

**BIFURKASI TRANSKRITIKAL PADA MODEL
PREDATOR-PREY DENGAN PEMANENAN DAN FUNGSI
RESPON HOLLING TIPE IV**

SKRIPSI

oleh
GANDIS LELLY AGUSTINI
155090401111003



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2019**

**BIFURKASI TRANSKRITIKAL PADA MODEL
PREDATOR-PREY DENGAN PEMANENAN DAN FUNGSI
RESPON HOLLING TIPE IV**

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Matematika

oleh

GANDIS LELLY AGUSTINI

155090401111003



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2019**



LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

**BIFURKASI TRANSKRITIKAL PADA MODEL
PREDATOR-PREY DENGAN PEMANENAN DAN FUNGSI
RESPON HOLLING TIPE IV**

oleh
GANDIS LELLY AGUSTINI
155090401111003

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji
pada tanggal 11 April 2019
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Matematika

Pembimbing

Dr. Wuryansari Muharini Kusumawinahyu, M.Si.
NIP. 196607281993032001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si, M.Si, Ph.D.
NIP. 197509082000031003



LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Gandis Lelly Agustini
NIM : 155090401111003
Jurusan : Matematika
Penulis Skripsi berjudul : Bifurkasi Transkritikal pada Model
Predator-prey dengan Pemanenan
dan Fungsi Respon Holling Tipe IV

dengan ini menyatakan bahwa:

1. Skripsi ini adalah hasil pemikiran saya, bukan hasil menjiplak tulisan orang lain. Rujukan-rujukan yang tercantum pada Daftar Pustaka hanya digunakan sebagai acuan.
2. Apabila di kemudian hari Skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala akibat hukum dari keadaan tersebut.

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 11 April 2019
yang menyatakan,

Gandis Lelly Agustini
NIM. 155090401111003



repository.ub.ac.id

BIFURKASI TRANSKRITIKAL PADA MODEL *PREDATOR-PREY* DENGAN PEMANENAN DAN FUNGSI RESPON HOLLING TIPE IV

ABSTRAK

Pada Skripsi ini dibahas model *predator-prey* dengan fungsi respon Holling tipe IV yang menggambarkan interaksi antara *prey* dengan *predator*. Model tersebut juga mempertimbangkan adanya pemanenan terhadap kedua populasi. Pada model tersebut dilakukan analisis dinamik yang meliputi penentuan titik kesetimbangan, analisis kestabilan lokal titik kesetimbangan, dan analisis terjadinya bifurkasi transkritikal. Hasil analisis memperlihatkan bahwa terdapat empat titik kesetimbangan, yaitu titik kepunahan kedua populasi (E_0), titik kepunahan *predator* (E_1), dan dua titik kesetimbangan interior (E_2 atau E_4 dan E_3). Sifat kestabilan lokal titik kesetimbangan tersebut dianalisis dengan melakukan linearisasi sistem di sekitar titik kesetimbangan. Tiga titik kesetimbangan bersifat stabil asimtotik ketika parameter pemanenan mencapai nilai tertentu dan salah satu titik kesetimbangan interior bersifat tidak stabil pelana. Analisis terjadinya bifurkasi transkritikal dilakukan dengan menggunakan teorema Sotomayor. Bifurkasi transkritikal terjadi di sekitar titik kesetimbangan kepunahan *predator* ketika nilai parameter pemanenan terhadap *predator* berubah di sekitar suatu nilai tertentu. Hasil simulasi numerik yang dilakukan mendukung hasil analisis dinamik yang diperoleh.

Kata kunci: *model predator-prey, pemanenan, Holling tipe IV, bifurkasi transkritikal, teorema Sotomayor.*



repository.ub.ac.id

TRANSCRITICAL BIFURCATION OF *PREDATOR-PREY* MODEL WITH HARVESTING AND HOLLING TYPE IV FUNCTIONAL RESPONSE

ABSTRACT

In this minor thesis, a predator-prey model with the Holling type IV response function that describes the interaction between prey and predators is discussed. The model also considers harvesting on both population. Dynamical analysis performed on the model includes determination of equilibrium, local stability analysis of equilibrium, and analysis of the transcritical bifurcation occurrence. The results of the analysis show that there are four equilibrium points, namely the extinction point of the two populations (E_0), extinction point of the predator (E_1), and two interior equilibrium points (E_2 or E_4 and E_3). The local stability of the equilibrium point is analyzed by linearizing the system around the equilibrium point. The three equilibrium points are asymptotically stable when the harvest parameter reaches a certain value and one of the interior equilibrium points is unstable saddle. Analysis of the existence of transcritical bifurcation is based on Sotomayor theorem. Transcritical bifurcation occurs at the predator extinction equilibrium point when the predator harvesting parameter value changes around a certain value. Numerical simulation supports the analytical result.

Keywords: *predator-prey model, harvesting, Holling tipe IV, transcritical bifurcation, Sotomayor theorem.*



KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Allah Subhanahu wa Ta'ala yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul *Bifurkasi Transkritikal Pada Model Predator-prey dengan Pemanenan dan Fungsi Respon Holling Tipe IV* dengan baik dan lancar. Shalawat dan salam selalu turunkan kepada Rasulullah Salallahu'Alaihi Wassalam sebagai suri teladan bagi penulis.

Skripsi ini tidak dapat diselesaikan dengan baik tanpa bantuan, bimbingan, dan motivasi dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada Dr. Wuryansari Muharini K., M.Si. selaku dosen pembimbing yang telah membimbing dan memberikan kritik dan saran kepada penulis. Terima kasih kepada Dra. Trisilowati, M.Sc., Ph.D. dan Zuraidah Fitriah, S.Si., M.Si. selaku Dosen Penguji atas kritik dan saran selama pelaksanaan seminar hingga ujian skripsi. Terima kasih kepada Dr. Drs. Sobri A., M.T. selaku Dosen Penasihat Akademik yang senantiasa memberikan evaluasi dan motivasi selama masa perkuliahan. Terima kasih juga kepada Ratno Bagus Edy W., S.Si., M.Si., Ph.D. selaku Ketua Jurusan Matematika dan Dr. Isnani Darti, S.Si., M.Si. selaku Ketua Program Studi Matematika atas segala bantuan yang diberikan.

Terima kasih kepada Bapak dan Ibu Dosen Jurusan Matematika yang telah memberikan ilmu kepada penulis, serta segenap staf dan karyawan TU Jurusan Matematika atas segala bantuannya.

Terima kasih kepada Bapak (Kaswadak) dan Ibu (Tutik Harnanik) serta keluarga tercinta yang selalu mendoakan dan memberikan dukungan moril serta materiil, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.

Terima kasih kepada teman-teman kelompok bimbingan skripsi, Asri Dwi Lestari, Yulia Kodrianti, Atikah Lamis dan Rizky Saprianto atas ilmu, kritik, dan saran dalam penulisan skripsi ini. Terima kasih kepada Rensa, Yuren, Yudha, Fitri, Iftitah, Rahilah dan Yashinta yang selalu memberi semangat, menjadi teman diskusi, memotivasi penulis saat penulis merasa kesulitan, selalu mengingatkan apabila penulis berbuat salah dan atas ilmu yang diberikan. Rekan Kerja satu organisasi intra kampus (HIMAMASTA, dan UKM BCC) dan Keluarga Matematika 2015 atas kebersamaan menikmati proses

selama masa perkuliahan serta semua pihak yang membantu dalam penulisan skripsi ini, baik secara langsung maupun tidak langsung.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih banyak kekurangan. Oleh karena itu kritik dan saran yang membangun sangat penulis harapkan guna perbaikan pada penulisan selanjutnya. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak yang membutuhkan.

Malang, 11 April 2019

Penulis



DAFTAR ISI

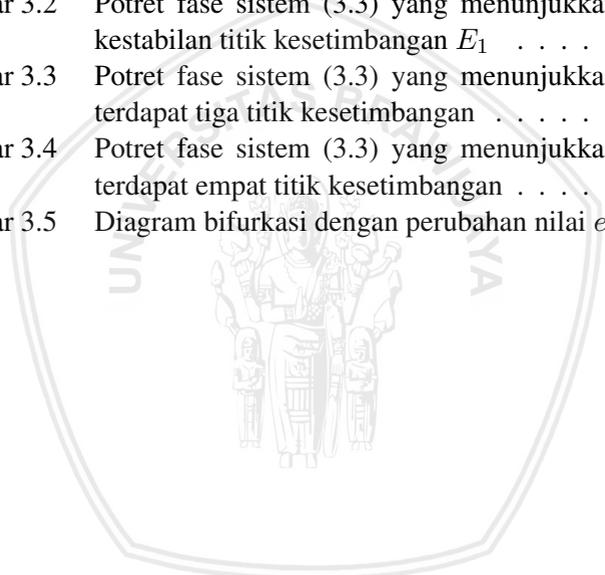
	Halaman
JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI	iii
LEMBAR PERNYATAAN	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xii
DAFTAR GAMBAR	xv
DAFTAR TABEL	xvii
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Tujuan	3
BAB II Dasar Teori	5
2.1 Sistem Dinamik	5
2.1.1 Sistem <i>autonomous</i>	5
2.1.2 Sistem <i>autonomous</i> linear	6
2.1.3 Metode <i>trace</i> dan determinan	7
2.1.4 Sistem <i>autonomous</i> nonlinear	8
2.1.5 Bifurkasi transkritikal	10
2.2 Model Pertumbuhan Logistik	16
2.3 Model <i>Predator-Prey</i>	17
2.3.1 Model <i>predator-prey</i> dengan pemanenan	20
BAB III PEMBAHASAN	23
3.1 Konstruksi Model	23
3.2 Titik Kesetimbangan	24
3.3 Kestabilan Lokal Titik Kesetimbangan	26
3.3.1 Titik kesetimbangan E_0	27
3.3.2 Titik kesetimbangan E_1	27
3.3.3 Titik kesetimbangan E_2 dan E_3	27
3.3.4 Titik kesetimbangan E_4	29
3.4 Bifurkasi Transkritikal	30
3.5 Simulasi Numerik	35
3.5.1 Simulasi numerik kestabilan titik kesetimbangan	35
3.5.2 Simulasi numerik bifurkasi transkritikal	40

BAB IV KESIMPULAN	43
4.1 Kesimpulan	43
4.2 Saran	43
DAFTAR PUSTAKA	45



DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Potret fase sistem (2.6)	12
Gambar 2.2	Diagram bifurkasi sistem (2.6)	13
Gambar 2.3	Fungsi respon Holling tipe II dengan $a = c = 1$	19
Gambar 2.4	Fungsi respon Holling tipe III dengan $a =$ $c = 1$	20
Gambar 2.5	Fungsi respon Holling tipe IV dengan $a =$ $b = c = 1$	21
Gambar 3.1	Potret fase sistem (3.3) yang menunjukkan kestabilan titik kesetimbangan E_0	35
Gambar 3.2	Potret fase sistem (3.3) yang menunjukkan kestabilan titik kesetimbangan E_1	37
Gambar 3.3	Potret fase sistem (3.3) yang menunjukkan terdapat tiga titik kesetimbangan	38
Gambar 3.4	Potret fase sistem (3.3) yang menunjukkan terdapat empat titik kesetimbangan	39
Gambar 3.5	Diagram bifurkasi dengan perubahan nilai e_2	41





DAFTAR TABEL

Tabel 2.1 Kriteria kestabilan titik kesetimbangan berdasarkan tanda $tr(A)$ dan $|A|$ 8

Tabel 3.1 Syarat eksistensi dan kestabilan titik kesetimbangan 30





BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Ekologi merupakan ilmu yang mempelajari interaksi antar makhluk hidup serta antara makhluk hidup dengan lingkungannya. Salah satu objek yang dipelajari dalam ekologi adalah ekosistem. Pada suatu ekosistem, predasi merupakan interaksi biologis antara *predator* dan *prey*. *Predator* adalah spesies pemangsa, sedangkan *prey* adalah spesies yang dimangsa oleh *predator*. Model matematika yang mewakili interaksi *predator* dan *prey* diperkenalkan pertama kali oleh Lotka-Volterra pada tahun 1932 yang selanjutnya disebut sebagai model *predator-prey* Lotka-Volterra. Model ini belum memperhitungkan waktu yang diperlukan oleh *predator* untuk mencerna makanannya serta keterbatasan makanan *prey*. Kemudian pada tahun 1963, Rosenzweig dan MacArthur memperkenalkan model *predator-prey* yang mempertimbangan laju pertumbuhan *prey* dengan keterbatasan makanan *prey* serta jumlah pemangsaan *prey* oleh *predator* tiap satuan waktu yang dikenal sebagai fungsi respon (Brauer dan Chavez, 2012). Pada tahun 1965, Holling mengusulkan tiga jenis fungsi respon yang dikenal sebagai fungsi respon Holling tipe I, II, dan III. Ketiga fungsi respon tersebut bersifat monoton naik yang menunjukkan bahwa laju pemangsaan *predator* terhadap *prey* meningkat ketika kepadatan populasi *prey* meningkat (Huang dan Xiao, 2004).

Pada populasi hewan yang hidup berkelompok, pertahanan kelompok juga meningkat jika kepadatan populasinya meningkat. Hal ini menyebabkan terhambatnya pemangsaan hewan tersebut oleh *predator*nya. Oleh karena itu, pada tahun 1968, Andrews mengusulkan suatu fungsi respon yang mewakili kondisi tersebut, yaitu fungsi respon Holling tipe IV. Fungsi respon ini menunjukkan suatu kondisi pertahanan kelompok *prey* yang meningkat karena meningkatnya kepadatan *prey*. Hal ini dapat menghambat laju pemangsaan *predator* terhadap *prey* sehingga laju pemangsaannya menurun (Huang dan Xiao, 2004).

