CS-ALJABAR DAN SIFAT-SIFATNYA

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Matematika

oleh:
IRMA KUMALA
155090400111026

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2019

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

CS-ALJABAR DAN SIFAT-SIFATNYA

oleh:
IRMA KUMALA
155090400111026

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Matematika

Pembimbing,

Dra. Ari Andari, M.S
NIP. 196105161987012001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si., M.Si., Ph.D.
NIP. 197509082000031003

LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	**: Irma Kumala**
NIM	**: 155090400111026**
Jurusan	**: Matematika**
Penulis Skripsi Berjudul	**: CS-aljabar dan Sifat-sifatnya**

dengan ini menyatakan sebagai berikut.

1. **Isi skripsi ini adalah benar-benar karya saya sendiri dan bukan hasil menjiplak karya orang lain. Karya-karya yang tercantum dalam daftar pustaka skripsi ini semata-mata digunakan sebagai acuan/referensi.**
2. **Apabila di kemudian hari diketahui bahwa isi skripsi saya merupakan hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung akibat hukum dari keadaan tersebut.**

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 24 Mei 2019

<u>Irma Kumala</u>
NIM. 155090400111026

CS-ALJABAR DAN SIFAT-SIFATNYA

ABSTRAK

Struktur aljabar merupakan suatu himpunan tak kosong yang dilengkapi satu atau lebih operasi biner dan memenuhi aksioma tertentu. Pembentukan suatu struktur aljabar baru ditentukan oleh pendefinisian aksioma pada suatu himpunan. Pada skripsi ini dibahas definisi, teorema dan proposisi yang menunjukkan sifat-sifat pada CS-aljabar. CS-aljabar adalah suatu struktur aljabar yang dilengkapi operasi biner " $\bullet$ " dan " $*$ " dan elemen khusus "e" yang dinotasikan $(X,\bullet,*,e)$ dan memenuhi beberapa aksioma, yaitu X terhadap operasi " $\bullet$ " merupakan semigrup, terhadap operasi " $*$ " merupakan CI-aljabar, dan berlaku hukum distributif. Selanjutnya jika CS-aljabar memenuhi satu aksioma tambahan yaitu $x * y = x \bullet y * y$, maka disebut *near* CS-aljabar.

Kata kunci: *CI-aljabar, CS-aljabar, near CS-aljabar.*

CS-ALGEBRAS AND ITS PROPERTIES

ABSTRACT

Algebraic structure is a non-empty set with one or more binary operations and satisfies certain axioms. The formation of a new algebraic structure is determined by defining the axioms in a set. In this final project discussed definitions, theorems and propositions of CS-algebra. CS-algebra is an algebraic structure with binary operations "$\bullet$" and "$*$" and special elements "e" that satisfying some axioms, denoted by $(X,\bullet,*,e)$. X is said to be CS-algebra if the operation "$*$" is CI-algebra, for the operation "$\bullet$" is a semigroup, and applies distributive law. Furthermore, if CS-algebra satisfies an additional axiom $x * y = x \bullet y * y$, it is called *near* CS-algebra.

Keywords: *CI-algebra, CS- algebra, near CS- algebra.*

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadirat Allah SWT atas berkat dan rahmat-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul **“CS-aljabar dan Sifat-sifatnya”** sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana pada Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam , Universitas Brawijaya.

Penulisan skripsi ini tidak dapat diselesaikan dengan baik, tanpa bantuan, bimbingan, dan motivasi dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Zuraidah Fitriah, S.Si., M.Si selaku dosen pembimbing akademik atas dukungan, motivasi, dan saran yang membangun selama penulis menempuh perkuliahan awal hingga akhir semester.
2. Dra. Ari Andari, M.S selaku dosen pembimbing skripsi atas waktu, bimbingan, motivasi, saran, dan kesabaran yang luar biasa dalam membimbing penulis untuk menyusun dan menyelesaikan skripsi ini.
3. Dr. Noor Hidayat, M.Si dan Drs. Abdul Rouf Alghofari, M.Sc., Ph.D selaku dosen penguji atas bimbingan dan saran yang diberikan untuk perbaikan skripsi ini.
4. Seluruh dosen, staff, dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Brawijaya atas segala bantuannya.
5. Bapak, Ibuk, Nenek, Adik, dan seluruh keluarga atas dukungan, doa, nasihat, dan motivasi yang diberikan kepada penulis selama proses menyelesaikan skripsi.
6. Nyna Cipta, Rifka Anisa, Wahyu Khumairoh, Putri Balqis, Mukhamad Afif, Ilham Alifuddin atas motivasi, dan dukungan dalam penulisan skripsi ini, juga atas kebersamaan dalam menjalani perkuliahan dan seterusnya.
7. Keluarga besar Matematika 2015 yang telah memberikan dukungan, doa, dan semangat dalam penyusunan skripsi ini.
8. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu persatu atas segala dukungan dan bantuannya.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih terdapat banyak kekurangan. Oleh karena itu kritik dan saran yang membangun sangat penulis harapkan. Kritik dan saran dapat dikirim melalui email irmaakumala@gmail.com untuk perbaikan dimasa yang akan datang. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak yang membutuhkan, khususnya mahasiswa Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Brawijaya.

Malang, 24 Mei 2019

Penulis

DAFTAR ISI

Halaman

HALAMAN JUDUL i
LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI iii
LEMBAR PERNYATAAN.. v
ABSTRAK vii
ABSTRACT ix
KATA PENGANTAR.. xi
DAFTAR ISI xiii
DAFTAR SIMBOL.. xv
DAFTAR TABEL xvii
BAB I PENDAHULUAN ....**Error! Bookmark not defined.**
1.1 Latar Belakang ....**Error! Bookmark not defined.**
1.2 Rumusan Masalah ....**Error! Bookmark not defined.**
1.3 Tujuan..............................**Error! Bookmark not defined.**
BAB II DASAR TEORI.................**Error! Bookmark not defined.**
2.1 Relasi, Pemetaan, dan Operasi Biner..... **Error! Bookmark not defined.**
2.2 *Partial Order* dan Himpunan Terbatas.. **Error! Bookmark not defined.**
2.3 Semigrup, Grup, dan Ring **Error! Bookmark not defined.**
2.4 CI-aljabar ....**Error! Bookmark not defined.**
BAB III PEMBAHASAN..............**Error! Bookmark not defined.**
3.1 CS-aljabar ....**Error! Bookmark not defined.**
3.2 *Near* CS-aljabar................**Error! Bookmark not defined.**
BAB IV PENUTUP........................**Error! Bookmark not defined.**
Kesimpulan.................................**Error! Bookmark not defined.**
DAFTAR PUSTAKA.....................**Error! Bookmark not defined.**

DAFTAR SIMBOL

$\mathbb{R}$	: Himpunan bilangan real.
$\mathbb{Z}$	: Himpunan bilangan bulat.
$\mathbb{N}$	: Himpunan bilangan asli.
$M_2(\mathbb{Z}_2)$	: Himpunan matriks bilangan bulat 2x2.
$\bullet$	: Sebarang operasi biner.
$*$	: Sebarang operasi biner.
$+$	: Operasi penjumlahan biasa.
$-$	: Operasi pengurangan biasa.
$\cap$	: Irisan Himpunan.
$\leq$	: Relasi kurang dari sama dengan.
$\vee$	: *Join* atau batas atas terkecil.
$\wedge$	: *Meet* atau batas bawah terbesar.
$\subseteq$	: Subset atau himpunan bagian.
$\in$	: Elemen atau anggota dari himpunan.
$\forall$	: Untuk setiap.
$\exists$	: Terdapat.
$\blacksquare$	: Akhir dari pembuktian.

DAFTAR TABEL

Halaman

Tabel 2.1 Operasi " $*$ " pada X 8
Tabel 2.2 Hasil operasi " $*$ " pada x, y, z di X 9
Tabel 2.3 Hasil operasi " $*$ " pada x, y, z di X 11
Tabel 3.1 Operasi " $*$ " pada X 17
Tabel 3.2 Operasi " $\bullet$ " pada X 17
Tabel 3.3 Hasil operasi " $*$ " pada X 19
Tabel 3.4 Hasil operasi " $\bullet$ " pada X 20
Tabel 3.5 Hasil operasi " $\bullet$ " pada x dan a di A 29
Tabel 3.6 Hasil operasi " $\bullet$ " pada x dan a di B 29
Tabel 3.7 Hasil operasi " $\bullet$ " pada x dan y di $A(X)$ 32
Tabel 3.8 Hasil operasi " $\bullet$ " pada x dan y di $G(X)$ 32
Tabel 3.9 Hasil operasi " $\bullet$ " pada x dan a di F 33
Tabel 3.10 Hasil operasi " $\bullet$ " dan " $*$ " pada x dan y 34
Tabel 3.11 Hasil operasi " $\bullet$ " pada x dan y 35
Tabel 3.12 Hasil operasi " $\bullet$ " dan " $*$ " pada x dan y 36
Tabel 3.13 Hasil operasi " $\bullet$ " dan " $*$ " pada x dan y 40
Tabel 3.14 Hasil operasi " $\bullet$ " dan " $*$ " pada x dan y 41
Tabel 3.15 Hasil operasi syarat *near* CS-aljabar pada X.... 42
Tabel 3.16 Syarat elemen *unit divisor* pada X.................. 47

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika menjadi ilmu yang semakin berkembang pesat setiap harinya dengan sebagian besar kekuatan berasal dari keabstrakannya. Aljabar adalah salah satu cabang ilmu matematika yang mempelajari konsep logika, sistem bilangan, matriks, ruang vektor, dan matematika abstrak.

Dalam matematika abstrak dikenal istilah struktur aljabar, yaitu suatu sistem matematika yang dibangun dari himpunan tak kosong yang dilengkapi satu atau lebih operasi biner dan memenuhi aksioma tertentu. Aksioma merupakan bagian yang penting dalam pengembangan struktur aljabar karena menjadi bagian yang membedakan suatu struktur aljabar satu dengan yang lain.

