suatu struktur aljabar juga merupakan suatu hal yang penting untuk dilakukan penelitian.

Elemen di dalam suatu struktur aljabar dapat memenuhi sifat tertentu, misalnya elemen idempoten. Berikut diberikan definisi dan contoh elemen idempoten berdasarkan Andari (2015).

Definisi 2.11.1 (Elemen Idempoten)
Misalkan $(G,*)$ struktur aljabar dan $a \in G$. Elemen a disebut idempoten jika dan hanya jika $a * a = a$.

Contoh 2.11.2
Diberikan grupoid $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, +)$. Operasi biner $+$ pada $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ didefinisikan sebagai berikut.

$$\forall(\bar{a},\bar{b}),(\bar{c},\bar{d}) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3,$$
$$(\bar{a},\bar{b}) + (\bar{c},\bar{d}) = (\overline{a+c}, \overline{b+d})$$

Akan ditentukan elemen idempoten pada $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, +)$.
Bukti:
Untuk mempermudah dalam menentukan elemen idempoten pada $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, +)$, diberikan tabel hasil operasi biner berikut.

Tabel 2.10 Hasil operasi biner penjumlahan pada $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$

$+$	$(\bar{\mathbf{0}},\bar{\mathbf{0}})$	$(\bar{\mathbf{0}},\bar{\mathbf{1}})$	$(\bar{\mathbf{0}},\bar{\mathbf{2}})$	$(\bar{\mathbf{1}},\bar{\mathbf{0}})$	$(\bar{\mathbf{1}},\bar{\mathbf{1}})$	$(\bar{\mathbf{1}},\bar{\mathbf{2}})$
$(\bar{\mathbf{0}},\bar{\mathbf{0}})$	$(\bar{0},\bar{0})$	$(\bar{0},\bar{1})$	$(\bar{0},\bar{2})$	$(\bar{1},\bar{0})$	$(\bar{1},\bar{1})$	$(\bar{1},\bar{2})$
$(\bar{\mathbf{0}},\bar{\mathbf{1}})$	$(\bar{0},\bar{1})$	$(\bar{0},\bar{2})$	$(\bar{0},\bar{0})$	$(\bar{1},\bar{1})$	$(\bar{1},\bar{2})$	$(\bar{1},\bar{0})$
$(\bar{\mathbf{0}},\bar{\mathbf{2}})$	$(\bar{0},\bar{2})$	$(\bar{0},\bar{0})$	$(\bar{0},\bar{1})$	$(\bar{1},\bar{2})$	$(\bar{1},\bar{0})$	$(\bar{1},\bar{1})$
$(\bar{\mathbf{1}},\bar{\mathbf{0}})$	$(\bar{1},\bar{0})$	$(\bar{1},\bar{1})$	$(\bar{1},\bar{2})$	$(\bar{0},\bar{0})$	$(\bar{0},\bar{1})$	$(\bar{0},\bar{2})$
$(\bar{\mathbf{1}},\bar{\mathbf{1}})$	$(\bar{1},\bar{1})$	$(\bar{1},\bar{2})$	$(\bar{1},\bar{0})$	$(\bar{0},\bar{1})$	$(\bar{0},\bar{2})$	$(\bar{0},\bar{0})$
$(\bar{\mathbf{1}},\bar{\mathbf{2}})$	$(\bar{1},\bar{2})$	$(\bar{1},\bar{0})$	$(\bar{1},\bar{1})$	$(\bar{0},\bar{2})$	$(\bar{0},\bar{0})$	$(\bar{0},\bar{1})$

Berdasarkan Tabel 2.10, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ memenuhi aksioma tertutup sehingga $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ merupakan grupoid dan dapat ditentukan elemen idempoten pada $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, +)$ yaitu $(\bar{0},\bar{0})$, karena
$(\bar{0},\bar{0}) + (\bar{0},\bar{0}) = (\bar{0},\bar{0})$ sesuai dengan Definisi 2.11.1. ■

2.12 Elemen *Regular*/ Von Neumann dan Semigrup *Regular*/ Von Neumann

Elemen di dalam suatu struktur aljabar dapat memenuhi sifat tertentu, misalnya elemen *regular*. Berikut diberikan definisi dan contoh elemen *regular* berdasarkan Howie (1995) dan Von Neumann (1936).

Definisi 2.12.1 (Elemen *Regular*/ Von Neumann)
Misalkan S merupakan semigrup dan $x \in S$. x disebut elemen *regular* jika terdapat $y \in S$, sedemikian sehingga $x = xyx$.

Contoh 2.12.2
Diberikan semigrup $(\mathbb{Z}_4, \cdot)$ dengan hasil operasi biner dan uraian sebagai berikut.

Tabel 2.11 Hasil operasi biner pergandaan pada $\mathbb{Z}_4$

$\cdot$	$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{\mathbf{1}}$	$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{\mathbf{3}}$
$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{\mathbf{1}}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{\mathbf{3}}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

a. Tertutup.
   Misalkan $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_4$ dan $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, sehingga $\bar{a} = a + 4k_1$ dan $\bar{b} = b + 4k_2$. Maka $\mathbb{Z}_4$ terhadap operasi pergandaan memenuhi aksioma tertutup yang ditunjukkan sebagai berikut,
   $$\begin{aligned} \bar{a} \cdot \bar{b} &= (a + 4k_1) \cdot (b + 4k_2) \\ &= ab + a4k_2 + 4k_1 b + 4k_1 4k_2 \\ &= ab + 4(ak_2 + k_1 b + 4k_1 k_2) \\ &= ab + 4(z), \text{ misalkan } ak_2 + k_1 b + 4k_1 k_2 = z \in \mathbb{Z} \\ &= ab + 4z \in \mathbb{Z}_4 \end{aligned}$$
b. Asosiatif.
   Misalkan $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_4$, $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$, sehingga $\bar{a} = a + 4k_1$, $\bar{b} = b + 4k_2$ dan $\bar{c} = c + 4k_3$. Maka $\mathbb{Z}_4$ terhadap operasi pergandaan memenuhi aksioma asosiatif yang ditunjukkan sebagai berikut,
   $$\begin{aligned} (\bar{a} \cdot \bar{b}) \cdot \bar{c} &= \big((a + 4k_1) \cdot (b + 4k_2)\big) \cdot (c + 4k_3) \\ &= (ab + a4k_2 + 4k_1 b + 4k_1 4k_2) \cdot (c + 4k_3) \\ &= (ab)c + (ab)4k_3 + (a4k_2)c + (a4k_2)4k_3 + \\ &\quad (4k_1 b)c + (4k_1 b)4k_3 + (4k_1 4k_2)c + \\ &\quad (4k_1 4k_2)4k_3 \end{aligned}$$

$$= (ab)c + a(b4k_3) + a(4k_2c) + a(4k_24k_3) + (4k_1)bc + 4k_1(b4k_3) + 4k_1(4k_2c) + 4k_1(4k_24k_3)$$
$$= (a + 4k_1) \cdot (bc + b4k_3 + 4k_2c + 4k_24k_3$$
$$= (a + 4k_1) \cdot \left((b + 4k_2) \cdot (c + 4k_3)\right)$$
$$= \bar{a} \cdot \left(\bar{b} \cdot \bar{c}\right).$$

Akan ditentukan elemen *regular* pada $(\mathbb{Z}_4,\cdot)$.

Bukti:

Untuk mempermudah dalam menentukan elemen *regular* pada $(\mathbb{Z}_4,\cdot)$, maka diberikan tabel berikut.

Tabel 2.12 Hasil operasi syarat elemen *regular* pada $(\mathbb{Z}_4,\cdot)$

$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{x}$
$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{0} \cdot \bar{1} \cdot \bar{0} = \bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1} \cdot \bar{1} \cdot \bar{1} = \bar{1}$
$\bar{2}$	-	-
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{3} \cdot \bar{3} \cdot \bar{3} = \bar{3}$

Berdasarkan Tabel 2.12, maka elemen *regular* pada $(\mathbb{Z}_4,\cdot)$ adalah $\bar{0}, \bar{1}$, dan $\bar{3}$, karena pada elemen tersebut berlaku syarat elemen *regular*. ■

Definisi 2.12.3 (Semigrup *Regular*/ Von Neumann)

Misalkan S merupakan semigrup. S dikatakan semigrup *regular*/ Von Neumann jika dan hanya jika setiap elemen pada S merupakan elemen regular.

Contoh 2.12.4

Diberikan semigrup $(\mathbb{Z}_5,\cdot)$ hasil operasi biner dan uraian sebagai berikut.

Tabel 2.13 Hasil operasi pergandaan pada $\mathbb{Z}_5$

$\cdot$	$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{\mathbf{1}}$	$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{\mathbf{3}}$	$\bar{\mathbf{4}}$
$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{\mathbf{1}}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$

$\cdot$	$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{\mathbf{1}}$	$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{\mathbf{3}}$	$\bar{\mathbf{4}}$
$\bar{\mathbf{3}}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{\mathbf{4}}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

a. Tertutup.

Misalkan $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_5$ dan $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, sehingga $\bar{a} = a + 5k_1$ dan $\bar{b} = b + 5k_2$. Maka $\mathbb{Z}_5$ terhadap operasi pergandaan memenuhi aksioma tertutup yang ditunjukkan sebagai berikut,

$$
\begin{aligned}
\bar{a} \cdot \bar{b} &= (a + 5k_1) \cdot (b + 5k_2) \\
&= ab + a5k_2 + 5k_1b + 5k_15k_2 \\
&= ab + 5(ak_2 + k_1b + 5k_1k_2) \\
&= ab + 5(z), \text{ misalkan } ak_2 + k_1b + 5k_1k_2 = z \in \mathbb{Z} \\
&= ab + 5z \in \mathbb{Z}_5
\end{aligned}
$$

b. Asosiatif.

Misalkan $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_5$, $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$, sehingga $\bar{a} = a + 5k_1$, $\bar{b} = b + 5k_2$ dan $\bar{c} = c + 5k_3$. Maka $\mathbb{Z}_5$ terhadap operasi pergandaan memenuhi aksioma asosiatif yang ditunjukkan sebagai berikut,

$$
\begin{aligned}
(\bar{a} \cdot \bar{b}) \cdot \bar{c} &= \left((a + 5k_1) \cdot (b + 5k_2)\right) \cdot (c + 5k_3) \\
&= (ab + a5k_2 + 5k_1b + 5k_15k_2) \cdot (c + 5k_3) \\
&= (ab)c + (ab)5k_3 + (a5k_2)c + (a5k_2)5k_3 + \\
&\quad (5k_1b)c + (5k_1b)5k_3 + (5k_15k_2)c + \\
&\quad (5k_15k_2)5k_3 \\
&= (ab)c + a(b5k_3) + a(5k_2c) + a(5k_25k_3) + \\
&\quad (5k_1)bc + 5k_1(b5k_3) + 5k_1(5k_2c) + \\
&\quad 5k_1(5k_25k_3) \\
&= (a + 5k_1) \cdot (bc + b5k_3 + 5k_2c + 5k_25k_3 \\
&= (a + 5k_1) \cdot \left((b + 5k_2) \cdot (c + 5k_3)\right) \\
&= \bar{a} \cdot (\bar{b} \cdot \bar{c}).
\end{aligned}
$$

Akan ditunjukkan $(\mathbb{Z}_5,\cdot)$ merupakan semigrup *regular*/ Von Neumann.

Bukti:

Untuk mempermudah dalam menunjukkan $(\mathbb{Z}_5,\cdot)$ merupakan semigrup *regular*/ Von Neumann, maka diberikan tabel berikut.

Tabel 2.14 Hasil operasi syarat elemen *regular* pada $(\mathbb{Z}_5,\cdot)$

$\overline{x}$	$\overline{y}$	$\overline{x}\cdot\overline{y}\cdot\overline{x}$
$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{0}\cdot\overline{1}\cdot\overline{0}=\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{1}\cdot\overline{1}\cdot\overline{1}=\overline{1}$
$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{2}\cdot\overline{3}\cdot\overline{2}=\overline{2}$
$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{3}\cdot\overline{2}\cdot\overline{3}=\overline{3}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{4}\cdot\overline{4}\cdot\overline{4}=\overline{4}$

Berdasarkan Tabel 2.14, berlaku syarat $\forall x \in \mathbb{Z}_5$, $\exists y \in \mathbb{Z}_5$ sedemikian sehingga $x = xyx$. Oleh karena itu $(\mathbb{Z}_5,\cdot)$ merupakan semigrup *regular*/ Von Neumann. ■

2.13 Elemen *Commuting Regular* dan Semigrup *Commuting Regular*

Sifat elemen pada struktur aljabar dapat mempengaruhi sifat struktur aljabar tersebut. Berikut diberikan definisi dan contoh elemen *commuting regular* berdasarkan Dostie dan Pourfaraj (2007) dan semigrup *commuting regular* berdasarkan Doostie dan Pourfaraj (2006).

Definisi 2.13.1 (Elemen *Commuting Regular*)
Misalkan S semigrup dan $x, y \in S$. x dan y merupakan elemen *commuting regular* jika terdapat $z \in S$, berlaku $xy = yxzyx$.

Contoh 2.13.2
Diketahui $(\mathbb{Z}_5,\cdot)$ adalah semigrup. Akan ditentukan elemen *commuting regular* pada $(\mathbb{Z}_5,\cdot)$.
Bukti:
Untuk mempermudah dalam menentukan elemen *commuting regular* pada $(\mathbb{Z}_5,\cdot)$, maka diberikan tabel berikut.

Tabel 2.15 Hasil operasi syarat elemen *commuting regular* pada $(\mathbb{Z}_5,\cdot)$

$\overline{x}$ **dan** $\overline{y}$	$\overline{z}$	$\overline{x}\cdot\overline{y}$	$\overline{y}\cdot\overline{x}\cdot\overline{z}\cdot\overline{y}\cdot\overline{x}$
$\overline{0}$ dan $\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{0}\cdot\overline{0}=\overline{0}$	$\overline{0}\cdot\overline{0}\cdot\overline{1}\cdot\overline{0}\cdot\overline{0}=\overline{0}$
$\overline{0}$ dan $\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{0}\cdot\overline{1}=\overline{0}$	$\overline{1}\cdot\overline{0}\cdot\overline{1}\cdot\overline{1}\cdot\overline{0}=\overline{0}$
$\overline{0}$ dan $\overline{2}$	$\overline{1}$	$\overline{0}\cdot\overline{2}=\overline{0}$	$\overline{2}\cdot\overline{0}\cdot\overline{1}\cdot\overline{2}\cdot\overline{0}=\overline{0}$

$\boldsymbol{\bar{x}}$ **dan** $\boldsymbol{\bar{y}}$	$\boldsymbol{\bar{z}}$	$\boldsymbol{\bar{x} \cdot \bar{y}}$	$\boldsymbol{\bar{y} \cdot \bar{x} \cdot \bar{z} \cdot \bar{y} \cdot \bar{x}}$
$\bar{0}$ dan $\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{0} \cdot \bar{3} = \bar{0}$	$\bar{3} \cdot \bar{0} \cdot \bar{1} \cdot \bar{3} \cdot \bar{0} = \bar{0}$
$\bar{0}$ dan $\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{0} \cdot \bar{4} = \bar{0}$	$\bar{4} \cdot \bar{0} \cdot \bar{1} \cdot \bar{4} \cdot \bar{0} = \bar{0}$
$\bar{1}$ dan $\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1} \cdot \bar{1} = \bar{1}$	$\bar{1} \cdot \bar{1} \cdot \bar{1} \cdot \bar{1} \cdot \bar{1} = \bar{1}$
$\bar{1}$ dan $\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{1} \cdot \bar{2} = \bar{2}$	$\bar{2} \cdot \bar{1} \cdot \bar{3} \cdot \bar{2} \cdot \bar{1} = \bar{2}$
$\bar{1}$ dan $\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1} \cdot \bar{3} = \bar{3}$	$\bar{3} \cdot \bar{1} \cdot \bar{2} \cdot \bar{3} \cdot \bar{1} = \bar{3}$
$\bar{1}$ dan $\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{1} \cdot \bar{4} = \bar{4}$	$\bar{4} \cdot \bar{1} \cdot \bar{4} \cdot \bar{4} \cdot \bar{1} = \bar{4}$
$\bar{2}$ dan $\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{2} \cdot \bar{2} = \bar{4}$	$\bar{2} \cdot \bar{2} \cdot \bar{4} \cdot \bar{2} \cdot \bar{2} = \bar{4}$
$\bar{2}$ dan $\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{2} \cdot \bar{3} = \bar{1}$	$\bar{3} \cdot \bar{2} \cdot \bar{1} \cdot \bar{3} \cdot \bar{2} = \bar{1}$
$\bar{2}$ dan $\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{2} \cdot \bar{4} = \bar{3}$	$\bar{4} \cdot \bar{2} \cdot \bar{1} \cdot \bar{4} \cdot \bar{2} = \bar{3}$
$\bar{3}$ dan $\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{3} \cdot \bar{3} = \bar{4}$	$\bar{3} \cdot \bar{3} \cdot \bar{4} \cdot \bar{3} \cdot \bar{3} = \bar{4}$
$\bar{3}$ dan $\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{3} \cdot \bar{4} = \bar{2}$	$\bar{4} \cdot \bar{3} \cdot \bar{3} \cdot \bar{4} \cdot \bar{3} = \bar{2}$
$\bar{4}$ dan $\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{4} \cdot \bar{4} = \bar{1}$	$\bar{4} \cdot \bar{4} \cdot \bar{1} \cdot \bar{4} \cdot \bar{4} = \bar{1}$

Berdasarkan Tabel 2.15 elemen *commuting regular* pada $(\mathbb{Z}_5,\cdot)$ adalah semua pasangan $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_5$, karena $\forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_5, \exists \bar{z} \in \mathbb{Z}_5$ sehingga berlaku $\bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{y} \cdot \bar{x} \cdot \bar{z} \cdot \bar{y} \cdot \bar{x}$. ■

Contoh 2.13.3

Diberikan himpunan tak kosong $\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$. Diketahui $(\mathbb{Z}_4,\cdot)$ merupakan semigrup. Akan ditentukan elemen *commuting regular* pada $(\mathbb{Z}_4,\cdot)$.

Bukti:

Untuk mempermudah dalam menentukan elemen *commuting regular* pada $(\mathbb{Z}_4,\cdot)$, maka diberikan tabel berikut.

Tabel 2.16 Hasil operasi syarat elemen *commuting regular* pada $(\mathbb{Z}_4,\cdot)$

$\boldsymbol{\bar{x}}$ **dan** $\boldsymbol{\bar{y}}$	$\boldsymbol{\bar{z}}$	$\boldsymbol{\bar{x} \cdot \bar{y}}$	$\boldsymbol{\bar{y} \cdot \bar{x} \cdot \bar{z} \cdot \bar{y} \cdot \bar{x}}$
$\bar{0}$ dan $\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{0} \cdot \bar{0} = \bar{0}$	$\bar{0} \cdot \bar{0} \cdot \bar{1} \cdot \bar{0} \cdot \bar{0} = \bar{0}$
$\bar{0}$ dan $\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0} \cdot \bar{1} = \bar{0}$	$\bar{1} \cdot \bar{0} \cdot \bar{1} \cdot \bar{1} \cdot \bar{0} = \bar{0}$
$\bar{0}$ dan $\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{0} \cdot \bar{2} = \bar{0}$	$\bar{2} \cdot \bar{0} \cdot \bar{1} \cdot \bar{2} \cdot \bar{0} = \bar{0}$
$\bar{0}$ dan $\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{0} \cdot \bar{3} = \bar{0}$	$\bar{3} \cdot \bar{0} \cdot \bar{1} \cdot \bar{3} \cdot \bar{0} = \bar{0}$
$\bar{1}$ dan $\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1} \cdot \bar{1} = \bar{1}$	$\bar{1} \cdot \bar{1} \cdot \bar{1} \cdot \bar{1} \cdot \bar{1} = \bar{1}$
$\bar{1}$ dan $\bar{2}$	$-$	$\bar{1} \cdot \bar{2} = \bar{2}$	$-$
$\bar{1}$ dan $\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1} \cdot \bar{3} = \bar{3}$	$\bar{3} \cdot \bar{1} \cdot \bar{3} \cdot \bar{3} \cdot \bar{1} = \bar{3}$
$\bar{2}$ dan $\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{2} \cdot \bar{2} = \bar{0}$	$\bar{2} \cdot \bar{2} \cdot \bar{1} \cdot \bar{2} \cdot \bar{2} = \bar{0}$

$\bar{x}$ **dan** $\bar{y}$	$\bar{z}$	$\bar{x} \cdot \bar{y}$	$\bar{y} \cdot \bar{x} \cdot \bar{z} \cdot \bar{y} \cdot \bar{x}$
$\bar{2}$ dan $\bar{3}$	$-$	$\bar{2} \cdot \bar{3} = \bar{2}$	$-$
$\bar{3}$ dan $\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{3} \cdot \bar{3} = \bar{1}$	$\bar{3} \cdot \bar{3} \cdot \bar{1} \cdot \bar{3} \cdot \bar{3} = \bar{1}$

Berdasarkan Tabel 2.16 elemen *commuting regular* pada $(\mathbb{Z}_5,\cdot)$ adalah ($\bar{0}$ dan $\bar{0}$), ($\bar{0}$ dan $\bar{1}$), ($\bar{0}$ dan $\bar{2}$), ($\bar{0}$ dan $\bar{3}$), ($\bar{1}$ dan $\bar{1}$), ($\bar{1}$ dan $\bar{3}$), ($\bar{2}$ dan $\bar{2}$), ($\bar{3}$ dan $\bar{3}$). ■

Definisi 2.13.4 Semigrup *Commuting Regular*
Suatu semigrup S dikatakan semigrup *commuting regular* jika dan hanya jika $\forall x, y \in S$, $\exists z \in S$ sedemikian sehingga $xy = yxzyx$.