Pemanenan menjadi hal penting, khususnya dalam interaksi antara *predator* dengan *prey*, karena berpengaruh langsung terhadap

jumlah populasi berikutnya. Pemanenan berlebihan tanpa mempertimbangkan perubahan keadaan populasi berpotensi merusak ekosistem. Oleh karena itu, mempelajari dinamika populasi dengan adanya pemanenan menjadi semakin penting.

Secara matematis kondisi tertentu yang mempengaruhi kepadatan populasi *predator* dan *prey* diwakili oleh parameter yang terdapat dalam model. Semakin bervariasi parameter yang diberikan maka semakin bervariasi pula sifat solusi sistem. Perubahan sifat solusi sistem dinamik karena adanya perubahan nilai parameter disebut bifurkasi. Salah satu jenis bifurkasi yang sering dijumpai dalam analisis dinamik adalah bifurkasi transkritisal.

Model matematika dalam dinamika populasi dengan mempertimbangkan pemanenan dan fungsi respon telah banyak dibahas oleh beberapa peneliti. Ji dan Wu (2010) membahas model *predator-prey* dengan pemanenan konstan pada *prey* serta mempertimbangkan adanya *prey* yang dilindungi. Kar dan Ghosh (2012) membahas model *predator-prey* dengan pemanenan pada kedua populasi serta mempertimbangkan adanya spesies *prey* lain untuk *predator*. Kedua artikel ini menggunakan fungsi respon Holling tipe II. Pada tahun 2015, Sen dkk. membahas model *predator-prey* dengan pemanenan konstan pada *predator* serta mempertimbangkan nutrisi tambahan untuk *predator*. Selanjutnya pada tahun 2016, Zuo dan Jiang membahas model *predator-prey* dengan pemanenan nonlinear pada *predator*. Berbeda dari penelitian sebelumnya, Huang dan Liu (2018) meneliti model *predator-prey* dengan pemanenan pada kedua populasi serta menggunakan fungsi respon Holling tipe IV.

Pada Skripsi ini dikaji kembali hasil penelitian Huang dan Liu (2018). Analisis dinamik yang dilakukan pada model meliputi penentuan titik kesetimbangan serta syarat eksistensinya, analisis kestabilan lokal, dan terjadinya bifurkasi transkritisal. Selanjutnya dilakukan simulasi numerik untuk mendukung hasil analisis dinamik.

1.2 Rumusan Masalah

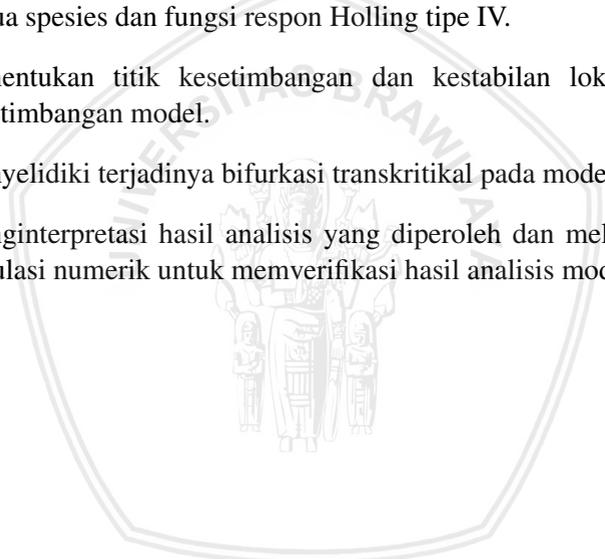
Berdasarkan latar belakang yang telah dipaparkan, pokok permasalahan yang dikaji dalam Skripsi adalah sebagai berikut.

1. Bagaimana model *predator-prey* dengan pemanenan pada kedua spesies dan fungsi respon Holling tipe IV?

- repository.ub.ac.id
2. Bagaimana eksistensi dan kestabilan lokal titik kesetimbangan model?
 3. Bagaimana hasil analisis terjadinya bifurkasi transkritikal pada model?
 4. Bagaimana hasil simulasi numerik dan interpretasi hasil analisis model tersebut?

1.3 Tujuan

Tujuan penulisan Skripsi ini adalah sebagai berikut.

1. Mengkonstruksi model *predator-prey* dengan pemanenan pada kedua spesies dan fungsi respon Holling tipe IV.
 2. Menentukan titik kesetimbangan dan kestabilan lokal titik kesetimbangan model.
 3. Menyelidiki terjadinya bifurkasi transkritikal pada model.
 4. Menginterpretasi hasil analisis yang diperoleh dan melakukan simulasi numerik untuk memverifikasi hasil analisis model.
- 



BAB II DASAR TEORI

Dalam Skripsi ini dibahas bifurkasi transkritikal pada model *predator-prey* dengan pemanenan dan fungsi respon Holling tipe IV. Oleh karena itu, teori mengenai sistem dinamik, bifurkasi transkritikal, model pertumbuhan logistik, model *predator-prey*, dan model *predator-prey* dengan pemanenan diperlukan untuk membantu memahami persoalan dalam penulisan Skripsi ini.

2.1 Sistem Dinamik

Sistem dinamik adalah suatu sistem yang kondisinya di masa yang akan datang dapat ditentukan apabila diberikan kondisi di masa sekarang atau masa lalu. Terdapat dua jenis sistem dinamik, yaitu sistem dinamik diskret dan sistem dinamik kontinu. Sistem dinamik diskret dinyatakan sebagai persamaan beda, yaitu

$$\vec{x}_{t+1} = \vec{F}(\vec{x}_t), t \in \mathbb{Z} \vee t \in \mathbb{N}, \vec{x} \in \mathbb{R}^n,$$

sedangkan sistem dinamik kontinu dinyatakan sebagai persamaan diferensial, yaitu

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{F}(t, \vec{x}(t)), t \in \mathbb{R}, \vec{x} \in \mathbb{R}^n.$$

(Nagle, dkk., 2012)

2.1.1 Sistem *autonomous*

Sistem dinamik yang secara eksplisit tidak bergantung pada waktu t disebut sistem *autonomous*. Sistem *autonomous* berdimensi n dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= F_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \frac{dx_2}{dt} &= F_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\vdots \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\frac{dx_n}{dt} = F_n(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

(Boyce dan Diprima, 2012)

Definisi 2.1.1 Titik kesetimbangan sistem *autonomous*

Titik $\vec{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ disebut titik kritis sistem (2.1) jika $F_i(\vec{x}^*) = 0, \forall i = 1, \dots, n$. Keadaan yang memenuhi $\frac{d\vec{x}^*}{dt} = \vec{0}$ disebut keadaan setimbang, artinya tidak terjadi perubahan pada keadaan ini, sehingga titik kritis \vec{x}^* disebut juga titik kesetimbangan.

Definisi 2.1.2 Kestabilan titik kesetimbangan

Titik kesetimbangan \vec{x}^* sistem *autonomous* (2.1) dikatakan

1. stabil, jika $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap solusi sistem $\vec{x}(t)$ yang pada $t = 0$ memenuhi

$$\|\vec{x}(0) - \vec{x}^*\| < \delta$$

ada dan memenuhi

$$\|\vec{x}(t) - \vec{x}^*\| < \epsilon, \forall t \geq 0,$$

2. stabil asimtotik, jika \vec{x}^* stabil dan $\exists \delta_0 > 0$ sedemikian sehingga setiap solusi $\vec{x}(t)$ yang memenuhi

$$\|\vec{x}(0) - \vec{x}^*\| < \delta_0,$$

maka

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{x}(t) = \vec{x}^*,$$

3. tidak stabil, jika tidak memenuhi kriteria pertama.

(Boyce dan Diprima, 2012)

2.1.2 Sistem *autonomous* linear

Perhatikan sistem *autonomous* linear berdimensi n berikut.

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n, \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n, \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n, \end{aligned} \tag{2.2}$$

dengan $a_{ij} \in \mathbb{R}, i, j = 1, \dots, n$. Sistem (2.2) dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}, \quad (2.3)$$

dengan

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Jika $\det A \neq 0$ maka satu-satunya titik kesetimbangan sistem *autonomous* linear (2.2) adalah $\vec{x}^* = \vec{0}$. Kestabilan titik kesetimbangan $\vec{x}^* = \vec{0}$ sistem *autonomous* linear (2.2) dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen matriks A seperti dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 2.1 Kestabilan titik kesetimbangan *autonomous* linear

Titik kesetimbangan $\vec{x}^* = \vec{0}$ sistem *autonomous* linear (2.2) bersifat

1. stabil asimtotik, jika semua nilai eigen matriks A memiliki bagian real negatif,
2. tidak stabil, jika terdapat nilai eigen matriks A yang memiliki bagian real positif,
3. khusus untuk sistem 2 dimensi, titik kesetimbangan $\vec{x}^* = \vec{0}$ bersifat stabil tetapi tidak stabil asimtotik, jika semua nilai eigen memiliki bagian real bernilai 0 atau salah satu nilai eigen bernilai 0 dan lainnya negatif.

(Robinson, 2004)

2.1.3 Metode *trace* dan determinan

Terkadang kestabilan titik kesetimbangan sistem *autonomous* sulit ditentukan. Oleh karena itu, pada Skripsi ini digunakan metode *trace* dan determinan untuk mempermudah penentuan kestabilan titik

kesetimbangan \vec{x}^* pada sistem *autonomous* linear dua dimensi. Persamaan karakteristik sistem *autonomous* linear dua dimensi adalah

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = 0,$$

yang dapat dinyatakan sebagai

$$\lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + |A| = 0,$$

dengan $\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22}$ dan $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Akar-akar persamaan karakteristik tersebut adalah

$$\lambda_{1,2} = \frac{\text{tr}(A) \pm \sqrt{D}}{2}, \quad D = (\text{tr}(A))^2 - 4|A|.$$

Berdasarkan sifat akar persamaan kuadrat, kestabilan titik kesetimbangan $\vec{x}^* = \vec{0}$ dapat ditentukan dengan memperhatikan tanda $\text{tr}(A)$ dan $|A|$ seperti disajikan pada Tabel 2.1.

Tabel 2.1: Kriteria kestabilan titik kesetimbangan berdasarkan tanda $\text{tr}(A)$ dan $|A|$

$ A $	$\text{tr}(A)$	D	Nilai Eigen	Kestabilan
> 0	> 0	≥ 0	$\lambda_1, \lambda_2 > 0$	Tidak stabil
> 0	> 0	< 0	$\lambda_{1,2} = a \pm ib, a > 0$	Tidak stabil
> 0	$= 0$	< 0	$\lambda_{1,2} = \pm ib$	Stabil
> 0	< 0	≥ 0	$\lambda_{1,2} < 0$	Stabil asimtotik
> 0	< 0	< 0	$\lambda_{1,2} = a \pm ib, a < 0$	Stabil asimtotik
< 0	> 0	> 0	$\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$	Tidak stabil pelana
< 0	$= 0$	> 0	$\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$	Tidak stabil pelana
< 0	< 0	> 0	$\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$	Tidak stabil pelana

(Panfilov, 2010)

2.1.4 Sistem *autonomous nonlinear*

Perhatikan sistem *autonomous* (2.1). Misalkan $F_i(\vec{x})$ pada sistem (2.1) merupakan fungsi nonlinear dan kontinu yang

mempunyai turunan parsial hingga orde dua yang kontinu dan \vec{x}^* adalah titik kesetimbangan sistem (2.1). Sistem (2.1) dapat didekati dengan sistem *autonomous* linear di sekitar titik kesetimbangan \vec{x}^* . Hal tersebut dapat ditunjukkan dengan melakukan ekspansi deret Taylor di sekitar titik kesetimbangan \vec{x}^* , yaitu

$$F_i(\vec{x}) = F_i(\vec{x}^*) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_i(\vec{x}^*)}{\partial x_j} (x_j - x_j^*) + \eta_i(\vec{x}),$$

dengan $\eta_i(\vec{x})$ adalah suku sisa. Hampiran orde satu terhadap F_i menghasilkan suku sisa yang memenuhi sifat

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^*} \frac{\eta_i(\vec{x})}{\|\vec{p}\|} = 0, i = 1, 2, \dots, n,$$

dengan $\vec{p} = \vec{x} - \vec{x}^*$ sehingga

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{x} - \vec{x}^*) = \frac{d\vec{x}}{dt}.$$

Oleh karena itu, sistem (2.1) dapat ditulis sebagai

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_n(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ \eta_n(\vec{x}) \end{pmatrix},$$

atau

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = J\vec{p} + \vec{\eta}. \quad (2.4)$$

Matriks $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_2(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_n(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$ disebut matriks

Jacobi. Jika \vec{x} berada dekat dengan \vec{x}^* maka $\vec{\eta}$ bernilai sangat kecil sehingga dapat diabaikan dan sistem (2.4) menjadi

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = J\vec{p}. \quad (2.5)$$

Jika $\vec{x} = \vec{x}^*$ maka $\vec{p}^* = (p_1^*, p_2^*, \dots, p_n^*) = \vec{0}$, sehingga sistem linear (2.5) memiliki titik kesetimbangan $\vec{p}^* = \vec{0}$ dan J berperan sebagai A pada sistem *autonomous* linear (2.3). Proses penghampiran sistem nonlinear (2.1) oleh sistem *autonomous* linear dinamakan proses linearisasi.

Untuk menentukan kestabilan titik kesetimbangan sistem *autonomous* nonlinear dapat digunakan teorema berikut.

Teorema 2.3 Kestabilan titik kesetimbangan *autonomous* nonlinear
Titik kesetimbangan \vec{x}^* sistem *autonomous* nonlinear (2.1) bersifat,

1. stabil asimtotik, jika titik kesetimbangan sistem hasil linearisasi (2.5) stabil asimtotik,
2. tidak stabil, jika titik kesetimbangan sistem hasil linearisasi (2.5) tidak stabil.