Pembentukan struktur aljabar baru ditentukan oleh pendefinisian aksioma pada suatu himpunan. Berdasarkan pendefinisian itu, banyak struktur aljabar yang dihasilkan melalui penelitian oleh para ahli, seperti pada tahun 1966, Imai dan Iseki memperkenalkan dua kelas dari aljabar abstrak yaitu BCK-aljabar dan BCI aljabar dengan BCK-aljabar merupakan kelas bagian dari BCI-aljabar. Selanjutnya Hu dan Li memperkenalkan kelas yang lebih luas pada aljabar abstrak pada tahun 1983, yaitu BCH-aljabar, sehingga BCI-aljabar merupakan kelas bagian dari BCH-aljabar. Pada tahun 2007, Kim dan Kim memperkenalkan gagasan mengenai BE-aljabar yang merupakan generasi dari BCK-aljabar.

Pada tahun 2009, Meng memperkenalkan definisi CI-aljabar yang merupakan generalisasi dari BE-aljabar. Kemudian pada tahun 2012 Kim membahas definisi, teorema, dan proposisi mengenai CS-aljabar yang selanjutnya pada skripsi ini, dengan menggunakan definisi CI-aljabar akan diulas kembali sifat-sifat, teorema, dan proposisi pada CS-aljabar.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dijelaskan, rumusan masalah pada skripsi ini adalah bagaimana sifat-sifat yang ada pada CS-aljabar?

1.3 Tujuan

Berdasarkan rumusan masalah tersebut, tujuan penulisan skripsi ini adalah membahas dan membuktikan sifat-sifat CS-aljabar.

BAB II
DASAR TEORI

Pada bab ini, diberikan definisi dan contoh terkait teori-teori yang digunakan untuk mempermudah pembahasan mengenai CS-aljabar.

2.1 Relasi, Pemetaan, dan Operasi Biner

Operasi biner merupakan istilah penting dan erat kaitannya dengan struktur aljabar yang digunakan dalam membangun struktur matematika seperti grup, ring, dan lain-lain. Hal yang paling penting dalam operasi biner adalah hasil operasi dari dua elemen dalam suatu himpunan juga harus merupakan elemen dalam himpunan itu sendiri. Oleh karena itu, diberikan definisi operasi biner yang sebelumnya diberikan terlebih dahulu definisi tentang hasil kali kartesius, relasi, fungsi atau pemetaan yang dikutip dari Hidayat (2017) dan Bhattacharya, dkk (1995).

Definisi 2.1.1 (Hasil kali Kartesius)
Misalkan A dan B masing-masing merupakan sebuah himpunan. Himpunan setiap pasangan terurut (x, y) dengan $x \in A$ dan $y \in B$, disebut hasil kartesius dari A dan B yang dinotasikan $A \times B$. Dengan $A \times B = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}$.

Contoh 2.1.2
Misal diberikan himpunan $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{3, 4, 5\}$, $B = \{8, 9\}$ dengan $A, B \subseteq U$. Hasil kali kartesius dari A dan B adalah $A \times B = \{(3, 8), (3, 9), (4, 8), (4, 9), (5, 8), (5, 9)\}$.

Definisi 2.1.3 (Relasi)
Misalkan A dan B sebuah himpunan, R merupakan himpunan bagian dari $A \times B$, R disebut relasi dari A ke B jika $(x, y) \in R$, selanjutnya x dikatakan berelasi R ke y dan ditulis sebagai xRy.

Contoh 2.1.4
Misalkan $A = \{x, y\}$ dan $B = \{4, 5, 6\}$ dengan suatu himpunan pasangan terurut $R = \{(x, 5), (y, 6)\}$. Akan ditunjukkan R merupakan relasi dari A ke B.

Penyelesaian:
Diketahui $A = \{x, y\}$ dan $B = \{4, 5, 6\}$ dengan
$A \times B = \{(x, 4), (x, 5), (x, 6), (y, 4), (y, 5), (y, 6)\}$ sehingga $R = \{(x, 5), (y, 6)\}$ adalah himpunan bagian dari $A \times B$. Sehingga terbukti bahwa R adalah relasi dari A ke B.

Definisi 2.1.5 (Pemetaan)
Misalkan A dan B merupakan suatu himpunan. Relasi f dari A ke B disebut pemetaan dari A ke B jika untuk setiap elemen x di A terdapat tepat satu elemen y di B sedemikian sehingga x berelasi f ke y. Jika f adalah pemetaan dari A ke B, dapat dituliskan

$$f : A \to B.$$

Misalkan $f : A \to B$, A disebut domain dan B disebut kodomain dari pemetaan f. Misalkan $x \in A$, jika y merupakan *image* dari x terhadap f, dapat dituliskan $f(x) = y$ dan dapat dikatakan bahwa f memetakan x ke y. Secara matematis ditulis,

$$f : A \to B$$
$$x \mapsto f(x) = y$$

dengan kata lain, relasi f dari A ke B merupakan pemetaan jika untuk setiap $x_1, x_2 \in A$ berlaku

$$x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2).$$

Contoh 2.1.6
Diberikan himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$. Didefinisikan suatu relasi f sebagai berikut:

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$x \mapsto f(x) = 2x.$$

Akan dibuktikan relasi f dari $\mathbb{N}$ ke $\mathbb{N}$ adalah suatu pemetaan.

Bukti:
Ambil sebarang $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga diperoleh

$$x_1 = x_2 \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2).$$

Sehingga $\forall x \in \mathbb{N}$ terdapat tepat satu $f(x) = 2x \in \mathbb{N}$. Terbukti f adalah pemetaan. ■

Definisi 2.1.7 (Operasi biner)
Suatu operasi biner "$*$" pada himpunan tak kosong H adalah pemetaan dengan domain $H \times H$ dan kodomain H, dimana

$$(a, b) \mapsto *(a, b) = a * b$$

untuk setiap $(a, b) \in H \times H$.
Atau dapat dituliskan sebagai berikut.

$$*: H \times H \to H$$
$$(a, b) \mapsto *(a, b) = a * b.$$

Contoh 2.1.8
Diberikan himpunan bilangan riil $\mathbb{R}$ dengan pemetaan yang didefinisikan sebagai berikut.

$$*: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$(a, b) \mapsto \cdot(a, b) = a \cdot b$$

Karena a dan b elemen di $\mathbb{R}$, $a \cdot b$ juga elemen di $\mathbb{R}$, sehingga operasi pergandaan di $\mathbb{R}$ merupakan operasi biner.

2.2 *Partial Order* dan Himpunan Terbatas

Dijelaskan definisi *partial order* dan batas suatu himpunan berdasarkan Roman (2008).

Definisi 2.2.1 (*Partial Order*)
Himpunan tak kosong P dengan relasi biner " $\leq$ " disebut *partial order* jika memenuhi kondisi berikut.

i) Refleksif, yaitu untuk setiap $x \in P$, berlaku $x \leq x$.
ii) Antisimetrik, yaitu untuk setiap $x, y \in P$ jika $x \leq y$ dan $y \leq x$ maka $x = y$.
iii) Transitif, yaitu untuk setiap $x, y, z \in P$, jika $x \leq y$ dan $y \leq z$ maka $x \leq z$.

Definisi 2.2.2 (Batas Atas dan Batas Bawah)
Misalkan $(P, \leq)$ himpunan *partial order* dan $S \subseteq P$.

1. $x \in P$ merupakan batas atas dari S jika memenuhi
$$s \leq x, \quad \forall s \in S.$$
Jika himpunan semua batas atas memiliki elemen terkecil, maka disebut *Join* atau batas atas terkecil pada S yang dinotasikan dengan $\vee$.

2. $x \in P$ merupakan batas bawah dari S jika memenuhi
$$x \leq s, \quad \forall s \in S.$$
Jika himpunan semua batas bawah memiliki elemen terbesar, maka disebut *Meet* atau batas bawah terbesar pada S yang dinotasikan dengan $\wedge$.

Contoh 2.2.3
Misalkan $E = \{-2, -1, 2, 5, 7, 9\} \subseteq \mathbb{Q}$.
E merupakan himpunan terbatas ke atas dengan batas atas $x \geq 9$ dan 9 merupakan batas atas terkecil pada E. Selanjutnya E terbatas ke bawah dengan batas bawah $x \leq -2$ dan -2 merupakan batas bawah terbesar di E.

2.3 Semigrup, Grup, dan Ring

Dijelaskan definisi semigrup, grup, dan juga ring berdasarkan Andari (2015).

Definisi 2.3.1 (Semigrup)
Suatu himpunan tak kosong S yang dilengkapi satu operasi biner $*$ yaitu $(S,*)$ disebut semigrup jika berlaku sifat:

i. tertutup, yaitu untuk setiap $a, b \in G$ berlaku
$$a * b \in G.$$
ii. assosiatif, yaitu untuk setiap $a, b, c \in G$ berlaku
$$(a * b) * c = a * (b * c).$$

Contoh 2.3.2
Diketahui himpunan $M_2(N) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, a, b, c, d \in N \right\}$. Akan ditunjukkan $(M_2(N), +)$ merupakan semigrup.
Bukti:
Ambil $A, B, C \in M_2(N)$. Misalkan
$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}.$$

i. Tertutup
$$A + B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix} \in M_2(N).$$
ii. Assosiatif
$$\begin{aligned}(A + B) + C &= \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} \\
&= \left(\begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} \\
&= \left(\begin{bmatrix} (a+e)+i & (b+f)+j \\ (c+g)+k & (d+h)+l \end{bmatrix} \right) \\
&= \left(\begin{bmatrix} a+(e+i) & b+(f+j) \\ c+(g+k) & d+(h+l) \end{bmatrix} \right) \\
&= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} e+i & f+j \\ g+k & h+l \end{bmatrix} \right) \\
&= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} \right) \\
&= A + (B + C).\end{aligned}$$

Dari i) dan ii) terbukti bahwa $(M_2(N), +)$ merupakan semigrup. ■

Definisi 2.3.3 (Grup)
Misalkan G adalah himpunan tidak kosong. $(G,*)$ disebut Grup jika memenuhi:

i. tertutup, yaitu untuk setiap $a, b \in G$ berlaku
$$a * b \in G.$$
ii. assosiatif, yaitu untuk setiap $a, b, c \in G$ berlaku
$$(a * b) * c = a * (b * c).$$
iii. Mempunyai elemen satuan / identitas.
$$(\exists e \in G)(\forall a \in G), e * a = a * e = a.$$
iv. Setiap elemen mempunyai invers
$$(\exists a^{-1} \in G), a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$$

Jika ditambah berlaku hukum komutatif, yaitu

v. Komutatif
$$\forall a, b \in G, a * b = b * a.$$

Maka $(G,*)$ disebut Grup Komutatif.