Contoh 2.13.5
Diketahui $(\mathbb{Z}_5,\cdot)$ adalah semigrup. Akan ditunjukkan $(\mathbb{Z}_5,\cdot)$ merupakan semigrup *commuting regular*.
Bukti:
Untuk membuktikan bahwa $(\mathbb{Z}_5,\cdot)$ merupakan semigrup *commuting regular*, maka harus dibuktikan $\forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_5$, $\exists \bar{z} \in \mathbb{Z}_5$ sedemikian sehingga $\bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{y} \cdot \bar{x} \cdot \bar{z} \cdot \bar{y} \cdot \bar{x}$. Hasil operasi syarat tersebut dapat dilihat pada Tabel 2.8. Berdasarkan Tabel 2.12 elemen *commuting regular* pada $(\mathbb{Z}_5,\cdot)$ adalah semua pasangan $\bar{x}, \bar{y} \in S$, karena $\forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_5, \exists \bar{z} \in \mathbb{Z}_5$ berlaku $\bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{y} \cdot \bar{x} \cdot \bar{z} \cdot \bar{y} \cdot \bar{x}$, sehingga $(\mathbb{Z}_5,\cdot)$ merupakan semigrup *commuting regular*. ■

BAB III
PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas definisi, contoh, teorema, proposisi, dan akibat yang berkaitan dengan elemen *commuting regular* pada grupoid $\mathbb{Z}_n(\bar{t},\bar{u})$ berdasarkan Pourfaraj (2012).

3.1 Elemen *Commuting Regular* pada Grupoid $\mathbb{Z}_{\boldsymbol{n}}(\bar{\boldsymbol{t}},\bar{\boldsymbol{u}})$

Pembahasan elemen di dalam suatu grupoid juga merupakan suatu hal yang penting untuk dilakukan penelitian. Elemen di dalam suatu grupoid dapat memenuhi sifat tertentu, misalnya elemen *commuting regular*. Berikut diberikan definisi, contoh, proposisi, dan akibat yang berhubungan dengan elemen *commuting regular* pada grupoid $\mathbb{Z}_n(\bar{t},\bar{u})$ berdasarkan Pourfaraj (2012).

Definisi 3.1.1 (Elemen *Commuting Regular* pada Grupoid)
Dua elemen x dan y pada grupoid G dikatakan *commuting regular* kiri jika terdapat $z \in G$, berlaku $xy = \big((yx)z\big)(yx)$. Dua elemen x dan y pada grupoid G dikatakan *commuting regular* kanan jika terdapat $z \in G$, berlaku $xy = (yx)(z(yx))$. Dua elemen x dan y pada grupoid G dikatakan *commuting regular* jika x dan y merupakan elemen *commuting regular* kiri dan kanan.

Contoh 3.1.2
Diberikan grupoid $\mathbb{Z}_3(\bar{1},\bar{2})$ yang hasil operasi binernya diberikan pada tabel berikut.

Tabel 3.1 Hasil operasi biner $*$ pada $\mathbb{Z}_3(\bar{1},\bar{2})$

$*$	$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{\mathbf{1}}$	$\bar{\mathbf{2}}$
$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$
$\bar{\mathbf{1}}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$

Akan dibuktikan bahwa $\bar{0}$ dan $\bar{1}$ merupakan elemen *commuting regular* kiri tapi bukan elemen *commuting regular* kanan, serta $\bar{0}$ dan $\bar{2}$ merupakan elemen *commuting regular* kanan tetapi bukan elemen *commuting regular* kiri.

Bukti:
Untuk membuktikan contoh di atas, perhatikan hasil operasi biner berikut.
$\bar{1} = \bar{1} * \bar{0} = \left((\bar{0} * \bar{1}) * \bar{2}\right) * (\bar{0} * \bar{1}) = (\bar{2} * \bar{2}) * \bar{2} = \bar{0} * \bar{2} = \bar{1}$, tetapi $(\bar{0} * \bar{1}) * \left(\bar{2} * (\bar{0} * \bar{1})\right) = \bar{2} * (\bar{2} * \bar{2}) = \bar{2} * \bar{0} = \bar{2}$, sehingaa $\bar{0}$ dan $\bar{1}$ merupakan elemen *commuting regular* kiri tapi bukan elemen *commuting regular* kanan.
$\bar{1} = \bar{0} * \bar{2} = (\bar{2} * \bar{0}) * \left(\bar{0} * (\bar{2} * \bar{0})\right) = \bar{2} * (\bar{0} * \bar{2}) = \bar{2} * \bar{1} = \bar{1}$, tetapi $\left((\bar{2} * \bar{0}) * \bar{0}\right) * (\bar{2} * \bar{0}) = (\bar{2} * \bar{0}) * \bar{2} = \bar{2} * \bar{2} = \bar{0}$, sehingaa $\bar{0}$ dan $\bar{2}$ merupakan elemen *commuting regular* kanan tapi bukan elemen *commuting regular* kiri. ■

Contoh 3.1.3
Diketahui $\mathbb{Z}_3(\bar{1}, \bar{1})$ merupakan grupoid. Akan ditunjukkan bahwa setiap elemen pada $\mathbb{Z}_3(\bar{1}, \bar{1})$ merupakan elemen *commuting regular*.
Bukti:
Sebelum ditunjukkan bahwa setiap elemen pada $\mathbb{Z}_3(\bar{1}, \bar{1})$ merupakan elemen *commuting regular*, perhatikan tabel hasil operasi biner pada $\mathbb{Z}_3(\bar{1}, \bar{1})$ berikut.

Tabel 3.2 Hasil operasi biner $*$ pada $\mathbb{Z}_3(\bar{1}, \bar{1})$

$*$	$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{\mathbf{1}}$	$\bar{\mathbf{2}}$
$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{\mathbf{1}}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa setiap elemen pada $\mathbb{Z}_3(\bar{1}, \bar{1})$ merupakan elemen *commuting regular* pada tabel berikut.

Tabel 3.3 Hasil operasi syarat elemen *commuting regular* pada $\mathbb{Z}_3(\bar{1}, \bar{1})$

$\bar{\boldsymbol{x}}$ **dan** $\bar{\boldsymbol{y}}$	$\bar{\boldsymbol{z}}$	$\bar{\boldsymbol{x}} * \bar{\boldsymbol{y}}$	$\left((\bar{\boldsymbol{y}} * \bar{\boldsymbol{x}}) * \bar{\boldsymbol{z}}\right) * (\bar{\boldsymbol{y}} * \bar{\boldsymbol{x}})$	$(\bar{\boldsymbol{y}} * \bar{\boldsymbol{x}}) * (\bar{\boldsymbol{z}} * (\bar{\boldsymbol{y}} * \bar{\boldsymbol{x}}))$
$\bar{0}$ dan $\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$ dan $\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$ dan $\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$ dan $\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$

$\bar{x}$ **dan** $\bar{y}$	$\bar{z}$	$\bar{x} * \bar{y}$	$\big((\bar{y} * \bar{x}) * \bar{z}\big) * (\bar{y} * \bar{x})$	$(\bar{y} * \bar{x}) * (\bar{z} * (\bar{y} * \bar{x}))$
$\bar{1}$ dan $\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$ dan $\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$ dan $\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$ dan $\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$ dan $\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$

Berdasarkan Tabel 3.3 $\forall x, y \in \mathbb{Z}_3$ berlaku $\bar{x} * \bar{y} = \big((\bar{y} * \bar{x}) * \bar{z}\big) * (\bar{y} * \bar{x})$ dan $\bar{x} * \bar{y} = (\bar{y} * \bar{x}) * (\bar{z} * (\bar{y} * \bar{x}))$, sehingga mengakibatkan untuk setiap elemen pada $\mathbb{Z}_3(\bar{1}, \bar{1})$ merupakan elemen *commuting regular*. ■

Proposisi 3.1.4

Grupoid $\mathbb{Z}_{p_1p_2}(\bar{1}, \overline{p_1})$ memiliki elemen *commuting regular* dengan $(p_1, p_2) = 1$, p_1 dan p_2 merupakan bilang bulat prima.

Bukti:

Misalkan diambil $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_{p_1p_2}$, dengan $\bar{a} = \bar{b} = \overline{kp_2}$ dengan $0 \le k \le p_1p_2$, sehingga

$$
\begin{aligned}
\bar{a} * \bar{b} &= \bar{a} * \bar{a} \\
&= \overline{kp_2} * \overline{kp_2} \\
&\equiv \overline{kp_2} + \overline{p_1kp_2} \,(mod\ p_1p_2) \\
&\equiv \overline{kp_2} (mod\ p_1p_2) \\
&\equiv \bar{a}\ (mod\ p_1p_2) \\
&= \bar{a}.
\end{aligned}
$$

Jadi a merupakan elemen idempoten. a dan a merupakan elemen *commuting regular* dengan uraian sebagai berikut.

$$
\begin{aligned}
\bar{a} * \bar{a} &= \big((\bar{a} * \bar{a}) * \bar{a}\big) * (\bar{a} * \bar{a}) \\
&= (\bar{a} * \bar{a}) * (\bar{a} * \bar{a}) \\
&= \bar{a} * \bar{a} = \bar{a}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{a} * \bar{a} &= (\bar{a} * \bar{a}) * (\bar{a} * (\bar{a} * \bar{a})) \\
&= (\bar{a} * \bar{a}) * (\bar{a} * \bar{a}) \\
&= \bar{a} * \bar{a} = \bar{a}.
\end{aligned}
$$

Karena $\bar{a}$ merupakan elemen idempoten, maka $\{\bar{a}\}$ merupakan semigrup *commuting regular*.

$(\bar{a} * \bar{a}) * \bar{a} \ = \bar{a} * \bar{a} = \bar{a}.$

$\bar{a} * (\bar{a} * \bar{a}) \ = \bar{a} * \bar{a} = \bar{a}.$ ■

Contoh 3.1.5

Misalkan diambil $p_1 = 5$, $p_2 = 2$, dan $(5,2) = 1$, sehingga $\mathbb{Z}_{p_1p_2}(\bar{1}, \overline{p_1}) = \mathbb{Z}_{10}(\bar{1}, \bar{5})$ merupakan grupoid yang hasil operasi binernya dapat dilihat pada tabel di bawah berikut.

Tabel 3.4 Hasil operasi biner $*$ pada $\mathbb{Z}_{10}(\bar{1}, \bar{5})$

$*$	$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{\mathbf{1}}$	$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{\mathbf{3}}$	$\bar{\mathbf{4}}$	$\bar{\mathbf{5}}$	$\bar{\mathbf{6}}$	$\bar{\mathbf{7}}$	$\bar{\mathbf{8}}$	$\bar{\mathbf{9}}$
$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$
$\bar{\mathbf{1}}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$
$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{2}$	$\bar{7}$	$\bar{2}$	$\bar{7}$	$\bar{2}$	$\bar{7}$	$\bar{2}$	$\bar{7}$	$\bar{2}$	$\bar{7}$
$\bar{\mathbf{3}}$	$\bar{3}$	$\bar{8}$	$\bar{3}$	$\bar{8}$	$\bar{3}$	$\bar{8}$	$\bar{3}$	$\bar{8}$	$\bar{3}$	$\bar{8}$
$\bar{\mathbf{4}}$	$\bar{4}$	$\bar{9}$	$\bar{4}$	$\bar{9}$	$\bar{4}$	$\bar{9}$	$\bar{4}$	$\bar{9}$	$\bar{4}$	$\bar{9}$
$\bar{\mathbf{5}}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$
$\bar{\mathbf{6}}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$
$\bar{\mathbf{7}}$	$\bar{7}$	$\bar{2}$	$\bar{7}$	$\bar{2}$	$\bar{7}$	$\bar{2}$	$\bar{7}$	$\bar{2}$	$\bar{7}$	$\bar{2}$
$\bar{\mathbf{8}}$	$\bar{8}$	$\bar{3}$	$\bar{8}$	$\bar{3}$	$\bar{8}$	$\bar{3}$	$\bar{8}$	$\bar{3}$	$\bar{8}$	$\bar{3}$
$\bar{\mathbf{9}}$	$\bar{9}$	$\bar{4}$	$\bar{9}$	$\bar{4}$	$\bar{9}$	$\bar{4}$	$\bar{9}$	$\bar{4}$	$\bar{9}$	$\bar{4}$

Akan ditentukan elemen *commuting regular* pada grupoid $\mathbb{Z}_{10}(\bar{1}, \bar{5})$.

Bukti:

Berdasarkan Tabel 3.4, dapat dilihat bahwa $\bar{0}$, $\bar{2}$, $\bar{4}$, $\bar{6}$, dan $\bar{8}$ adalah elemen idempoten. Jadi a dan b merupakan elemen *commuting regular* pada $\mathbb{Z}_{10}(\bar{1}, \bar{5})$ jika $a = b$ dan $a \in \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}\}$.■

Akibat 3.1.6

Grupoid $\mathbb{Z}_{p^2}(\bar{1}, \bar{p})$ memiliki elemen *commuting regular*.

Bukti:

Misalkan diambil $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_{p^2}$, dengan $\bar{a} = \bar{p}$ dan $\bar{b} = \bar{0}$. Akan ditunjukkan a dan b merupakan elemen *commuting regular*.

$$\begin{aligned}
\bar{a} * \bar{b} &= (\bar{b} * \bar{a}) * \bar{1} * (\bar{b} * \bar{a}) \\
&= (\bar{0} * \bar{p}) * \bar{1} * (\bar{0} * \bar{p}) \\
&\equiv (\bar{0} + \overline{p^2})(mod\ p^2) * \bar{0} * (\bar{0} + \overline{p^2})(mod\ p^2) \\
&\equiv \overline{p^2}(mod\ p^2)\ * \bar{1} * \overline{p^2}(mod\ p^2) \\
&\equiv (\overline{p^2 + p}\ (mod\ p^2)) * \overline{p^2} \\
&\equiv (\overline{p^2 + p}) + \overline{p^3}\ (mod\ p^2)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\equiv \bar{p}\ (mod\ p^2)\\
&= \bar{p}\\
&= \bar{a}.\\
\bar{b} * \bar{a} &= (\bar{a} * \bar{b}) * \overline{p(p-1)} * (\bar{a} * \bar{b})\\
&= (\bar{p} * \bar{0}) * \overline{p(p-1)} * (\bar{p} * \bar{0})\\
&\equiv (\bar{p} + \bar{0})(mod\ p^2) * \overline{p(p-1)} * (\bar{p} + \bar{0})(mod\ p^2)\\
&\equiv \bar{p}(mod\ p^2)\ * \overline{p(p-1)} * \bar{p}(mod\ p^2)\\
&\equiv (\overline{p + p\big(p(p-\bar{1})\big)}(mod\ p^2)) *\ \bar{p}(mod\ p^2)\\
&\equiv (\overline{p + p^3 - p^2}\ (mod\ p^2)) *\ \bar{p}(mod\ p^2)\\
&\equiv \bar{p} + \overline{p^3} - \overline{p^2} + \overline{p^2}\ (mod\ p^2)\\
&\equiv \bar{p} + \overline{p^3}\ (mod\ p^2)\\
&\equiv \bar{p}\ (mod\ p^2)\\
&= \bar{p}\\
&= \bar{a}.\\
\bar{a} * \bar{a} &\equiv \bar{p} + \overline{p^2}\ (mod\ p^2)\\
&\equiv \bar{p}\ (mod\ p^2)\\
&= \bar{p}\\
&= \bar{a}.\\
\bar{a} * \bar{b} &= \Big((\bar{b} * \bar{a}) * \bar{a}\Big) * (\bar{b} * \bar{a})\\
&= (\bar{a} * \bar{a}) * (\bar{a})\\
&= \bar{a} * \bar{a}\\
&= \bar{a}.\\
\bar{a} * \bar{b} &= (\bar{b} * \bar{a}) * (a * (\bar{b} * \bar{a}))\\
&= \bar{a} * (\bar{a} * \bar{a})\\
&= \bar{a} * \bar{a}\\
&= \bar{a}.
\end{aligned}
$$

Berdasarkan uraian di atas maka $\bar{a}$ dan $\bar{b}$ merupakan elemen *commuting regular*, dengan melakukan proses yang sama maka dapat dibuktikan $\bar{b}$ dan $\bar{a}$ juga merupakan elemen *commuting regular*. ■

Contoh 3.1.7

Misalkan diambil $p = 2$, sehingga $\mathbb{Z}_{p^2}(\bar{1}, \bar{p}) = \mathbb{Z}_4(\bar{1}, \bar{2})$ merupakan grupoid yang hasil operasi binernya dapat dilihat pada tabel berikut.

Tabel 3.5 Hasil operasi biner $*$ pada $\mathbb{Z}_4(\bar{1},\bar{2})$

$*$	$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{\mathbf{1}}$	$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{\mathbf{3}}$
$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{\mathbf{1}}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{\mathbf{3}}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$

Akan dibuktikan ($\bar{0}$ dan $\bar{0}$), ($\bar{0}$ dan $\bar{2}$), ($\bar{2}$ dan $\bar{0}$), dan ($\bar{2}$ dan $\bar{2}$) nerupakan elemen *commuting regular* pada $\mathbb{Z}_4(\bar{1},\bar{2})$.

Bukti:

Untuk mempermudah dalam membuktikan elemen *commuting regular* pada $\mathbb{Z}_4(\bar{1},\bar{2})$, maka perhatikan tabel berikut.

Tabel 3.6 Hasil operasi syarat elemen *commuting regular* pada $\mathbb{Z}_4(\bar{1},\bar{2})$

$\bar{x}$ **dan** $\bar{y}$	$\bar{z}$	$\bar{x}*\bar{y}$	$\left((\bar{y}*\bar{x})*\bar{z}\right)*(\bar{y}*\bar{x})$	$(\bar{y}*\bar{x})*(\bar{z}*(\bar{y}*\bar{x}))$
$\bar{0}$ dan $\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$ dan $\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$ dan $\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$ dan $\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$

Berdasarkan Tabel 3.6, maka terbukti bahwa ($\bar{0}$ dan $\bar{0}$), ($\bar{0}$ dan $\bar{2}$), ($\bar{2}$ dan $\bar{0}$), dan ($\bar{2}$ dan $\bar{2}$) merupakan elemen *commuting regular* pada $\mathbb{Z}_4(\bar{1},\bar{2})$. ■

Proposisi 3.1.8

Grupoid $\mathbb{Z}_n(\bar{1},\bar{p})$ memiliki elemen *commuting regular* dengan $p|n$.

Bukti:

Misalkan $n = tp$, berarti $\bar{t} \in \mathbb{Z}_n$. Kemudian diambil dua elemen yaitu $\bar{a},\bar{b} \in \mathbb{Z}_n$, dengan $\bar{a} = \bar{b} = \bar{t}$. Akan ditunjukkan $\bar{a}$ dan $\bar{b}$ merupakan elemen *commuting regular*.

$$\begin{aligned}\bar{a}*\bar{b} &= \bar{t}*\bar{t}\\ &\equiv \bar{t}+\overline{tp}\ (mod\ n)\\ &\equiv \bar{t}\ (mod\ n)\\ &= \bar{t}.\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\bar{b} * \bar{a} &= \bar{t} * \bar{t} \\
&\equiv \bar{t} + \overline{tp} \ (mod\ n) \\
&\equiv \bar{t} \ (mod\ n) = \bar{t}.
\end{aligned}
$$

Berdasarkan uraian sebelumnya maka $\bar{t}$ merupakan elemen idempoten.

$$
\begin{aligned}
\bar{a} * \bar{b} &= \left(\left(\bar{b} * \bar{a}\right) * \bar{a}\right) * (\bar{b} * \bar{a}) \\
&= \left((\bar{t} * \bar{t}) * \bar{t}\right) * (\bar{t} * \bar{t}) \\
&= (\bar{t} * \bar{t}) * \bar{t} \\
&= \bar{t} * \bar{t} \\
&= \bar{t} = \bar{a}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{a} * \bar{b} &= \left(\bar{b} * \bar{a}\right) * (a * \left(\bar{b} * \bar{a}\right)) \\
&= (\bar{t} * \bar{t}) * (\bar{t} * (\bar{t} * \bar{t})) \\
&= \bar{t} * (\bar{t} * \bar{t}) \\
&= \bar{t} * \bar{t} \\
&= \bar{t} = \bar{a}.
\end{aligned}
$$

Berdasarkan uraian di atas terbukti bahwa $\bar{a}$ dan $\bar{b}$ merupakan elemen *commuting regular* dengan $\bar{a} = \bar{b} = \bar{t}$, sehingga $\{\bar{a}\}$ merupakan semigrup *commuting regular*. ■

Contoh 3.1.9

Berdasarkan Contoh 3.1.5, $\bar{a}$ dan $\bar{b}$ merupakan elemen *commuting regular* pada $\mathbb{Z}_{10}(\bar{1}, \bar{5})$ jika $\bar{a} = \bar{b} = \bar{t}$ dan $a \in \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}\}$, sehingga $\{\bar{0}\}$, $\{\bar{2}\}$, $\{\bar{4}\}$, $\{\bar{6}\}$, $\{\bar{8}\}$ merupakan semigrup *commuting regular*.

Proposisi 3.1.10

Perhatikan grupoid $\mathbb{Z}_{2^2p}(\bar{1}, \bar{p})$. Jika $a \in \mathbb{Z}_{2^2p}$, maka $\{a\}$ merupakan semigrup *commuting regular*.