(Boyce dan Diprima, 2012)

2.1.5 Bifurkasi transkritikal

Pandang sistem *autonomous*

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{F}(\vec{x}, \vec{\beta})$$

dengan $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ adalah variabel dan $\vec{\beta}$ adalah parameter. Semakin bervariasi nilai parameter yang terdapat dalam sistem, maka semakin bervariasi pula sifat solusi sistem. Perubahan sifat solusi sistem dinamik karena adanya perubahan nilai parameter disebut bifurkasi. Nilai parameter yang menyebabkan sifat solusi sistem dinamik berubah disebut nilai bifurkasi.

Salah satu jenis bifurkasi yang sering dijumpai dalam analisis dinamik adalah bifurkasi transkritikal. Untuk menjelaskan terjadinya bifurkasi transkritikal diberikan contoh berikut.

Contoh 2.1 Misalkan diberikan sistem

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \beta x - x^2 \\ \frac{dy}{dt} &= -y \end{aligned} \tag{2.6}$$

dengan $x, y, \beta \in \mathbb{R}$. Titik kesetimbangan sistem (2.6) diperoleh ketika $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0$, yaitu

$$\begin{aligned} x(\beta - x) &= 0, \\ -y &= 0. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Solusi persamaan (2.7) adalah $x = 0$ atau $x = \beta$ dan $y = 0$. Oleh karena itu, banyaknya titik kesetimbangan bergantung nilai β . Jika $\beta = 0$ diperoleh titik kesetimbangan $E_0(0, 0)$ dan jika $\beta \neq 0$ diperoleh dua titik kesetimbangan, yaitu $E_0(0, 0)$ dan $E_1(\beta, 0)$.

Sistem (2.6) merupakan sistem *autonomous* nonlinear sehingga kestabilan lokal titik kesetimbangan sistem (2.6) dapat ditentukan melalui proses linearisasi di sekitar titik kesetimbangan yang menghasilkan matriks Jacobi

$$J = \begin{bmatrix} \beta - 2x & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Kestabilan titik kesetimbangan $E_0(0, 0)$ dapat diketahui dari matriks Jacobi di titik $E_0(0, 0)$, yaitu

$$J = \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

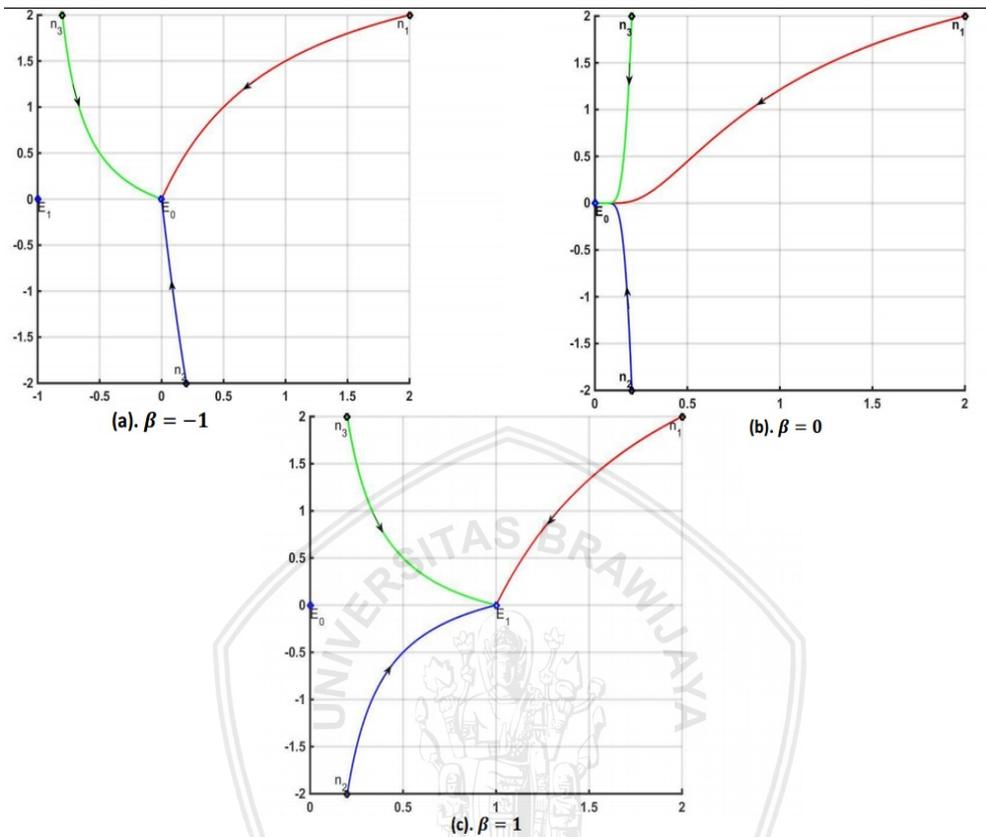
Titik kesetimbangan E_0 mempunyai nilai eigen $\lambda_1 = \beta$ dan $\lambda_2 = -1$. Jika $\beta < 0$ maka titik kesetimbangan E_0 bersifat stabil asimtotik, sedangkan jika $\beta > 0$ maka titik kesetimbangan E_0 bersifat tidak stabil pelana.

Selanjutnya, kestabilan titik kesetimbangan $E_1(\beta, 0)$ dapat diketahui dari matriks Jacobi di titik $E_1(\beta, 0)$, yaitu

$$J = \begin{bmatrix} -\beta & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{2.8}$$

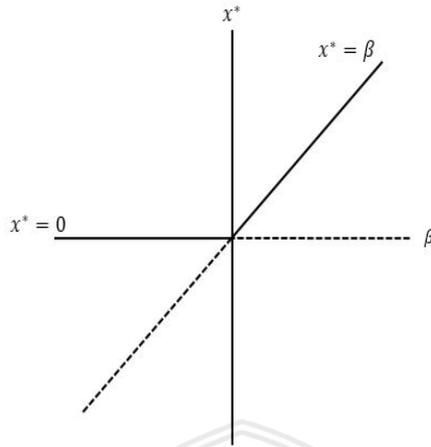
Dengan alasan yang sama seperti pada titik E_0 , titik kesetimbangan E_1 bersifat stabil asimtotik jika $\beta > 0$ dan bersifat tidak stabil pelana jika $\beta < 0$. Gambar 2.1 menunjukkan terjadinya bifurkasi transkritikal pada Contoh 2.1 dengan parameter β bervariasi.

Gambar 2.1 menunjukkan potret fase yang diberikan dengan β bervariasi. Pada Gambar 2.1.(a) diambil $\beta = -1$. Terlihat bahwa



Gambar 2.1: Potret fase sistem (2.6)

orbit-orbit solusi menuju ke titik kesetimbangan $E_0(0,0)$ dan mendekati namun akhirnya menjauhi titik kesetimbangan $E_1(-1,0)$. Selanjutnya, pada Gambar 2.1.(b) diambil $\beta = 0$. Terlihat bahwa jika diambil nilai awal x positif maka orbit solusi menuju titik kesetimbangan $E_0(0,0)$ namun jika diambil nilai awal x negatif maka orbit solusi menjauhi titik kesetimbangan $E_0(0,0)$. Selanjutnya, pada Gambar 2.1.(c) diambil $\beta = 1$. Terlihat bahwa orbit-orbit solusi menuju ke titik kesetimbangan $E_1(1,0)$ dan mendekati namun akhirnya menjauhi titik kesetimbangan $E_0(0,0)$. Hasil analisis dinamik tersebut dirangkum dalam bentuk diagram bifurkasi yang disajikan pada Gambar 2.2.



Gambar 2.2: Diagram bifurkasi sistem (2.6)

Diagram tersebut memperlihatkan perubahan x^* ketika nilai parameter β berubah. Pada diagram tersebut tidak digambarkan y^* sebab y tidak bergantung pada parameter β . Perhatikan bahwa ketika $\beta < 0$, titik kesetimbangan $E_0(0, 0)$ bersifat stabil asimtotik dan titik kesetimbangan $E_1(\beta, 0)$ bersifat tidak stabil pelana. Bertambahnya nilai β menyebabkan titik kesetimbangan E_1 semakin mendekati titik kesetimbangan E_0 dan bergabung saat $\beta = 0$. Selanjutnya ketika $\beta > 0$ titik kesetimbangan E_0 menjadi tidak stabil pelana dan titik kesetimbangan $E_1(\beta, 0)$ menjadi stabil asimtotik. Dengan kata lain, titik kesetimbangan E_0 dan E_1 mengalami perubahan kestabilan ketika parameter β berubah di sekitar $\beta = 0$. Oleh karena itu, $\beta^* = 0$ merupakan nilai bifurkasi. Bifurkasi yang berhubungan dengan perubahan kestabilan titik kesetimbangan dan perubahan jumlah titik kesetimbangan seperti pada Contoh 2.1 disebut bifurkasi transkritikal.

Secara umum, terdapat cara yang lebih mudah untuk memeriksa terjadinya bifurkasi transkritikal yang terjadi pada sistem *autonomous* yang memuat parameter, yaitu dengan menggunakan teorema Sotomayor berikut ini.

Teorema 2.4 Teorema Sotomayor untuk bifurkasi transkritikal

Perhatikan sistem $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{F}(\vec{x}, \vec{\beta})$. Misalkan $\vec{F}(\vec{x}_0, \vec{\beta}_0) = 0$, $J(\vec{x}_0, \vec{\beta}_0)$ dan $J(\vec{x}_0, \vec{\beta}_0)^T$ memiliki satu nilai eigen $\lambda = 0$ dengan \vec{V}

dan \vec{W} berturut-turut adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 0$ untuk $J(\vec{x}_0, \vec{\beta}_0)$ dan $J(\vec{x}_0, \vec{\beta}_0)^T$. Sistem mengalami bifurkasi transkritikal pada titik kesetimbangan \vec{x}_0 ketika parameter $\vec{\beta}$ berubah di sekitar $\vec{\beta} = \vec{\beta}_0$ jika kondisi berikut dipenuhi.

- i. $\vec{W}^T \vec{F}_\beta(\vec{x}_0, \vec{\beta}_0) = 0$,
- ii. $\vec{W}^T [D\vec{F}_\beta(\vec{x}_0, \vec{\beta}_0)\vec{V}] \neq 0$,
- iii. $\vec{W}^T [D^2\vec{F}(\vec{x}_0, \vec{\beta}_0)(\vec{V}, \vec{V})] \neq 0$,

dengan

$$D^2\vec{F}(\vec{x}_0, \vec{\beta}_0)(\vec{V}, \vec{V}) = \begin{pmatrix} \vec{V}^T D^2 F_1(\vec{x}_0, \vec{\beta}_0)\vec{V} \\ \vec{V}^T D^2 F_2(\vec{x}_0, \vec{\beta}_0)\vec{V} \\ \vdots \\ \vec{V}^T D^2 F_n(\vec{x}_0, \vec{\beta}_0)\vec{V} \end{pmatrix},$$

$D^2 F_i(\vec{x}_0, \vec{\beta}_0)$, $i = 1, 2, \dots, n$ adalah matriks Hess untuk $F_i(\vec{x}_0, \vec{\beta}_0)$, yaitu

$$D^2 F_i(\vec{x}_0, \vec{\beta}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F_i(\vec{x}_0, \vec{\beta}_0)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 F_i(\vec{x}_0, \vec{\beta}_0)}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 F_i(\vec{x}_0, \vec{\beta}_0)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 F_i(\vec{x}_0, \vec{\beta}_0)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F_i(\vec{x}_0, \vec{\beta}_0)}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 F_i(\vec{x}_0, \vec{\beta}_0)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 F_i(\vec{x}_0, \vec{\beta}_0)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 F_i(\vec{x}_0, \vec{\beta}_0)}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 F_i(\vec{x}_0, \vec{\beta}_0)}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}.$$

Terjadinya bifurkasi transkritikal pada Contoh 2.1 dapat ditunjukkan dengan menggunakan teorema Sotomayor. Pada sistem (2.6), $\vec{x}_0 = E_0$, dan $\beta_0 = \beta = 0$, sebab $\vec{F}(E_0, \beta_0) = 0$. Selanjutnya diperoleh

$$J(E_0; \beta_0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = J(E_0; \beta_0)^T,$$

yang mempunyai nilai eigen $\lambda_1 = 0$. Vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_1 = 0$ untuk matriks $J(E_0; \beta_0)$ adalah

$$\vec{V} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

dan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_1 = 0$ untuk matriks $J(E_0; \beta_0)^T$ adalah

$$\vec{W} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Sistem (2.6) mengalami bifurkasi transkritikal pada titik kesetimbangan $E_0(0, 0)$ ketika parameter β berubah di sekitar $\beta_0 = 0$ jika tiga kondisi pada teorema 2.4 dipenuhi.

- i. \vec{F}_β merupakan matriks turunan $\vec{F}(\vec{x}; \beta)$ pada sistem (2.6) terhadap parameter β , yaitu

$$\vec{F}_\beta = \frac{d\vec{F}}{d\beta} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix},$$

sehingga

$$\vec{F}_\beta(E_0; \beta_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Diperoleh

$$\vec{W}^T \vec{F}_\beta(E_0; \beta_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0.$$

Jadi sistem (2.6) memenuhi kondisi pertama teorema Sotomayor untuk bifurkasi transkritikal.