Contoh 2.3.4
Selidiki apakah $D = \{0,2\} \subseteq \mathbb{Z}_4$ terhadap operasi $" + "$ penjumlahan biasa merupakan grup.

Penyelesaian:

1. Tertutup
   $\forall a, b \in D$ berlaku $a + b \in D$ sehingga tertutup dipenuhi.
2. Assosiatif
   $$\forall a, b, c \in D \text{ berlaku } (a + b) + c = a + (b + c).$$
   Sehingga assosiatif dipenuhi.
3. Memiliki elemen identitas yaitu $\bar{0}$ karena
   $$(\forall a \in D) \text{ berlaku } \bar{0} + a = a + \bar{0} = a.$$
4. Memiliki invers untuk masing-masing elemen di D.
   $$\text{Invers } \bar{0} \text{ adalah } \bar{0}$$
   $$\text{Invers } \bar{2} \text{ adalah } \bar{2}.$$

Berdasarkan 1, 2, 3, 4 terbukti bahwa $(D, +)$ merupakan grup. ■

Contoh 2.3.5

Selidiki apakah $\mathbb{Z}_6$ terhadap operasi penjumlahan biasa merupakan grup komutatif.

Penyelesaian:

1. Tertutup
   $\forall a, b \in \mathbb{Z}_6$ berlaku $a + b \in \mathbb{Z}_6$ sehingga tertutup dipenuhi.
2. Assosiatif
   $$\forall a, b, c \in \mathbb{Z}_6 \text{ berlaku } (a + b) + c = a + (b + c).$$
   Sehingga assosiatif dipenuhi.
3. Memiliki elemen identitas yaitu $\bar{0}$ sehingga
   $$(\forall a \in \mathbb{Z}_6) \text{ berlaku } \bar{0} + a = a + \bar{0} = a.$$
4. Memiliki invers untuk masing-masing elemen di D.
   Invers $\bar{0}$ adalah $\bar{0}$
   Invers $\bar{1}$ adalah $\bar{5}$
   Invers $\bar{2}$ adalah $\bar{4}$
   Invers $\bar{3}$ adalah $\bar{3}$
   Invers $\bar{4}$ adalah $\bar{2}$
   Invers $\bar{5}$ adalah $\bar{1}$
5. Komutatif
   $$\forall a, b \in \mathbb{Z}_6 \text{ berlaku } a + b = b + a.$$

Berdasarkan 1, 2, 3, 4, 5, terbukti bahwa $\mathbb{Z}_6$ merupakan grup komutatif. ■

Definisi 2.3.6 (Ring)

Suatu himpunan tak kosong R dengan operasi penjumlahan dan perkalian merupakan ring jika memenuhi:

1. $(R, +)$ merupakan grup komutatif
2. Operasi perkalian di R bersifat assosiatif
   $$(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c), \forall a, b, c \in R.$$
3. Berlaku sifat distributif di R, yaitu

$a \bullet (b + c) = a \bullet b + a \bullet c$ dan $(a + b) \bullet c = a \bullet c + b \bullet c$, untuk setiap $a, b, c \in R$.

Contoh 2.3.7

Selidiki apakah $R = \{\bar{0}, \bar{3}\} \subseteq \mathbb{Z}_6$ terhadap operasi penjumlahan dan perkalian merupakan ring.

Penyelesaian:

1. Berdasarkan Contoh 2.3.5, dapat ditentukan bahwa $(R, +)$ merupakan grup komutatif

2. Operasi perkalian di R bersifat assosiatif,
   Ambil sebarang $a, b, c \in R$. Misal $a = \bar{3}, b = \bar{0}, c = \bar{3}$, sedemikian sehingga
   $$(\bar{3} \bullet \bar{0}) \bullet \bar{3} = \bar{0} \bullet \bar{3} = \bar{0}$$
   $$\bar{3} \bullet (\bar{0} \bullet \bar{3}) = \bar{3} \bullet \bar{0} = \bar{0}$$
   Dengan demikian terbukti $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$, untuk setiap $a, b, c \in R$.

3. Berlaku sifat distributif di R,
   Ambil sebarang $a, b, c \in R$. Misal $a = \bar{3}, b = \bar{0}, c = \bar{3}$, sedemikian sehingga
   $$a \bullet (b + c) = \bar{3} \bullet (\bar{0} + \bar{3}) = \bar{3} \bullet \bar{3} = \bar{0}$$
   $$a \bullet b + a \bullet c = \bar{3} \bullet \bar{0} + \bar{3} \bullet \bar{3} = \bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$$
   dan
   $$(a + b) \bullet c = (\bar{3} + \bar{0}) \bullet \bar{3} = \bar{3} \bullet \bar{3} = \bar{3}$$
   $$a \bullet c + b \bullet c = \bar{3} \bullet \bar{3} + \bar{0} \bullet \bar{3} = \bar{3} + \bar{0} = \bar{3}$$
   Dengan demikian terbukti $a \bullet (b + c) = a \bullet b + a \bullet c$ dan $(a + b) \bullet c = a \bullet c + b \bullet c$, untuk setiap $a, b, c \in R$.

Berdasarkan 1, 2, 3 terbukti bahwa $R = \{\bar{0}, \bar{3}\} \subseteq \mathbb{Z}_6$ terhadap operasi penjumlahan dan perkalian merupakan ring. ■

2.4 CI-aljabar

Pada subbab ini diberikan definisi, lemma, dan teorema yang mendukung gagasan mengenai CI-aljabar.

Definisi 2.4.1 (CI-aljabar)
Himpunan X dengan sebuah operasi biner $" * "$ dan elemen e dinotasikan $(X, *, e)$ disebut CI-aljabar jika memenuhi sifat berikut.
Untuk setiap $x, y, z \in X$

i) $x * x = e, \quad \forall x \in X,$

ii) $e * x = x, \quad \forall x \in X,$

iii) $x * (y * z) = y * (x * z), \quad \forall x, y, z \in X.$

Untuk beberapa pembahasan selanjutnya, diperkenalkan relasi $" \leq "$ sebagai berikut:

$$x \leq y \text{ berarti } x * y = e.$$

Didefinisikan sifat – sifat berikut pada CI-aljabar $(X, *, e)$.

i) $y * ((y * x) * x) = e.$

ii) $(x * e) * (y * e) = (x * y) * e.$

Contoh 2.4.2
Misal $X = \{1, a, b, c\}$ dengan operasi $" * "$ yang didefinisikan sebagai berikut.

Tabel 2.1 Operasi $" * "$ pada X.

$*$	1	a	b	c
1	1	a	b	c
a	1	1	b	c
b	1	a	1	c
c	1	1	1	1

Akan ditunjukkan bahwa $(X,*)$ merupakan CI-aljabar.

Bukti:

i) $x * x = e, \quad \forall x \in X,$

Menurut tabel 2.1, dapat dilihat bahwa:

$$1 * 1 = 1$$
$$a * a = 1$$

$$b * b = 1$$
$$c * c = 1$$

Sehingga pernyataan $x * x = 1$ dipenuhi.

ii) $e * x = x, \qquad \forall x \in X,$

Menurut tabel 2.1, dapat dilihat bahwa:

$$1 * 1 = 1$$
$$1 * a = a$$
$$1 * b = b$$
$$1 * c = c$$

Sehingga pernyataan $1 * x = x$ dipenuhi.

iii) $x * (y * z) = y * (x * z), \forall x, y, z \in X.$

Tabel 2.2 Hasil operasi " $*$ " pada x, y, z di X.

x	y	z	$x * (y * z)$	$y * (x * z)$
1	1	1	1	1
		a	a	a
		b	b	b
		c	c	c
	a	1	1	1
		a	1	1
		b	b	b
		c	c	c
	b	1	1	1
		a	a	a
		b	1	1
		c	c	c
	c	1	1	1
		a	1	1
		b	1	1
		c	1	1
a	1	1	1	1
		a	1	1
		b	b	b
		c	c	c
	a	1	1	1

		a	1	1
		b	b	b
		c	c	c
	b	1	1	1
		a	1	1
		b	1	1
		c	c	c
	c	1	1	1
		a	1	1
		b	1	1
		c	1	1
b	1	1	1	1
		a	a	a
		b	1	1
		c	c	c
	a	1	1	1
		a	1	1
		b	1	1
		c	c	c
	b	1	1	1
		a	a	a
		b	1	1
		c	c	c
	c	1	1	1
		a	1	1
		b	1	1
		c	1	1
c	1	1	1	1
		a	1	1
		b	1	1
		c	1	1
	a	1	1	1
		a	1	1
		b	1	1
		c	1	1
	b	1	1	1

		a	1	1
		b	1	1
		c	1	1
	c	1	1	1
		a	1	1
		b	1	1
		c	1	1

Berdasarkan Tabel 2.2, pernyataan iii) dipenuhi
Karena i), ii), iii) dipenuhi maka terbukti bahwa $(X,*)$ merupakan CI-aljabar. ■

Contoh 2.4.3
Berdasarkan Contoh 2.3.4 akan dibuktikan $(D,+)$ merupakan CI-aljabar.