Bukti:

Misalkan diambil $\bar{a} = \bar{b} = \overline{2^2k} \in \mathbb{Z}_{2^2p}$, dengan $0 < k < p$. Akan dibuktikan $\{\bar{a}\}$ merupakan semigrup *commuting regular* dengan $\bar{a} \in \mathbb{Z}_{2^2p}$.

$$
\begin{aligned}
\bar{a} * \bar{b} &= \bar{a} * \bar{a} \\
&= \overline{2^2k} * \overline{2^2k} \\
&\equiv \overline{2^2k} + \overline{p2^2k} \ (mod\ 2^2p) \\
&\equiv \overline{2^2k} \ (mod\ 2^2p)
\end{aligned}
$$

$= \overline{2^2 k}$
$= \bar{a}.$
Berdasarkan uraian sebelumnya maka $\bar{a}$ merupakan elemen idempoten. Selanjutnya akan ditunjukkan $\bar{a}$ dan $\bar{a}$ merupakan elemen *commuting regular* pada $\mathbb{Z}_{2^2p}(\bar{1},\bar{p})$.

$$\begin{aligned}
\bar{a} * \bar{a} &= \big((\bar{a} * \bar{a}) * \bar{a}\big) * (\bar{a} * \bar{a}) \\
&= (\bar{a} * \bar{a}) * (\bar{a} * \bar{a}) \\
&= \bar{a} * \bar{a} \\
&= \bar{a}. \\
\bar{a} * \bar{a} &= (\bar{a} * \bar{a}) * (\bar{a} * (\bar{a} * \bar{a})) \\
&= (\bar{a} * \bar{a}) * (\bar{a} * \bar{a}) \\
&= \bar{a} * \bar{a} \\
&= \bar{a}.
\end{aligned}$$

Berdasarkan uraian di atas terbukti bahwa $\bar{a}$ dan $\bar{a}$ merupakan elemen *commuting regular* pada $\mathbb{Z}_{2^2p}(\bar{1},\bar{p})$, sehingga $\{\bar{a}\}$ merupakan semigrup *commuting regular*, karena memenuhi aksioma tertutup dan asosiatif berdasarkan uraian di atas. ■

Contoh 3.1.11
Misalkan diambil $p = 2$, sehingga $\mathbb{Z}_{2^2p}(\bar{1},\bar{p}) = \mathbb{Z}_8(\bar{1},\bar{2})$ merupakan grupoid. Akan ditunjukkan $\bar{a}$ dan $\bar{a}$ merupakan elemen *commuting regular* denga $\bar{a} = \bar{2}^2.\bar{1}$, serta akan ditunjukkan $\{\bar{a}\}$ merupakan semigrup *commuting regular* pada $\mathbb{Z}_8(\bar{1},\bar{2})$.
Bukti:
Untuk mempermudah dalam membuktikan $\bar{a}$ dan $\bar{a}$ merupakan elemen *commuting regular* denga $\bar{a} = \bar{2}^2.\bar{1}$, serta membuktikan $\{\bar{a}\}$ merupakan semigrup *commuting regular*, maka perhatikan tabel berikut.

Tabel 3.7 Hasil operasi biner $*$ pada $\mathbb{Z}_8(\bar{1},\bar{2})$

$*$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$	$\bar{7}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$	$\bar{7}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$	$\bar{7}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$	$\bar{7}$	$\bar{1}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$

$*$	$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{\mathbf{1}}$	$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{\mathbf{3}}$	$\bar{\mathbf{4}}$	$\bar{\mathbf{5}}$	$\bar{\mathbf{6}}$	$\bar{\mathbf{7}}$
$\bar{\mathbf{5}}$	$\bar{5}$	$\bar{7}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$	$\bar{7}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{\mathbf{6}}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{\mathbf{7}}$	$\bar{7}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$	$\bar{7}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$

Berdasarkan Tabel 3.7, $\bar{a} = \bar{2}^2 . \bar{1} = \bar{4}$ merupakan elemen idempoten. Selanjutnya akan ditunjukkan $\bar{4}$ dan $\bar{4}$ merupakan elemen *commuting regular* pada $\mathbb{Z}_8(\bar{1}, \bar{2})$.

$$\begin{aligned} \bar{4} * \bar{4} &= \left((\bar{4} * \bar{4}) * \bar{4}\right) * (\bar{4} * \bar{4}) \\ &= (\bar{4} * \bar{4}) * \bar{4} \\ &= \bar{4} * \bar{4} \\ &= \bar{4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{4} * \bar{4} &= (\bar{4} * \bar{4}) * (\bar{4} * (\bar{4} * \bar{4})) \\ &= \bar{4} * (\bar{4} * \bar{4}) \\ &= \bar{4} * \bar{4} \\ &= \bar{4}. \end{aligned}$$

Berdasarkan uraian di atas terbukti bahwa $\bar{4}$ dan $\bar{4}$ merupakan elemen *commuting regular* pada $\mathbb{Z}_8(\bar{1}, \bar{2})$, sehingga $\{\bar{4}\}$ merupakan semigrup *commuting regular*, karena memenuhi aksioma tertutup dan asosiatif berdasarkan uraian di atas. ∎

Proposisi 3.1.12

Perhatikan grupoid $\mathbb{Z}_{2p}(\overline{2p-2k}, \overline{2p-(2k-1)})$ dengan $0 < k < p$. Jika $\bar{p} \in \mathbb{Z}_{2p}$, maka $\{\bar{p}\}$ merupakan semigrup *commuting regular*.

Bukti:

Misalkan diambil $\bar{a} = \bar{b} = \bar{p} \in \mathbb{Z}_{2p}$, dengan $0 < k < p$. Akan dibuktikan $\{\bar{p}\}$ merupakan semigrup *commuting regular*.

$$\begin{aligned} \bar{a} * \bar{b} &= \bar{a} * \bar{a} \\ &= \bar{p} * \bar{p} \\ &\equiv \overline{(2p-2k)p} + \overline{(2p-2k+1)p} \ (mod\ 2p) \\ &\equiv \overline{2p^2} - \overline{2kp} + \overline{2kp^2} - \overline{2kp} + \bar{p} \ (mod\ 2p) \\ &\equiv \overline{2p^2} - \overline{4kp} + \overline{2kp^2} + \bar{p} \ (mod\ 2p) \\ &\equiv \bar{p} \ (mod\ 2p) \\ &= \bar{p} \\ &= \bar{a}. \end{aligned}$$

Berdasarkan uraian di atas terbukti bahwa $\bar{a} = \bar{p}$ merupakan elemen idempoten. Selanjutnya akan ditunjukkan $\bar{a}$ dan $\bar{a}$ merupakan elemen *commuting regular* pada $\mathbb{Z}_{2p}(\overline{2p-2k}, \overline{2p-(2k-1)})$.

$$\begin{aligned}
\bar{a} * \bar{a} &= \big((\bar{a} * \bar{a}) * \bar{a}\big) * (\bar{a} * \bar{a}) \\
&= (\bar{a} * \bar{a}) * (\bar{a} * \bar{a}) \\
&= \bar{a} * \bar{a} \\
&= \bar{a}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{a} * \bar{a} &= (\bar{a} * \bar{a}) * (\bar{a} * (\bar{a} * \bar{a})) \\
&= (\bar{a} * \bar{a}) * (\bar{a} * \bar{a}) \\
&= \bar{a} * \bar{a} \\
&= \bar{a}.
\end{aligned}$$

Berdasarkan uraian di atas terbukti bahwa $\bar{a}$ dan $\bar{a}$ merupakan elemen *commuting regular* pada $\mathbb{Z}_{2p}(\overline{2p-2k}, \overline{2p-(2k-1)})$, sehingga $\{\bar{a} = \bar{p}\}$ merupakan semigrup *commuting regular*, karena memenuhi aksioma tertutup dan asosiatif. ■

Contoh 3.1.13

Misalkan diambil $k = 1$ dan $p = 2$, sehingga
$\mathbb{Z}_{2p}\big(\overline{2p-2k}, \overline{2p-(2k-1)}\big) = \mathbb{Z}_4(\bar{2}, \bar{3})$ merupakan grupoid. Akan dibuktikan $\{\bar{2}\}$ merupakan semigrup *commuting regular*.

Bukti:

Untuk mempermudah dalam membuktikan $\{\bar{2}\}$ merupakan semigrup *commuting regular*, maka perhatikan tabel berikut.

Tabel 3.8 Hasil operasi biner $*$ pada $\mathbb{Z}_4(\bar{2}, \bar{3})$

$*$	$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{\mathbf{1}}$	$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{\mathbf{3}}$
$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$
$\bar{\mathbf{1}}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$
$\bar{\mathbf{3}}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$

Berdasarkan Tabel 3.8, $\bar{2}$ merupakan elemen idempoten. Selanjutnya akan ditunjukkan $\bar{2}$ dan $\bar{2}$ merupakan elemen *commuting regular* pada $\mathbb{Z}_4(\bar{2}, \bar{3})$.

$$\begin{aligned}
\bar{2} * \bar{2} &= \big((\bar{2} * \bar{2}) * \bar{2}\big) * (\bar{2} * \bar{2}) \\
&= (\bar{2} * \bar{2}) * \bar{2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \bar{2} * \bar{2} \\
&= \bar{2}. \\
\bar{2} * \bar{2} &= (\bar{2} * \bar{2}) * (\bar{2} * (\bar{2} * \bar{2})) \\
&= \bar{2} * (\bar{2} * \bar{2}) \\
&= \bar{2} * \bar{2} \\
&= \bar{2}.
\end{aligned}
$$

Berdasarkan uraian di atas terbukti bahwa $\bar{2}$ dan $\bar{2}$ merupakan elemen *commuting regular* pada $\mathbb{Z}_4(\bar{2},\bar{3})$, sehingga $\{\bar{2}\}$ merupakan semigrup *commuting regular*, karena memenuhi aksioma tertutup dan asosiatif berdasarkan uraian di atas. ■

Proposisi 3.1.14

Perhatikan grupoid $\mathbb{Z}_{2p}(\bar{2},\overline{2p-1})$. Jika $\bar{a} \in \mathbb{Z}_{2p}$, maka $\{\bar{a}\}$ merupakan semigrup *commuting regular*.

Bukti:

Misalkan diambil $\bar{a} \in \mathbb{Z}_{2p}$, akan dibuktikan $\{\bar{a}\}$ merupakan semigrup *commuting regular*.

$$
\begin{aligned}
\bar{a} * \bar{a} &\equiv \overline{2a} + \overline{(2p-1)a}\ (mod\ 2p) \\
&\equiv \overline{2a} + \overline{2p} - \bar{a}\ (mod\ 2p) \\
&\equiv \bar{a} + \overline{2p}\ (mod\ 2p) \\
&\equiv \bar{a}\ (mod\ 2p) \\
&= \bar{a}.
\end{aligned}
$$

Berdasarkan uraian di atas maka $\bar{a}$ merupakan elemen idempoten. Selanjutnya akan ditunjukkan $\bar{a}$ dan $\bar{a}$ merupakan elemen *commuting regular* pada $\mathbb{Z}_{2p}(\bar{2},\overline{2p-1})$.

$$
\begin{aligned}
\bar{a} * \bar{a} &= \big((\bar{a} * \bar{a}) * \bar{a}\big) * (\bar{a} * \bar{a}) \\
&= (\bar{a} * \bar{a}) * (\bar{a} * \bar{a}) \\
&= \bar{a} * \bar{a} \\
&= \bar{a}. \\
\bar{a} * \bar{a} &= (\bar{a} * \bar{a}) * (\bar{a} * (\bar{a} * \bar{a})) \\
&= (\bar{a} * \bar{a}) * (\bar{a} * \bar{a}) \\
&= \bar{a} * \bar{a} \\
&= \bar{a}.
\end{aligned}
$$

Berdasarkan uraian di atas, $\bar{a}$ dan $\bar{a}$ merupakan elemen *commuting regular* pada $\mathbb{Z}_{2p}(\bar{2},\overline{2p-1})$, sehingga $\{\bar{a}\}$ merupakan semigrup *commuting regular*, karena memenuhi aksioma tertutup dan asosiatif berdasarkan uraian di atas. ■

Contoh 3.1.15
Misalkan diambil $p = 2$, sehingga $\mathbb{Z}_{2p}(\bar{2}, \overline{2p-1})= \mathbb{Z}_4(\bar{2}, \bar{3})$ merupakan grupoid. Berdasarkan Contoh 3.1.13, $\{\bar{2}\}$ merupakan semigrup *commuting regular*.

Proposisi 3.1.16
Perhatikan grupoid $\mathbb{Z}_{2p}(\overline{2p-2k}, \overline{2p+1-2r})$ dengan $0 < k, r < p$. Jika $\bar{p} \in \mathbb{Z}_{2p}$ maka $\{\bar{p}\}$ merupakan semigrup *commuting regular*.
Bukti:
Misalkan diambil $\bar{a} = \bar{b} = \bar{p} \in \mathbb{Z}_{2p}$, dengan $0 < k, r < p$. Akan dibuktikan $\{\bar{p}\}$ merupakan semigrup *commuting regular*.

$$\begin{aligned}
\bar{a} * \bar{b} &= \bar{a} * \bar{a} \\
&= \bar{p} * \bar{p} \\
&= \overline{(2p-2k)p} + \overline{(2p+1-2r)p}\ (mod\ 2p) \\
&= \overline{2p^2} - \overline{2kp} + \overline{2p^2} + \bar{p} - \overline{2rp}\ (mod\ 2p) \\
&= \overline{4p^2} - \overline{2kp} + \bar{p} - \overline{2rp}\ (mod\ 2p) \\
&\equiv \bar{p}\ (mod\ 2p) \\
&= \bar{p} \\
&= \bar{a}.
\end{aligned}$$

Berdasarkan uraian di atas terbukti bahwa $\bar{a} = \bar{p}$ merupakan elemen idempoten. Selanjutnya akan ditunjukkan $\bar{a}$ dan $\bar{a}$ merupakan elemen *commuting regular* pada $\mathbb{Z}_{2p}(\overline{2p-2k}, \overline{2p+1-2r})$.

$$\begin{aligned}
\bar{a} * \bar{a} &= \big((\bar{a} * \bar{a}) * \bar{a}\big) * (\bar{a} * \bar{a}) \\
&= (\bar{a} * \bar{a}) * (\bar{a} * \bar{a}) \\
&= \bar{a} * \bar{a} \\
&= \bar{a}. \\
\bar{a} * \bar{a} &= (\bar{a} * \bar{a}) * (\bar{a} * (\bar{a} * \bar{a})) \\
&= (\bar{a} * \bar{a}) * (\bar{a} * \bar{a}) \\
&= \bar{a} * \bar{a} \\
&= \bar{a}.
\end{aligned}$$

Berdasarkan uraian di atas terbukti bahwa $\bar{a}$ dan $\bar{a}$ merupakan elemen *commuting regular* pada $\mathbb{Z}_{2p}(\overline{2p-2k}, \overline{2p+1-2r})$, sehingga $\{\bar{a} = \bar{p}\}$ merupakan semigrup *commuting regular*, karena memenuhi aksioma tertutup dan asosiatif berdasarkan uraian di atas. ■

Contoh 3.1.17
Misalkan diambil $p = 3$, $k = 2$, dan $r = 1$ sehingga $\mathbb{Z}_{2p}\left(\overline{2p-2k}, \overline{2p+1-2r}\right) = \mathbb{Z}_6(\bar{2}, \bar{5})$ merupakan grupoid. Akan dibuktikan $\{\bar{3}\}$ merupakan semigrup *commuting regular*.
Bukti:
Untuk mempermudah dalam membuktikan $\{\bar{3}\}$ merupakan semigrup *commuting regular*, maka perhatikan tabel berikut.

Tabel 3.9 Hasil operasi biner $*$ pada $\mathbb{Z}_6(\bar{2}, \bar{5})$

$*$	$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{\mathbf{1}}$	$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{\mathbf{3}}$	$\bar{\mathbf{4}}$	$\bar{\mathbf{5}}$
$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$
$\bar{\mathbf{1}}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$
$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$
$\bar{\mathbf{3}}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$
$\bar{\mathbf{4}}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$
$\bar{\mathbf{5}}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$

Berdasarkan Tabel 3.9, $\bar{3}$ merupakan elemen idempoten. Selanjutnya akan ditunjukkan $\bar{3}$ dan $\bar{3}$ merupakan elemen *commuting regular* pada $\mathbb{Z}_6(\bar{2}, \bar{5})$.

$$\begin{aligned}
\bar{3} * \bar{3} &= \left((\bar{3} * \bar{3}) * \bar{3}\right) * (\bar{3} * \bar{3}) \\
&= (\bar{3} * \bar{3}) * \bar{3} \\
&= \bar{3} * \bar{3} \\
&= \bar{3}. \\
\bar{3} * \bar{3} &= (\bar{3} * \bar{3}) * (\bar{3} * (\bar{3} * \bar{3})) \\
&= \bar{3} * (\bar{3} * \bar{3}) \\
&= \bar{3} * \bar{3} \\
&= \bar{3}.
\end{aligned}$$

Berdasarkan uraian di atas terbukti bahwa $\bar{3}$ dan $\bar{3}$ merupakan elemen *commuting regular* pada $\mathbb{Z}_6(\bar{2}, \bar{5})$, sehingga $\{\bar{3}\}$ merupakan semigrup *commuting regular*, karena memenuhi aksioma tertutup dan asosiatif berdasarkan uraian di atas. ■

Proposisi 3.1.18
Grupoid $\mathbb{Z}_n(\bar{t}, \bar{u})$ memuat suatu subsemigrup *commuting regular*, jika $\bar{t} + \bar{u} \equiv \bar{1} (mod\ n)$ dengan $\bar{t}, \bar{u} \in \mathbb{Z}_n \backslash \{\bar{0}\}$ dan $t < n$.

Bukti:
Misalkan diambil $\bar{a} = \bar{b} = \overline{kn} \in \mathbb{Z}_n$. Akan ditunjukkan grupoid $\mathbb{Z}_n(\bar{t}, \bar{u})$ memuat suatu subsemigrup *commuting regular*, jika $\bar{t} + \bar{u} \equiv \bar{1}(mod\ n)$ dengan $\bar{t}, \bar{u} \in \mathbb{Z}_n \backslash \{\bar{0}\}$ dan $t < n$.

$$\begin{aligned} \bar{a} * \bar{b} &= \bar{a} * \bar{a} \\ &= \overline{kn} * \overline{kn} \\ &\equiv \overline{tkn} + \overline{ukn}\ (mod\ n) \\ &\equiv \overline{kn(t+u)}(mod\ n) \\ &\equiv \overline{kn}\ (mod\ n) \\ &= \overline{kn} = \bar{a} \end{aligned}$$

Berdasarkan uraian sebelumnya terbukti bahwa $\bar{a} = \overline{kn}$ merupakan elemen idempoten. Selanjutnya akan ditunjukkan $\bar{a}$ dan $\bar{a}$ merupakan elemen *commuting regular* pada $\mathbb{Z}_n(\bar{t}, \bar{u})$.

$$\begin{aligned} \bar{a} * \bar{a} &= \big((\bar{a} * \bar{a}) * \bar{a}\big) * (\bar{a} * \bar{a}) \\ &= (\bar{a} * \bar{a}) * (\bar{a} * \bar{a}) \\ &= \bar{a} * \bar{a} \\ &= \bar{a}. \\ \bar{a} * \bar{a} &= (\bar{a} * \bar{a}) * (\bar{a} * (\bar{a} * \bar{a})) \\ &= (\bar{a} * \bar{a}) * (\bar{a} * \bar{a}) \\ &= \bar{a} * \bar{a} \\ &= \bar{a}. \end{aligned}$$

Berdasarkan uraian di atas terbukti bahwa $\bar{a}$ dan $\bar{a}$ merupakan elemen *commuting regular* pada $\mathbb{Z}_n(\bar{t}, \bar{u})$, sehingga $\{\bar{a}\}$ merupakan semigrup *commuting regular*, karena memenuhi aksioma tertutup dan asosiatif berdasarkan uraian di atas. Karena merupakan semigrup *commuting regular*, maka $\{\bar{a}\}$ juga merupakan subsemigrup *commuting regular*. ■

Contoh 3.1.19
Misalkan diambil $n = 6$, $\bar{t} = \bar{2}$, dan $\bar{u} = \bar{5}$ maka $\bar{2} + \bar{5} \equiv \bar{1}(mod\ 6)$, sehingga $\mathbb{Z}_6(\bar{2}, \bar{5})$ merupakan grupoid. Akan ditentukan subsemigrup *commuting regular* dari grupoid $\mathbb{Z}_6(\bar{2}, \bar{5})$.
Bukti:
Untuk mempermudah dalam menentukan subsemigrup *commuting regular* dari grupoid $\mathbb{Z}_6(\bar{2}, \bar{5})$, maka perhatikan Tabel 3.7 dan tabel berikut.

Tabel 3.10 Hasil operasi syarat subsemigrup *commuting regular* dari grupoid $\mathbb{Z}_6(\bar{2}, \bar{5})$

$\{\bar{\boldsymbol{a}}\}$	$\bar{\boldsymbol{a}} * \bar{\boldsymbol{a}}$	$\bar{\boldsymbol{a}} * (\bar{\boldsymbol{a}} * \bar{\boldsymbol{a}})$	$(\bar{\boldsymbol{a}} * \bar{\boldsymbol{a}}) * \bar{\boldsymbol{a}}$
$\{\bar{0}\}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\{\bar{1}\}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$
$\{\bar{2}\}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$
$\{\bar{3}\}$	$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{3}$
$\{\bar{4}\}$	$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{4}$
$\{\bar{5}\}$	$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{5}$

Berdasarkan Tabel 3.10, dapat dilihat $\{\bar{0}\}$, $\{\bar{1}\}$, $\{\bar{2}\}$, $\{\bar{3}\}$, $\{\bar{4}\}$, dan $\{\bar{5}\}$ merupakan subsemigrup *commuting regular*. ■

Proposisi 3.1.20
Grupoid $\mathbb{Z}_n(\bar{t}, \bar{u})$ dengan $\bar{t}^2 = \bar{t}$, $\bar{u}^2 = \bar{u}$, dan $\bar{t}, \bar{u} \in \mathbb{Z}_n \backslash \{\bar{0}\}$ memuat elemen *commuting regular*.
Bukti:
Misalkan diambil $\bar{a} = \bar{b} = \overline{ntu} \in \mathbb{Z}_n$. Akan dibuktikan grupoid $\mathbb{Z}_n(\bar{t}, \bar{u})$ memuat elemen *commuting regular* dengan $\bar{t}^2 = \bar{t}$, $\bar{u}^2 = \bar{u}$, dan $\bar{t}, \bar{u} \in \mathbb{Z}_n \backslash \{\bar{0}\}$.

$$\bar{t}^2 = \bar{t} * \bar{t} = \bar{t}$$
$$\bar{u}^2 = \bar{u} * \bar{u} = \bar{u}$$
$$\begin{aligned}
\bar{a} * \bar{b} &= \bar{a} * \bar{a} \\
&= \overline{ntu} * \overline{ntu} \\
&\equiv \overline{nt^2u} + \overline{ntu^2} \ (mod\ n) \\
&\equiv \overline{ntu} + \overline{ntu} \ (mod\ n) \\
&\equiv \overline{ntu} \ (mod\ n) \\
&= \bar{a}.
\end{aligned}$$

Berdasarkan uraian di atas terbukti bahwa $\bar{a} = \overline{ntu}$ merupakan elemen idempoten. Selanjutnya akan ditunjukkan $\bar{a}$ dan $\bar{a}$ merupakan elemen *commuting regular* pada $\mathbb{Z}_n(\bar{t}, \bar{u})$.

$$\begin{aligned}
\bar{a} * \bar{a} &= \big((\bar{a} * \bar{a}) * \bar{a}\big) * (\bar{a} * \bar{a}) \\
&= (\bar{a} * \bar{a}) * (\bar{a} * \bar{a}) \\
&= \bar{a} * \bar{a} = \bar{a}.
\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}
\bar{a} * \bar{a} &= (\bar{a} * \bar{a}) * (\bar{a} * (\bar{a} * \bar{a})) \\
&= (\bar{a} * \bar{a}) * (\bar{a} * \bar{a}) \\
&= \bar{a} * \bar{a} = \bar{a}.
\end{aligned}$$

Berdasarkan uraian tersebut terbukti bahwa $\bar{a}$ dan $\bar{a}$ merupakan elemen *commuting regular* pada $\mathbb{Z}_n(\bar{t}, \bar{u})$. ■

Contoh 3.1.21

Diberikan grupoid $\mathbb{Z}_6(\bar{2}, \bar{5})$. Berdasarkan Tabel 3.7 setiap elemen pada grupoid $\mathbb{Z}_6(\bar{2}, \bar{5})$ merupakan elemen idempoten. Akan dibuktikan untuk setiap $\bar{a} = \bar{b} \in \mathbb{Z}_6$, $\bar{a}$ dan $\bar{b}$ merupakan elemen *commuting regular* pada $\mathbb{Z}_6(\bar{2}, \bar{5})$.