- ii. $D\vec{F}_\beta$ adalah matriks Jacobi \vec{F}_β , yaitu

$$D\vec{F}_\beta = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{\beta 1}}{\partial x} & \frac{\partial F_{\beta 1}}{\partial y} \\ \frac{\partial F_{\beta 2}}{\partial x} & \frac{\partial F_{\beta 2}}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = D\vec{F}_\beta(E_0; \beta_0).$$

Selanjutnya

$$\vec{W}^T [D\vec{F}_\beta(E_0; \beta_0)\vec{V}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1.$$

Diperoleh $\vec{W}^T [D\vec{F}_\beta(E_0; \beta_0)\vec{V}] \neq 0$ sehingga sistem (2.6) memenuhi kondisi kedua teorema Sotomayor untuk bifurkasi transkritikal.

iii. D^2F_1 dan D^2F_2 merupakan matriks Hess sistem (2.6), yaitu

$$D^2F_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} \end{bmatrix}, D^2F_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 F_2}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 F_2}{\partial y^2} \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya

$$\begin{aligned} D^2\vec{F}(E_0; \beta_0)(\vec{V}, \vec{V}) &= \begin{bmatrix} \vec{V}^T D^2F_1(E_0; \beta_0) \vec{V} \\ \vec{V}^T D^2F_2(E_0; \beta_0) \vec{V} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \vec{V}^T \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F_1(E_0; \beta_0)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F_1(E_0; \beta_0)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 F_1(E_0; \beta_0)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 F_1(E_0; \beta_0)}{\partial y^2} \end{bmatrix} \vec{V} \\ \vec{V}^T \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F_2(E_0; \beta_0)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F_2(E_0; \beta_0)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 F_2(E_0; \beta_0)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 F_2(E_0; \beta_0)}{\partial y^2} \end{bmatrix} \vec{V} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} v_1 v_1 + 2 \frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y} v_1 v_2 + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} v_2 v_2 \\ \frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2} v_1 v_1 + 2 \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial y} v_1 v_2 + \frac{\partial^2 F_2}{\partial y^2} v_2 v_2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

sehingga diperoleh

$$\vec{W}^T [D^2\vec{F}(E_0; \beta_0)(\vec{V}, \vec{V})] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} = -2 \neq 0.$$

Karena $\vec{W}^T [D^2\vec{F}(E_0; \beta_0)(\vec{V}, \vec{V})] \neq 0$ maka sistem (2.6) memenuhi kondisi ketiga teorema Sotomayor untuk bifurkasi transkritikal.

Jadi, sistem (2.6) memenuhi ketiga kondisi teorema Sotomayor sehingga sistem (2.6) mengalami bifurkasi transkritikal pada titik kesetimbangan E_0 dengan parameter β berubah di sekitar β_0 .

(Perko, 2001)

2.2 Model Pertumbuhan Logistik

Jika diasumsikan bahwa laju pertumbuhan populasi bergantung pada ukuran populasi, maka model pertumbuhan suatu populasi setiap saat secara sederhana dapat dituliskan sebagai

$$\frac{dN}{dt} = rN, \quad (2.9)$$

dengan $N(t)$ menyatakan kepadatan populasi setiap saat dan r merupakan laju pertumbuhan populasi. Model ini dikenal sebagai model eksponensial. Model (2.9) dinilai kurang realistis karena kepadatan populasi pada model tersebut menjadi tidak terbatas.

Untuk memperbaiki model tersebut, Verhulst mengusulkan bahwa proses *self-limiting* harus terjadi ketika populasi sudah terlalu besar. Verhulst menyarankan perubahan pada laju pertumbuhan r menjadi $H(N) = r - bN$. Ketika jumlah populasi N kecil, maka laju pertumbuhan $H(N) \cong r$, sebaliknya ketika jumlah populasi N meningkat, maka laju pertumbuhan $H(N)$ menurun karena peningkatan kompetisi antar individu. Dengan mengubah laju pertumbuhan r menjadi $H(N)$ diperoleh

$$\frac{dN}{dt} = (r - bN)N = r\left(1 - \frac{N}{K}\right)N. \quad (2.10)$$

Model (2.10) disebut model pertumbuhan logistik, dengan r dan $K = \frac{r}{b}$ masing-masing menyatakan laju pertumbuhan intrinsik dan *carrying capacity* (daya dukung lingkungan).

(Boyce dan DiPrima, 2012)

2.3 Model Predator-Prey

Hubungan saling ketergantungan antar spesies timbul karena *prey* berfungsi sebagai sumber makanan bagi *predator*, sementara *prey* hidup dengan sumber makanan lain. Salah satu komponen penting dalam hubungan antara *predator* dan *prey* adalah laju *predator* dalam memangsa *prey*. Laju memangsa per kapita *predator* terhadap *prey* disebut sebagai fungsi respon (Huang dan Xiao, 2004). Misalkan $x(t)$ menyatakan kepadatan populasi *prey* dan $y(t)$ menyatakan kepadatan populasi *predator*. Salah satu bentuk model *predator-prey* dengan fungsi respon adalah

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x f(x) - xy\phi(x), \\ \frac{dy}{dt} &= \mu xy\phi(x) - my, \end{aligned} \quad (2.11)$$

dengan $x f(x)$ menyatakan laju pertumbuhan *prey*, $p(x) = x\phi(x)$ menyatakan jumlah *prey* yang dikonsumsi *predator*, yang dikenal

sebagai fungsi respon, μ menyatakan efisiensi konversi pemangsaan menjadi makanan *predator*, dan konstanta m adalah laju kematian *predator*. Model (2.11) dikenal sebagai model Rosenzweig-MacArthur (Brauer dan Chaves, 2012).

Dikenal beberapa fungsi respon dalam interaksi *predator-prey*, antara lain fungsi respon Holling tipe I, II, III, dan IV. Fungsi respon Holling tipe I berbentuk

$$p(x) = cx, \quad (2.12)$$

dengan $c > 0$. Fungsi respon tersebut menunjukkan bahwa ketika kepadatan populasi *prey* meningkat maka daya konsumsi *predator* juga meningkat, sehingga jumlah populasi *predator* semakin meningkat pula (Molles, 2016). Contoh interaksi yang sesuai dengan fungsi respon tersebut adalah interaksi antara laba-laba dengan mangsanya.

Fungsi respon Holling tipe II dinyatakan dengan

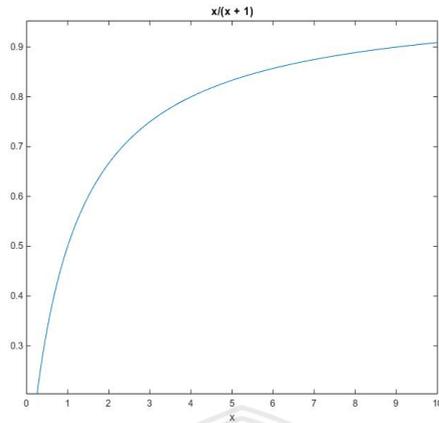
$$p(x) = \frac{cx}{a + x} \quad (2.13)$$

dengan $a > 0$. Fungsi respon tersebut menunjukkan bahwa laju pemangsaan *prey* meningkat cepat ketika kepadatan populasi *prey* rendah, meningkat lebih lambat pada populasi *prey* sedang, dan kemudian mendekati nilai c pada populasi *prey* tak hingga. Fungsi respon tersebut lebih kompleks dari tipe I karena sudah memperhatikan waktu yang diperkirakan *predator* untuk mencari mangsanya (Molles, 2016). Contoh interaksi yang sesuai dengan fungsi respon tersebut adalah interaksi antara serigala sebagai *predator* dengan karibu sebagai *prey*. Fungsi respon Holling tipe II ditunjukkan pada Gambar 2.3 dengan nilai $a = 1$ dan $c = 1$.

Fungsi respon Holling tipe III adalah sebagai berikut

$$p(x) = \frac{cx^2}{a + x^2}. \quad (2.14)$$

Fungsi respon tersebut menunjukkan bahwa saat kepadatan populasi *prey* rendah, laju pemangsaannya meningkat lebih tajam daripada tipe I dan II. Kemudian meningkat lebih rendah saat kepadatan populasi *prey* sedang dan akhirnya mendekati nilai c ketika kepadatan populasi *prey* sangat besar (Molles, 2016). Contoh interaksi yang sesuai yang

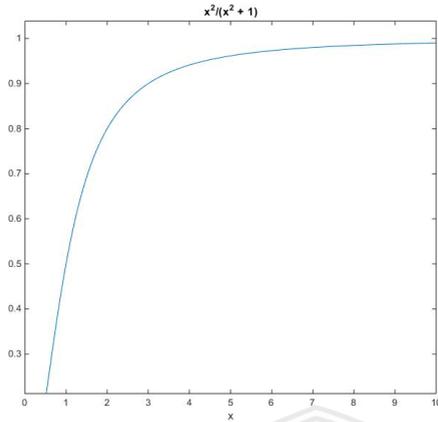


Gambar 2.3: Fungsi respon Holling tipe II dengan $a = c = 1$

sesuai dengan fungsi respon tersebut adalah interaksi antara rusa tikus (*mice deer*) sebagai *predator* dan kepompong kupu-kupu sebagai *prey*. Fungsi respon Holling tipe III ditunjukkan pada Gambar 2.4 dengan nilai $a = 1$ dan $c = 1$.

Ketiga fungsi tersebut merupakan fungsi yang bentuknya monoton naik, yaitu laju pemangsaan meningkat ketika kepadatan populasi meningkat. Namun, dalam kenyataannya ada *prey* yang memiliki sifat pertahanan kelompok. Ketika jumlah populasi *prey* meningkat maka tingkat pertahanan kelompoknya pun meningkat. Sebagai contoh populasi ikan yang hidup berkelompok membentuk pertahanan terhadap ancaman *predator* yang menyerang, sehingga menyebabkan *predator* semakin sulit untuk memangsanya dan tingkat konsumsi *predator* menurun. Contoh lainnya terjadi pada interaksi antara serigala sebagai *predator* dengan banteng sebagai *prey*. Ketika jumlah populasi banteng sedikit maka tingkat konsumsi serigala meningkat. Namun, ketika jumlah populasi banteng meningkat maka pertahanan kelompok banteng pun meningkat, sehingga tingkat konsumsi serigala menurun.

Fungsi respon yang mewakili fenomena pertahanan kelompok tersebut diusulkan oleh Andrews (1968), yang selanjutnya disebut fungsi respon Holling tipe IV. Fungsi respon tersebut dinyatakan



Gambar 2.4: Fungsi respon Holling tipe III dengan $a = c = 1$

sebagai

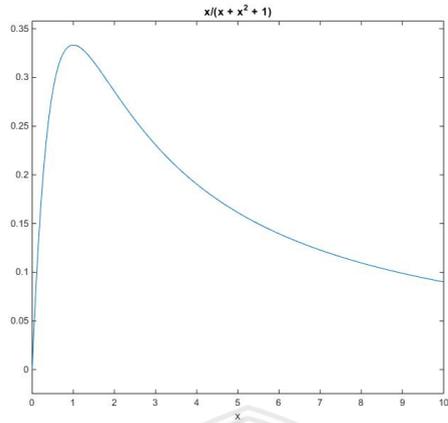
$$p(x) = \frac{cx}{a + bx + x^2}, \tag{2.15}$$

dengan c dan a berturut-turut menyatakan koefisien pemangsaan dan konstanta setengah saturasi. Pada Gambar 2.5 diperlihatkan kurva fungsi respon Holling tipe IV untuk nilai $a = b = c = 1$. Tidak seperti fungsi respon Holling tipe I, II, III, terlihat bahwa fungsi respon Holling tipe IV merupakan fungsi yang *non* monoton (Huang dan Xiao, 2004).

2.3.1 Model *predator-prey* dengan pemanenan

Sistem *predator-prey* sering digunakan untuk menggambarkan interaksi antar spesies dengan persediaan makanannya. Dengan kata lain, hal yang menarik ada pada ukuran populasi *predator* dan *prey* karena berpengaruh pada laju pertumbuhan *predator*. Menggunakan model (2.11) dan dengan menambahkan pemanenan terhadap kedua populasi, maka model *predator-prey* dengan pemanenan memiliki bentuk umum

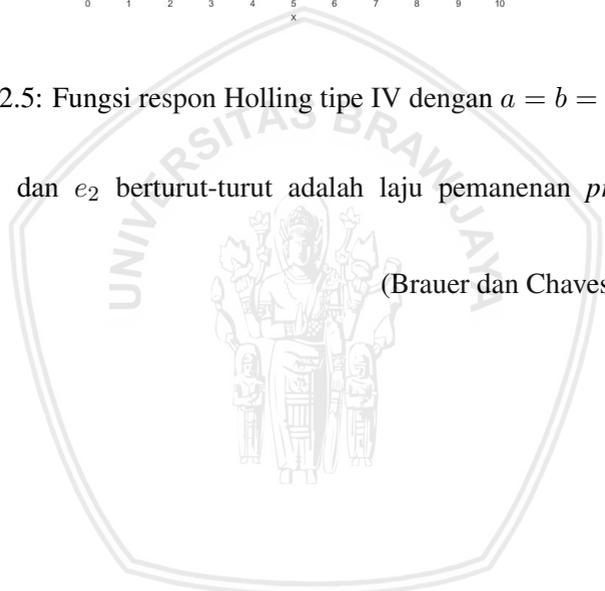
$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x f(x) - xy \phi(x) - e_1 x, \\ \frac{dy}{dt} &= \mu xy \phi(x) - m y - e_2 y, \end{aligned} \tag{2.16}$$



Gambar 2.5: Fungsi respon Holling tipe IV dengan $a = b = c = 1$

dengan e_1 dan e_2 berturut-turut adalah laju pemanenan *prey* dan *predator*.

(Brauer dan Chaves, 2012)





BAB III PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas konstruksi model *predator-prey* dengan fungsi respon Holling tipe IV dan pemanenan terhadap kedua populasi. Selanjutnya, dilakukan analisis dinamik pada model yang meliputi penentuan titik kesetimbangan dan kestabilan lokal titik kesetimbangan. Selain itu, dianalisis pula terjadinya bifurkasi transkritikal pada salah satu titik kesetimbangan. Pada bagian akhir dilakukan simulasi numerik untuk mengilustrasikan hasil analisis yang telah diperoleh.