Penyelesaian:

1. $x + x = \bar{0}$,

$$\bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$$
$$\bar{2} + \bar{2} = \bar{0}$$

   Terbukti $\forall x \in X$ berlaku $x + x = \bar{0}$.

2. $\bar{0} + x = x$,

$$\bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$$
$$\bar{0} + \bar{2} = \bar{2}$$

   Terbukti $\forall x \in X$ berlaku $\bar{0} + x = x$.

3. $\forall x, y, z \in X$ berlaku $x + (y + z) = y + (x + z)$.

Berdasarkan 1, 2, 3 terbukti bahwa $(D,+)$ merupakan CI-aljabar. ■

Contoh 2.4.4
Berdasarkan Contoh 2.3.7 akan dibuktikan $R = \{0,3\} \subseteq \mathbb{Z}_6$ terhadap operasi penjumlahan biasa merupakan CI-aljabar.

Penyelesaian:

1. $x + x = \bar{0}$,

$$\bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$$
$$\bar{3} + \bar{3} = \bar{0}$$

Terbukti $\forall x \in X$ berlaku $x + x = \bar{0}$.

2. $\bar{0} + x = x$,

$$\bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$$
$$\bar{0} + \bar{3} = \bar{3}$$

Terbukti $\forall x \in X$ berlaku $\bar{0} + x = x$.

3. $\forall x, y, z \in X$ berlaku $x + (y + z) = y + (x + z)$.

Berdasarkan 1, 2, 3 terbukti bahwa $(R, +)$ merupakan CI-aljabar. ■

Definisi 2.4.5 *(Self-distributive)*

CI-aljabar (X,$*, e$) dikatakan *self-distributive* jika
$x * (y * z) = (x * y) * (x * z)$, untuk setiap $x, y, z \in X$.

Contoh 2.4.6

Dengan menggunakan Contoh 2.4.2 akan ditunjukkan CI-aljabar $(X,*\,,1)$ merupakan *self-distributive.*

Bukti:

Tabel 2.3 Hasil operasi " $*$ " pada x, y, z di X.

x	y	z	$x * (y * z)$	$(x * y) * (x * z)$
1	1	1	1	1
		a	a	a
		b	b	b
		c	c	c
	a	1	1	1
		a	1	1
		b	b	b
		c	c	c
	b	1	1	1
		a	a	a

		b	1	1
		c	c	c
	c	1	1	1
		a	1	1
		b	1	1
		c	1	1
a	1	1	1	1
		a	1	1
		b	b	b
		c	c	c
	a	1	1	1
		a	1	1
		b	b	b
		c	c	c
	b	1	1	1
		a	1	1
		b	1	1
		c	c	c
	c	1	1	1
		a	1	1
		b	1	1
		c	1	1
b	1	1	1	1
		a	a	a
		b	1	1
		c	c	c
	a	1	1	1
		a	1	1
		b	1	1
		c	c	c
	b	1	1	1
		a	a	a
		b	1	1
		c	c	c
	c	1	1	1
		a	1	1

		b	1	1
		c	1	1
c	1	1	1	1
		a	1	1
		b	1	1
		c	1	1
	a	1	1	1
		a	1	1
		b	1	1
		c	1	1
	b	1	1	1
		a	1	1
		b	1	1
		c	1	1
	c	1	1	1
		a	1	1
		b	1	1
		c	1	1

Berdasarkan Tabel 2.3 dapat disimpulkan bahwa definisi *self-distributive* dipenuhi. Sehingga terbukti CI-aljabar $(X,*)$ disebut *self-distributive.* ■

Definisi 2.4.7 (Subaljabar)
Sebuah himpunan bagian tidak kosong S dari CI-aljabar X dikatakan sebagai subaljabar dari X jika $x * y \in S$, $\forall x, y \in S$.

Contoh 2.4.8
Misalkan $X = \{1, a, b, c\}$ merupakan CI-aljabar. $S \subseteq X$ dengan $S = \{1, a, b\}$. Akan ditunjukkan S adalah subaljabar.

Penyelesaian:
Diketahui X adalah CI-aljabar. $S \subseteq X$, $S \neq \emptyset$ dengan $S = \{1, a, b\}$. Ambil $x = 1, y = b$ dengan $x, y \in S$. Berdasarkan Tabel 2.2 $x * y = 1 * b = b \in S$. Karena $x * y \in S$ untuk setiap $x, y \in S$ dipenuhi, maka terbukti S adalah subaljabar dari X. ■

Definisi 2.4.9 (Atom)
Misalkan $a \in X$ merupakan elemen dari CI-aljabar X. a dikatakan sebagai atom jika untuk setiap $x \in X$, $a * x = e$ mengakibatkan $a = x$. Himpunan semua atom di X dinotasikan $A(X)$ yang disebut *singular part* dari X.

Contoh 2.4.10
Berdasarkan Contoh 2.4.2 dan Tabel 2.1 akan ditentukan atom pada CI-aljabar $(X,*)$.

Penyelesaian:
$y \in X$ disebut atom jika untuk setiap $x \in X$, $y * x = 1$ mengakibatkan $y = x$.
Kalimat di atas bernilai salah jika syarat pertama dipenuhi dan syarat kedua tidak dipenuhi. Selain itu, kalimat di atas bernilai benar.
Akan ditentukan $y \in X$ yang memenuhi syarat atom.
Ambil $y = 1, y \in X$, sehingga

$$y * x = 1 \rightarrow y = x$$
$$1 * 1 = 1 \rightarrow 1 = 1$$
$$1 * a = a \rightarrow 1 \neq a$$
$$1 * b = b \rightarrow 1 \neq b$$
$$1 * c = c \rightarrow 1 \neq c$$

Dengan mengambil $y = 1, y \in X$ untuk setiap $x \in X$ terbukti kalimat bernilai benar dan syarat atom dipenuhi. Sehingga $y = 1$ merupakan atom di X.
Ambil $y = a, y \in X$, sehingga

$$y * x = 1 \rightarrow y = x$$
$$a * 1 = 1 \rightarrow a \neq 1$$

Dengan mengambil $y = a$ dan $x = 1$ pernyataan bernilai salah dan syarat atom tidak dipenuhi. Sehingga $y = a$ bukan merupakan atom di X.
Ambil $y = b, y \in X$, sehingga

$$y * x = 1 \rightarrow y = x$$
$$b * 1 = 1 \rightarrow b \neq 1$$

Dengan mengambil $y = b$ dan $x = 1$ pernyataan bernilai salah dan syarat atom tidak dipenuhi. Sehingga $y = b$ bukan merupakan atom di X.

Ambil $y = c, y \in X$, sehingga

$$y * x = 1 \rightarrow y = x$$
$$c * 1 = 1 \rightarrow c \neq 1$$

Dengan mengambil $y = c$ dan $x = 1$ pernyataan bernilai salah dan syarat atom tidak dipenuhi. Sehingga $y = c$ bukan merupakan atom di X.

Dengan demikian dapat ditentukan bahwa atom di X adalah $y = 1$ dan $A(X) = \{1\}$. ■

Definisi 2.4.11 (*G-part*)
Misalkan X adalah CI-aljabar. Didefinisikan
$G(X) = \{x \in X \mid x * e = x\}$, dengan $G(X)$ disebut *G-part* di X.

Contoh 2.4.12
Berdasarkan Contoh 2.4.2 akan ditentukan *G-part* di X.

Penyelesaian:
$G(X)$ disebut *G-part* di X dengan $x * 1 = x$. Berdasarkan Tabel 2.1, untuk setiap $x \in X$,

$$1 * 1 = 1$$
$$a * 1 = 1$$
$$b * 1 = 1$$
$$c * 1 = 1$$

sehingga dapat dilihat bahwa $x = 1$ yang memenuhi syarat *G-part*, maka $G(X) = \{1\}$. ■

BAB III
PEMBAHASAN

3.1 CS-aljabar

CS-aljabar merupakan aljabar abstrak dilengkapi dengan dua operasi biner " $\bullet$ " dan " $*$ " yang didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 3.1.1 (CS-aljabar)
Aljabar X dilengkapi dua operasi biner " $\bullet$ " dan " $*$ " yang dinotasikan $(X, \bullet, *, e)$ merupakan CS-aljabar jika memenuhi aksioma – aksioma berikut ini.

(1) $(X, \bullet)$ merupakan semigrup,
(2) $(X, *)$ merupakan CI-aljabar,
(3) $x \bullet (y * z) = x \bullet y * x \bullet z$ dan
$(x * y) \bullet z = x \bullet z * y \bullet z, \ \forall x, y, z \in X.$

Didefinisikan $x \vee y = (y * x) * x, \forall x, y \in X$ pada CS-aljabar dengan $\vee$ merupakan *join* atau batas atas terkecil di X.

Contoh 3.1.2
Misal $X = \{1, a, b, c\}$ dengan operasi " $*$ " dan " $\bullet$ " yang didefinisikan sebagai berikut.

Tabel 3.1 Operasi " $*$ " pada X.

$*$	1	a	b	c
1	1	a	b	c
a	1	1	b	c
b	1	a	1	c
c	1	1	1	1

Tabel 3.2 Operasi " $\bullet$ " pada X.

$\bullet$	1	a	b	c
1	1	1	1	1
a	1	1	1	1
b	1	1	1	b
c	1	1	b	c

Akan ditunjukkan bahwa $(X, \bullet, *, 1)$ merupakan CS-aljabar.