Bukti:

Untuk mempermudah dalam membuktikan bahwa setiap $\bar{a} = \bar{b} \in \mathbb{Z}_6$, $\bar{a}$ dan $\bar{b}$ merupakan elemen *commuting regular* pada $\mathbb{Z}_6(\bar{2}, \bar{5})$, maka perhatikan tabel berikut.

Tabel 3.11 Hasil operasi syarat elemen *commuting regular* pada $\mathbb{Z}_6(\bar{2}, \bar{5})$

$\bar{a}$ **dan** $\bar{b}$	$\bar{c}$	$\bar{a} * \bar{b}$	$\left((\bar{b} * \bar{a}) * \bar{c}\right) * (\bar{b} * \bar{a})$	$(\bar{b} * \bar{a}) * \left(\bar{c} * (\bar{b} * \bar{a})\right)$
$\bar{0}$ dan $\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$ dan $\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$
$\bar{2}$ dan $\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$
$\bar{3}$ dan $\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{3}$
$\bar{4}$ dan $\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{4}$
$\bar{5}$ dan $\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{5}$

Berdasarkan Tabel 3.11, terbukti bahwa untuk setiap $\bar{a} = \bar{b} \in \mathbb{Z}_6$, $\bar{a}$ dan $\bar{b}$ merupakan elemen *commuting regular* pada $\mathbb{Z}_6(\bar{2}, \bar{5})$. ■

Proposisi 3.1.22

Perhatikan grupoid $\mathbb{Z}_{p_1p_2}(\overline{p_1(p_2-1)}, \overline{p_1+1})$. Jika $\bar{a} \in \mathbb{Z}_{p_1p_2}$ maka $\{\bar{a}\}$ merupakan semigrup *commuting regular* pada $\mathbb{Z}_{p_1p_2}(\overline{p_1(p_2-1)}, \overline{p_1+1})$.

Bukti:

Misalkan diambil $\bar{a} = \bar{b} = \overline{kp_2} \in \mathbb{Z}_{p_1p_2}$. Akan dibuktikan grupoid $\mathbb{Z}_{p_1p_2}(\overline{p_1(p_2-1)}, \overline{p_1+1})$ memuat suatu semigrup *commuting regular* untuk setiap $\bar{a} \in \mathbb{Z}_{p_1p_2}$.

$$
\begin{aligned}
\bar{a} * \bar{b} &= \bar{a} * \bar{a} \\
&= \overline{kp_2} * \overline{kp_2} \\
&\equiv \overline{\left(p_1(p_2-1)\right)kp_2} + \overline{(p_1+1)kp_2} \pmod{p_1p_2} \\
&\equiv \overline{(p_1p_2-p_1)kp_2} + \overline{p_1kp_2} + \overline{kp_2} \pmod{p_1p_2} \\
&\equiv \overline{p_1p_2kp_2} - \overline{p_1kp_2} + \overline{p_1kp_2} + \overline{kp_2} \pmod{p_1p_2} \\
&\equiv \overline{kp_2} \pmod{p_1p_2} \\
&\equiv \bar{a} \pmod{p_1p_2} \\
&= \bar{a}
\end{aligned}
$$

Berdasarkan uraian sebelumnya terbukti bahwa $\bar{a} = \overline{kp_2}$ merupakan elemen idempoten. Selanjutnya akan ditunjukkan $\bar{a}$ dan $\bar{a}$ merupakan elemen *commuting regular* pada $\mathbb{Z}_{p_1p_2}(\overline{p_1(p_2-1)}, \overline{p_1+1})$.

$$
\begin{aligned}
\bar{a} * \bar{a} &= \left((\bar{a} * \bar{a}) * \bar{a}\right) * (\bar{a} * \bar{a}) \\
&= (\bar{a} * \bar{a}) * (\bar{a} * \bar{a}) \\
&= \bar{a} * \bar{a} = \bar{a}. \\
\bar{a} * \bar{a} &= (\bar{a} * \bar{a}) * (\bar{a} * (\bar{a} * \bar{a})) \\
&= (\bar{a} * \bar{a}) * (\bar{a} * \bar{a}) \\
&= \bar{a} * \bar{a} = \bar{a}.
\end{aligned}
$$

Berdasarkan uraian di atas terbukti bahwa $\bar{a}$ dan $\bar{a}$ merupakan elemen *commuting regular* pada $\mathbb{Z}_{p_1p_2}(\overline{p_1(p_2-1)}, \overline{p_1+1})$, sehingga $\{\bar{a}\}$ merupakan semigrup *commuting regular*, karena memenuhi aksioma tertutup dan asosiatif berdasarkan uraian tersebut. ■

Contoh 3.1.23

Misalkan diambil $p_1 = 3$ dan $p_2 = 2$, sehingga $\mathbb{Z}_{p_1p_2}\left(\overline{p_1(p_2-1)}, \overline{p_1+1}\right) = \mathbb{Z}_6(\bar{3}, \bar{4})$. Akan ditunjukkan $\{\bar{a}\}$ merupakan semigrup *commuting regular* pada $\mathbb{Z}_6(\bar{3}, \bar{4})$ untuk setiap $\bar{a} \in \mathbb{Z}_6$.

Bukti:

Untuk mempermudah dalam membuktikan $\{\bar{a}\}$ merupakan semigrup *commuting regular* pada $\mathbb{Z}_6(\bar{3}, \bar{4})$ untuk setiap $\bar{a} \in \mathbb{Z}_6$, maka perhatikan tabel berikut.

Tabel 3.12 Hasil operasi biner $*$ pada $\mathbb{Z}_6(\bar{3}, \bar{4})$

$*$	$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{\mathbf{1}}$	$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{\mathbf{3}}$	$\bar{\mathbf{4}}$	$\bar{\mathbf{5}}$
$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{\mathbf{1}}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{5}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{5}$

$*$	$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{\mathbf{1}}$	$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{\mathbf{3}}$	$\bar{\mathbf{4}}$	$\bar{\mathbf{5}}$
$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{\mathbf{3}}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{5}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{5}$
$\bar{\mathbf{4}}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{\mathbf{5}}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{5}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{5}$

Berdasarkan Tabel 3.12, setiap elemen pada $\mathbb{Z}_6$ merupakan elemen idempoten. Selanjutnya akan ditunjukkan setiap elemen $\bar{a} = \bar{b} \in \mathbb{Z}_6$, a dan b merupakan elemen *commuting regular* pada $\mathbb{Z}_6(\bar{3}, \bar{4})$.

Tabel 3.13 Hasil operasi syarat elemen *commuting regular* pada $\mathbb{Z}_6(\bar{3}, \bar{4})$

$\bar{\boldsymbol{a}}$ **dan** $\bar{\boldsymbol{b}}$	$\bar{\boldsymbol{c}}$	$\bar{\boldsymbol{a}} * \bar{\boldsymbol{b}}$	$\left((\bar{\boldsymbol{b}} * \bar{\boldsymbol{a}}) * \bar{\boldsymbol{c}}\right) * (\bar{\boldsymbol{b}} * \bar{\boldsymbol{a}})$	$(\bar{\boldsymbol{b}} * \bar{\boldsymbol{a}}) * (\bar{\boldsymbol{c}} * (\bar{\boldsymbol{b}} * \bar{\boldsymbol{a}}))$
$\bar{0}$ dan $\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$ dan $\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$
$\bar{2}$ dan $\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$
$\bar{3}$ dan $\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{3}$
$\bar{4}$ dan $\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{4}$
$\bar{5}$ dan $\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{5}$

Berdasarkan Tabel 3.13, terbukti bahwa untuk setiap $\bar{a} = \bar{b} \in \mathbb{Z}_6$, $\bar{a}$ dan $\bar{b}$ merupakan elemen *commuting regular* pada $\mathbb{Z}_6(\bar{3}, \bar{4})$. Selanjutnya akan ditunjukkan $\{\bar{a}\}$ merupakan semigrup *commuting regular* pada $\mathbb{Z}_6(\bar{3}, \bar{4})$ untuk setiap $\bar{a} \in \mathbb{Z}_6$.

Tabel 3.14 Hasil operasi syarat semigrup *commuting regular* dari grupoid $\mathbb{Z}_6(\bar{3}, \bar{4})$

$\{\bar{\boldsymbol{a}}\}$	$\bar{\boldsymbol{a}} * \bar{\boldsymbol{a}}$	$\bar{\boldsymbol{a}} * (\bar{\boldsymbol{a}} * \bar{\boldsymbol{a}})$	$(\bar{\boldsymbol{a}} * \bar{\boldsymbol{a}}) * \boldsymbol{a}$
$\{\bar{0}\}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\{\bar{1}\}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$
$\{\bar{2}\}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$
$\{\bar{3}\}$	$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{3}$
$\{\bar{4}\}$	$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{4}$
$\{\bar{5}\}$	$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{5}$

Berdasarkan Tabel 3.14, dapat dilihat $\{\bar{0}\}$, $\{\bar{1}\}$, $\{\bar{2}\}$, $\{\bar{3}\}$, $\{\bar{4}\}$, dan $\{\bar{5}\}$ merupakan semigrup *commuting regular*, sehingga terbukti bahwa $\{\bar{a}\}$ merupakan semigrup *commuting regular* pada $\mathbb{Z}_6(\bar{3},\bar{4})$ untuk setiap $\bar{a} \in \mathbb{Z}_6$. ■

Teorema 3.1.24

Diketahui $\bar{x}$ adalah elemen idempoten pada grupoid $\mathbb{Z}_n(\bar{t},\bar{u})$.
($\bar{x}$ dan $\bar{x}$) merupakan elemen *commuting regular* jika dan hanya jika $\bar{x}$ merupakan elemen *regular*.

Bukti:

(⇒)Diketahui $\bar{x}$ adalah elemen idempoten dan ($\bar{x}$ dan $\bar{x}$) merupakan elemen *commuting regular* pada grupoid $\mathbb{Z}_n(\bar{t},\bar{u})$. Akan dibuktikan $\bar{x}$ merupakan elemen *regular* pada grupoid $\mathbb{Z}_n(\bar{t},\bar{u})$. Karena ($\bar{x}$ dan $\bar{x}$) merupakan elemen *commuting regular* pada grupoid $\mathbb{Z}_n(\bar{t},\bar{u})$, maka terdapat $\bar{z} \in \mathbb{Z}_n$ sedemikian sehingga
$\bar{x} * \bar{x} = (\bar{x} * \bar{x}) * \bar{z} * (\bar{x} * \bar{x})$
$\bar{x} \quad = \bar{x} * \bar{z} * \bar{x}$, karena $\bar{x}$ adalah elemen idempoten.
Jadi, $\bar{x}$ merupakan elemen *regular* pada grupoid $\mathbb{Z}_n(\bar{t},\bar{u})$.

(⇐)Diketahui $\bar{x}$ adalah elemen idempoten dan $\bar{x}$ merupakan elemen *regular* pada grupoid $\mathbb{Z}_n(\bar{t},\bar{u})$. Akan dibuktikan ($\bar{x}$ dan $\bar{x}$) merupakan elemen *commuting regular* pada grupoid $\mathbb{Z}_n(\bar{t},\bar{u})$. Karena $\bar{x}$ merupakan elemen *regular* pada grupoid $\mathbb{Z}_n(\bar{t},\bar{u})$, maka terdapat $z \in \mathbb{Z}_n$ sedemikian sehingga
$\bar{x} \quad = \bar{x} * \bar{z} * \bar{x}$
$\bar{x} * \bar{x} = (\bar{x} * \bar{x}) * \bar{z} * (\bar{x} * \bar{x})$, karena $\bar{x}$ adalah elemen idempoten.
Jadi, $\bar{x}$ merupakan elemen *commuting regular* pada grupoid $\mathbb{Z}_n(\bar{t},\bar{u})$.

Contoh 3.1.25

Perhatikan Contoh 3.1.13, pada contoh tersebut dapat dilihat bahwa untuk setiap $\bar{x}$ anggota dari grupoid $\mathbb{Z}_4(\bar{2},\bar{3})$ merupakan elemen idempoten. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa ($\bar{x}$ dan $\bar{x}$) merupakan elemen *commuting regular* dan $\bar{x}$ merupakan elemen *regular* pada grupoid $\mathbb{Z}_4(\bar{2},\bar{3})$. Untuk mempermudah dalam membuktikannya diberikan tabel berikut.

Tabel 3.15 Hasil operasi sayarat elemen *commuting regular* dan elemen *regular* pada $\mathbb{Z}_4(\bar{2},\bar{3})$

$\bar{x}$ **dan** $\bar{x}$	$\bar{z}$	$\bar{x} * \bar{x}$	$(\bar{x} * \bar{x}) * \bar{z} * (\bar{x} * \bar{x})$	$\bar{x} * \bar{z} * \bar{x}$
$\bar{0}$ dan $\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$ dan $\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$
$\bar{2}$ dan $\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$
$\bar{3}$ dan $\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{3}$

Berdasarkan Tabel 3.15 terbukti bahwa untuk setiap $\bar{x}$ anggota dari grupoid $\mathbb{Z}_4(\bar{2},\bar{3})$, ($\bar{x}$ dan $\bar{x}$) merupakan elemen *commuting regular* dan x merupakan elemen *regular* pada grupoid $\mathbb{Z}_4(\bar{2},\bar{3})$.

3.2 Grupoid *Commuting Regular* $\mathbb{Z}_n(\bar{t},\bar{u})$

Salah satu jenis struktur aljabar adalah grupoid. Beberapa peneliti telah melakukan penelitian terhadap grupoid. Salah satunya yaitu grupoid *commuting* regular. Berikut diberikan definisi, contoh, teorema, proposisi, dan akibat yang berhubungan dengan grupoid *commuting regular* $\mathbb{Z}_n(\bar{t},\bar{u})$ berdasarkan Pourfaraj (2012).

Definisi 3.2.1 (Grupoid *Commuting Regular*)
Suatu grupoid G dikatakan grupoid *commuting regular* kiri jika $\forall x, y \in G$, x dan y merupakan elemen *commuting regular* kiri. Suatu grupoid G dikatakan grupoid *commuting regular* kanan jika $\forall x, y \in G$, x dan y merupakan elemen *commuting regular* kanan. Suatu grupoid G dikatakan grupoid *commuting regular* jika G merupakan grupoid *commuting regular* kiri dan grupoid *commuting regular* kanan.

Contoh 3.2.2
Diketahui $\mathbb{Z}_3(\bar{1},\bar{1})$ merupakan grupoid. Akan dibuktikan $\mathbb{Z}_3(\bar{1},\bar{1})$ merupakan grupoid *commuting regular*.
Bukti:
Berdasarkan Contoh 3.1.3 terbukti bahwa $\forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_3$ berlaku
$\bar{x} * \bar{y} = \big((\bar{y} * \bar{x}) * \bar{z}\big) * (\bar{y} * \bar{x})$ dan $\bar{x} * \bar{y} = (\bar{y} * \bar{x}) * (\bar{z} * (\bar{y} * \bar{x}))$, sehingga mengakibatkan $\mathbb{Z}_3(\bar{1},\bar{1})$ merupakan grupoid *commuting regular* kiri dan grupoid *commuting regular* kanan. Oleh karena itu, maka $\mathbb{Z}_3(\bar{1},\bar{1})$ merupakan grupoid *commuting regular*. ∎

Teorema 3.2.3
Grupoid $\mathbb{Z}_{2p}(\overline{1},\overline{p})$ memuat subgrupoid *commuting regular*.
Bukti:
Misalkan diambil subgrupoid pada $\mathbb{Z}_{2p}(\overline{1},\overline{p})$ yaitu $G_i = \{\overline{\imath}, \overline{p+\imath}\}$ dengan $i = \overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \dots, (\overline{p-1})$, yang operasi binernya diberikan pada tabel berikut.

Tabel 3.16 Hasil operasi biner $*$ pada G_i

$*$	$\overline{\boldsymbol{\imath}}$	$(\overline{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{\imath}})$
$\overline{\boldsymbol{\imath}}$	$(\overline{p+\imath})$	$\overline{\imath}$
$(\overline{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{\imath}})$	$\overline{\imath}$	$(\overline{p+\imath})$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa G_i merupakan subgrupoid *commuting regular*. Pembuktian bahwa G_i merupakan subgrupoid *commuting regular* diberikan pada uraian berikut.

$$\begin{aligned}
\overline{\imath} * \overline{\imath} &= \left((\overline{\imath} * \overline{\imath}) * (\overline{p+\imath})\right) * (\overline{\imath} * \overline{\imath}) \\
&= \left((\overline{p+\imath}) * (\overline{p+\imath})\right) * (\overline{p+\imath}) \\
&= (\overline{p+\imath}) * (\overline{p+\imath}) \\
&= (\overline{p+\imath}).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\imath} * \overline{\imath} &= (\overline{\imath} * \overline{\imath}) * \left((\overline{p+\imath}) * (\overline{\imath} * \overline{\imath})\right) \\
&= (\overline{p+\imath}) * \left((\overline{p+\imath}) * (\overline{p+\imath})\right) \\
&= (p+i) * (p+i) \\
&= (p+i).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\imath} * (\overline{p+\imath}) &= \left(((\overline{p+\imath}) * \overline{\imath}) * \overline{\imath}\right) * ((\overline{p+\imath}) * \overline{\imath}) \\
&= (\overline{\imath} * \overline{\imath}) * \overline{\imath} \\
&= (\overline{p+\imath}) * \overline{\imath} \\
&= \overline{\imath}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\imath} * (p+i) &= \left((p+i) * \overline{\imath}\right) * \left(\overline{\imath} * \left((p+i) * \overline{\imath}\right)\right) \\
&= \overline{\imath} * (\overline{\imath} * \overline{\imath}) \\
&= \overline{\imath} * (p+i) \\
&= \overline{\imath}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\overline{p+\imath}) * \overline{\imath} &= \left(\left(\overline{\imath} * (\overline{p+\imath})\right) * \overline{\imath}\right) * \left(\overline{\imath} * (\overline{p+\imath})\right) \\
&= (\overline{\imath} * \overline{\imath}) * \overline{\imath} \\
&= (\overline{p+\imath}) * \overline{\imath} = \overline{\imath}.
\end{aligned}$$

$$(\overline{p+\imath}) * \overline{\imath} = \left(\overline{\imath} * (\overline{p+\imath})\right) * \left(\overline{\imath} * \left(\overline{\imath} * (\overline{p+\imath})\right)\right)$$

$$= \bar{\imath} * (\bar{\imath} * \bar{\imath})$$
$$= \bar{\imath} * (\overline{p + \imath}) = \bar{\imath}.$$
$$(\overline{p + \imath}) * (\overline{p + \imath}) = \Big(\big((\overline{p + \imath}) * (\overline{p + \imath})\big) * (\overline{p + \imath})\Big)$$
$$\big((\overline{p + \imath}) * (\overline{p + \imath})\big)$$
$$= \big((\overline{p + \imath}) * (\overline{p + \imath})\big) * (\overline{p + \imath})$$
$$= (\overline{p + \imath}) * (\overline{p + \imath}) = (\overline{p + \imath}).$$
$$(\overline{p + \imath}) * (\overline{p + \imath}) = \big((\overline{p + \imath}) * (\overline{p + \imath})\big) *$$
$$\Big((\overline{p + \imath}) * \big((\overline{p + \imath}) * (\overline{p + \imath})\big)\Big)$$
$$= (\overline{p + \imath}) * \big((\overline{p + \imath}) * (\overline{p + \imath})\big)$$
$$= (\overline{p + \imath}) * (\overline{p + \imath}) = (\overline{p + \imath}).$$

Sehingga terbukti bahwa subgrupoid G_i merupakan subgrupoid *commuting regular* pada grupoid $\mathbb{Z}_{2p}(\bar{1}, \bar{p})$. ■

Contoh 3.2.4

Misalkan diambil $p = 3$, sehingga grupoid $\mathbb{Z}_{2p}(\bar{1}, \bar{p}) = \mathbb{Z}_6(\bar{1}, \bar{3})$. Akan ditunjukkan bahwa $\mathbb{Z}_6(\bar{1}, \bar{3})$ memuat subgrupoid *commuting regular*.

Bukti:

Untuk mempermudah dalam menentukan subgrupoid *commuting regular* pada grupoid $\mathbb{Z}_6(\bar{1}, \bar{3})$ diberikan tabel di bawah berikut.