3.1 Konstruksi Model

Model *predator-prey* yang digunakan dalam Skripsi ini mengikuti bentuk model *predator-prey* Rosenzweig-MacArthur dengan menggunakan fungsi respon Holling tipe IV dengan $c = 1$. Diasumsikan populasi *prey* tumbuh mengikuti model pertumbuhan logistik dengan daya dukung lingkungan k dan laju pertumbuhan intrinsik r . Jika kepadatan populasi *prey* setiap saat dinyatakan dengan $x(t)$, maka laju pertumbuhan populasi *prey* adalah

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{k} \right) - \frac{xy}{a + bx + x^2}. \quad (3.1)$$

Jika kepadatan populasi *predator* setiap saat dinyatakan dengan $y(t)$ maka laju pertumbuhan populasi *predator* adalah

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\mu xy}{a + bx + x^2} - my. \quad (3.2)$$

Jika usaha pemanenan dilakukan pada *prey* dan *predator* dengan laju pemanenan berturut-turut e_1 dan e_2 maka diperoleh model *predator-prey* dengan fungsi respon Holling tipe IV dan pemanenan pada kedua populasi

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= rx \left(1 - \frac{x}{k} \right) - \frac{xy}{a + bx + x^2} - e_1x, \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\mu xy}{a + bx + x^2} - my - e_2y, \end{aligned} \quad (3.3)$$

dengan syarat awal $x(0) > 0, y(0) > 0$.

3.2 Titik Kesetimbangan

Titik kesetimbangan sistem (3.3) diperoleh ketika $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0$, yaitu

$$\begin{aligned}x \left(r \left(1 - \frac{x}{k} \right) - \frac{y}{a + bx + x^2} - e_1 \right) &= 0, \\ y \left(\frac{\mu x}{a + bx + x^2} - m - e_2 \right) &= 0.\end{aligned}\tag{3.4}$$

Solusi sistem persamaan (3.4) adalah

$$x = 0,\tag{3.5}$$

atau

$$r \left(1 - \frac{x}{k} \right) - \frac{y}{a + bx + x^2} - e_1 = 0,\tag{3.6}$$

dan

$$y = 0,\tag{3.7}$$

atau

$$\frac{\mu x}{a + bx + x^2} - m - e_2 = 0.\tag{3.8}$$

Dari persamaan (3.5) dan (3.7) diperoleh titik kesetimbangan kepunahan kedua populasi $E_0 = (0, 0)$ yang eksis dalam setiap kondisi. Kombinasi dari (3.5) dan (3.8) tidak menghasilkan titik kesetimbangan dikarenakan untuk $x = 0$ diperoleh $m = -e_2$ yang kontradiksi dengan $m > 0$. Dari persamaan (3.6) dan (3.7) diperoleh titik kesetimbangan kepunahan predator $E_1 = \left(k \left(1 - \frac{e_1}{r} \right), 0 \right)$ yang eksis jika $r > e_1$.

Kemudian dari persamaan (3.6) dan (3.8) diperoleh titik kesetimbangan interior $E_i(x_i, y_i), i = 2, 3, 4$. Nilai y_i diperoleh dari (3.6), yaitu

$$y_i = \left[r \left(1 - \frac{x_i}{k} \right) - e_1 \right] (a + bx_i + x_i^2).$$

Karena $a + bx_i + x_i^2 > 0$ maka y_i bernilai positif bila $r \left(1 - \frac{x_i}{k} \right) > e_1$.

Nilai x_i diperoleh dari (3.8), yaitu

$$\frac{\mu x}{a + bx + x^2} - m - e_2 = 0,$$

yang dapat ditulis sebagai

$$(m + e_2)(a + bx + x^2) - \mu x = 0,$$

atau ekuivalen dengan

$$(m + e_2)x^2 + (b(m + e_2) - \mu)x + a(m + e_2) = 0. \quad (3.9)$$

Persamaan (3.9) merupakan persamaan kuadrat $Ax^2 + Bx + C = 0$, dengan

$$\begin{aligned} A &= (m + e_2) > 0, \\ B &= b(m + e_2) - \mu, \\ C &= a(m + e_2) > 0. \end{aligned}$$

Misalkan x_2 dan x_3 adalah akar persamaan kuadrat (3.9). Karena $x_2x_3 = \frac{C}{A} > 0$ maka persamaan (3.9) memiliki akar real positif jika diskriminan $D = B^2 - 4AC \geq 0$ dan $x_2 + x_3 = -\frac{B}{A} > 0$, yaitu $B^2 - 4a(m + e_2)^2 \geq 0$ dan $B < 0$. Syarat tersebut dapat dinyatakan sebagai

$$[B - 2\sqrt{a}(m + e_2)][B + 2\sqrt{a}(m + e_2)] \geq 0$$

dan

$$B < 0,$$

atau

$$B + 2\sqrt{a}(m + e_2) \leq 0$$

dan

$$B < 0.$$

Kondisi ini dapat ditulis sebagai $B \leq -2\sqrt{a}(m + e_2)$ dan $B < 0$, atau $m + e_2 < \frac{\mu}{b}$ dan $m + e_2 \leq \frac{\mu}{b+2\sqrt{a}}$. Karena $\frac{\mu}{b+2\sqrt{a}} < \frac{\mu}{b}$, maka cukup digunakan syarat $m + e_2 \leq \frac{\mu}{b+2\sqrt{a}}$, atau $e_2 \leq \frac{\mu}{b+2\sqrt{a}} - m$. Jadi, agar diperoleh x_2 dan x_3 yang real dan positif harus dipenuhi $e_2 \leq \theta$, dengan $\theta = \frac{\mu}{b+2\sqrt{a}} - m$.

Mengingat agar diperoleh y_i positif harus dipenuhi $e_1 < r(1 - \frac{x_i}{k})$. Jika $D > 0$ maka diperoleh

$$x_2 = \frac{-B - \sqrt{D}}{2A}, x_3 = \frac{-B + \sqrt{D}}{2A},$$

dengan $x_3 > x_2$. Misalkan $\varphi_2 = r \left(1 - \frac{x_2}{k}\right)$ dan $\varphi_3 = r \left(1 - \frac{x_3}{k}\right)$, jelas bahwa $\varphi_3 < \varphi_2$. Jika $e_1 < \varphi_3$ maka $e_1 < \varphi_2$ sehingga syarat eksistensi y_2 dan y_3 dipenuhi. Oleh karena itu, diperoleh dua titik kesetimbangan, yaitu $E_2(x_2, y_2)$ dan $E_3(x_3, y_3)$. Jika $\varphi_3 < e_1 < \varphi_2$ maka syarat eksistensi y_3 tidak dipenuhi sehingga hanya diperoleh titik kesetimbangan $E_2(x_2, y_2)$. Jika $e_1 \geq \varphi_2$ maka syarat eksistensi y_2 dan y_3 tidak dipenuhi.

Jika $D = 0$ maka $e_2 = \theta$ atau $B = -2\sqrt{a}(m + e_2)$ sehingga

$$x_4 = -\frac{B}{2A} = \frac{2\sqrt{a}(m + e_2)}{2(m + e_2)} = \sqrt{a},$$

dan syarat eksistensi y_4 menjadi $e_1 < r \left(1 - \frac{x_4}{k}\right) = \varphi_4$. Jadi, diperoleh titik interior $E_4(x_4, y_4)$ jika $e_2 = \theta$ dan $e_1 < \varphi_4$, dengan $y_4 = \left(r \left(1 - \frac{\sqrt{a}}{k}\right) - e_1\right) (2a + b\sqrt{a})$. Syarat eksistensi titik interior sistem (3.3) dirangkum dalam teorema berikut.

Teorema 3.1 Syarat eksistensi titik kesetimbangan interior sistem (3.3). Misalkan $\theta = \frac{\mu}{b+2\sqrt{a}} - m$ dan $\varphi_i = r \left(1 - \frac{x_i}{k}\right)$, $i = 2, 3, 4$.

1. Jika $e_2 < \theta$ dan
 - (a) Jika $e_1 < \varphi_3$ maka sistem (3.3) memiliki dua titik kesetimbangan interior, yaitu $E_2(x_2, y_2)$ dan $E_3(x_3, y_3)$.
 - (b) Jika $\varphi_3 \leq e_1 < \varphi_2$ maka sistem (3.3) memiliki satu titik kesetimbangan interior yaitu $E_2(x_2, y_2)$.
 - (c) Jika $e_1 \geq \varphi_2$ maka sistem (3.3) hanya memiliki dua titik kesetimbangan, yaitu $E_0(x_0, y_0)$ dan $E_1(x_1, y_1)$ karena tidak terdapat titik kesetimbangan interior.
2. Jika $e_2 = \theta$ dan $e_1 < \varphi_4$ maka sistem (3.3) memiliki satu titik kesetimbangan interior yaitu $E_4(\sqrt{a}, y_4)$.

Dengan demikian diperoleh empat titik kesetimbangan, yaitu $E_0(0, 0)$, $E_1\left(k \left(1 - \frac{e_1}{r}\right), 0\right)$, $E_2(x_2, y_2)$ atau $E_4(x_4, y_4)$, dan $E_3(x_3, y_3)$.

3.3 Kestabilan Lokal Titik Kesetimbangan

Model (3.3) merupakan sistem *autonomous* non linear sehingga kestabilan lokal titik kesetimbangan model dapat ditentukan melalui

proses linearisasi di sekitar titik kesetimbangan. Proses linearisasi tersebut menghasilkan matriks Jacobi berikut

$$J = \begin{bmatrix} r - \frac{2rx}{k} - \frac{y(a-x^2)}{(a+bx+x^2)^2} - e_1 & -\frac{x}{a+bx+x^2} \\ \frac{\mu y(a-x^2)}{(a+bx+x^2)^2} & \frac{\mu x}{(a+bx+x^2)} - m - e_2 \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

3.3.1 Titik kesetimbangan E_0

Matriks Jacobi pada titik kesetimbangan $E_0(0, 0)$ adalah

$$J_{E_0} = \begin{bmatrix} r - e_1 & 0 \\ 0 & -m - e_1 \end{bmatrix},$$

yang memiliki nilai eigen $\lambda_1 = r - e_1$ dan $\lambda_2 = -(m + e_2) < 0$. Titik kesetimbangan E_0 bersifat stabil asimtotik jika $r < e_1$.

3.3.2 Titik kesetimbangan E_1

Matriks Jacobi pada titik kesetimbangan $E_1(k(1 - \frac{e_1}{r}), 0)$ adalah

$$J_{E_1} = \begin{bmatrix} e_1 - r & \frac{kr(r-e_1)}{ar^2 + bkr(r-e_1) + k^2(r-e_1)^2} \\ 0 & \frac{\mu k(1 - \frac{e_1}{r})}{a + bk(1 - \frac{e_1}{r}) + k^2(1 - \frac{e_1}{r})^2} - m - e_2 \end{bmatrix},$$

dengan nilai eigen $\lambda_1 = e_1 - r$ dan

$$\lambda_2 = \frac{\mu kr(r - e_1)}{ar^2 + bkr(r - e_1) + k^2(r - e_1)^2} - m - e_2.$$

Oleh karena $\lambda_1 < 0$ maka titik kesetimbangan E_1 stabil asimtotik ketika $e_2 > \theta_1$, dengan

$$\theta_1 = \frac{\mu k(1 - \frac{e_1}{r})}{a + bk(1 - \frac{e_1}{r}) + k^2(1 - \frac{e_1}{r})^2} - m.$$

3.3.3 Titik kesetimbangan E_2 dan E_3

Titik kesetimbangan $E_i(x_i, y_i), i = 2, 3$ memenuhi persamaan (3.6) dan (3.8) sehingga diperoleh

$$e_1 = r \left(1 - \frac{x_i}{k}\right) - \frac{y_i}{a + bx_i + x_i^2},$$

$$e_2 = \frac{\mu x_i}{a + bx_i + x_i^2} - m,$$

$$\frac{1}{a + bx_i + x_i^2} = \frac{m + e_2}{\mu x_i}$$

yang dapat digunakan untuk mempermudah perhitungan selanjutnya. Matriks Jacobi pada titik kesetimbangan $E_i(x_i, y_i)$ adalah

$$J_{E_i} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix}$$

dengan

$$\begin{aligned} a_{11} &= r\left(1 - \frac{2x_i}{k}\right) - \frac{y_i(a - x_i^2)}{(a + bx_i + x_i^2)^2} - e_1 \\ &= r\left(1 - \frac{2x_i}{k}\right) - e_1 - \frac{\left(r\left(1 - \frac{x_i}{k}\right) - e_1\right)(a - x_i^2)}{a + bx_i + x_i^2} \\ &= r\left(1 - \frac{2x_i}{k}\right) - e_1 - \frac{\left(r\left(1 - \frac{x_i}{k}\right) - e_1\right)(a - x_i^2)(m + e_2)}{\mu x_i}, \\ a_{12} &= -\frac{x_i}{a + bx_i + x_i^2} = -\frac{m + e_2}{\mu}, \\ a_{21} &= \frac{\mu y_i(a - x_i^2)}{(a + bx_i + x_i^2)^2} \\ &= \frac{\mu \left(r\left(1 - \frac{x_i}{k}\right) - e_1\right)(a - x_i^2)}{a + bx_i + x_i^2} \\ &= \frac{(m + e_2) \left(r\left(1 - \frac{x_i}{k}\right) - e_1\right)(a - x_i^2)}{x_i}. \end{aligned}$$

Kestabilan titik kesetimbangan E_2 dan E_3 dapat ditentukan dengan memeriksa tanda $tr(E_i)$ dan $|J_{E_i}|$.

$$\begin{aligned} tr(J_{E_i}) &= a_{11} + a_{22} \\ &= r\left(1 - \frac{2x_i}{k}\right) - e_1 - \frac{\left(r\left(1 - \frac{x_i}{k}\right) - e_1\right)(a - x_i^2)(m + e_2)}{\mu x_i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|J_{E_i}| &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\
&= - \left(-\frac{m+e_2}{\mu} \right) \left(\frac{(m+e_2)(a-x_i^2)(r(1-\frac{x_i}{k})-e_1)}{x_i} \right) \\
&= \left(\frac{(m+e_2)^2(a-x_i^2)(r(1-\frac{x_i}{k})-e_1)}{\mu x_i} \right) \left(\frac{a+bx_i+x_i^2}{a+bx_i+x_i^2} \right) \\
&= \frac{y_i(m+e_2)^3(a-x_i^2)}{\mu^2 x_i^2}
\end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa tanda dari $|J_{E_i}|$ bergantung pada nilai $a - x_i^2$. Berdasarkan analisis pada Lampiran 1 diketahui bahwa $a - x_2^2 > 0$ sehingga $|J_{E_2}| > 0$ dan $a - x_3^2 < 0$ sehingga $|J_{E_3}| < 0$. Dengan demikian titik kesetimbangan interior E_3 selalu bersifat tidak stabil pelana.