Penyelesaian:

(1) $(X,\bullet)$ merupakan semigrup.

i. Tertutup, berdasarkan Tabel 3.2 bahwa hasil operasi "$\bullet$" pada X merupakan elemen dari X itu sendiri. Sehingga sifat tertutup dipenuhi.

ii. Assosiatif
Ambil $x = 1, y = b, z = c$, dengan $x, y, z \in X$ maka berlaku

$$(x \bullet y) \bullet z = (1 \bullet b) \bullet c = 1 \bullet c = 1$$
$$x \bullet (y \bullet z) = 1 \bullet (b \bullet c) = 1 \bullet b = 1$$

Telihat bahwa $(x \bullet y) \bullet z = x \bullet (y \bullet z)$, sehingga sifat assosiatif dipenuhi. Dengan cara yang sama berlaku untuk setiap $x, y, z \in X$.

(2) $(X,*)$ merupakan CI-aljabar,

i. $x * x = e, \forall x \in X$,
Menurut Tabel 3.1

$$1 * 1 = 1$$
$$a * a = 1$$
$$b * b = 1$$
$$c * c = 1$$

Sehingga $x * x = 1, \forall x \in X$ dipenuhi.

ii. $e * x = x, \forall x \in X$,
Menurut Tabel 3.1

$$1 * 1 = 1$$
$$1 * a = a$$
$$1 * b = b$$
$$1 * c = c$$

Sehingga $1 * x = x, \forall x \in X$ dipenuhi.

iii. $x * (y * z) = y * (x * z), \forall x, y, z \in X$.
Ambil $x = 1, y = a, z = c$ dengan $x, y, z \in X$, maka berlaku

$$x * (y * z) = 1 * (a * c) = 1 * c = c$$
$$y * (x * z) = a * (1 * c) = a * c = c$$

Tebukti $x * (y * z) = y * (x * z)$. Dengan cara yang sama berlaku untuk setiap $x, y, z \in X$.

(3) $x \bullet (y * z) = x \bullet y * x \bullet z$ dan
$(x * y) \bullet z = x \bullet z * y \bullet z$, $\forall x, y, z \in X$.
Ambil $x = b, y = a, z = c$ dengan $x, y, z \in X$, maka berlaku

$$x \bullet (y * z) = b \bullet (a * c) = b \bullet c = b$$
$$x \bullet y * x \bullet z = b \bullet a * b \bullet c = 1 * b = b$$

Dan

$$(x * y) \bullet z = (b * a) \bullet c = a \bullet c = 1$$
$$x \bullet z * y \bullet z = b \bullet c * a \bullet c = b * 1 = 1$$

Terbukti bahwa $x \bullet (y * z) = x \bullet y * x \bullet z$ dan
$(x * y) \bullet z = x \bullet z * y \bullet z \ \forall x, y, z \in X$.

Berdasarkan (1), (2), (3) terbukti bahwa $(X, \bullet, *, 1)$ merupakan CS-aljabar. ■

Contoh 3.1.3
Misalkan $X = \{1, a, b, c\}$ terhadap operasi $" * "$ dan $" \bullet "$ didefinisikan sebagai berikut.

Tabel 3.3 Hasil Operasi $" * "$ pada X.

$*$	1	a	b	c
1	1	a	b	c
a	1	1	b	b
b	1	a	1	a
c	1	1	1	1

Tabel 3.4 Hasil Operasi " $\bullet$ " pada X.

$\bullet$	1	a	b	c
1	1	1	1	1
a	1	a	1	a
b	1	1	b	b
c	1	a	b	c

Akan ditunjukkan X merupakan CS-aljabar.

Penyelesaian:

(1) $(X,\bullet)$ merupakan semigrup.

i. Tertutup

Berdasarkan Tabel 3.4, hasil operasi " $\bullet$ " pada X merupakan elemen dari X itu sendiri. Sehingga sifat tertutup dipenuhi.

ii. Assosiatif

Ambil sebarang $x, y, z \in X$, misalkan $x = c, y = 1$, $z = b$, sedemikian sehingga

$$(x \bullet y) \bullet z = (c \bullet 1) \bullet b = 1 \bullet b = 1$$
$$x \bullet (y \bullet z) = c \bullet (1 \bullet b) = c \bullet 1 = 1$$

Terbukti bahwa $(x \bullet y) \bullet z = x \bullet (y \bullet z)$, sehingga sifat assosiatif dipenuhi dan dengan cara yang sama berlaku untuk setiap $x, y, z \in X$.

(2) $(X,*)$ merupakan CI-aljabar

i. $x * x = e, \forall x \in X,$

Berdasarkan Tabel 3.3

$$1 * 1 = 1$$
$$a * a = 1$$
$$b * b = 1$$
$$c * c = 1$$

Sehingga $x * x = 1, \forall x \in X$ dipenuhi.

ii. $e * x = x, \forall x \in X,$

Berdasarkan Tabel 3.3

$$1 * 1 = 1$$
$$1 * a = a$$
$$1 * b = b$$
$$1 * c = c$$

Sehingga $1 * x = x, \forall x \in X$ dipenuhi.

iii. $x * (y * z) = y * (x * z), \forall x, y, z \in X.$
Ambil sebarang $x, y, z \in X$, misalkan $x = 1, y = b,$ $z = c$, sedemikian sehingga

$$x * (y * z) = 1 * (b * c) = 1 * a = a$$
$$y * (x * z) = b * (1 * c) = b * c = a$$

Terbukti bahwa $x * (y * z) = y * (x * z)$ dan dengan cara yang sama berlaku untuk setiap $x, y, z \in X$.

(3) $x \bullet (y * z) = x \bullet y * x \bullet z$ dan
$(x * y) \bullet z = x \bullet z * y \bullet z$, $\forall x, y, z \in X.$
Ambil sebarang $x, y, z \in X$, misalkan $x = b, y = 1, z = c$, sedemikian sehingga

$$x \bullet (y * z) = b \bullet (1 * c) = b \bullet c = b$$
$$x \bullet y * x \bullet z = b \bullet 1 * b \bullet c = 1 * b = b$$

dan

$$(x * y) \bullet z = (b * 1) \bullet c = 1 \bullet c = 1$$
$$x \bullet z * y \bullet z = b \bullet c * 1 \bullet c = b * 1 = 1$$

Terbukti bahwa $x \bullet (y * z) = x \bullet y * x \bullet z$ dan
$(x * y) \bullet z = x \bullet z * y \bullet z \ \forall x, y, z \ \in X.$

Berdasarkan (1), (2), (3) terbukti bahwa X merupakan CS-aljabar.

Contoh 3.1.4

Diberikan himpunan matriks

$$M_2(\mathbb{Z}_2) = \begin{Bmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{Bmatrix}$$

Akan ditunjukkan $M_2(\mathbb{Z}_2)$ terhadap operasi perkalian dan penjumlahan biasa merupakan CS-aljabar.

Penyelesaian:

Ambil $X, Y, Z \in M_2(\mathbb{Z}_2)$ dengan $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(1) $(M_2\mathbb{Z}_2, \bullet)$ merupakan semigrup

i. Tertutup

$$X \bullet Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_2).$$

Dengan cara yang sama berlaku untuk setiap $X, Y \in M_2(\mathbb{Z}_2)$. Sehingga sifat tertutup dipenuhi.

ii. Assosiatif

$$\begin{aligned}(X \bullet Y) \bullet Z &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \bullet \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}X \bullet (Y \bullet Z) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \bullet \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Karena $(X \bullet Y) \bullet Z = X \bullet (Y \bullet Z)$, maka sifat assosiatif dipenuhi. Dengan cara yang sama berlaku untuk setiap $X, Y, Z \in M_2(\mathbb{Z}_2)$.

(2) $(M_2(\mathbb{Z}_2), +)$ merupakan CI-aljabar

i. $X + X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \forall X \in M_2(\mathbb{Z}_2).$

ii. $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + X = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} = X$, $\forall X \in M_2(\mathbb{Z}_2)$.

iii.
$$\begin{aligned} X + (Y + Z) &= \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)\\ &= \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y + (X + Z) &= \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)\\ &= \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh $X + (Y + Z) = Y + (X + Z)$. Dengan cara yang sama berlaku $\forall x, y, z \in M_2(\mathbb{Z}_2)$.

(3) $X \bullet (Y + Z) = X \bullet Y + X \bullet Z$

$$\begin{aligned} X \bullet (Y + Z) &= \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} \bullet \left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)\\ &= \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X \bullet Y + X \bullet Z &= \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

dan

$(X + Y) \bullet Z = X \bullet Z + Y \bullet Z$, $\forall X, Y, Z \in M_2(\mathbb{Z}_2)$.

$$(X + Y) \bullet Z = \left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right) \bullet \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X \bullet Z + Y \bullet Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sehingga $X \bullet (Y + Z) = X \bullet Y + X \bullet Z$ dan $(X + Y) \bullet Z = X \bullet Z + Y \bullet Z$ dipenuhi. Dengan cara yang sama berlaku untuk setiap $x, y, z \in M_2(\mathbb{Z}_2)$.

Berdasarkan (1), (2), (3) terbukti bahwa $(M_2(\mathbb{Z}_2), \bullet, +)$ merupakan CS-aljabar. ■

Contoh 3.1.5
Didefinisikan operasi " $\bullet$ " dan " $*$ " pada $\mathbb{Z}$ sebagai berikut.
(i) $a \bullet b = ab$
(ii) $a * b = b - a$.
Akan ditunjukkan bahwa $(\mathbb{Z}, \bullet, *, 0)$ merupakan CS-aljabar.

Penyelesaian:
(1) $(\mathbb{Z}, \bullet)$ merupakan semigrup.
i. Tertutup,
Diketahui operasi " $\bullet$ " yang didefinisikan sebagai berikut, $a \bullet b = ab \; \forall a, b \in \mathbb{Z}$. Karena $a, b \in \mathbb{Z}$ maka $a \bullet b = ab \in \mathbb{Z}$ sehingga sifat tertutup dipenuhi.

ii. Assosiatif
Diketahui operasi " $\bullet$ " yang didefinisikan sebagai berikut, $a \bullet b = ab \; \forall a, b \in \mathbb{Z}$. Sehingga berlaku

$$(a \bullet b) \bullet c = (ab) \bullet c = abc$$
$$a \bullet (b \bullet c) = a \bullet (bc) = abc$$

Terlihat bahwa $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$ $\forall a, b \in \mathbb{Z}$, sehingga sifat assosiatif dipenuhi.