Tabel 3.17 Hasil operasi biner $*$ pada $\mathbb{Z}_6(\bar{1}, \bar{3})$

$*$	$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{\mathbf{1}}$	$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{\mathbf{3}}$	$\bar{\mathbf{4}}$	$\bar{\mathbf{5}}$
$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{\mathbf{1}}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$
$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{2}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{5}$
$\bar{\mathbf{3}}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{\mathbf{4}}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$
$\bar{\mathbf{5}}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$

Berdasarkan Tabel 3.17, dapat dilihat bahwa $G_0 = \{\bar{0}, \bar{3}\}$, $G_1 = \{\bar{1}, \bar{4}\}$, dan $G_2 = \{\bar{2}, \bar{5}\}$ merupakan subgrupoid pada $\mathbb{Z}_6(\bar{1}, \bar{3})$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa G_0, G_1, dan G_2 merupakan subgrupoid *commuting regular*.

Tabel 3.18 Hasil operasi syarat elemen *commuting regular* pada $G_0 \subseteq \mathbb{Z}_6$

$\overline{x}$ dan $\overline{y}$	$\overline{z}$	$\overline{x} * \overline{y}$	$\left((\overline{y} * \overline{x}) * \overline{z}\right) * (\overline{y} * \overline{x})$	$(\overline{y} * \overline{x}) * (\overline{z} * (\overline{y} * \overline{x}))$
$\overline{0}$ dan $\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{0}$ dan $\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{3}$
$\overline{3}$ dan $\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{3}$
$\overline{3}$ dan $\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$

Tabel 3.19 Hasil operasi syarat elemen *commuting regular* pada $G_1 \subseteq \mathbb{Z}_6$

$\overline{x}$ dan $\overline{y}$	$\overline{z}$	$\overline{x} * \overline{y}$	$\left((\overline{y} * \overline{x}) * \overline{z}\right) * (\overline{y} * \overline{x})$	$(\overline{y} * \overline{x}) * (\overline{z} * (\overline{y} * \overline{x}))$
$\overline{1}$ dan $\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{4}$
$\overline{1}$ dan $\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{1}$
$\overline{4}$ dan $\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{1}$
$\overline{4}$ dan $\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{4}$

Tabel 3.20 Hasil operasi syarat elemen *commuting regular* pada $G_2 \subseteq \mathbb{Z}_6$

$\overline{x}$ dan $\overline{y}$	$\overline{z}$	$\overline{x} * \overline{y}$	$\left((\overline{y} * \overline{x}) * \overline{z}\right) * (\overline{y} * \overline{x})$	$(\overline{y} * \overline{x}) * (\overline{z} * (\overline{y} * \overline{x}))$
$\overline{2}$ dan $\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{2}$
$\overline{2}$ dan $\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{5}$
$\overline{5}$ dan $\overline{2}$	$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{5}$
$\overline{5}$ dan $\overline{5}$	$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{2}$

Berdasarkan Tabel 3.18, Tabel 3.19, dan Tabel 3.20 terbukti bahwa G_0, G_1, dan G_2 merupakan subgrupoid *commuting regular* pada $\mathbb{Z}_6(\overline{1}, \overline{3})$. ■

Teorema 3.2.5
Perhatikan grupoid $\mathbb{Z}_{2p}(\overline{2p-2}, \overline{2p-1})$. Jika $G_0 = \{\overline{0}, \overline{2}, \dots, \overline{2p-2}\}$ dan $G_1 = \{\overline{1}, \overline{3}, \dots, \overline{2p-1}\}$ merupakan subgrupoid pada $\mathbb{Z}_{2p}(\overline{2p-2}, \overline{2p-1})$, maka G_0 dan G_1 adalah grupoid *commuting regular*.
Bukti:
Misalkan diambil $\overline{a}, \overline{b} \in G_0$, sehingga
$\overline{a} * \overline{b} \equiv \overline{(2p-2)a} + \overline{(2p-1)b} \ (mod\ 2p)$

$$\equiv \overline{2pa} - \overline{2a} + \overline{2pb} - \overline{b} \ (mod\ 2p)$$
$$\equiv \overline{-2a-b} \ (mod\ 2p) = \overline{-2a-b}. \qquad (3.1)$$
$$\overline{b} * \overline{a} \equiv \overline{(2p-2)b} + \overline{(2p-1)a} \ (mod\ 2p)$$
$$\equiv \overline{2pb} - \overline{2b} + \overline{2pa} - \overline{a} \ (mod\ 2p)$$
$$\equiv \overline{-2b-a} \ (mod\ 2p) = \overline{-2b-a}.$$

Selanjutnya akan ditentukan $\overline{c} \in G_0$ sedemikian sehingga $\forall \overline{a}, \overline{b} \in G_0$, $\overline{a}$ dan $\overline{b}$ merupakan elemen *commuting regular*.

$$\overline{a} * \overline{b} = \left(\left(\overline{b} * \overline{a}\right) * \overline{c}\right) * \left(\overline{b} * \overline{a}\right)$$
$$= \left(\left(\overline{-2b-a}\right) * \overline{c}\right) * \left(\overline{-2b-a}\right)$$
$$\equiv \left(\left(\overline{2p-2}\right)\left(\overline{-2b-a}\right) + \left(\overline{2p-1}\right)\overline{c}\right) \ (mod\ 2p) * \left(\overline{-2b-a}\right)$$
$$\equiv \left(\overline{-4pb-2pa+4b+2a+2pc-c}\right) \ (mod\ 2p) * \left(\overline{-2b-a}\right)$$
$$\equiv \left(\overline{4b+2a-c}\right) \ (mod\ 2p) * \left(\overline{-2b-a}\right)$$
$$= \left(\overline{4b+2a-c}\right) * \left(\overline{-2b-a}\right)$$
$$\equiv \left(\overline{2p-2}\right)\left(\overline{4b+2a-c}\right) + \left(\overline{2p-1}\right)\left(\overline{-2b-a}\right) \ (mod\ 2p)$$
$$\equiv \overline{8pb} + \overline{4pa} - \overline{2pc} - \overline{8b} - \overline{4a} + \overline{2c} - \overline{4pb} - \overline{2pa} + \overline{2b} + \overline{a} \ (mod\ 2p)$$
$$\equiv \overline{-8b-4a+2c+2b+a} \ (mod\ 2p)$$
$$= \overline{-8b-4a+2c+2b+a}$$
$$= \overline{-6b-3a+2c}. \qquad (3.2)$$

Berdasarkan persamaan (3.1) dan (3.2) diperoleh,

$$\overline{2c} \equiv \overline{5b+a} \ (mod\ 2p)$$
$$\overline{2c} = \overline{5b+a+s2p}$$
$$\overline{c} = \overline{\frac{5b}{2} + \frac{a}{2} + sp}$$
$$= \overline{\frac{5(2n-2)}{2} + \frac{(2n-2)}{2} + sp}$$
$$= \overline{5n-5+n-1+sp}$$
$$= \overline{6n-6+sp}, \text{ dengan } s \in \mathbb{Z} \text{ dan } n = \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \dots, \left(\overline{2p-2}\right).$$

Dengan demikian $\forall \overline{a}, \overline{b} \in G_0$, $\overline{a}$ dan $\overline{b}$ merupakan elemen *commuting regular* kiri.

$$
\begin{aligned}
\bar{a} * \bar{b} &= (\bar{b} * \bar{a}) * \left(\bar{c} * (\bar{b} * \bar{a})\right) \\
&= (\overline{-2b-a}) * \left(\bar{c} * (\overline{-2b-a})\right) \\
&\equiv (\overline{-2b-a}) * \\
&\quad \left((\overline{2p-2})\bar{c} + (\overline{2p-1})(\overline{-2b-a})\right) \ (mod\ 2p) \\
&\equiv (\overline{-2b-a}) * \\
&\quad (\overline{2pc-2c-4pb-2pa+2b+a}) \ (mod\ 2p) \\
&\equiv (\overline{-2b-a}) * (\overline{-2c+2b+a}) \ (mod\ 2p) \\
&= (\overline{-2b-a}) * (\overline{-2c+2b+a}) \\
&\equiv (\overline{2p-2})(\overline{-2b-a}) + \\
&\quad (\overline{2p-1})(\overline{-2c+2b+a}) \ (mod\ 2p) \\
&\equiv \overline{-4pb} - \overline{2pa} + \overline{4b} + \overline{2a} - \overline{4pc} + \overline{4pb} + \overline{2pa} + \overline{2c} - \overline{2b} - \\
&\quad \bar{a} \ (mod\ 2p) \\
&\equiv \overline{4b+2a+2c-2b-a} \ (mod\ 2p) \\
&= \overline{4b+2a+2c-2b-a} \\
&= \overline{2b+a+2c}. \qquad (3.3)
\end{aligned}
$$

Berdasarkan persamaan (3.1) dan (3.3) diperoleh,

$$
\begin{aligned}
\overline{2c} &\equiv \overline{-3a-3b} \ (mod\ 2p) \\
\overline{2c} &= \overline{-3a-3b+s2p} \\
\bar{c} &= \overline{-\frac{3a}{2} - \frac{3b}{2} + sp} \\
&= \overline{-\frac{3(2n-2)}{2} - \frac{3(2n-2)}{2} + sp} \\
&= \overline{-3n+3-3n+3+sp} \\
&= \overline{-6n+6+sp}, \text{ dengan } s \in \mathbb{Z} \text{ dan } n = \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \dots, (\overline{2p-2}).
\end{aligned}
$$

Dengan demikian $\forall \bar{a}, \bar{b} \in G_0$, $\bar{a}$ dan $\bar{b}$ merupakan elemen *commuting regular* kanan. Berdasarkan uraian di atas maka berlaku $\forall \bar{a}, \bar{b} \in G_0$, $\bar{a}$ dan $\bar{b}$ merupakan elemen *commuting regular*, dengan menggunakan uraian pembuktian yang sama berlaku juga $\forall \bar{a}, \bar{b} \in G_1$, $\bar{a}$ dan $\bar{b}$ merupakan elemen *commuting regular*. Dengan demikian G_0 dan G_1 merupakan grupoid *commuting regular*. ■

Akibat 3.2.6

Perhatikan grupoid $\mathbb{Z}_{2p}(\overline{2p-2k}, \overline{2p+1-2k})$ dengan $0 < k < p$. Jika $G_0 = \{\bar{0}, \bar{2}, \dots, \overline{2p-2}\}$ dan $G_1 = \{\bar{1}, \bar{3}, \dots, \overline{2p-1}\}$ merupakan subgrupoid $\mathbb{Z}_{2p}(\overline{2p-2k}, \overline{2p+1-2k})$, maka G_0 dan G_1 adalah grupoid *commuting regular*.

Bukti:

Misalkan diambil $\bar{a}, \bar{b} \in G_0$, sehingga

$$\begin{aligned}
\bar{a} * \bar{b} &\equiv \overline{(2p-2k)a + (2p+1-2k)b} \ (mod\ 2p) \\
&\equiv \overline{2pa - 2ka + 2pb + b - 2kb} \ (mod\ 2p) \\
&\equiv \overline{-2ka + b - 2kb} \ (mod\ 2p) \\
&= \overline{-2ka + b - 2kb}.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}
\bar{b} * \bar{a} &\equiv \overline{(2p-2k)b + (2p+1-2k)a} \ (mod\ 2p) \\
&\equiv \overline{2pb - 2kb + 2pa + a - 2ka} \ (mod\ 2p) \\
&\equiv \overline{-2kb + a - 2ka} \ (mod\ 2p) \\
&= \overline{-2kb + a - 2ka}.
\end{aligned}$$

Selanjutnya akan ditentukan $\bar{c} \in G_0$ sedemikian sehingga $\forall \bar{a}, \bar{b} \in G_0$, $\bar{a}$ dan $\bar{b}$ merupakan elemen *commuting regular*.

$$\begin{aligned}
\bar{a} * \bar{b} &= \left((\bar{b} * \bar{a}) * \bar{c}\right) * (\bar{b} * \bar{a}) \\
&= \left((\overline{-2kb + a - 2ka}) * \bar{c}\right) * (\overline{-2kb + a - 2ka}) \\
&\equiv (\overline{((2p-2k)(-2kb + a - 2ka) +} \\
&\quad \overline{(2p+1-2k)c} \ (mod\ 2p)\ ) * (\overline{-2kb + a - 2ka}) \\
&\equiv (\overline{-4pkb + 2pa - 4pka + 4k^2b - 2ka + 4k^2a +} \\
&\quad \overline{2pc + c - 2kc}) \ (mod\ 2p) * (\overline{-2kb + a - 2ka}) \\
&\equiv \left(\overline{4k^2b - 2ka + 4k^2a + c - 2kc}\right) (mod\ 2p) * \\
&\quad \left(\overline{-2kb + a - 2ka}\right) \\
&= \left(\overline{4k^2b - 2ka + 4k^2a + c - 2kc}\right) * \left(\overline{-2kb + a - 2ka}\right) \\
&\equiv \overline{(2p-2k)(4k^2b - 2ka + 4k^2a + c - 2kc) +} \\
&\quad \overline{(2p+1-2k)(-2kb + a - 2ka)} \ (mod\ 2p) \\
&\equiv \overline{(8pk^2b - 4pka + 8pk^2a + 2pc - 4pkc - 8k^3b + 4k^2a} \\
&\quad \overline{-8k^3a - 2kc + 4k^2c) + (-4pkb + 2pa - 4pka} \\
&\quad \overline{-2kb + a - 2ka + 4k^2b - 2ka + 4k^2a)} \ (mod\ 2p) \\
&\equiv \overline{(-8k^3b + 4k^2a - 8k^3a - 2kc + 4k^2c - 2kb + a} \\
&\quad \overline{-2ka + 4k^2b - 2ka + 4k^2a)} \ (mod\ 2p) \\
&= \overline{-8k^3a - 8k^3b + 8k^2a + 4k^2b - 4ka - 2kb + a +} \\
&\quad \overline{4k^2c - 2kc}.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Berdasarkan persamaan (3.4) dan (3.5) diperoleh,

$$
\begin{aligned}
\overline{4k^2c-2kc} &\equiv \overline{8k^3a+8k^3b-8k^2a-4k^2b+2ka+b} \\
&\quad \overline{-a}\ (mod\ 2p) \\
\overline{4k^2c-2kc} &= \overline{8k^3a+8k^3b-8k^2a-4k^2b+2ka+b-} \\
&\quad \overline{a+s2p}, \text{ dengan } s \in \mathbb{Z} \\
\overline{c(4k^2-2k)} &= \overline{8k^3a+8k^3b-8k^2a-4k^2b+2ka+b-} \\
&\quad \overline{a+s2p} \\
\bar{c} &= \overline{\frac{8k^2a}{4k-2}} + \overline{\frac{8k^2b}{4k-2}} - \overline{\frac{8ka}{4k-2}} - \overline{\frac{4kb}{4k-2}} + \overline{\frac{2ka+b-a+s2p}{4k^2-2k}} \\
\bar{c} &= \underbrace{\bar{2}\left(\overline{\frac{4k^2a}{4k-2}}\right)}_{\bar{d}} + \underbrace{\bar{2}\left(\overline{\frac{4k^2b}{4k-2}}\right)}_{\bar{e}} - \underbrace{\bar{2}\left(\overline{\frac{4ka}{4k-2}}\right)}_{\bar{f}} - \underbrace{\bar{2}\left(\overline{\frac{2kb}{4k-2}}\right)}_{\bar{g}} + \\
&\quad \underbrace{\overline{\frac{2ka+b-a+s2p}{4k^2-2k}}}_{\bar{h}} \\
\bar{c} &= (\bar{d}+\bar{e}-\bar{f}-\bar{g}+\bar{h}) \in G_0.
\end{aligned}
$$

Dengan demikian $\forall \bar{a}, \bar{b} \in G_0$, $\bar{a}$ dan $\bar{b}$ merupakan elemen *commuting regular* kiri.

$$
\begin{aligned}
\bar{a} * \bar{b} &= \left(\bar{b} * \bar{a}\right) * \left(\bar{c} * \left(\bar{b} * \bar{a}\right)\right) \\
&= \left(\overline{-2kb+a-2ka}\right) * \left(\bar{c} * \left(\overline{-2kb+a-2ka}\right)\right) \\
&\equiv \left(\overline{-2kb+a-2ka}\right) * \left(\overline{(2p-2k)c} + \right. \\
&\quad \left.\overline{(2p+1-2k)(-2kb+a-2ka)}\right)\ (mod\ 2p) \\
&\equiv \left(\overline{-2kb+a-2ka}\right) * \left(\overline{2pc-2kc-4pkb+2pa-4pka}\right. \\
&\quad \left.\overline{-2kb+a-2ka+4k^2b-2ka+4k^2a}\right)\ (mod\ 2p) \\
&\equiv \left(\overline{-2kb+a-2ka}\right) * \left(\overline{-2kc-2kb+a-2ka+4k^2b}\right. \\
&\quad \left.\overline{-2ka+4k^2a}\right)\ (mod\ 2p) \\
&= \left(\overline{-2kb+a-2ka}\right) * \left(\overline{-2kc-2kb+a-2ka+4k^2b}\right. \\
&\quad \left.\overline{-2ka+4k^2a}\right) \\
&\equiv \overline{(2p-2k)(-2kb+a-2ka)} + \overline{(2p+1-2k)(-2kc} \\
&\quad \overline{-2kb+a-2ka+4k^2b-2ka+4k^2a)}\ (mod\ 2p) \\
&\equiv \left(\overline{-4pkb+2pa-4pka+4k^2b-2ka+4k^2a-4pkc}\right. \\
&\quad \overline{-4pkb+2pa+8pk^2b-8pka+8pk^2a-2kc-2kb+} \\
&\quad \overline{a+4k^2b-4ka+4k^2a+4k^2c+4k^2b-2ka-8k^3b+} \\
&\quad \left.\overline{8k^2a-8k^3a}\right)\ (mod\ 2p) \\
&\equiv \left(\overline{4k^2b-2ka+4k^2a-2kc-2kb+a+4k^2b-4ka+}\right. \\
&\quad \overline{4k^2a+4k^2c+4k^2b-2ka-8k^3b+8k^2a}
\end{aligned}
$$

$\overline{-8k^3a}$) $(mod\ 2p)$

$$= \overline{12k^2b - 8ka + 16k^2a - 2kc - 2kb + a + 4k^2c - 8k^3b - 8k^3a}. \quad (3.6)$$

Berdasarkan persamaan (3.4) dan (3.6) diperoleh,

$$\overline{-2kc + 4k^2c} \equiv \overline{-12k^2b + 6ka - 16k^2a - a + b + 8k^3b + 8k^3a}\ (mod\ 2p)$$

$$\overline{-2kc + 4k^2c} = \overline{-12k^2b + 6ka - 16k^2a - a + b + 8k^3b + 8k^3a + s2p}, \text{ dengan } s \in \mathbb{Z}$$

$$\overline{c(4k^2 - 2)} = \overline{-12k^2b + 6ka - 16k^2a - a + b + 8k^3b + 8k^3a + s2p}$$

$$\bar{c} = -\frac{\overline{12kb}}{4k-2} - \frac{\overline{16ka}}{4k-2} + \frac{\overline{8k^2a}}{4k-2} + \frac{\overline{8k^2b}}{4k-2} + \frac{\overline{6ka-a+b+s2p}}{4k^2-2k}$$

$$\bar{c} = -\underbrace{\bar{2}\left(\frac{\overline{6kb}}{4k-2}\right)}_{\bar{j}} - \underbrace{\bar{2}\left(\frac{\overline{8ka}}{4k-2}\right)}_{\bar{l}} + \underbrace{\bar{2}\left(\frac{\overline{84a}}{4k-2}\right)}_{\bar{m}} + \underbrace{\bar{2}\left(\frac{\overline{4k^2b}}{4k-2}\right)}_{\bar{n}} + \underbrace{\frac{\overline{6ka-a+b+s2p}}{4k^2-2k}}_{\bar{o}}$$

$$\bar{c} = (-\bar{j} - \bar{l} + \bar{m} + \bar{n} + \bar{o}) \in G_0.$$

Dengan demikian $\forall \bar{a}, \bar{b} \in G_0$, $\bar{a}$ dan $\bar{b}$ merupakan elemen *commuting regular* kanan. Berdasarkan uraian di atas maka berlaku $\forall \bar{a}, \bar{b} \in G_0$, $\bar{a}$ dan $\bar{b}$ merupakan elemen *commuting regular*, dengan menggunakan uraian pembuktian yang sama berlaku juga $\forall \bar{a}, \bar{b} \in G_1$, $\bar{a}$ dan $\bar{b}$ merupakan elemen *commuting regular*. Dengan demikian G_0 dan G_1 merupakan grupoid *commuting regular*. ■

Akibat 3.2.7

Perhatikan grupoid $\mathbb{Z}_{2p}(\overline{2p - 2k}, \overline{2p + 1 - 2r})$ dengan $0 < k, r < p$. Jika $G_0 = \{\bar{0}, \bar{2}, \dots, \overline{2p - 2}\}$ dan $G_1 = \{\bar{1}, \bar{3}, \dots, \overline{2p - 1}\}$ merupakan subgrupoid $\mathbb{Z}_{2p}(\overline{2p - 2k}, \overline{2p + 1 - 2r})$, maka G_0 dan G_1 adalah grupoid *commuting regular*.