Titik kesetimbangan interior E_2 bersifat stabil asimtotik jika $tr(E_2) < 0$, yaitu

$$r \left(1 - \frac{2x_2}{k} \right) - e_1 - \frac{(r(1 - \frac{x_2}{k}) - e_1)(a - x_2^2)(m + e_2)}{\mu x_2} < 0.$$

Karena $r(1 - \frac{x_2}{k}) - e_1 > 0$ dan $a - x_2^2 > 0$ maka

$$\frac{(r(1 - \frac{x_2}{k}) - e_1)(a - x_2^2)(m + e_2)}{\mu x_2} < 0,$$

sehingga $tr(J_{E_2}) < 0$ jika $r(1 - \frac{2x_2}{k}) < e_1$. Dengan demikian titik kesetimbangan interior E_2 stabil asimtotik ketika $e_1 > \varphi^*$ dengan $\varphi^* = r(1 - \frac{2x_2}{k})$.

3.3.4 Titik kesetimbangan E_4

Matriks Jacobi pada titik kesetimbangan $E_4(x_4, y_4)$ adalah

$$J_{E_4} = \begin{bmatrix} r(1 - \frac{2\sqrt{a}}{k}) - e_1 & -\frac{\sqrt{a}}{2a+b\sqrt{a}} \\ 0 & \frac{\mu\sqrt{a}}{2a+b\sqrt{a}} - m - e_2 \end{bmatrix},$$

dengan nilai eigen $\lambda_1 = r(1 - \frac{2\sqrt{a}}{k}) - e_1$ dan $\lambda_2 = \frac{\mu}{2\sqrt{a+b}} - m - e_2$. Diketahui bahwa titik kesetimbangan E_4 eksis ketika $e_2 = \theta$ sehingga $\lambda_2 = 0$. Oleh karena $\lambda_2 = 0$ maka titik kesetimbangan E_4 tidak dapat diketahui sifat kestabilannya.

Syarat eksistensi dan kestabilan titik kesetimbangan sistem (3.3) dirangkum pada Tabel 3.1.

Tabel 3.1: Syarat eksistensi dan kestabilan titik kesetimbangan

Titik Kesetimbangan	Syarat Eksistensi	Jenis Kestabilan	Syarat Kestabilan
$E_0(0, 0)$	-	Stabil Asimtotik	$e_1 > r$
$E_1(k(1 - \frac{e_1}{r}), 0)$	$e_1 < r$	Stabil Asimtotik	$e_2 > \theta_1$
$E_2(x_2, y_2)$	$e_2 < \theta$ $0 < e_1 < \varphi_2$	Stabil Asimtotik	$e_1 > \varphi^*$
$E_3(x_3, y_3)$	$e_2 < \theta$ $0 < e_1 < \varphi_3$	Tidak Stabil Pelana	-
$E_4(x_4, y_4)$	$e_2 = \theta$ $0 < e_1 < \varphi_4$	-	-

3.4 Bifurkasi Transkritikal

Perhatikan sistem (3.3), $\vec{x} = E_1$, dan

$$e^* \equiv e_2 = \frac{\mu kr(r - e_1)}{ar^2 + bkr(r - e_1) + k^2(r - e_1)^2} - m,$$

sebab $\vec{F}(E_1, e^*) = 0$. Titik kesetimbangan E_1 dan parameter e^* disubstitusikan ke matriks Jacobi (3.10) sehingga diperoleh

$$J(E_1; e^*) = \begin{bmatrix} e_1 - r & -\frac{kr(r - e_1)}{ar^2 + bkr(r - e_1) + k^2(r - e_1)^2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$J(E_1; e^*)^T = \begin{bmatrix} e_1 - r & 0 \\ -\frac{kr(r - e_1)}{ar^2 + bkr(r - e_1) + k^2(r - e_1)^2} & 0 \end{bmatrix},$$

yang mempunyai nilai eigen $\lambda_1 = e_1 - r$ dan $\lambda_2 = 0$. Vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_2 = 0$ untuk matriks $J(E_1; e^*)$ adalah

$$\begin{bmatrix} e_1 - r & -\frac{kr(r - e_1)}{ar^2 + bkr(r - e_1) + k^2(r - e_1)^2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{V} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{kr}{ar^2+bkr(r-e_1)+k^2(r-e_1)^2} \\ 1 \end{bmatrix},$$

dan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_2 = 0$ untuk matriks $J(E_1; e^*)^T$ adalah

$$\begin{bmatrix} e_1 - r & 0 \\ -\frac{kr(r-e_1)}{ar^2+bkr(r-e_1)+k^2(r-e_1)^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{W} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Sistem (3.3) mengalami bifurkasi transkritikal pada titik kesetimbangan $E_1(k(1 - \frac{e_1}{r}), 0)$ ketika parameter e_2 berubah di sekitar $e_2 = e^*$ jika tiga kondisi pada Teorema 2.4 dipenuhi.

- i. \vec{F}_{e_2} merupakan matriks turunan $\vec{F}(\vec{x}; e_2)$ sistem (3.3) terhadap parameter e_2 , yaitu

$$\vec{F}_{e_2} = \frac{d\vec{F}}{de_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ -y \end{bmatrix}, \vec{F}_{e_2}(E_1; e^*) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

sehingga

$$\vec{W}^T \vec{F}_{e_2}(E_1; e^*) = [0 \ 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0.$$

Jadi sistem (3.3) memenuhi kondisi pertama teorema Sotomayor untuk bifurkasi transkritikal.

- ii. $D\vec{F}_{e_2}$ adalah matriks Jacobi \vec{F}_{e_2} , yaitu

$$D\vec{F}_{e_2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{e_21}}{\partial x} & \frac{\partial F_{e_21}}{\partial y} \\ \frac{\partial F_{e_22}}{\partial x} & \frac{\partial F_{e_22}}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = D\vec{F}_{e_2}(E_1; e^*),$$

sehingga

$$\vec{W}^T [D\vec{F}_{e_2}(E_1; e^*)\vec{V}] = [0 \ 1] \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = -1 \neq 0.$$

Diperoleh $\vec{W}^T [D\vec{F}_{e_2}(E_1; e^*)\vec{V}] \neq 0$ sehingga sistem (3.3) memenuhi kondisi kedua teorema Sotomayor untuk bifurkasi transkritikal.

iii. D^2F_1 dan D^2F_2 merupakan matriks Hess sistem (3.3), yaitu

$$D^2F_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} \end{bmatrix}, D^2F_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 F_2}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 F_2}{\partial y^2} \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya

$$\begin{aligned} D^2\vec{F}(E_0; \beta_0)(\vec{V}, \vec{V}) &= \begin{bmatrix} \vec{V}^T D^2F_1(E_0; \beta_0)\vec{V} \\ \vec{V}^T D^2F_2(E_0; \beta_0)\vec{V} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \vec{V}^T \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F_1(E_0; \beta_0)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F_1(E_0; \beta_0)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 F_1(E_0; \beta_0)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 F_1(E_0; \beta_0)}{\partial y^2} \end{bmatrix} \vec{V} \\ \vec{V}^T \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F_2(E_0; \beta_0)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F_2(E_0; \beta_0)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 F_2(E_0; \beta_0)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 F_2(E_0; \beta_0)}{\partial y^2} \end{bmatrix} \vec{V} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} v_1 v_1 + 2 \frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y} v_1 v_2 + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} v_2 v_2 \\ \frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2} v_1 v_1 + 2 \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial y} v_1 v_2 + \frac{\partial^2 F_2}{\partial y^2} v_2 v_2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(r \left(1 - \frac{2x}{k} \right) - \frac{y(a-x^2)}{(a+bx+x^2)^2} - e_1 \right), \\ &= -\frac{2r}{k} - \frac{-2xy(a+bx+x^2) - 2y(a-x^2)(b+2x)}{(a+bx+x^2)^3}, \\ &= -\frac{2r}{k} - \frac{-6axy + 2x^3y - 2aby}{(a+bx+x^2)^3}, \\ \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} v_1 v_1 &= \left(-\frac{2r}{k} \right) \left(-\frac{kr}{ar^2 + bkr(r-e_1) + k^2(r-e_1)^2} \right)^2, \\ &= -\frac{2kr^3}{(ar^2 + bkr(r-e_1) + k^2(r-e_1)^2)^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(r \left(1 - \frac{2x}{k} \right) - \frac{y(a-x^2)}{(a+bx+x^2)^2} - e_1 \right), \\ &= - \frac{(a-x^2)}{(a+bx+x^2)^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y} v_1 v_2 &= - \frac{a - (k(1 - \frac{e_1}{r}))^2}{(a + bk(1 - \frac{e_1}{r}) + (k(1 - \frac{e_1}{r}))^2)^2} v_1 v_2, \\ &= \left(- \frac{r^2(ar^2 - k^2(r - e_1)^2)}{(ar^2 + bkr(r - e_1) + k^2(r - e_1)^2)^2} \right) \\ &\quad \left(- \frac{kr}{ar^2 + bkr(r - e_1) + k^2(r - e_1)^2} \right), \\ &= \left(\frac{kr^3(ar^2 - k^2(r - e_1)^2)}{(ar^2 + bkr(r - e_1) + k^2(r - e_1)^2)^3} \right), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(- \frac{x}{a + bx + x^2} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} v_2 v_2 = 0,$$

$$\frac{\partial^2 F_2}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu x}{a + bx + x^2} - m - e_2 \right) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 F_2}{\partial y^2} v_1 v_1 = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mu y(a-x^2)}{(a+bx+x^2)^2} \right), \\ &= \frac{-2\mu xy(a+bx+x^2) - 2\mu y(a-x^2)(b+2x)}{(a+bx+x^2)^3}, \\ &= \frac{-2\mu y(ax+bx^2+x^3) - 2\mu y(ab+2ax-bx^2-2x^3)}{(a+bx+x^2)^3}, \\ &= \frac{-2\mu y(ab+3ax-x^3)}{(a+bx+x^2)^3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2} v_1 v_1 &= (0) \left(- \frac{kr}{ar^2 + bkr(r - e_1) + k^2(r - e_1)^2} \right), \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu y(a-x^2)}{(a+bx+x^2)^2} \right), \\ &= \frac{\mu(a-x^2)}{(a+bx+x^2)^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial y} v_1 v_2 &= \frac{\mu(a - (k(1 - \frac{e_1}{r}))^2)}{(a + bk(1 - \frac{e_1}{r}) + (k(1 - \frac{e_1}{r}))^2)^2} v_1 v_2, \\
&= \left(\frac{\mu r^2 (ar^2 - k^2(r - e_1)^2)}{(ar^2 + bkr(r - e_1) + k^2(r - e_1)^2)^2} \right) \\
&\quad \left(-\frac{kr}{ar^2 + bkr(r - e_1) + k^2(r - e_1)^2} \right), \\
&= \left(-\frac{\mu kr^3 (ar^2 - k^2(r - e_1)^2)}{(ar^2 + bkr(r - e_1) + k^2(r - e_1)^2)^3} \right),
\end{aligned}$$

Diperoleh $D^2 \vec{F}(E_1; e^*)(\vec{V}, \vec{V})$, yaitu

$$D^2 \vec{F}(E_1; e^*)(\vec{V}, \vec{V}) = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}$$

dengan

$$\begin{aligned}
a_{11} &= -\frac{2kr^3}{(ar^2 + bkr(r - e_1) + k^2(r - e_1)^2)^2} \\
&\quad + 2\frac{kr^3(ar^2 - k^2(r - e_1)^2)}{(ar^2 + bkr(r - e_1) + k^2(r - e_1)^2)^3}, \\
&= -2\frac{k^2 r^3 (r - e_1)(br + 2k(r - e_1))}{(ar^2 + bkr(r - e_1) + k^2(r - e_1)^2)^3}, \\
a_{21} &= -2\frac{\mu kr^3 (ar^2 - k^2(r - e_1)^2)}{(ar^2 + bkr(r - e_1) + k^2(r - e_1)^2)^3},
\end{aligned}$$

$$\vec{W}^T [D^2 \vec{F}(E_1; e^*)(\vec{V}, \vec{V})] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}$$

$$\vec{W}^T [D^2 \vec{F}(E_1; e^*)(\vec{V}, \vec{V})] = a_{21} \neq 0.$$

Karena $\vec{W}^T [D^2 \vec{F}(E_1; e^*)(\vec{V}, \vec{V})] \neq 0$ maka sistem (3.3) memenuhi kondisi ketiga teorema Sotomayor untuk bifurkasi transkritikal dengan syarat $ar^2 - k^2(r - e_1)^2 \neq 0$.