(2) $(\mathbb{Z},*)$ merupakan CI-aljabar,

i. $x * x = 0, \forall x \in \mathbb{Z}$,
Diketahui operasi " $*$ " yang didefinisikan sebagai berikut, $a * b = b - a$.
Misal ambil sebarang $x \in \mathbb{Z}$, diperoleh

$$x * x = x - x = 0$$

Sehingga $x * x = 0, \forall x \in \mathbb{Z}$ dipenuhi.

ii. $0 * x = x, \forall x \in \mathbb{Z}$,
Diketahui operasi " $*$ " yang didefinisikan sebagai berikut, $a * b = b - a$.
Misal ambil sebarang $x \in \mathbb{Z}$, sehingga diperoleh

$$0 * x = x - 0 = x$$

Dengan demikian $0 * x = x, \forall x \in \mathbb{Z}$ dipenuhi.

iii. $x * (y * z) = y * (x * z), \forall x, y, z \in X$.
Diketahui operasi " $*$ " yang didefinisikan sebagai berikut, $a * b = b - a$. Misal ambil sebarang $x, y, z \in \mathbb{Z}$, sehingga diperoleh

$$x * (y * z) = x * (z - y) = z - y - x$$
$$y * (x * z) = y * (z - x) = z - x - y$$

Terbukti $x * (y * z) = y * (x * z)$.

(3) $x \bullet (y * z) = x \bullet y * x \bullet z$ dan
$(x * y) \bullet z = x \bullet z * y \cdot z$, $\forall x, y, z \in X$.
Diketahui operasi " $\bullet$ " dan " $*$ " yang didefinisikan sebagai $a \bullet b = ab$ dan $a * b = b - a$. Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} x \bullet (y * z) &= x \bullet (z - y) \\ &= x \bullet z - x \bullet y \\ &= x \bullet y * x \bullet z \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} (x * y) \bullet z &= (y - x) \bullet z \\ &= y \bullet z - x \bullet z \\ &= x \bullet z * y \bullet z \end{aligned}$$

Dapat ditunjukkan bahwa $x \bullet (y * z) = x \bullet y * x \bullet z$ dan $(x * y) \bullet z = x \bullet z * y \bullet z$ dipenuhi.

Berdasarkan (1), (2), (3) terbukti bahwa $(\mathbb{Z}, \bullet, *, 0)$ merupakan CS-aljabar. ■

Contoh 3.1.6
Berdasarkan Contoh 2.3.4 diketahui D terhadap operasi $+$ merupakan grup. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $(D, \bullet, +, \bar{0})$ merupakan CS-aljabar.

Penyelesaian:

1. $(D, \bullet)$ merupakan semigrup.
   i. Tertutup,
   Diketahui operasi "$\bullet$" yang didefinisikan sebagai perkalian biasa pada D. Ambil sebarang $x, y \in D$ sedemikian sehingga berlaku $x \bullet y \in D, \forall x, y \in D$ Sifat tertutup dipenuhi.

   ii. Assosiatif
   Diketahui operasi "$\bullet$" yang didefinisikan sebagai perkalian biasa pada D. Sehingga berlaku
   $$(x \bullet y) \bullet z = (xy) \bullet z = xyz$$
   $$x \bullet (y \bullet z) = x \bullet (yz) = xyz$$
   Terlihat bahwa $(x \bullet y) \bullet z = x \bullet (y \bullet z)$, $\forall x, y, z \in D$, sehingga sifat assosiatif dipenuhi.

2. $(D, +)$ merupakan CI-aljabar.
   Berdasarkan Contoh 2.4.3 telah dibuktikan sebelumnya bahwa $(D, +)$ merupakan CI-aljabar.

3. Untuk setiap $x, y, z \in D$, berlaku $x \bullet (y + z) = x \bullet y + x \bullet z$ dan $(x + y) \bullet z = x \bullet z + y \bullet z$.

Sehingga terbukti $(D, \bullet, +, \bar{0})$ merupakan CS-aljabar. ■

Contoh 3.1.7

Berdasarkan Contoh 2.3.7 diketahui $R = \{0.3\}$ terhadap operasi penjumlahan biasa merupakan ring. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $(R, \bullet, +, \bar{0})$ merupakan CS-aljabar.

Penyelesaian:

1. $(R, \bullet)$ merupakan semigrup.
   i. Tertutup,
   Diketahui operasi " $\bullet$ " yang didefinisikan sebagai perkalian biasa pada R . Ambil sebarang $x, y \in R$ sedemikian sehingga berlaku $x \bullet y \in R, \forall x, y \in R$. Sifat tertutup dipenuhi.

   ii. Assosiatif
   Diketahui operasi " $\bullet$ " yang didefinisikan sebagai perkalian biasa pada R. Sehingga berlaku
   $$(x \bullet y) \bullet z = (xy) \bullet z = xyz$$
   $$x \bullet (y \bullet z) = x \bullet (yz) = xyz$$
   Terlihat bahwa $(x \bullet y) \bullet z = x \bullet (y \bullet z)$, $\forall x, y, z \in R$, sehingga sifat assosiatif dipenuhi.

2. $(R, +)$ merupakan CI-aljabar.
   Berdasarkan Contoh 2.4.4 telah dibuktikan sebelumnya bahwa $(R, +)$ merupakan CI-aljabar.

3. Untuk setiap $x, y, z \in R$, berlaku $x \bullet (y + z) = x \bullet y + x \bullet z$ dan $(x + y) \bullet z = x \bullet z + y \bullet z$.

Sehingga terbukti $(R, \bullet, +, \bar{0})$ merupakan CS-aljabar. ■

Proposisi 3.1.8

Jika X adalah CS-aljabar, maka berlaku sifat-sifat sebagai berikut.

(1) $x \bullet e = e$ dan $e \bullet x = e$, $\forall x \in X$,

(2) Jika $x \leq y$ maka $a \bullet x \leq a \bullet y$ dan $x \bullet a \leq y \bullet a, \forall x, a \in X$,

(3) $x \bullet (y \vee z) = x \bullet y \vee x \bullet z$, $\forall x, y, z \in X$.

Bukti:

(1) Diketahui X adalah CS-aljabar. Akan dibuktikan $x \bullet e = e$ dan $e \bullet x = e,\ \forall x \in X$.

Berdasarkan Definisi 3.1.1 diperoleh,

$$\begin{aligned} x \bullet e &= x \bullet (x * x) \\ &= (x \bullet x) * (x \bullet x) \\ &= e \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} e \bullet x &= (x * x) \bullet x \\ &= (x \bullet x) * (x \bullet x) \\ &= e \end{aligned}$$

Dengan demikian terbukti jika X adalah CS-aljabar maka $x \bullet e = e$ dan $e \bullet x = e,\ \forall x \in X$.

(2) Diketahui X adalah CS-aljabar. Akan dibuktikan jika $x \leq y$ maka $a \bullet x \leq a \bullet y$ dan $x \bullet a \leq y \bullet a$ untuk setiap $x, y, a \in X$. Artinya $a \bullet x * a \bullet y = e$ dan $\bullet a * y \bullet a = e$.

Karena $x \leq y$ berarti $x * y = e$, diperoleh

$$\begin{aligned} x * y &= e \\ a \bullet (x * y) &= a \bullet e \\ (a \bullet x) * (a \bullet y) &= e \end{aligned}$$

Sehingga terbukti jika $x \leq y$ maka $a \bullet x \leq a \bullet y$

Selanjutnya karena $x \leq y$ berarti $x * y = e$, diperoleh

$$\begin{aligned} x * y &= e \\ (x * y) \bullet a &= e \bullet a \\ (x \bullet a) * (y \bullet a) &= e \end{aligned}$$

Sehingga terbukti jika $x \leq y$ maka $x \bullet a \leq y \bullet a$.

Dengan demikian terbukti jika $x \leq y$ maka $a \bullet x \leq a \bullet y$ dan $x \bullet a \leq y \bullet a, \forall x, y, a \in X$.

(3) $x \bullet (y \vee z) = x \bullet y \vee x \bullet z, \ \forall x, y, z \in X$
Didefinisikan $y \vee z = (z * y) * y$ sedemikian sehingga

$$\begin{aligned} x \bullet (y \vee z) &= x \bullet ((z * y) * y) \\ &= (x \bullet (z * y)) * (x \bullet y) \\ &= (x \bullet z * x \bullet y) * (x \bullet y) \\ &= x \bullet y \vee x \bullet z \end{aligned}$$

Berdasarkan (1), (2), (3) terbukti jika X adalah CS-aljabar, maka sifat-sifat pada Proposisi 3.1.8 berlaku. ■

Contoh 3.1.9
Berdasarkan Contoh 3.1.2, diketahui $X = \{1, a, b, c\}$ terhadap operasi "$\bullet$" dan "$*$" merupakan CS-aljabar. Akan dibuktikan sifat-sifat pada Proposisi 3.1.8 berlaku.

Penyelesaian:
(1) Berdasarkan Tabel 3.2 terbukti jika X adalah CS-aljabar maka berlaku $x \bullet 1 = 1$ dan $1 \bullet x = 1, \ \forall x \in X$.