Bukti:

Misalkan diambil $\bar{a}, \bar{b} \in G_0$, sehingga

$$\begin{aligned} \bar{a} * \bar{b} &\equiv \overline{(2p - 2k)a + (2p + 1 - 2r)b}\ (mod\ 2p) \\ &\equiv \overline{2pa - 2ka + 2pb + b - 2rb}\ (mod\ 2p) \\ &\equiv \overline{-2ka + b - 2rb}\ (mod\ 2p) \\ &= \overline{-2ka + b - 2rb}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$
\begin{aligned}
\bar{b} * \bar{a} &\equiv \overline{(2p-2k)b} + \overline{(2p+1-2r)a}\ (mod\ 2p) \\
&\equiv \overline{2pb - 2kb + 2pa + a - 2ra}\ (mod\ 2p) \\
&\equiv \overline{-2kb + a - 2ra}\ (mod\ 2p) \\
&= \overline{-2kb + a - 2ra}.
\end{aligned}
$$

Selanjutnya akan ditentukan $\bar{c} \in G_0$ sedemikian sehingga $\forall \bar{a}, \bar{b} \in G_0$, $\bar{a}$ dan $\bar{b}$ merupakan elemen *commuting regular*.

$$
\begin{aligned}
\bar{a} * \bar{b} &= \left((\bar{b} * \bar{a}) * \bar{c} \right) * (\bar{b} * \bar{a}) \\
&= \left((\overline{-2kb + a - 2ra}) * \bar{c} \right) * (\overline{-2kb + a - 2ra}) \\
&\equiv \overline{((2p-2k)(-2kb + a - 2ra)} + \\
&\quad \overline{(2p+1-2r)c}\ (mod\ 2p)\ ) * (\overline{-2kb + a - 2ka}) \\
&\equiv (\overline{-4pkb + 2pa - 4pra + 4k^2\, b - 2ka + 4kr\, a +} \\
&\quad \overline{2pc + c - 2rc})\ \ (mod\ 2p) * (\overline{-2kb + a - 2ra}) \\
&\equiv \left(\overline{4k^2b - 2ka + 4kra + c - 2rc}\right) (mod\ 2p) * \\
&\quad \left(\overline{-2kb + a - 2ra}\right) \\
&= \left(\overline{4k^2b - 2ka + 4kra + c - 2rc}\right) * \left(\overline{-2kb + a - 2ra}\right) \\
&\equiv \overline{(2p-2k)(4k^2b - 2ka + 4kra + c - 2rc)} + \\
&\quad \overline{(2p+1-2r)(-2kb + a - 2ra)}\ (mod\ 2p) \\
&\equiv \overline{(8pk^2b - 4pka + 8pkra + 2pc - 4prc - 8k^3b + 4k^2a} \\
&\quad \overline{-8k^2ra - 2kc + \ 4krc) + (-4pkb + 2pa - 4pra} \\
&\quad \overline{-2kb + a - 2ra + 4krb - 2ra + 4r^2a)}\ (mod\ 2p) \\
&\equiv \overline{(-8k^3b + 4k^2a - 8k^2ra - 2kc + 4krc - 2kb + a} \\
&\quad \overline{-2ra + 4krb - 2ra + 4r^2a)}\ (mod\ 2p) \\
&= \overline{-8k^3b + 4k^2a - 8k^2ra - 2kc + 4krc - 2kb + a} \\
&\quad \overline{-4ra + 4krb + 4r^2a}. \qquad (3.8)
\end{aligned}
$$

Berdasarkan persamaan (3.7) dan (3.8) diperoleh,

$$
\begin{aligned}
\overline{-2kc + 4krc} &\equiv \overline{8k^3b - 4k^2a + 8k^2ra + 2kb - a + 4ra -} \\
&\quad \overline{4krb + 4r^2a + b - 2rb}\ (mod\ 2p) \\
\overline{c(4kr - 2k)} &= \overline{8k^3b - 4k^2a + 8k^2ra + 2kb - a + 4ra -} \\
&\quad \overline{4krb + 4r^2a + b - 2rb + s2p}, \text{ dengan } s \in \mathbb{Z} \\
\bar{c} &= \frac{\frac{\overline{8k^2b}}{4r-2} - \frac{\overline{4ka}}{4r-2} + \frac{\overline{8kra}}{4r-2} - \frac{\overline{4rb}}{4r-2} + \frac{\overline{2kb - a + 4ra + 4r^2a + b - 2rb + s2p}}{}}{4kr - 2k}
\end{aligned}
$$

$$\bar{c} = \underbrace{\bar{2}\left(\overline{\frac{4k^2b}{4r-2}}\right)}_{\bar{d}} - \underbrace{\bar{2}\left(\overline{\frac{2ka}{4r-2}}\right)}_{\bar{e}} + \underbrace{\bar{2}\left(\overline{\frac{4kra}{4r-2}}\right)}_{\bar{f}} - \underbrace{\bar{2}\left(\overline{\frac{2rb}{4r-2}}\right)}_{\bar{g}} + \underbrace{\overline{\frac{2kb-a+4ra+4r^2a+b-2rb+s2p}{4kr-2k}}}_{\bar{h}}$$

$$\bar{c} = (\bar{d} - \bar{e} + \bar{f} - \bar{g} + \bar{h}) \in G_0.$$

Dengan demikian $\forall \bar{a}, \bar{b} \in G_0$, $\bar{a}$ dan $\bar{b}$ merupakan elemen *commuting regular* kiri.

$$\begin{aligned}
\bar{a} * \bar{b} &= \left(\bar{b} * \bar{a}\right) * \left(\bar{c} * \left(\bar{b} * \bar{a}\right)\right) \\
&= (\overline{-2kb + a - 2ra}) * \left(\bar{c} * \left(\overline{-2kb + a - 2ra}\right)\right) \\
&\equiv (\overline{-2kb + a - 2ka}) * (\overline{(2p - 2k)c} + \\
&\quad \overline{(2p + 1 - 2r)(-2kb + a - 2ra)}) \pmod{2p} \\
&\equiv \left(\overline{-2kb + a - 2ra}\right) * (\overline{2pc - 2kc - 4pkb + 2pa - 4pra} \\
&\quad \overline{-2kb + a - 2ra + 4rkb - 2ra + 4r^2a}) \pmod{2p} \\
&\equiv \left(\overline{-2kb + a - 2ra}\right) * (\overline{-2kc - 2kb + a - 2ra + 4rkb} \\
&\quad \overline{-2ra + 4r^2a}) \pmod{2p} \\
&= \left(\overline{-2kb + a - 2ra}\right) * (\overline{-2kc - 2kb + a - 4ra + 4rkb +} \\
&\quad \overline{4r^2a}) \\
&\equiv \overline{(2p - 2k)(-2kb + a - 2ka)} + \overline{(2p + 1 - 2k)(-2kc} \\
&\quad \overline{-2kb + a - 4ra + 4rkb + 4r^2a)} \pmod{2p} \\
&\equiv (\overline{-4pkb + 2pa - 4pra + 4k^2b - 2ka + 4kra - 4pkc} \\
&\quad \overline{-4pkb + 2pa - 8pra + 8prkb + 8pr^2a - 2kc - 2kb +} \\
&\quad \overline{a - 4ra + 4rkb + 4r^2a + 4rkc + 4rkb - 2ra + 8r^2a} \\
&\quad \overline{-8r^2ka - 8r^3a}) \pmod{2p} \\
&\equiv (\overline{4k^2b - 2ka + 4kra - 2kc - 2kb + a - 4ra + 4rkb +} \\
&\quad \overline{4r^2a + 4rkc + 4rkb - 2ra + 8r^2a - 8r^2kb} \\
&\quad \overline{-8r^3a} \pmod{2p} \\
&= \overline{4k^2b - 2ka + 4kra - 2kc - 2kb + a - 6ra + 8rkb +} \\
&\quad \overline{12r^2a + 4rkc - 8r^2kb - 8r^3a}. \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (3.7) dan (3.9) diperoleh,

$$\begin{aligned}
\overline{-2kc + 4rkc} &\equiv \overline{-4k^2b - 4kra + 2kb - a + 6ra - 8rkb -} \\
&\quad \overline{12r^2a + 8r^2kb + b - 2rb} \pmod{2p}
\end{aligned}$$

$$\overline{c(4kr-2k)} = \overline{-4k^2b - 4kra + 2kb - a + 6ra - 8rkb -}$$
$$\overline{12r^2a + 8r^2kb + b - 2rb + s2p}, \text{ dengan } s \in \mathbb{Z}$$

$$\bar{c} = -\overline{\frac{4kb}{4r-2}} - \overline{\frac{4ra}{4r-2}} - \overline{\frac{8rb}{4r-2}} + \overline{\frac{8r^2b}{4r-2}} + \overline{\frac{2kb-a+6ra+12r^2a+b-2rb+s2p}{4kr-2k}}$$

$$\bar{c} = -\underbrace{\bar{2}\left(\overline{\frac{2kb}{4r-2}}\right)}_{\bar{j}} - \underbrace{\bar{2}\left(\overline{\frac{2ra}{4r-2}}\right)}_{\bar{l}} - \underbrace{\bar{2}\left(\overline{\frac{4rb}{4r-2}}\right)}_{\bar{m}} + \underbrace{\bar{2}\left(\overline{\frac{4r^2b}{4r-2}}\right)}_{\bar{n}} + \underbrace{\overline{\frac{2kb-a+6ra+12r^2a+b-2rb+s2p}{4kr-2k}}}_{\bar{o}}$$

$$\bar{c} = (-\bar{j} - \bar{l} - \bar{m} + \bar{n} + \bar{o}) \in G_0.$$

Dengan demikian $\forall \bar{a}, \bar{b} \in G_0$, $\bar{a}$ dan $\bar{b}$ merupakan elemen *commuting regular* kanan. Berdasarkan uraian di atas maka berlaku $\forall \bar{a}, \bar{b} \in G_0$, $\bar{a}$ dan $\bar{b}$ merupakan elemen *commuting regular*, dengan menggunakan uraian pembuktian yang sama berlaku juga $\forall \bar{a}, \bar{b} \in G_1$, $\bar{a}$ dan $\bar{b}$ merupakan elemen *commuting regular*. Dengan demikian G_0 dan G_1 merupakan grupoid *commuting regular*. ■

Teorema 3.2.8
Grupoid $\mathbb{Z}_{2p}(\bar{2}, \overline{2p-1})$ memuat subgrupoid *commuting regular* pada $\mathbb{Z}_{2p}(\bar{2}, \overline{2p-1})$.

Bukti:
Misalkan $G_0 = \{\bar{0}, \bar{2}, \dots, \overline{2p-2}\}$ dan $G_1 = \{\bar{1}, \bar{3}, \dots, \overline{2p-1}\}$ merupakan subgrupoid pada $\mathbb{Z}_{2p}(\overline{2p-2}, \overline{2p-1})$. Akan ditunjukkan bahwa G_0 dan G_1 merupakan subgrupoid *commuting regular* pada $\mathbb{Z}_{2p}(\bar{2}, \overline{2p-1})$.

Misalkan diambil $\bar{a}, \bar{b} \in G_0$, sehingga

$$\begin{aligned}\bar{a} * \bar{b} &\equiv \overline{2a} + \overline{(2p-1)b} \ (mod\ 2p) \\ &\equiv \overline{2a} + \overline{2pb - b} \ (mod\ 2p) \\ &\equiv \overline{2a - b} \ (mod\ 2p) \\ &= \overline{2a - b}.\end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}\bar{b} * \bar{a} &\equiv \overline{2b} + \overline{(2p-1)a} \ (mod\ 2p) \\ &\equiv \overline{2b} + \overline{2pa - a} \ (mod\ 2p) \\ &\equiv \overline{2b - a} \ (mod\ 2p) \\ &= \overline{2b - a}.\end{aligned}$$

Selanjutnya akan ditentukan $\bar{c} \in G_0$ sedemikian sehingga $\forall \bar{a}, \bar{b} \in G_0$, $\bar{a}$ dan $\bar{b}$ merupakan elemen *commuting regular*.

$$
\begin{aligned}
\bar{a} * \bar{b} &= \left((\bar{b} * \bar{a}) * \bar{c}\right) * (\bar{b} * \bar{a}) \\
&= \left((\overline{2b-a}) * \bar{c}\right) * (\overline{2b-a}) \\
&\equiv \left(\overline{2(2b-a) + (2p-1)c}\right) (mod\ 2p) * \left(\overline{2b-a}\right) \\
&\equiv \left(\overline{4b - 2a + 2pc - c}\right) (mod\ 2p) * (\overline{2b-a}) \\
&\equiv \left(\overline{4b - 2a - c}\right) (mod\ 2p) * \left(\overline{2b-a}\right) \\
&= \left(\overline{4b - 2a - c}\right) * \left(\overline{2b-a}\right) \\
&\equiv \overline{2(4b-2a-c) + (2p-1)(2b-a)}\ (mod\ 2p) \\
&\equiv \overline{8b - 4a - 2c + 4pb - 2pa - 2b + a}\ (mod\ 2p) \\
&\equiv \overline{8b - 4a - 2c - 2b + a}\ (mod\ 2p) \\
&= \overline{8b - 4a - 2c - 2b + a} \\
&= \overline{6b - 3a - 2c}. && (3.11)
\end{aligned}
$$

Berdasarkan persamaan (3.10) dan (3.11) diperoleh,

$$
\begin{aligned}
\overline{2c} &\equiv \overline{-5a + 7b}\ (mod\ 2p) \\
\overline{2c} &= \overline{-5a + 7b + s2p} \\
\bar{c} &= \overline{-\frac{5a}{2} + \frac{7b}{2} + sp} \\
&= \overline{-\frac{5(2n-2)}{2} + \frac{7(2n-2)}{2} + sp} \\
&= \overline{-5n + 5 + 7n - 7 + sp} \\
&= \overline{2n - 6 + sp}, \text{ dengan } s \in \mathbb{Z} \text{ dan } n = \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \dots, (\overline{2p-2}).
\end{aligned}
$$

Dengan demikian $\forall \bar{a}, \bar{b} \in G_0$, $\bar{a}$ dan $\bar{b}$ merupakan elemen *commuting regular* kiri.

$$
\begin{aligned}
\bar{a} * \bar{b} &= (\bar{b} * \bar{a}) * \left(\bar{c} * (\bar{b} * \bar{a})\right) \\
&= (\overline{2b-a}) * \left(\bar{c} * (\overline{2b-a})\right) \\
&\equiv (\overline{2b-a}) * \left(\overline{2c + (2p-1)(2b-a)}\right) (mod\ 2p) \\
&\equiv (\overline{2b-a}) * \left(\overline{2c + 4pb - 2pa - 2b + a}\right) (mod\ 2p) \\
&\equiv (\overline{2b-a}) * \left(\overline{2c - 2b + a}\right) (mod\ 2p) \\
&= (\overline{2b-a}) * \left(\overline{2c - 2b + a}\right) \\
&\equiv \overline{2(2b-a) + (2p-1)(2c-2b+a)}\ (mod\ 2p) \\
&\equiv \overline{4b - 2a + 4pc - 4pb + 2pa - 2c + 2b - a}\ (mod\ 2p) \\
&\equiv \overline{4b - 2a - 2c + 2b - a}\ (mod\ 2p)
\end{aligned}
$$

$= \overline{4b - 2a - 2c + 2b - a}$
$= \overline{6b - 3a - 2c}.$ (3.12)

Berdasarkan persamaan (3.10) dan (3.12) diperoleh,
$\overline{2c} \equiv \overline{-5a + 7b} \ (mod\ 2p)$
$\overline{2c} \equiv \overline{-5a + 7b} \ (mod\ 2p)$
$\overline{2c} = \overline{-5a + 7b + s2p}$
$\bar{c} \ = \overline{-\frac{5a}{2} + \frac{7b}{2} + sp}$
$= \overline{-\frac{5(2n-2)}{2} + \frac{7(2n-2)}{2} + sp}$
$= \overline{-5n + 5 + 7n - 7 + sp}$
$= \overline{2n - 6 + sp}$, dengan $s \in \mathbb{Z}$ dan $n = \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \dots, (\overline{2p - 2})$.

Dengan demikian $\forall \bar{a}, \bar{b} \in G_0$, $\bar{a}$ dan $\bar{b}$ merupakan elemen *commuting regular* kanan. Berdasarkan uraian di atas maka berlaku $\forall \bar{a}, \bar{b} \in G_0$, $\bar{a}$ dan $\bar{b}$ merupakan elemen *commuting regular*, dengan menggunakan uraian pembuktian yang sama berlaku juga $\forall \bar{a}, \bar{b} \in G_1$, $\bar{a}$ dan $\bar{b}$ merupakan elemen *commuting regular*. Dengan demikian G_0 dan G_1 merupakan subgrupoid *commuting regular* pada $\mathbb{Z}_{2p}(\bar{2}, \overline{2p - 1})$. ■

Contoh 3.2.9
Misalkan diambil $p = 5$, sehingga grupoid $\mathbb{Z}_{2p}(\bar{2}, \overline{2p - 1}) = \mathbb{Z}_{10}(\bar{2}, \bar{9})$. Akan ditunjukkan bahwa $G_0 = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}\}$ dan $G_1 = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}, \bar{9}\}$ merupakan subgrupoid *commuting regular* pada $\mathbb{Z}_{10}(\bar{2}, \bar{9})$.

Bukti:
Untuk mempermudah dalam menunjukkan bahwa $G_0 = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}\}$ dan $G_1 = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}, \bar{9}\}$ merupakan subgrupoid *commuting regular* pada $\mathbb{Z}_{10}(\bar{2}, \bar{9})$ diberikan tabel hasil operasi biner $*$ pada $\mathbb{Z}_{10}(\bar{2}, \bar{9})$.

Tabel 3.21 Hasil operasi biner $*$ pada $\mathbb{Z}_{10}(\bar{2}, \bar{9})$

$*$	$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{\mathbf{1}}$	$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{\mathbf{3}}$	$\bar{\mathbf{4}}$	$\bar{\mathbf{5}}$	$\bar{\mathbf{6}}$	$\bar{\mathbf{7}}$	$\bar{\mathbf{8}}$	$\bar{\mathbf{9}}$
$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{0}$	$\bar{9}$	$\bar{8}$	$\bar{7}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$
$\bar{\mathbf{1}}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{9}$	$\bar{8}$	$\bar{7}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$
$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{9}$	$\bar{8}$	$\bar{7}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$
$\bar{\mathbf{3}}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{9}$	$\bar{8}$	$\bar{7}$
$\bar{\mathbf{4}}$	$\bar{8}$	$\bar{7}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{9}$

$*$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{9}$	$\bar{8}$	$\bar{7}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$
$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{9}$	$\bar{8}$	$\bar{7}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$
$\bar{7}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{9}$	$\bar{8}$	$\bar{7}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$
$\bar{8}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{9}$	$\bar{8}$	$\bar{7}$
$\bar{9}$	$\bar{8}$	$\bar{7}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{9}$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $G_0 = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}\}$ dan $G_1 = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}, \bar{9}\}$ merupakan subgrupoid *commuting regular* pada $\mathbb{Z}_{10}(\bar{2}, \bar{9})$.

Tabel 3.22 Hasil operasi syarat elemen *commuting regular* pada $G_0 \subseteq \mathbb{Z}_{10}$

$\bar{a}$ dan $\bar{b}$	$\bar{c}$	$\bar{a} * \bar{b}$	$\left((\bar{b} * \bar{a}) * \bar{c}\right) * (\bar{b} * \bar{a})$	$(\bar{b} * \bar{a}) * (\bar{c} * (\bar{b} * \bar{a}))$
$\bar{0}$ dan $\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$ dan $\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{8}$	$\bar{8}$	$\bar{8}$
$\bar{0}$ dan $\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{6}$	$\bar{6}$
$\bar{0}$ dan $\bar{6}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$ dan $\bar{8}$	$\bar{8}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$ dan $\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$ dan $\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$ dan $\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$ dan $\bar{6}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$	$\bar{8}$	$\bar{8}$
$\bar{2}$ dan $\bar{8}$	$\bar{8}$	$\bar{6}$	$\bar{6}$	$\bar{6}$
$\bar{4}$ dan $\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{8}$	$\bar{8}$	$\bar{8}$
$\bar{4}$ dan $\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\bar{6}$	$\bar{6}$
$\bar{4}$ dan $\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{4}$
$\bar{4}$ dan $\bar{6}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$ dan $\bar{8}$	$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{6}$ dan $\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$
$\bar{6}$ dan $\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{6}$ dan $\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\bar{8}$	$\bar{8}$
$\bar{6}$ dan $\bar{6}$	$\bar{6}$	$\bar{6}$	$\bar{6}$	$\bar{6}$
$\bar{6}$ dan $\bar{8}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{4}$
$\bar{8}$ dan $\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{6}$	$\bar{6}$

$\overline{\boldsymbol{a}}$ **dan** $\overline{\boldsymbol{b}}$	$\overline{\boldsymbol{c}}$	$\overline{\boldsymbol{a}} * \overline{\boldsymbol{b}}$	$\left(\left(\overline{\boldsymbol{b}} * \overline{\boldsymbol{a}}\right) * \overline{\boldsymbol{c}}\right) * (\overline{\boldsymbol{b}} * \overline{\boldsymbol{a}})$	$\left(\overline{\boldsymbol{b}} * \overline{\boldsymbol{a}}\right) * (\overline{\boldsymbol{c}} * \left(\overline{\boldsymbol{b}} * \overline{\boldsymbol{a}}\right))$
$\overline{8}$ dan $\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{4}$
$\overline{8}$ dan $\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{2}$
$\overline{8}$ dan $\overline{6}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{8}$ dan $\overline{8}$	$\overline{8}$	$\overline{8}$	$\overline{8}$	$\overline{8}$

Tabel 3.23 Hasil operasi syarat elemen *commuting regular* pada $G_1 \subseteq \mathbb{Z}_{10}$