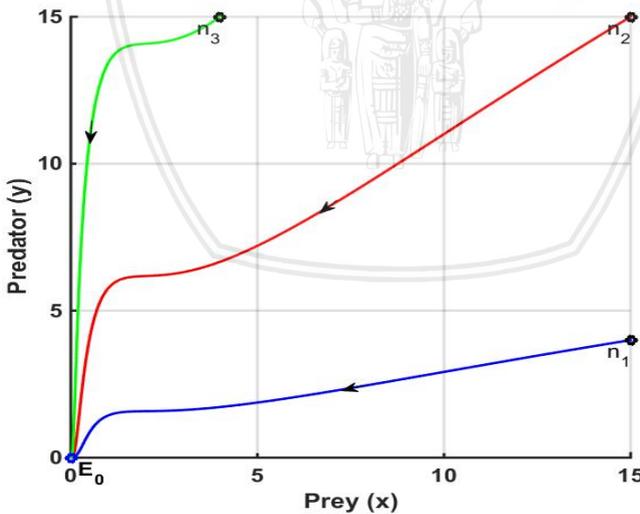
Jadi, sistem (3.3) memenuhi ketiga kondisi teorema Sotomayor sehingga sistem (3.3) mengalami bifurkasi transkritikal pada titik kesetimbangan E_1 dengan parameter e_2 berubah di sekitar e^* .

3.5 Simulasi Numerik

Pada bagian ini disajikan hasil simulasi numerik dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat yang mengacu pada hasil analisis kestabilan titik kesetimbangan. Selain itu dilakukan pula simulasi terhadap hasil analisis bifurkasi transkritikal.

3.5.1 Simulasi numerik kestabilan titik kesetimbangan

Simulasi numerik dalam Skripsi ini menggunakan nilai parameter $r = 15$, $k = 120$, $a = 4$, $b = 3$, $\mu = 25$, dan $m = 0.1$ untuk semua simulasi yang dilakukan. Beberapa perubahan nilai dilakukan pada parameter e_1 dan e_2 untuk memverifikasi hasil analisis yang diperoleh. Untuk menunjukkan kestabilan titik kesetimbangan $E_0(0, 0)$ diambil nilai parameter $e_1 = 16$ dan $e_2 = 3.5$. Nilai parameter tersebut memenuhi syarat kestabilan lokal titik kesetimbangan $E_0(0, 0)$, yaitu $r < e_1$. Nilai parameter yang digunakan tidak memenuhi syarat eksistensi baik titik kesetimbangan E_1 maupun titik kesetimbangan interior pada Tabel (3.1), yaitu $r > e_1 = 16$.



Gambar 3.1: Potret fase sistem (3.3) yang menunjukkan kestabilan titik kesetimbangan E_0

Pada Gambar 3.1 diambil tiga nilai awal yang berbeda, yaitu $n_1 = (15, 4)$, $n_2 = (15, 15)$, dan $n_3 = (4, 15)$. Perilaku solusi sistem yang disajikan dalam potret fase pada Gambar 3.1 menunjukkan bahwa orbit solusi dari tiga nilai awal tersebut menuju ke titik kesetimbangan $E_0(0, 0)$. Dengan demikian titik kesetimbangan $E_0(0, 0)$ bersifat stabil asimtotik.

Selanjutnya untuk menunjukkan kestabilan titik kesetimbangan E_1 diambil nilai parameter $e_1 = 14.7$ dan $e_2 = 3.48$. Nilai parameter tersebut memenuhi syarat kestabilan titik kesetimbangan $E_1(2.4, 0)$, yaitu

$$e_2 > \frac{\mu k(1 - \frac{e_1}{r})}{a + bk(1 - \frac{e_1}{r}) + k^2(1 - \frac{e_1}{r})^2} - m = 3.4377.$$

Titik kesetimbangan $E_0(0, 0)$ eksis dan bersifat tidak stail pelana sedangkan titik kesetimbangan interior tidak eksis karena syarat eksistensinya tidak dipenuhi, yaitu $e_2 < \theta = 3.47$.

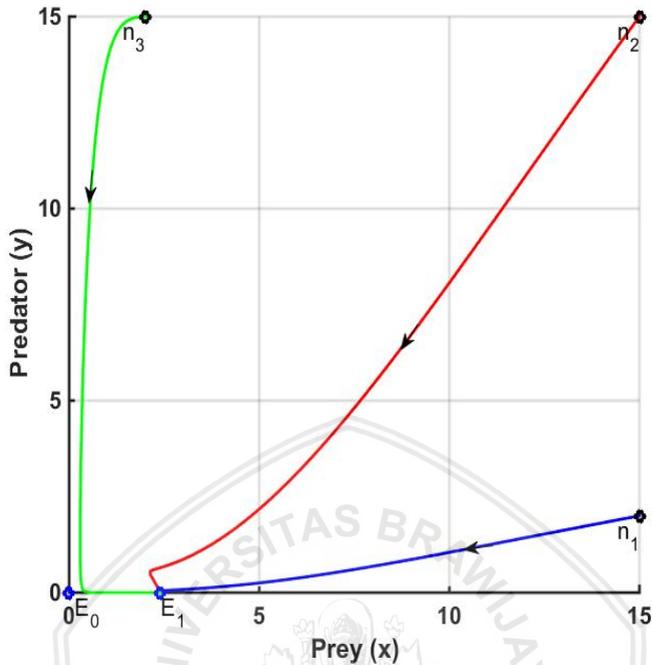
Pada Gambar 3.2 diambil tiga nilai awal yang berbeda, yaitu $n_1 = (10, 2)$, $n_2 = (10, 10)$, dan $n_3 = (2, 10)$. Perilaku solusi sistem disajikan dalam potret fase pada Gambar 3.2 yang menunjukkan bahwa orbit solusi dari tiga nilai awal tersebut menuju ke titik kesetimbangan $E_1(2.4, 0)$. Dengan demikian titik kesetimbangan $E_1(2.4, 0)$ bersifat stabil asimtotik.

Ketika sistem (3.3) mempunyai akar kembar atau salah satu syarat eksistensi titik kesetimbangan interior tidak dipenuhi maka sistem (3.3) mempunyai tiga titik kesetimbangan, yaitu E_0 , E_1 , dan E_2 . Untuk menunjukkan kestabilan titik kesetimbangan interior dan eksistensi tiga titik kesetimbangan diambil nilai parameter $e_1 = 14.7$ dan $e_2 = 3.43$. Nilai parameter tersebut memenuhi syarat kestabilan titik kesetimbangan interior $E_2(1.6336, 1.108)$, yaitu

$$e_1 > r \left(1 - \frac{2x_2}{k} \right) = 14.6705.$$

Namun, nilai parameter tersebut tidak memenuhi syarat eksistensi titik kesetimbangan interior E_3 , yaitu $e_1 < \varphi_3 = 14.69$ sedangkan titik kesetimbangan E_0 dan E_1 eksis serta bersifat tidak stabil pelana.

Pada Gambar 3.3 diambil tiga nilai awal yang berbeda, yaitu $n_1 = (12, 6)$, $n_2 = (12, 12)$, dan $n_3 = (8, 12)$. Perilaku solusi sistem

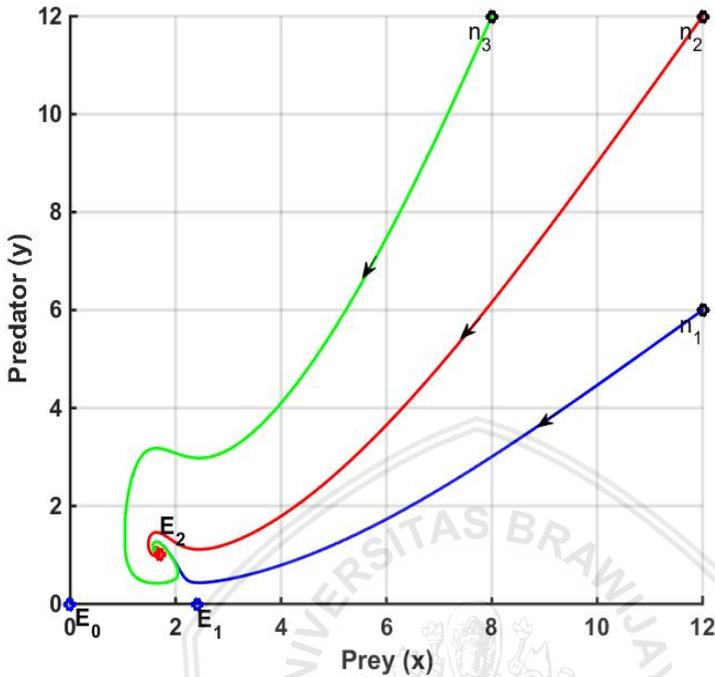


Gambar 3.2: Potret fase sistem (3.3) yang menunjukkan kestabilan titik kesetimbangan E_1

disajikan dalam potret fase pada Gambar 3.3 yang menunjukkan bahwa orbit solusi dari tiga nilai awal tersebut menuju ke titik kesetimbangan $E_2(1.6336, 1.108)$. Dengan demikian titik kesetimbangan $E_2(1.6336, 1.108)$ bersifat stabil asimtotik.

Ketika sistem (3.3) mempunyai akar berlainan maka sistem (3.3) mempunyai empat titik kesetimbangan, yaitu E_0 , E_1 , E_2 , dan E_3 . Kemudian untuk menunjukkan kestabilan titik kesetimbangan interior dan eksistensi empat titik kesetimbangan diambil nilai parameter $e_1 = 14.7$ dan $e_2 = 3.46$. Nilai parameter tersebut memenuhi syarat kestabilan titik kesetimbangan $E_1(2.4, 0)$ dan $E_2(1.7989, 0.9491)$, yaitu

$$e_2 > \frac{\mu k(1 - \frac{e_1}{r})}{a + bk(1 - \frac{e_1}{r}) + k^2(1 - \frac{e_1}{r})^2} - m = 3.4377,$$

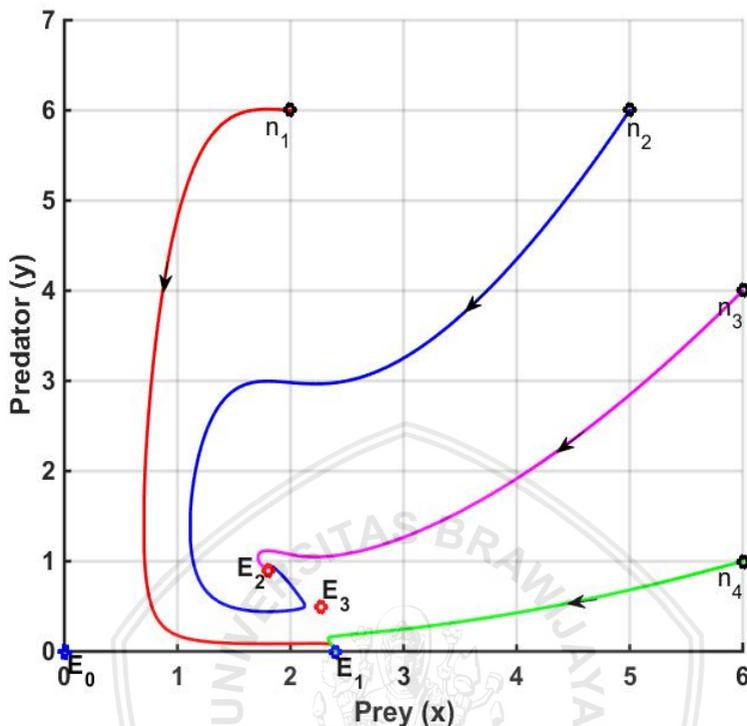


Gambar 3.3: Potret fase sistem (3.3) yang menunjukkan terdapat tiga titik kesetimbangan

$$e_1 > r \left(1 - \frac{2x_2}{k} \right) = 14.5503.$$

Titik kesetimbangan $E_0(0, 0)$ eksis serta bersifat tidak stabil pelana karena nilai parameter yang digunakan tidak memenuhi syarat kestabilan titik kesetimbangan pada Tabel 3.1. Titik kesetimbangan $E_3(2.2235, 0.3444)$ eksis dan bersifat tidak stabil pelana sesuai dengan hasil analisis kestabilan lokal yang telah dilakukan.

Pada Gambar 3.4 diambil empat nilai awal yang berbeda, yaitu $n_1 = (2, 6)$, $n_2 = (5, 6)$, $n_3 = (6, 4)$, dan $n_4 = (6, 1)$. Perilaku solusi sistem disajikan dalam potret fase pada Gambar 3.4 yang menunjukkan bahwa orbit solusi yang berasal dari dua nilai awal $n_1 = (2, 6)$ dan $n_4 = (6, 1)$ menuju ke titik kesetimbangan $E_1(2.4, 0)$. Kemudian orbit solusi yang berasal dari dua nilai awal lainnya, yaitu $n_2 = (5, 6)$ dan $n_3 = (6, 4)$ menuju ke titik kese-



Gambar 3.4: Potret fase sistem (3.3) yang menunjukkan terdapat empat titik kesetimbangan

timbangan $E_2(1.7989, 0.9491)$. Dengan demikian titik kesetimbangan $E_1(2.4, 0)$ dan $E_2(1.7989, 0.9491)$ bersifat stabil asimtotik.

Berdasarkan uraian sebelumnya, diketahui bahwa titik kepunahan kedua populasi (E_0), titik kepunahan predator (E_1), dan titik interior (E_2) bersifat stabil asimtotik dengan syarat masing-masing. Artinya kepunahan populasi dengan kondisi yang demikian mungkin terjadi. Baik pada Gambar 3.3 maupun Gambar 3.4 terlihat bahwa titik kesetimbangan interior E_2 bersifat stabil asimtotik. Titik kesetimbangan interior merupakan titik ketika kedua populasi dapat hidup secara berdampingan. Kedua hasil simulasi tersebut diperoleh dengan cara menurunkan nilai parameter pemanenan predator dan meningkatkan nilai parameter pemanenan prey. Dengan demikian keseimbangan antara populasi prey dan

predator dapat dicapai dengan cara menurunkan usaha pemanenan pada populasi *predator* dan meningkatkan usaha pemanenan pada populasi *prey* hingga mencapai angka tertentu.