(2) Jika $x \leq y$ maka $a \bullet x \leq a \bullet y$ dan $x \bullet a \leq y \bullet a$, $\forall x, y, a \in X$.
Ambil $a \in X$ dan $x, y \in X$ yang memenuhi $x \leq y$ berarti $x * y = 1$. Misalkan $x = c, y = b$.

$$\begin{aligned} x * y &= 1 \\ a \bullet (x * y) &= a \bullet 1 \\ (a \bullet x) * (a \bullet y) &= a \bullet 1 \\ (a \bullet c) * (a \bullet b) &= a \bullet 1 \\ 1 * 1 &= 1 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} x * y &= 1 \\ (x * y) \bullet a &= 1 \bullet a \\ (x \bullet a) * (y \bullet a) &= 1 \bullet a \\ (c \bullet a) * (b \bullet a) &= 1 \bullet a \\ 1 * 1 &= 1 \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama berlaku untuk setiap $x, y, a \in X$ yang memenuhi $x \leq y$ berarti $x * y = 1$.

(3) $x \bullet (\ y \vee z\ ) = x \bullet y \vee x \bullet z,\ \forall x, y, z \in X$
Didefinisikan $y \vee z = (z * y) * y$, ambil $x = 1, y = b, z = c$ $\forall x, y, z \in X$.

$$
\begin{aligned}
x \bullet (\ y \vee z\ ) &= x \bullet ((z * y) * y) \\
&= 1 \bullet ((c * b) * b) \\
&= 1 \bullet (1 * b) \\
&= 1 \bullet b \\
&= 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x \bullet y \vee x \bullet z &= 1 \bullet b \vee 1 \bullet c \\
&= 1 \vee 1 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Sehingga terbukti $x \bullet (\ y \vee z\ ) = x \bullet y \vee x \bullet z$ dan dengan cara yang sama berlaku untuk setiap $x, y, z \in X$.

Dengan demikian terbukti sifat-sifat pada Proposisi 3.1.8 berlaku. ∎

Definisi 3.1.10 (*Left (right) stable*)
Himpunan bagian tak kosong A dari CS-aljabar X disebut *left stable* jika $x \bullet a \in A$ dan *right stable* jika $a \bullet x \in A$, $\forall x \in X$ dan $\forall a \in A$. Dan disebut *stable* jika memenuhi keduanya, yaitu *Left* dan *right stable*.

Contoh 3.1.11
Berdasarkan Contoh 3.1.2, $X = \{1, a, b, c\}$ merupakan CS-aljabar. $A = \{1\}$ dan $B = \{1, c\}$, $A, B \subseteq X$. Akan ditunjukkan A dan B adalah *left* (*right*) *stable*.

Penyelesaian:
Akan dibuktikan $A = \{1\}$ dan $B = \{1, c\}$ merupakan *left* (*right*) *stable*.

Tabel 3.5 Hasil operasi " $\bullet$ " pada x dan a di A.

x	a	$x \bullet a \in A$	$a \bullet x \in A$
1	1	1	1
a	1	1	1
b	1	1	1
c	1	1	1

Tabel 3.6 Hasil operasi " $\bullet$ " pada x dan a di B.

x	a	$x \bullet a \in A$	$a \bullet x \in A$
1	1	1	1
	a	1	1
a	1	1	1
	a	1	1
b	1	1	1
	a	1	1
c	1	1	1
	a	1	1

Berdasarkan Tabel 3.5 dan Tabel 3.6 syarat *left* (*right*) *stable* dipenuhi sehingga terbukti bahwa A dan B adalah *left* (*right*) *stable*. ■

Contoh 3.1.12

Berdasarkan Contoh 3.1.5, $\mathbb{Z}$ merupakan CS-aljabar. Selanjutnya akan ditunjukkan himpunan bagian dari $\mathbb{Z}$ yang memenuhi *left* (*right*) *stable*.

Penyelesaian:

Misalkan $A = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$ merupakan himpunan bilangan genap. $A \subseteq \mathbb{Z}$, A merupakan CS-aljabar. Selanjutnya berdasarkan Definisi 3.1.10 akan ditunjukkan A memenuhi *left* (*right*) *stable*.
Ambil sebarang $x \in \mathbb{Z}, a \in A$. Misalkan $x = 5, a = -2$ sedemikian sehingga
$x \bullet a = 5 \bullet (-2) = -10 \in A$, syarat *left stable* dipenuhi dan
$a \bullet x = (-2) \bullet 5 = -10 \in A$, syarat *right stable* dipenuhi.

Dengan demikian terlihat bahwa $A = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$ merupakan *stable*.

Proposisi 3.1.13
Misalkan X adalah CS-aljabar. $a \in X$ adalah atom di X jika dan hanya jika memenuhi.

$$a = (a * x) * x, \text{ untuk setiap } x \in X.$$

Bukti:
Berdasarkan Definisi 2.4.9, a adalah atom jika $a \in X$, $a * x = e$ maka $a = x$.

($\Rightarrow$) Diketahui $a \in X$ adalah atom. Dibuktikan $a = (a * x) * x$, $\forall x \in X$.

$$a = x$$
$$a = e * x$$
$$a = (a * x) * x$$

($\Leftarrow$) Diketahui $a = (a * x) * x$ dan $a * x = e$. Dibuktikan $a \in X$ adalah atom $\forall x \in X$.

$$a = (a * x) * x$$
$$a = e * x$$
$$a = x$$

Dengan demikian terbukti bahwa a merupakan atom di X. ■

Contoh 3.1.14
Berdasarkan Contoh 3.1.2, akan ditunjukkan $a \in X$ adalah atom di X jika dan hanya jika memenuhi $a = (a * x) * x$, untuk setiap $x \in X$.

Penyelesaian:
Berdasarkan Definisi 2.4.9 dan Contoh 2.4.10 diperoleh $a = 1$,
$a \in X$ adalah atom di X. Berarti $a = x = 1$
Akan ditunjukkan $a = 1$ memenuhi $a = (a * x) * x$

$$\begin{aligned}(a * x) * x &= (1 * 1) * 1 \\ &= 1 * 1 \\ &= 1\end{aligned}$$

Dengan $a = 1$ diperoleh $(a * x) * x = 1$ sehingga $a \in X$ adalah atom di X maka $a = (a * x) * x$ dipenuhi. ■

Proposisi 3.1.15
Jika X adalah CS-aljabar, maka $A(X)$ dan $G(X)$ adalah *stable subsets* dari X.

Bukti:
Untuk setiap $x \in X$ dan $a \in A(X)$ berlaku.

$$\begin{aligned}(x \bullet a) * e &= x \bullet a * x \bullet e \\ &= x \bullet (a * e)\end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned}\big((x \bullet a) * e\big) * e &= \big(x \bullet (a * e)\big) * x \bullet e \\ &= x \bullet ((a * e) * e) \\ &= x \bullet a\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}e * (a \bullet x) &= e \bullet x * a \bullet x \\ &= (e * a) \bullet x\end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned}e * \big(e * (a \bullet x)\big) &= e \bullet x * ((e * a) \bullet x) \\ &= (e * (e * a)) \bullet x \\ &= a \bullet x.\end{aligned}$$

Dengan demikian $A(X)$ dikatakan *stable*.

Selanjutnya untuk setiap $x \in X$ dan $b \in G(X)$ berlaku.

$$\begin{aligned}(b \bullet x) * e &= b \bullet x * e \bullet x \\ &= (b * e) \bullet x \\ &= b \bullet x\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}(x \bullet b) * e &= x \bullet b * x \bullet e \\ &= x \bullet (b * e) \\ &= x \bullet b\end{aligned}$$

Sehingga $G(X)$ dikatakan *stable*. ■

Contoh 3.1.16
Berdasarkan Contoh 3.1.2, $X = \{1, a, b, c\}$ merupakan CS-aljabar. Akan ditunjukkan bahwa $A(X)$ dan $G(X)$ merupakan *stable subsets* dari X.

Penyelesaian:
Berdasarkan Contoh 2.4.10 dan Contoh 2.4.12 diperoleh
$A(X) = \{a \in X | a * x = e, a = x, \forall x \in X\} = \{1\}$
$G(X) = \{x \in X | x * e = x\} = \{1\}$

Berdasarkan Definisi 3.1.10, akan ditunjukkan $x \bullet y \in A(X)$ dan $y \bullet x \in A(X)$, $\forall x \in X$ dan $y \in A(X)$ sehingga $A(X)$ merupakan *stable subsets* dari X.

Tabel 3.7 Hasil operasi " • " pada x dan y di $A(X)$.

x	y	$x \bullet y$	$y \bullet x$
1	1	1	1
a		1	1
b		1	1
c		1	1

Terlihat pada Tabel 3.7 bahwa $x \bullet y \in A(X)$ dan $y \bullet x \in A(X)$, $\forall x \in X$ dan $y \in A(X)$ sehingga terbukti $A(X)$ *stable*.

Selanjutnya berdasarkan Definisi 3.1.10, akan ditunjukkan $x \bullet y \in G(X)$ dan $y \bullet x \in G(X)$, $\forall x \in X$ dan $y \in G(X)$ sehingga $G(X)$ merupakan *stable subsets* dari X.

Tabel 3.8 Hasil operasi " • " pada x dan y di $G(X)$.

x	y	$x \bullet y$	$y \bullet x$
1	1	1	1
a		1	1
b		1	1
c		1	1

Terlihat pada Tabel 3.8 bahwa $x \bullet y \in G(X)$ dan $y \bullet x \in G(X)$, $\forall x \in X$ dan $y \in G(X)$ sehingga terbukti $G(X)$ *stable*. ■

Definisi 3.1.17 (*Left* (*right*) *deductive system*)
Misalkan X adalah CS-aljabar. $F \subseteq X$, $F \neq \emptyset$. F disebut *left* (*right*) *deductive system* jika memenuhi aksioma-aksioma berikut.

(1) F merupakan *left* (*right*) *stable subsets* dari X.
(2) Untuk setiap $x, y \in X$, jika $x * y \in F$ dan $x \in F$ maka $y \in F$.