$\overline{\boldsymbol{a}}$ **dan** $\overline{\boldsymbol{b}}$	$\overline{\boldsymbol{c}}$	$\overline{\boldsymbol{a}} * \overline{\boldsymbol{b}}$	$\left(\left(\overline{\boldsymbol{b}} * \overline{\boldsymbol{a}}\right) * \overline{\boldsymbol{c}}\right) * (\overline{\boldsymbol{b}} * \overline{\boldsymbol{a}})$	$\left(\overline{\boldsymbol{b}} * \overline{\boldsymbol{a}}\right) * (\overline{\boldsymbol{c}} * \left(\overline{\boldsymbol{b}} * \overline{\boldsymbol{a}}\right))$
$\overline{1}$ dan $\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{1}$
$\overline{1}$ dan $\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{9}$	$\overline{9}$	$\overline{9}$
$\overline{1}$ dan $\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{7}$	$\overline{7}$	$\overline{7}$
$\overline{1}$ dan $\overline{7}$	$\overline{7}$	$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{5}$
$\overline{1}$ dan $\overline{9}$	$\overline{9}$	$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{3}$
$\overline{3}$ dan $\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{5}$
$\overline{3}$ dan $\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{3}$
$\overline{3}$ dan $\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$ dan $\overline{7}$	$\overline{7}$	$\overline{9}$	$\overline{9}$	$\overline{9}$
$\overline{3}$ dan $\overline{9}$	$\overline{9}$	$\overline{7}$	$\overline{7}$	$\overline{7}$
$\overline{5}$ dan $\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{9}$	$\overline{9}$	$\overline{9}$
$\overline{5}$ dan $\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{7}$	$\overline{7}$	$\overline{7}$
$\overline{5}$ dan $\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{5}$
$\overline{5}$ dan $\overline{7}$	$\overline{7}$	$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{3}$
$\overline{5}$ dan $\overline{9}$	$\overline{9}$	$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{1}$
$\overline{7}$ dan $\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{3}$
$\overline{7}$ dan $\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{1}$
$\overline{7}$ dan $\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{9}$	$\overline{9}$	$\overline{9}$
$\overline{7}$ dan $\overline{7}$	$\overline{7}$	$\overline{7}$	$\overline{7}$	$\overline{7}$
$\overline{7}$ dan $\overline{9}$	$\overline{9}$	$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{5}$
$\overline{9}$ dan $\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{7}$	$\overline{7}$	$\overline{7}$
$\overline{9}$ dan $\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{5}$
$\overline{9}$ dan $\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{3}$
$\overline{9}$ dan $\overline{7}$	$\overline{7}$	$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{1}$
$\overline{9}$ dan $\overline{9}$	$\overline{9}$	$\overline{9}$	$\overline{9}$	$\overline{9}$

Berdasarkan Tabel 3.22 dan Tabel 3.23 terbukti bahwa $G_0 = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}\}$ dan $G_1 = \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{9}\}$ merupakan subgrupoid *commuting regular* pada $\mathbb{Z}_{10}(\overline{2}, \overline{9})$. ■

Teorema 3.2.10
Grupoid $\mathbb{Z}_n(\overline{t}, \overline{t})$ merupakan grupoid *commuting regular* dengan $\overline{t}^2 \equiv \overline{t}(mod\ n)$ dan $t < n$.
Bukti:
Misalkan diambil $\overline{a}, \overline{b} \in \mathbb{Z}_n$, sehingga

$$\begin{aligned}
\overline{a} * \overline{b} &\equiv \overline{ta} + \overline{tb}\ (mod\ n) \\
&= \overline{ta + tb} \\
\overline{b} * \overline{a} &\equiv \overline{tb} + \overline{ta}\ (mod\ n) \\
&= \overline{tb + ta} \\
\overline{a} * \overline{b} &= \overline{b} * \overline{a} = \overline{ta + tb} = \overline{tb + ta} = \overline{t(a + b)}.
\end{aligned}$$

Jadi, $\mathbb{Z}_n(\overline{t}, \overline{t})$ merupakan grupoid komutatif. Selanjutnya akan ditentukan $\overline{c} \in \mathbb{Z}_n$ sedemikian sehingga $\forall \overline{a}, \overline{b} \in \mathbb{Z}_n$, $\overline{a}$ dan $\overline{b}$ merupakan elemen *commuting regular*.

$$\begin{aligned}
\overline{a} * \overline{b} &= \left(\overline{b} * \overline{a}\right) * \overline{c} * (\overline{b} * \overline{a}) \\
&= \overline{t(a + b)} * \overline{c} * \overline{t(a + b)} \\
&\equiv \overline{t^2(a + b) + tc}\ (mod\ n) * \overline{t(a + b)} \\
&\equiv \overline{t(a + b) + tc}\ (mod\ n) * \overline{t(a + b)}, \text{ karena } \overline{t}^2 \equiv \overline{t}(mod\ n) \\
&= \overline{t(a + b + c)} * \overline{t(a + b)} \\
&\equiv \overline{t^2(a + b + c) + t^2(a + b)}\ (mod\ n) \\
&\equiv \overline{t(a + b + c) + t(a + b)}\ (mod\ n), \text{ karena } \overline{t}^2 \equiv \overline{t}(mod\ n) \\
&= \overline{t(2a + 2b + c)},
\end{aligned}$$

sedangkan di sisi lain $\overline{a} * \overline{b} = \overline{t(a + b)}$ sehingga diperoleh $\overline{c} \equiv \overline{-(a + b)}\ (mod\ n)$ sedemikian sehingga $\forall \overline{a}, \overline{b} \in \mathbb{Z}_n$, $\overline{a}$ dan $\overline{b}$ merupakan elemen *commuting regular*. Oleh karena itu, $\mathbb{Z}_n(\overline{t}, \overline{t})$ merupakan grupoid *commuting regular*. ■

Contoh 3.2.11
Diberikan grupoid $\mathbb{Z}_6(\overline{3}, \overline{3})$. Akan ditunjukkan bahwa $\mathbb{Z}_6(\overline{3}, \overline{3})$ merupakan grupoid *commuting regular*.

Bukti:

Untuk mempermudah dalam membuktikan bahwa $\mathbb{Z}_6(\bar{3},\bar{3})$ merupakan grupoid *commuting regular*, diberikan hasil operasi biner $\mathbb{Z}_6(\bar{3},\bar{3})$ pada tabel berikut.

Tabel 3.24 Hasil operasi biner $*$ pada $\mathbb{Z}_6(\bar{3},\bar{3})$

$*$	$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{\mathbf{1}}$	$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{\mathbf{3}}$	$\bar{\mathbf{4}}$	$\bar{\mathbf{5}}$
$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{\mathbf{1}}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{\mathbf{3}}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{\mathbf{4}}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{\mathbf{5}}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\forall \bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_6$, $\bar{a}$ dan $\bar{b}$ merupakan elemen *commuting regular*. Untuk mempermudah dalam membuktikannya perhatikan tabel berikut.

Tabel 3.25 Hasil operasi syarat elemen *commuting regular* pada $\mathbb{Z}_6(\bar{3},\bar{3})$

$\bar{a}$ **dan** $\bar{b}$	$\bar{c}$	$\bar{a} * \bar{b}$	$(\bar{b} * \bar{a}) * \bar{c} * (\bar{b} * \bar{a})$
$\bar{0}$ dan $\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$ dan $\bar{1}$	$\bar{5}$	$\bar{3}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$ dan $\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$ dan $\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$ dan $\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$ dan $\bar{5}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{3}$
$\bar{1}$ dan $\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{3}$	$\bar{3}$
$\bar{1}$ dan $\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$ dan $\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{3}$
$\bar{1}$ dan $\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$ dan $\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{3}$
$\bar{1}$ dan $\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$ dan $\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$ dan $\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{3}$
$\bar{2}$ dan $\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$

$\bar{a}$ dan $\bar{b}$	$\bar{c}$	$\bar{a} * \bar{b}$	$(\bar{b} * \bar{a}) * \bar{c} * (\bar{b} * \bar{a})$
$\bar{2}$ dan $\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{3}$
$\bar{2}$ dan $\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$ dan $\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{3}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$ dan $\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$ dan $\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{3}$ dan $\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$ dan $\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{3}$ dan $\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{3}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$ dan $\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{4}$ dan $\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{4}$ dan $\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{3}$
$\bar{4}$ dan $\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{4}$ dan $\bar{3}$	$\bar{5}$	$\bar{3}$	$\bar{3}$
$\bar{4}$ dan $\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{4}$ dan $\bar{5}$	$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$ dan $\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$ dan $\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{5}$ dan $\bar{2}$	$\bar{5}$	$\bar{3}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$ dan $\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{5}$ dan $\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$ dan $\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$

Berdasarkan Tabel 3.25, terbukti bahwa $\forall \bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_6$, $\bar{a}$ dan $\bar{b}$ merupakan elemen *commuting regular*, sehingga $\mathbb{Z}_6(\bar{3}, \bar{3})$ merupakan grupoid *commuting regular*. ■

Teorema 3.2.12
Grupoid $\mathbb{Z}_n(\bar{t}, \bar{t})$ merupakan semigrup *commuting regular* dengan $\bar{t}^2 \equiv \bar{t}(mod\ n)$ dan $\bar{t} + \bar{t} \equiv \bar{0}(mod\ \bar{n})$.
Bukti:
Misalkan diambil $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_n$, sehingga

$$\begin{aligned} \bar{a} * \bar{b} &\equiv \overline{ta} + \overline{tb}\ (mod\ n) \\ &= \overline{ta + tb} \end{aligned}$$

$\bar{b} * \bar{a} \ \equiv \overline{tb} + \overline{ta} \ (mod\ n)$
$= \overline{tb + ta}$
$\bar{a} * \bar{b} \ = \bar{b} * \bar{a} = \overline{ta + tb} = \overline{tb + ta} = \overline{t(a + b)}.$

Jadi, $\mathbb{Z}_n(\bar{t}, \bar{t})$ merupakan semigrup komutatif. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\forall \bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_n$, $\bar{a}$ dan $\bar{b}$ merupakan elemen *commuting regular*. Misalkan diambil $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$, sehingga

$$\begin{aligned}
\bar{a} * \bar{b} &= \left(\bar{b} * \bar{a}\right) * \bar{c} * (\bar{b} * \bar{a}) \\
&= \overline{t(a + b)} * \bar{c} * \overline{t(a + b)} \\
&\equiv \overline{t^2(a + b) + tc}\ (mod\ n) * \overline{t(a + b)} \\
&\equiv \overline{t(a + b) + tc}\ (mod\ n) * \overline{t(a + b)}, \text{ karena } \bar{t}^2 \equiv \bar{t} (mod\ n) \\
&= \overline{t(a + b + c)} * \overline{t(a + b)} \\
&\equiv \overline{t^2(a + b + c) + t^2(a + b)}\ (mod\ n) \\
&\equiv \overline{t(a + b + c) + t(a + b)}\ (mod\ n), \text{ karena } \bar{t}^2 \equiv \bar{t} (mod\ n) \\
&= \overline{ta + tb + tc + ta + tb} \\
&= \overline{(t + t)a + (t + t)b + tc} \\
&= \overline{tc}, \text{ karena } \bar{t} + \bar{t} \equiv \bar{0} (mod\ n) \\
&= \overline{ta + tb}.
\end{aligned}$$

Berdasarkan tersebut terbukti bahwa $\forall \bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_n$, $\bar{a}$ dan $\bar{b}$ merupakan elemen *commuting regular*. Oleh karena itu, $\mathbb{Z}_n(\bar{t}, \bar{t})$ merupakan semigrup *commuting regular*. ∎

Contoh 3.2.13

Perhatikan Contoh 3.2.11, akan ditunjukkan bahwa $\mathbb{Z}_6(\bar{3}, \bar{3})$ merupakan semigrup *commuting regular* dengan
$\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}\ (mod\ n)$.

Bukti:

Untuk mempermudah dalam membuktikan bahwa $\mathbb{Z}_6(\bar{3}, \bar{3})$ merupakan semigrup *commuting regular* dengan $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}\ (mod\ n)$ perhatikan tabel berikut.

Tabel 3.26 Hasil operasi syarat elemen *commuting regular* pada $\mathbb{Z}_6(\bar{3}, \bar{3})$ dengan $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}\ (mod\ n)$

$\bar{a}$ dan $\bar{b}$	$\bar{c}$	$\bar{a} * \bar{b}$	$\left(\bar{b} * \bar{a}\right) * \bar{c} * (\bar{b} * \bar{a})$
$\bar{0}$ dan $\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$ dan $\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$ dan $\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$

$\overline{\boldsymbol{a}}$ **dan** $\overline{\boldsymbol{b}}$	$\overline{\boldsymbol{c}}$	$\overline{\boldsymbol{a}} * \overline{\boldsymbol{b}}$	$(\overline{\boldsymbol{b}} * \overline{\boldsymbol{a}}) * \overline{\boldsymbol{c}} * (\overline{\boldsymbol{b}} * \overline{\boldsymbol{a}})$
$\overline{0}$ dan $\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{3}$
$\overline{0}$ dan $\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{0}$ dan $\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{3}$	$\overline{3}$
$\overline{1}$ dan $\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$	$\overline{3}$
$\overline{1}$ dan $\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$ dan $\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{3}$
$\overline{1}$ dan $\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$ dan $\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{3}$	$\overline{3}$
$\overline{1}$ dan $\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$ dan $\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$ dan $\overline{1}$	$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{3}$
$\overline{2}$ dan $\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$ dan $\overline{3}$	$\overline{5}$	$\overline{3}$	$\overline{3}$
$\overline{2}$ dan $\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$ dan $\overline{5}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$	$\overline{3}$
$\overline{3}$ dan $\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{3}$
$\overline{3}$ dan $\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{3}$ dan $\overline{2}$	$\overline{5}$	$\overline{3}$	$\overline{3}$
$\overline{3}$ dan $\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{3}$ dan $\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$	$\overline{3}$
$\overline{3}$ dan $\overline{5}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{4}$ dan $\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{4}$ dan $\overline{1}$	$\overline{5}$	$\overline{3}$	$\overline{3}$
$\overline{4}$ dan $\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{4}$ dan $\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$	$\overline{3}$
$\overline{4}$ dan $\overline{4}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{4}$ dan $\overline{5}$	$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{3}$
$\overline{5}$ dan $\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{3}$	$\overline{3}$
$\overline{5}$ dan $\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{5}$ dan $\overline{2}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$	$\overline{3}$
$\overline{5}$ dan $\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{5}$ dan $\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{3}$
$\overline{5}$ dan $\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$

Berdasarkan Tabel 3.26 terbukti bahwa $\forall \bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_6$, $\bar{a}$ dan $\bar{b}$ merupakan elemen *commuting regular*. Oleh karena itu, $\mathbb{Z}_6(\bar{3}, \bar{3})$ merupakan semigrup *commuting regular* dengan
$\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}\ (mod\ n)$. ■

Teorema 3.2.14
Grupoid $\mathbb{Z}_n(\bar{t}, \bar{t})$ merupakan semigrup *commuting regular* dengan $\bar{t}^2 \equiv \bar{t}(mod\ n)$ dan $\bar{t} + \bar{t} \equiv \bar{t}(mod\ \bar{n})$.
Bukti:
Misalkan diambil $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_n$, sehingga

$$\begin{aligned}
\bar{a} * \bar{b} &\equiv \overline{ta} + \overline{tb}\ (mod\ n) \\
&= \overline{ta + tb} \\
\bar{b} * \bar{a} &\equiv \overline{tb} + \overline{ta}\ (mod\ n) \\
&= \overline{tb + ta} \\
\bar{a} * \bar{b} &= \bar{b} * \bar{a} = \overline{ta + tb} = \overline{tb + ta} = \overline{t(a + b)}.
\end{aligned}$$

Jadi, $\mathbb{Z}_n(\bar{t}, \bar{t})$ merupakan semigrup komutatif. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\forall \bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_n$, $\bar{a}$ dan $\bar{b}$ merupakan elemen *commuting regular*. Misalkan diambil $\bar{c} = \bar{0}$, sehingga

$$\begin{aligned}
\bar{a} * \bar{b} &= \left(\bar{b} * \bar{a}\right) * \bar{c} * (\bar{b} * \bar{a}) \\
&= \overline{t(a + b)} * \bar{c} * \overline{t(a + b)} \\
&\equiv \overline{t^2(a + b) + tc}\ (mod\ n) * \overline{t(a + b)} \\
&= \overline{t(a + b + 0)} * \overline{t(a + b)}, \text{ karena } \bar{t}^2 \equiv \bar{t}(mod\ n) \\
&= \overline{t(a + b)} * \overline{t(a + b)} \\
&\equiv \overline{t^2(a + b) + t^2(a + b)}\ (mod\ n) \\
&\equiv \overline{t(a + b) + t(a + b)}\ (mod\ n), \text{ karena } \bar{t}^2 \equiv \bar{t}(mod\ n) \\
&= \overline{(t + t)a + (t + t)b} \\
&= \overline{ta + tb}, \text{ karena } \bar{t} + \bar{t} \equiv \bar{t}(mod\ n).
\end{aligned}$$

Berdasarkan uraian di atas terbukti bahwa $\forall \bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_n$, $\bar{a}$ dan $\bar{b}$ merupakan elemen *commuting regular*. Oleh karena itu, $\mathbb{Z}_n(\bar{t}, \bar{t})$ merupakan semigrup *commuting regular*. ■

Contoh 3.2.15
Misalkan diambil $n = 3$ dan $\bar{t} = \bar{0}$, sehingga $\mathbb{Z}_n(\bar{t}, \bar{t}) = \mathbb{Z}_3(\bar{0}, \bar{0})$. Akan ditunjukkan bahwa $\mathbb{Z}_3(\bar{0}, \bar{0})$ merupakan grupoid *commuting regular*.

Bukti:
Sebelum ditunjukkan bahwa $\mathbb{Z}_3(\bar{0},\bar{0})$ merupakan semigrup *commuting regular*, perhatikan tabel hasil operasi biner pada $\mathbb{Z}_3(\bar{0},\bar{0})$ berikut.

Tabel 3.27 Hasil operasi biner $*$ pada $\mathbb{Z}_3(\bar{0},\bar{0})$

$*$	$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{\mathbf{1}}$	$\bar{\mathbf{2}}$
$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{\mathbf{1}}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa setiap elemen pada $\mathbb{Z}_3(\bar{0},\bar{0})$ merupakan elemen *commuting regular* pada tabel berikut.

Tabel 3.28 Hasil operasi syarat elemen *commuting regular* pada $\mathbb{Z}_3(\bar{0},\bar{0})$

$\bar{a}$ **dan** $\bar{b}$	$\bar{c}$	$\bar{a} * \bar{b}$	$(\bar{b} * \bar{a}) * \bar{c} * (\bar{b} * \bar{a})$
$\bar{0}$ dan $\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$ dan $\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$ dan $\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$ dan $\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$ dan $\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$ dan $\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$ dan $\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$ dan $\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$ dan $\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$

Berdasarkan Tabel 3.27 $\forall x, y \in \mathbb{Z}_3$ berlaku
$\bar{a} * \bar{b} = \left(\left(\bar{b} * \bar{a}\right) * \bar{c}\right) * (\bar{b} * a)$ dan $\bar{a} * \bar{b} = \left(\bar{b} * \bar{a}\right) * (\bar{c} * (b * \bar{a}))$, sehingga setiap elemen pada $\mathbb{Z}_3(\bar{0},\bar{0})$ merupakan elemen *commuting regular*, sehingga terbukti bahwa $\mathbb{Z}_3(\bar{0},\bar{0})$ merupakan semigrup *commuting regular*. ■

Proposisi 3.2.16
Jika $G = \{\bar{0}, \bar{k}\}$ merupakan subgrupoid pada grupoid $\mathbb{Z}_n(\bar{t}, \bar{0})$ dengan $n = kt$, maka G merupakan subsemigrup *commuting regular* pada grupoid $\mathbb{Z}_n(\bar{t}, \bar{0})$.
Bukti:
Untuk membuktikan bahwa $G = \{\bar{0}, \bar{k}\}$ merupakan subsemigrup *commuting regular* pada grupoid $\mathbb{Z}_n(\bar{t}, \bar{0})$ diberikan tabel hasil operasi biner $*$ pada G sebagai berikut.

Tabel 3.29 Hasil operasi biner $*$ pada $G \subseteq \mathbb{Z}_n$

$*$	$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{\boldsymbol{k}}$
$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{\boldsymbol{k}}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$

Berdasarkan Tabel 3.29, dapat dilihat bahwa G memenuhi aksioma tertutup dan asosiatif, sehingga G merupakan subsemigrup pada grupoid $\mathbb{Z}_n(\bar{t}, \bar{0})$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa G merupakan subsemigrup *commuting regular*.

Tabel 3.30 Hasil operasi syarat elemen *commuting regular* pada $G \subseteq \mathbb{Z}_n$

$\bar{\boldsymbol{x}}$ **dan** $\bar{\boldsymbol{y}}$	$\bar{\boldsymbol{z}}$	$\bar{\boldsymbol{x}} * \bar{\boldsymbol{y}}$	$\left((\bar{\boldsymbol{y}} * \bar{\boldsymbol{x}}) * \bar{\boldsymbol{z}}\right) * (\bar{\boldsymbol{y}} * \bar{\boldsymbol{x}})$	$(\bar{\boldsymbol{y}} * \bar{\boldsymbol{x}}) * (\bar{\boldsymbol{z}} * (\bar{\boldsymbol{y}} * \bar{\boldsymbol{x}}))$
$\bar{0}$ dan $\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$ dan k	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
k dan $\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
k dan k	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$

Berdasarkan Tabel 3.30 terbukti bahwa $G = \{\bar{0}, \bar{k}\}$ merupakan subsemigrup *commuting regular* pada grupoid $\mathbb{Z}_n(\bar{t}, \bar{0})$. ■

Contoh 3.2.17
Diberikan grupoid $\mathbb{Z}_4(\bar{2}, \bar{0})$. Akan ditunjukkan bahwa $G = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ merupakan subsemigrup *commuting regular* pada grupoid $\mathbb{Z}_4(\bar{2}, \bar{0})$.
Bukti:
Untuk membuktikan bahwa $G = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ merupakan subsemigrup *commuting regular* pada grupoid $\mathbb{Z}_4(\bar{2}, \bar{0})$ diberikan tabel hasil operasi biner $*$ pada G sebagai berikut.

Tabel 3.31 Hasil operasi biner $*$ pada $G \subseteq \mathbb{Z}_4$

$*$	$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{\mathbf{2}}$
$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$

Berdasarkan Tabel 3.31, dapat dilihat bahwa G memenuhi aksioma tertutup dan asosiatif, sehingga G merupakan subsemigrup pada grupoid $\mathbb{Z}_4(\bar{2},\bar{0})$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa G merupakan subsemigrup *commuting regular*.