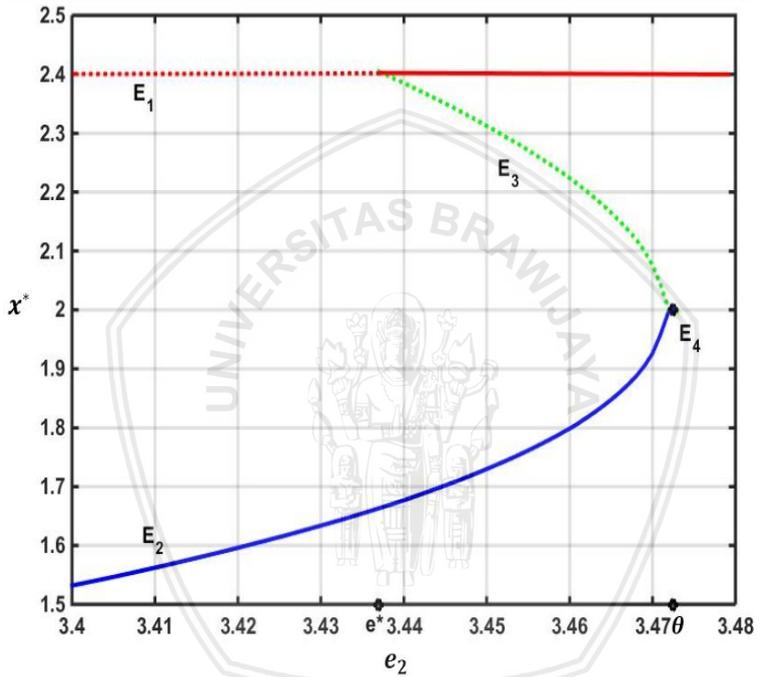
3.5.2 Simulasi numerik bifurkasi transkritikal

Simulasi numerik untuk menunjukkan terjadinya bifurkasi transkritikal telah dilakukan pada Gambar 3.3 dan 3.4. Sistem (3.3) mengalami bifurkasi transkritikal pada titik kesetimbangan E_1 ketika parameter e_2 berubah di sekitar $e_2 = e^*$ sehingga memenuhi ketiga kondisi pada teorema Sotomayor. Simulasi numerik bifurkasi transkritikal yang dilakukan menggunakan nilai parameter $r = 15$, $k = 120$, $a = 4$, $b = 3$, $\mu = 25$, $m = 0.1$, dan $e_1 = 14.7$. Parameter yang digunakan memenuhi syarat terjadinya bifurkasi transkritikal, yaitu $ar^2 - k^2(r - e_1)^2 = -396 \neq 0$. Berdasarkan parameter tersebut diperoleh nilai bifurkasi (e^*), yaitu

$$e^* = \frac{\mu kr(r - e_1)}{ar^2 + bkr(r - e_1) + k^2(r - e_1)^2} = 3.4377.$$

Pada Gambar 3.5 diperlihatkan perubahan jumlah titik kesetimbangan dan kestabilannya.

Perhatikan Gambar 3.5, sumbu vertikal mewakili nilai x^* pada titik kesetimbangan (x^* , y^*) sedangkan sumbu horizontal merupakan nilai e_2 . Ketika nilai $e_2 < 3.4377$, titik kesetimbangan E_1 bersifat tidak stabil pelana. Ketika nilai $e_2 > 3.4377$ titik kesetimbangan E_1 berubah menjadi bersifat stabil asimtotik dan terdapat titik kesetimbangan baru, yaitu E_3 . Dengan kata lain, sistem (3.3) mengalami perubahan sifat solusi sistem dinamik ketika $e_2 = e^* = 3.4377$. Oleh karena itu, $e_2 = e^* = 3.4377$ merupakan nilai bifurkasi dan bifurkasi yang terjadi adalah bifurkasi transkritikal.



Gambar 3.5: Diagram bifurkasi dengan perubahan nilai e_2



BAB IV KESIMPULAN

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan tujuan penulisan Skripsi ini dan hasil yang telah dipaparkan diperoleh kesimpulan sebagai berikut.

1. Model matematika *predator-prey* dikonstruksi dengan memper-timbangkan fungsi respon yang berbentuk Holling tipe IV serta menambahkan pemanenan pada kedua spesies. Model ini merupakan sistem *autonomous* nonlinear dengan dua persamaan.
2. Berdasarkan hasil analisis dinamik, sistem memiliki empat titik kesetimbangan, yaitu titik kepunahan kedua populasi (E_0), titik kepunahan *predator* (E_1), dan dua titik interior (E_2 atau E_4 dan E_3). Titik kesetimbangan E_0 , E_1 , dan E_2 eksis dan bersifat stabil asimtotik dengan syarat masing-masing. Titik kesetimbangan E_3 eksis dengan syarat tertentu dan bersifat tidak stabil pelana. Titik kesetimbangan E_4 eksis tetapi belum dapat ditentukan sifat kestabilannya.
3. Bifurkasi transkritikal di sekitar titik kepunahan *predator* (E_1) terjadi ketika nilai parameter pemanenan *predator* (e_2) berubah di sekitar suatu nilai dengan syarat tertentu.
4. Simulasi numerik yang dilakukan menunjukkan hasil yang sesuai dengan analisis.

4.2 Saran

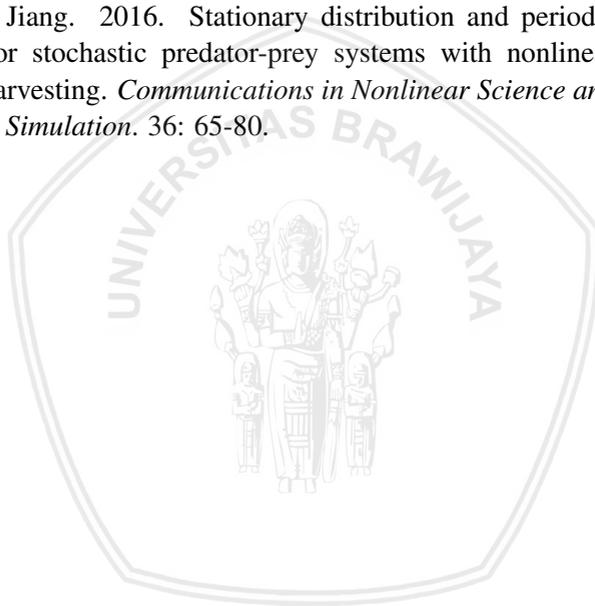
Pada Skripsi ini analisis terjadinya bifurkasi dilakukan pada titik kepunahan *predator* (E_1). Untuk penelitian selanjutnya perlu dilakukan analisis terjadinya bifurkasi pada titik kesetimbangan yang lain, yaitu titik kesetimbangan interior.



DAFTAR PUSTAKA

- Boyce, W. E. dan R. C. DiPrima. 2012. *Elementary Differential Equations*. Ninth Edition. John Wiley Sons Inc. United State of America.
- Brauer, F. dan C. C. Chaves. 2012. *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology, Second Edition*. Texts in Applied Mathematics. Springer-Verlag. New York.
- Huang, J. dan D. Xiao. 2004. Analyses of bifurcations and stability in a predator-prey system with Holling type-IV functional response. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series*. 20: 167-178.
- Huang, Q. dan X. Liu. 2018. The dynamics of a harvested predator-prey system with Holling type IV functional response. *Bio Systems*. 169-170: 26-39.
- Ji, L. dan C. Wu. 2010. Qualitative analysis of a predator-prey model with constant-rate prey harvesting incorporating a constant prey refuge. *Nonlinear Analysis:Real World Applications*. 11: 2285-2295.
- Kar, T. dan B. Ghosh. 2012. Sustainability and optimal control of an exploited prey predator system through provision of alternative food to predator. *Biosystems*. 109: 220-232.
- Molles, M. C. 2016. *Ecology Concepts and Applications*. Seventh Edition. Mc Graw Hill. New York.
- Nagle, R. K, E. B. Saff, dan A. D. Snider. 2012. *Fundamentals of Differential Equations*. Eighth Edition. Pearson Education, Inc. Boston.
- Panfilov, A. 2004. *Qualitative Analysis of Differential Equations*. Utrecht University. Utrecht.

- Perko, L. 2001. *Differential Equations and Dynamics Systems*. Third Edition. Springer-Verlag. New York.
- Robinson, J. C. 2004. *An Introduction to Ordinary Differential Equations*. First Edition. Cambridge University Press.
- Sen, M., Srinivasu, P. dan M. Banerjee. 2015. Global dynamics of an additional food provided predator-prey system with constant harvest in predators. *Applied Mathematics and Computation*. 250: 193-211.
- Zuo, W. dan D. Jiang. 2016. Stationary distribution and periodic solution for stochastic predator-prey systems with nonlinear predator harvesting. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 36: 65-80.



LAMPIRAN

Lampiran 1

Pada titik kesetimbangan E_2 berikut,

$$\begin{aligned}
 a - x_2^2 &= a - \left(\frac{b(m+e_2) - \mu - \sqrt{[b(m+e_2) - \mu]^2 - 4a(m+e_2)}}{2(m+e_2)} \right)^2 \\
 &= a - \left(\frac{(b(m+e_2))^2 + \mu^2 + [b(m+e_2) - \mu]^2 - 4a(m+e_2) - 2\mu b(m+e_2)}{4(m+e_2)^2} \right) \\
 &\quad + \left(\frac{2(b(m+e_2) - \mu)\sqrt{[b(m+e_2) - \mu]^2 - 4a(m+e_2)}}{4(m+e_2)^2} \right) \\
 &= \frac{4a(m+e_2)^2 - (b(m+e_2) - \mu)^2}{2(m+e_2)^2} + \frac{[b(m+e_2) - \mu]\sqrt{[b(m+e_2) - \mu]^2 - 4a(m+e_2)}}{2(m+e_2)^2}
 \end{aligned}$$

diasumsikan $a - x_2^2 < 0$ sehingga

$$\begin{aligned} & \frac{[\mu - b(m + e_2)]\sqrt{[b(m + e_2) - \mu]^2 - 4a(m + e_2)^2}}{2(m + e_2)^2} < \frac{[b(m + e_2) - \mu]^2 - 4a(m + e_2)^2}{2(m + e_2)^2} \\ & \left[[\mu - b(m + e_2)]\sqrt{[b(m + e_2) - \mu]^2 - 4a(m + e_2)^2} \right]^2 < [[b(m + e_2) - \mu]^2 - 4a(m + e_2)^2]^2 \\ & [\mu - b(m + e_2)]^2 [[b(m + e_2) - \mu]^2 - 4a(m + e_2)^2] < [b(m + e_2) - \mu]^4 + [4a(m + e_2)^2]^2 \\ & \quad - 2(4a(m + e_2)^2)([b(m + e_2) - \mu]^2) \\ & 4a(m + e_2)^2 [\mu - b(m + e_2)]^2 < [4a(m + e_2)^2]^2 \\ & [\mu - b(m + e_2)]^2 - [4a(m + e_2)^2] < 0 \end{aligned}$$

Hasil yang diperoleh bertentangan dengan syarat eksistensi titik kesetimbangan E_2 yaitu $D > 0$ sehingga asumsi dibatalkan. Dengan demikian $a - x_2^2 > 0$ sehingga $|J_{E_2}| > 0$.

Pada titik kesetimbangan E_3 berikut,

$$\begin{aligned}
 a - x_3^2 &= a - \left(\frac{b(m+e_2) - \mu + \sqrt{[b(m+e_2) - \mu]^2 - 4a(m+e_2)}}{2(m+e_2)} \right)^2 \\
 &= a - \left(\frac{(b(m+e_2))^2 + \mu^2 + [b(m+e_2) - \mu]^2 - 4a(m+e_2) - 2\mu b(m+e_2)}{4(m+e_2)^2} \right) \\
 &\quad - \left(\frac{2(b(m+e_2) - \mu)\sqrt{[b(m+e_2) - \mu]^2 - 4a(m+e_2)}}{4(m+e_2)^2} \right) \\
 &= \frac{4a(m+e_2)^2 - (b(m+e_2) - \mu)^2}{2(m+e_2)^2} - \frac{[b(m+e_2) - \mu]\sqrt{[b(m+e_2) - \mu]^2 - 4a(m+e_2)}}{2(m+e_2)^2}
 \end{aligned}$$

diasumsikan $a - x_3^2 > 0$ sehingga

$$\begin{aligned} \frac{4a(m+e_2)^2 - [b(m+e_2) - \mu]^2}{2(m+e_2)^2} &> \frac{[b(m+e_2) - \mu]\sqrt{[b(m+e_2) - \mu]^2 - 4a(m+e_2)^2}}{2(m+e_2)^2} \\ [4a(m+e_2)^2 - [b(m+e_2) - \mu]^2]^2 &> [\mu - b(m+e_2)]\sqrt{[b(m+e_2) - \mu]^2 - 4a(m+e_2)^2}]^2 \\ [b(m+e_2) - \mu]^4 + [4a(m+e_2)^2]^2 &> [\mu - b(m+e_2)]^2[[b(m+e_2) - \mu]^2 - 4a(m+e_2)^2] \\ -2(4a(m+e_2)^2)([b(m+e_2) - \mu]^2) & \\ [4a(m+e_2)^2]^2 > 4a(m+e_2)^2[\mu - b(m+e_2)]^2 & \\ 0 > [\mu - b(m+e_2)]^2 - [4a(m+e_2)^2] & \end{aligned}$$

Hasil yang diperoleh bertentangan dengan syarat eksistensi titik kesetimbangan E_3 yaitu $D > 0$ sehingga asumsi dibatalkan. Dengan demikian $a - x_3 < 0$ sehingga $|J_{E_3}| < 0$.