Tabel 3.32 Hasil operasi syarat elemen *commuting regular* pada $G \subseteq \mathbb{Z}_4$

$\bar{\boldsymbol{x}}$ **dan** $\bar{\boldsymbol{y}}$	$\bar{\boldsymbol{z}}$	$\bar{\boldsymbol{x}} * \bar{\boldsymbol{y}}$	$\left((\bar{\boldsymbol{y}} * \bar{\boldsymbol{x}}) * \bar{\boldsymbol{z}}\right) * (\bar{\boldsymbol{y}} * \bar{\boldsymbol{x}})$	$(\bar{\boldsymbol{y}} * \bar{\boldsymbol{x}}) * (\bar{\boldsymbol{z}} * (\bar{\boldsymbol{y}} * \bar{\boldsymbol{x}}))$
$\bar{0}$ dan $\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$ dan $\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$ dan $\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$ dan $\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$

Berdasarkan Tabel 3.32 terbukti bahwa $G = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ merupakan subsemigrup *commuting regular* pada grupoid $\mathbb{Z}_4(\bar{2},\bar{0})$. ■

Akibat 3.2.18

Jika $P = \{\bar{0}, \bar{k}\}$ merupakan subgrupoid pada grupoid $\mathbb{Z}_n(\bar{0},\bar{t})$ dengan $n = kt$, maka P merupakan subsemigrup *commuting regular* pada grupoid $\mathbb{Z}_n(\bar{0},\bar{t})$.

Bukti:

Untuk membuktikan bahwa $P = \{\bar{0}, \bar{k}\}$ merupakan subsemigrup *commuting regular* pada grupoid $\mathbb{Z}_n(\bar{0},\bar{t})$ diberikan tabel berikut.

Tabel 3.33 Hasil operasi biner $*$ pada $P \subseteq \mathbb{Z}_n$

$*$	$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{\boldsymbol{k}}$
$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{\boldsymbol{k}}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$

Berdasarkan Tabel 3.33, dapat dilihat bahwa P memenuhi aksioma tertutup dan asosiatif, sehingga P merupakan subsemigrup pada grupoid $\mathbb{Z}_n(\bar{0}, \bar{t})$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa P merupakan subsemigrup *commuting regular*.

Tabel 3.34 Hasil operasi syarat elemen *commuting regular* pada $P \subseteq \mathbb{Z}_n$

$\bar{x}$ **dan** $\bar{y}$	$\bar{z}$	$\bar{x} * \bar{y}$	$((\bar{y} * \bar{x}) * \bar{z}) * (\bar{y} * \bar{x})$	$(\bar{y} * \bar{x}) * (\bar{z} * (\bar{y} * \bar{x}))$
$\bar{0}$ dan $\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$ dan k	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
k dan $\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
k dan k	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$

Berdasarkan Tabel 3.34 terbukti bahwa P merupakan subsemigrup *commuting regular* pada grupoid $\mathbb{Z}_n(\bar{0}, \bar{t})$. ■

Contoh 3.2.19
Diberikan grupoid $\mathbb{Z}_4(\bar{0}, \bar{2})$. Akan ditunjukkan bahwa $P = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ merupakan subsemigrup *commuting regular* pada grupoid $\mathbb{Z}_4(\bar{0}, 2)$.
Bukti:
Untuk membuktikan bahwa P merupakan subsemigrup *commuting regular* pada grupoid $\mathbb{Z}_4(\bar{0}, \bar{2})$ diberikan tabel hasil operasi biner $*$ pada P sebagai berikut.

Tabel 3.35 Hasil operasi biner $*$ pada $P \subseteq \mathbb{Z}_4$

$*$	$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{\mathbf{2}}$
$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$

Berdasarkan Tabel 3.35, dapat dilihat bahwa P memenuhi aksioma tertutup dan asosiatif, sehingga P merupakan subsemigrup pada grupoid $\mathbb{Z}_4(\bar{0}, \bar{2})$.

Tabel 3.36 Hasil operasi syarat elemen *commuting regular* pada $P \subseteq \mathbb{Z}_4$

$\bar{x}$ **dan** $\bar{y}$	$\bar{z}$	$\bar{x} * \bar{y}$	$((\bar{y} * \bar{x}) * \bar{z}) * (\bar{y} * \bar{x})$	$(\bar{y} * \bar{x}) * (\bar{z} * (\bar{y} * \bar{x}))$
$\bar{0}$ dan $\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$ dan $\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$

$\bar{x}$ **dan** $\bar{y}$	$\bar{z}$	$\bar{x} * \bar{y}$	$\left((\bar{y} * \bar{x}) * \bar{z}\right) * (\bar{y} * \bar{x})$	$(\bar{y} * \bar{x}) * (\bar{z} * (\bar{y} * \bar{x}))$
$\bar{2}$ dan $\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$ dan $\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$

Berdasarkan Tabel 3.36 terbukti bahwa $G = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ merupakan subsemigrup *commuting regular* pada grupoid $\mathbb{Z}_4(\bar{0}, \bar{2})$. ■

Teorema 3.2.20
Perhatikan grupoid $\mathbb{Z}_n(\bar{t}, \bar{u})$ dengan $\bar{t}^2 \equiv \bar{t}(mod\ n)$, $\bar{u}^2 \equiv \bar{u}(mod\ n)$ untuk setiap $\bar{t}, \bar{u} \in \mathbb{Z}_n \backslash \{\bar{0}\}$. Jika $\bar{t} + \bar{u} \equiv \bar{1}(mod\ n)$, maka grupoid $\mathbb{Z}_n(\bar{t}, \bar{u})$ merupakan semigrup Von Neumann dan $\{\bar{a}\}$ merupakan grupoid *commuting regular* untuk setiap $\bar{a} \in \mathbb{Z}_n$.

Bukti:
Misalkan diambil $\bar{a} \in \mathbb{Z}_n$, sehingga

$$
\begin{aligned}
\bar{a} * \bar{a} &\equiv \overline{ta} + \overline{ua}\ (mod\ n) \\
&\equiv \overline{(t+u)a}\ (mod\ n) \\
&\equiv \bar{a}\ (mod\ n) = \bar{a}. \\
\bar{a} * \bar{a} &= \left((\bar{a} * \bar{a}) * \bar{a}\right) * (\bar{a} * \bar{a}) \\
&= (\bar{a} * \bar{a}) * \bar{a} \\
&= \bar{a} * \bar{a} = \bar{a}. \\
\bar{a} * \bar{a} &= (\bar{a} * \bar{a}) * (\bar{a} * (\bar{a} * \bar{a})) \\
&= \bar{a} * (\bar{a} * \bar{a}) \\
&= \bar{a} * \bar{a} = \bar{a}.
\end{aligned}
$$

Berdasarkan uraian di atas dapat dilihat bahwa $\bar{a}$ merupakan elemen idempoten dan elemen *commuting regular*. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $\{\bar{a}\}$ merupakan semigrup Von Neumann.

$$
\begin{aligned}
\bar{a} * \bar{c} * \bar{a} &\equiv (\overline{ta} + \overline{uc})(mod\ n) * \bar{a} \\
&\equiv \overline{(ta + uc)} * \bar{a} \\
&\equiv \overline{t(ta + uc)} + \overline{ua}\ (mod\ n) \\
&\equiv \overline{t^2 + tuc + ua}\ (mod\ n) \\
&\equiv \overline{ta + ua}\ (mod\ n), \quad \text{karena } \bar{t} + \bar{u} \equiv \bar{1}(mod\ n), \text{ maka} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \bar{t}\bar{u} \equiv \bar{0}(mod\ n) \text{ dan } \bar{t}^2 \equiv \bar{t}(mod\ n) \\
&\equiv \overline{(t+u)a}\ (mod\ n) \\
&\equiv \bar{a}\ (mod\ n) = \bar{a}.
\end{aligned}
$$

Berdasarkan uraian di atas terbukti $\bar{a}$ merupakan elemen Von Neumann, sehingga $\{\bar{a}\}$ merupakan semigrup Von Neumann. Dengan demikian $\mathbb{Z}_n(\bar{t}, \bar{u})$ merupakan semigrup Von Neumann. ■

Contoh 3.2.21

Perhatikan Contoh 2.10.4. Berdasarkan Contoh 2.10.4 dapat dilihat bahwa grupoid $\mathbb{Z}_6(\bar{3},\bar{4})$ merupakan semigrup. Akan ditunjukkan $\mathbb{Z}_6(\bar{3},\bar{4})$ merupakan semigrup Von Neumann dengan $\bar{3}^2 \equiv \bar{3}\ (mod\ 6)$, $\bar{4}^2 \equiv \bar{4}(mod\ 6)$, dan $\bar{3}+\bar{4} \equiv \bar{1}\ (mod\ 6)$.

Bukti:

Untuk mempermudah membuktikannya diberikan tabel berikut.

Tabel 3.37 Hasil operasi syarat semigrup Von Neuman pada $\mathbb{Z}_6(\bar{3},\bar{4})$

$\bar{a}$	$\{\bar{a}\}$	$\bar{c}$	$\bar{a}*\bar{c}*\bar{a}$
$\bar{0}$	$\{\bar{0}\}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\{\bar{1}\}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$
$\bar{2}$	$\{\bar{2}\}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$
$\bar{3}$	$\{\bar{3}\}$	$\bar{3}$	$\bar{3}$
$\bar{4}$	$\{\bar{4}\}$	$\bar{4}$	$\bar{4}$
$\bar{5}$	$\{\bar{5}\}$	$\bar{5}$	$\bar{5}$

Berdasarkan Tabel 3.37 terbukti bahwa untuk setiap $\bar{a} \in \mathbb{Z}_6$, $\bar{a}$ merupakan elemen Von Neumann, sehingga $\mathbb{Z}_6(\bar{3},\bar{4})$ merupakan semigrup Von Neumann.■

Contoh 3.2.22

Perhatikan Contoh 3.1.3. Akan ditunjukkan grupoid $\mathbb{Z}_3(\bar{1},\bar{1})$ merupakan semigrup Von Neumann.

Bukti:

Perhatikan hasil operasi biner $*$ grupoid $\mathbb{Z}_3(\bar{1},\bar{1})$ pada Tabel 3.2. Untuk membuktikan bahwa grupoid $\mathbb{Z}_3(\bar{1},\bar{1})$ bukan merupakan semigrup Von Neumann diberikan tabel berikut.

Tabel 3.38 Hasil operasi syarat semigrup Von Neuman pada $\mathbb{Z}_3(\bar{1},\bar{1})$

$\bar{a}$	$\{\bar{a}\}$	$\bar{c}$	$\bar{a}*\bar{c}*\bar{a}$
$\bar{0}$	$\{\bar{0}\}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\{\bar{1}\}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$
$\bar{2}$	$\{\bar{2}\}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$

Berdasarkan Tabel 3.38 terbukti bahwa untuk setiap $\bar{a} \in \mathbb{Z}_3$, $\bar{a}$ merupakan elemen Von Neumann, sehingga $\mathbb{Z}_3(\bar{1},\bar{1})$ merupakan semigrup Von Neumann dan $\{\bar{a}\}$ merupakan grupoid *commuting regular* dengan $\bar{1}^2 \equiv \bar{1}(mod\ 6)$, tetapi $\bar{1} + \bar{1} \not\equiv \bar{1}\ (mod\ 6)$.■

Teorema 3.2.23

Perhatikan grupoid $\mathbb{Z}_n(\bar{t}, \bar{u})$ dengan $\bar{t}^2 \equiv \bar{t}(mod\ n)$, $\bar{u}^2 \equiv \bar{u}(mod\ n)$, dan $(t, u) = 1$ untuk setiap $\bar{t}, \bar{u} \in \mathbb{Z}_n\backslash\{\bar{0}\}$. Grupoid $\mathbb{Z}_n(\bar{t}, \bar{u})$ merupakan semigrup komutatif jika dan hanya jika grupoid $\mathbb{Z}_n(\bar{t}, \bar{u})$ merupakan semigrup *commuting regular*.

Bukti:

(⇒) Diketahui grupoid $\mathbb{Z}_n(\bar{t}, \bar{u})$ merupakan semigrup komutatif. Akan ditunjukkan bahwa grupoid $\mathbb{Z}_n(\bar{t}, \bar{u})$ merupakan semigrup *commuting regular*. Karena $\mathbb{Z}_n(\bar{t}, \bar{u})$ merupakan semigrup komutatif, sehingga berlaku aksioma komutatif.

Misalkan diambil $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_n$, akan dituntukkan $\bar{a}$ dan $\bar{b}$ merupakan elemen *commuting regular*.

$\bar{a} * \bar{b} \equiv \overline{ta} + \overline{ub}\ (mod\ n)$

$\equiv \overline{t^2a + tuc + uta + u^2b}\ (mod\ n)$,

karena $\bar{t}^2 \equiv \bar{t}(mod\ n)$, $\bar{u}^2 \equiv \bar{u}(mod\ n)$, dan $\bar{t} + \bar{u} \equiv \bar{1}(mod\ n)$, maka $\bar{t}\bar{u} \equiv \bar{0}(mod\ n)$

$\equiv \overline{t(ta + uc)} + \overline{u(ta + ub)}\ (mod\ n)$

$\equiv (\overline{ta + uc}) * (\overline{ta + ub})$

$= (\overline{t^2a + tub + uc}) * (\overline{ta + ub})$, karena $\bar{t}^2 \equiv \bar{t}(mod\ n)$, $\bar{u}^2 \equiv \bar{u}(mod\ n)$, dan $\bar{t} + \bar{u} \equiv \bar{1}(mod\ n)$, maka $\bar{t}\bar{u} \equiv \bar{0}(mod\ n)$

$\equiv \overline{(t(ta + ub) + uc)}\ (mod\ n) * (\overline{ta + ub})$

$= \left(\overline{ta + ub}\right) * \bar{c} * \left(\overline{ta + ub}\right)$

$\equiv \left(\overline{ta + ub}\right)(mod\ n) * \bar{c} * (\overline{ta + ub})\ (mod\ n)$

$= \left(\bar{a} * \bar{b}\right) * \bar{c} * (\bar{a} * \bar{b})$

$= \left(\bar{b} * \bar{a}\right) * \bar{c} * \left(\bar{b} * \bar{a}\right)$, karena $\mathbb{Z}_n(\bar{t}, \bar{u})$ merupakan semigrup komutatif

Berdasarkan uraian di atas terbukti bahwa $\bar{a}$ dan $\bar{b}$ merupakan elemen *commuting regular*, sehingga grupoid $\mathbb{Z}_n(\bar{t}, \bar{u})$ merupakan semigrup *commuting regular*.

(⇐)Diketahui grupoid $\mathbb{Z}_n(\bar{t},\bar{u})$ merupakan semigrup *commuting regular*. Akan ditunjukkan bahwa grupoid $\mathbb{Z}_n(\bar{t},\bar{u})$ merupakan semigrup komutatif.

Misalkan diambil $\bar{a},\bar{b} \in \mathbb{Z}_n$, akan ditunjukkan grupoid $\mathbb{Z}_n(\bar{t},\bar{u})$ memenuhi aksioma komutatif.

$$\begin{aligned}
\bar{a} * \bar{b} &= \left(\bar{b} * \bar{a}\right) * \bar{c} * \left(\bar{b} * \bar{a}\right) \\
&\equiv \left(\overline{tb + ua}\right)(mod\ n) * \bar{c} * (\overline{tb + ua})\ (mod\ n) \\
&= \left(\overline{tb + ua}\right) * \bar{c} * (\overline{tb + ua}) \\
&\equiv (\overline{t(tb + ua) + uc})\ (mod\ n) * (\overline{tb + ua}) \\
&= (\overline{t^2b + tua + uc}) * (\overline{tb + ua}) \\
&\equiv \left(\overline{tb + uc}\right) * (\overline{tb + ua}), \quad \text{karena } \bar{t} + \bar{u} \equiv \bar{1}(mod\ n), \\
&\qquad \text{maka } \bar{t}\bar{u} \equiv \bar{0}(mod\ n) \text{ dan} \\
&\qquad \bar{t}^2 \equiv \bar{t}(mod\ n) \\
&= \overline{t(tb + uc)} + \overline{u(tb + ua)} \\
&= \overline{t^2b + tuc + utb + u^2a} \\
&= \overline{tb + ua}, \text{ karena } \bar{t}^2 \equiv \bar{t}(mod\ n), \bar{u}^2 \equiv \bar{u}(mod\ n), \text{ dan} \\
&\qquad \bar{t} + \bar{u} \equiv \bar{1}(mod\ n), \text{ maka } \bar{t}\bar{u} \equiv \bar{0}(mod\ n) \\
&= \bar{b} * \bar{a}.
\end{aligned}$$

Berdasarkan uraian di atas terbukti bahwa grupoid $\mathbb{Z}_n(\bar{t},\bar{u})$ memenuhi aksioma komutatif, sehingga grupoid $\mathbb{Z}_n(\bar{t},\bar{u})$ merupakan semigrup komutatif. ■

BAB IV
PENUTUP

Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan tentang elemen *commuting regular* pada grupoid berhingga $\mathbb{Z}_n(\bar{t},\bar{u})$ dapat diperoleh beberapa kesimpulan sebagai berikut.

1. Dua elemen pada grupoid berhingga $\mathbb{Z}_n(\bar{t},\bar{u})$ merupakan elemen *commuting regular* jika elemen tersebut merupakan elemen *commuting regular* kiri dan elemen *commuting regular* kanan.
2. Jika suatu elemen pada grupoid berhingga $\mathbb{Z}_n(\bar{t},\bar{u})$ merupakan elemen idempoten, maka elemen tersebut merupakan elemen *regular* dan juga merupakan elemen *commuting regular*.
3. Jika setiap elemen pada grupoid berhingga $\mathbb{Z}_n(\bar{t},\bar{u})$ merupakan elemen *commuting regular*, maka grupoid berhingga $\mathbb{Z}_n(\bar{t},\bar{u})$ merupakan grupoid *commuting regular*.
4. Jika grupoid berhingga $\mathbb{Z}_n(\bar{t},\bar{u})$ merupakan grupoid *commuting regular*, maka grupoid berhingga $\mathbb{Z}_n(\bar{t},\bar{u})$ memuat subgrupoid *commuting regular*.
5. Jika grupoid *commuting regular* berhingga $\mathbb{Z}_n(\bar{t},\bar{u})$ memenuhi aksioma asosiatif, maka grupoid *commuting regular* berhingga $\mathbb{Z}_n(\bar{t},\bar{u})$ merupakan semigrup *commuting regular* berhingga.

DAFTAR PUSTAKA

Andari, A. 2015. *Teori Grup*. UB Press. Malang.

Andari, A. 2014. *Ring, Field, dan Daerah Integral*. UB Press. Malang.

Bhattacharya, P. B., S. K. Jain, dan S. R. Nagpaul. 1986. *Basic Abstract Algebra*. Cambridge University Press. New York.

Dostie, H. dan L. Pourfaraj. 2006. On the Minimal Ideals of Commuting Regular Rings and Semigroups. *Internat. J. Appl. Math, No.2, 201-216*.

Dostie, H. dan L. Pourfaraj. 2007. Finite Rings and Loop Rings Involving the Commuting Regular Elements. *International Mathematical Forum, Vol. 2, No. 52, 2579-2586*.

Dummit, D. S. dan R. M. Foote. 2002. *Abstract Algebra*. John Wiley and Sons Incorporation. New York.

Howie, J. M. 1995. *Fundamental of Semigroup Theory*. Clarendon Press. Oxford, New York.

Kandasmy, W. B. V. 2001. New Classes of Finite Grupoid Using $\mathbb{Z}_n$. *Varahmihir Journal of Mathematical Sciences, Vol. 1, 135-143*.

Kandasmy, W. B. V. 2002. *Groupoids and Smarandhace Groupoids*. American Research Press. Oxford, New York.

Marsudi. 2010. *Logika dan Teori Himpunan*. UB Press. Malang.

Muhsetyo, G. 1995. *Dasar-Dasar Teori Bilangan*. Departemen Pendidikan dan Kebudayaan Institut Keguruan dan Ilmu Pendidikan. Malang.

Munir, R. 2004. *Teori Bilangan (Number Theory)*. ITB Press. Bandung.

Neumann, J. V. 1936. On Regular Rings. *Proc. Natl. Acad. Sci, 22 (12), 707-712*.

Niven, I, Zulkarnaen H. S, dan Montgomery H. L. 1991. *An Introduction to the Theory of Number*. John Wiley and Sons Incorporation. Canada.

Pourfaraj, L. 2012. On the Finite Grupoid $\mathbb{Z}_n(t,u)$. *International Mathematical Forum, Vol. 7, No. 23, 1105-1114*.

Whitelaw, T. A. 1995. *Introduction to Abstract Algebra*. Harnolls Ltd, Bodmin, Cornwall. London.

LAMPIRAN

Pengelompokan Sifat-sifat yang Berhubungan dengan Elemen *Commuting Regular* dan Grupoid *Commuting Regular* pada Grupoid Berhingga $\mathbb{Z}_n(\bar{t},\bar{u})$

Eksistensi elemen *commuting regular* pada grupoid berhingga $\mathbb{Z}_n(\bar{t},\bar{u})$	Proposisi 3.1.4
	Akibat 3.1.6
	Proposisi 3.1.8
	Proposisi 3.1.20
Eksistensi semigrup *commuting regular* pada grupoid berhingga $\mathbb{Z}_n(\bar{t},\bar{u})$	Proposisi 3.1.10
	Proposisi 3.1.12
	Proposisi 3.1.14
	Proposisi 3.1.16
	Proposisi 3.1.22
	Teorema 3.2.12
	Teorema 3.2.14
Eksistensi subsemigrup *commuting regular* pada grupoid berhingga $\mathbb{Z}_n(\bar{t},\bar{u})$	Proposisi 3.1.18
	Proposisi 3.2.16
	Akibat 3.2.18
Eksistensi grupoid *commuting regular* pada grupoid berhingga $\mathbb{Z}_n(\bar{t},\bar{u})$	Teorema 3.2.10
Eksistensi subgrupoid *commuting regular* pada grupoid berhingga $\mathbb{Z}_n(\bar{t},\bar{u})$	Teorema 3.2.3
	Teorema 3.25
	Akibat 3.2.6
	Akibat 3.2.7
	Teorema 3.2.8
Eksistensi semigrup Von Neumann pada grupoid berhingga $\mathbb{Z}_n(\bar{t},\bar{u})$	Teorema 3.2.20
Hubungan antara elemen idempoten, elemen *regular*, dan elemen *commuting regular* pada grupoid berhingga $\mathbb{Z}_n(\bar{t},\bar{u})$	Teorema 3.1.24
Hubungan anatara semigrup komutatif dengan semigrup *commuting regular* pada grupoid berhingga $\mathbb{Z}_n(\bar{t},\bar{u})$	Teorema 3.2.23