Contoh 3.1.18
Berdasarkan Contoh 3.1.2, misal $X = \{1, a, b, c\}$ dengan operasi " $*$ " dan " $\bullet$ " merupakan CS-aljabar. Akan ditunjukkan bahwa $F = \{1, a\}$ merupakan *deductive system* dari X.

Penyelesaian:
1. F merupakan *left* (*right*) *stable*,
Berdasarkan Tabel 3.2, untuk $x \in X$ dan $y \in A$ berlaku
Tabel 3.9 Hasil operasi " $\bullet$ " pada x dan y di F.

x	y	$x \bullet y \in F$	$y \bullet x \in F$
1	1	1	1
	a	1	1
a	1	1	1
	a	1	1
b	1	1	1
	a	1	1
c	1	1	1
	a	1	1

Pada Tabel 3.9 terlihat bahwa $x \bullet y \in F$ dan $y \bullet x \in F$. Sehingga terbukti F merupakan *left* (*right*) *stable*.

2. Ambil sebarang $x \in F$ yang memenuhi $x * y \in F$.
$x = 1 \in F$, $1 * y = 1 \in F$. Shg diperoleh $y = 1 \in F$
, $1 * y = a \in F$. Shg diperoleh $y = a \in F$
$x = a \in F$, $a * y = 1 \in F$. Shg diperoleh $y = 1$ dan $y = a \in F$.
Sehingga terbukti untuk setiap $x, y \in X$, $x * y \in F$ dan $x \in F$ maka $y \in F$.

Berdasarkan (1) dan (2), terbukti bahwa $F = \{1, a\}$ adalah *deductive system* dari X. ∎

Contoh 3.1.19

Berdasarkan Contoh 3.1.5 akan ditunjukkan $A = \{\dots, -2, 0, 2, \dots\}$, $A \subseteq \mathbb{Z}$ yang memenuhi *left* (*right*) *deductive system.*

Penyelesaian:

1. A merupakan *left* (*right*) *stable*,
   Berdasarkan Contoh 3.1.12, terlihat bahwa A merupakan *left* (*right*) *stable*.
2. Untuk setiap $x, y \in X$, jika $x * y \in F$ dan $x \in F$ maka $y \in F$.
   Missal ambil sebarang $x \in F$ yang memenuhi $x * y \in F$, maka diperoleh $y \in F$. Berlaku untuk setiap $x, y \in X$.

Definisi 3.1.20 (Subaljabar)

Misalkan X adalah CS-aljabar. $S \neq \emptyset$ adalah himpunan bagian dari X disebut subaljabar dari X jika $x * y \in S$ dan $x \bullet y \in S$ untuk setiap $x, y \in S$.

Contoh 3.1.21

Misalkan $X = \{1, a, b, c\}$ merupakan CS-aljabar. $S \subseteq X$dengan $S = \{1, b, c\}$. Akan ditunjukkan S adalah subaljabar.

Penyelesaian:

Diketahui X adalah CS-aljabar.$S \subseteq X$, $S \neq \emptyset$ dengan $S = \{1, b, c\}$. Berdasarkan Tabel 3.1 dan Tabel 3.2, diperoleh

Tabel 3.10 Hasil operasi " $\bullet$ " dan " $*$ " pada x dan y.

x	y	$x * y$	$x \bullet y$
1	1	1	1
	b	b	1
	c	c	1
b	1	1	1
	b	1	1
	c	c	b
c	1	1	1
	b	1	b
	c	1	c

Pada Tabel 3.10 terlihat bahwa $x * y \in S$ dan $x \bullet y \in S$ untuk setiap $x, y \in S$, sehingga terbukti S adalah subaljabar dari X. ■

Definisi 3.1.22 (Center)
Didefinisikan center dari CS-aljabar X, yang dinotasikan dengan

$$cent(X) = \{x \in X \mid y \bullet x = x \bullet y, \forall\, y \in X\}.$$

Contoh 3.1.23
Berdasarkan Contoh 3.1.2 akan ditunjukkan center pada CS-aljabar X.

Penyelesaian:

Tabel 3.11 Hasil operasi " $\bullet$ " pada x dan y.

y	x	$y \bullet x$	$x \bullet y$
1	1	1	1
	a	1	1
	b	1	1
	c	1	1
a	1	1	1
	a	1	1
	b	1	1
	c	1	1
b	1	1	1
	a	1	1
	b	1	1
	c	b	b
c	1	1	1
	a	1	1
	b	b	b
	c	c	c

Pada Tabel 3.11 terlihat bahwa $\forall y \in X$ dan $x \in X$ berlaku $y \bullet x = x \bullet y$, sehingga diperoleh $cent(X) = \{x \in X \mid y \bullet x = x \bullet y, \forall\, y \in X\} = \{1, a, b, c\}$. ■

Contoh 3.1.24

Berdasarkan Contoh 3.1.4 akan ditunjukan center dari himpunan matriks $M_2(\mathbb{Z}_2)$.

Penyelesaian:

Berdasarkan Definisi 3.1.22 akan ditentukan $X \in M_2(\mathbb{Z}_2)$ yang memenuhi $Y \bullet X = X \bullet Y$ untuk setiap $Y \in M_2(\mathbb{Z}_2)$.

Ambil sebarang $X \in M_2(\mathbb{Z}_2)$, misalkan $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Selanjutnya ambil sebarang $Y \in M_2(\mathbb{Z}_2)$, $Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sedemikian sehingga

$$Y \bullet X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$X \bullet Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Diperoleh $Y \bullet X = X \bullet Y$, berarti $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ merupakan center dari himpunan matriks $M_2(\mathbb{Z}_2)$. Dengan cara yang sama berlaku untuk setiap $X, Y \in M_2(\mathbb{Z}_2)$ sehingga diperoleh

$Cent\big(M_2(\mathbb{Z}_2)\big) = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$. ■

Teorema 3.1.25

Untuk setiap CS-aljabar X, $cent(X)$ adalah subaljabar dari X.

Bukti:

Berdasarkan Definisi 3.1.20 dan Definisi 3.1.22, untuk menunjukkan $cent(X)$ merupakan subaljabar dari X harus dibuktikan bahwa $x * y$ dan $x \bullet y \in cent(X)$, $\forall x, y \in cent(X)$.

Misalkan $\forall x, y \in cent(X), x \bullet a = a \bullet x$, $\forall a \in X$.

$$\begin{aligned}(x * y) \bullet a &= x \bullet a * y \bullet a \\ &= a \bullet x * a \bullet y \\ &= a \bullet (x * y)\end{aligned}$$

sehingga $x * y \in cent(X)$.

Selanjutnya misalkan $\forall x, y \in cent(X)$, $\forall a \in X$.

$$\begin{aligned}(x \bullet y) \bullet a &= x \bullet (y \bullet a) \\ &= x \bullet (a \bullet y) \\ &= (x \bullet a) \bullet y \\ &= (a \bullet x) \bullet y\end{aligned}$$

$$= a \bullet (x \bullet y)$$

sehingga $x \bullet y \in cent(X)$.
Dengan demikian terbukti bahwa untuk setiap CS-aljabar X, $cent(X)$ merupakan subaljabar dari X. ■

Contoh 3.1.26
Berdasarkan Contoh 3.1.23 akan ditunjukkan untuk setiap CS-aljabar X, $cent(X)$ merupakan subaljabar dari X.

Penyelesaian:
Berdasarkan Definisi 3.1.20 dan Definisi 3.1.22, untuk menunjukkan $cent(X)$ merupakan subaljabar dari X harus dibuktikan bahwa $x * y$ dan $x \bullet y \in cent(X), \forall x, y \in cent(X)$.
Berdasarkan Contoh 3.1.23 diketahui $cent(X) = \{1, a, b, c\}$, sehingga diperoleh

Tabel 3.12 Hasil operasi " $\bullet$ " dan " $*$ " pada x dan y.

x	y	$x \bullet y$	$x * y$
1	1	1	1
	a	1	a
	b	1	b
	c	1	c
a	1	1	1
	a	1	1
	b	1	b
	c	1	c
b	1	1	1
	a	1	a
	b	1	1
	c	b	c
c	1	1	1
	a	1	1
	b	b	1
	c	c	1

Pada Tabel 3.12 terlihat bahwa $x \bullet y \in cent(X)$ dan

$x * y \in cent(X)$, $\forall x, y \in cent(X)$ sehingga terbukti untuk setiap CS-aljabar X, $cent(X)$ merupakan subaljabar dari X. ■

Teorema 3.1.27
Misalkan X adalah CS-aljabar dan $a \in X$. Himpunan
$C(a) = \{x \in X \mid a \bullet x = x \bullet a\}$ adalah subaljabar, dan
$cent(X) = \bigcap_{a \in X} C(a)$.

Bukti:
Didefinisikan $cent(X) = \{x \in X \mid a \bullet x = x \bullet a, \forall\, a \in X\}$.
Diketahui $C(a) = \{x \in X \mid a \bullet x = x \bullet a\}$.
Misalkan $a_1, a_2, a_3, a_4 \in X$, diperoleh

$$C(a_1) = \{x \in X \mid a_1 \bullet x = x \bullet a_1\}$$
$$C(a_2) = \{x \in X \mid a_2 \bullet x = x \bullet a_2\}$$
$$C(a_3) = \{x \in X \mid a_3 \bullet x = x \bullet a_3\}$$
$$C(a_4) = \{x \in X \mid a_4 \bullet x = x \bullet a_4\}$$

maka $C(a_1) = C(a_2) = C(a_3) = C(a_4) = C(a)$ sehingga $C(a_1) \cap C(a_2) \cap C(a_3) \cap C(a_4) = \{x\} = C(a)$. Dengan demikian terbukti $cent(X) = \bigcap_{a \in X} C(a)$. ■

Contoh 3.1.28
$X = \{1, a, b, c\}$ merupakan CS-aljabar, berdasarkan Contoh 3.1.23 akan ditunjukkan $cent(X) = \bigcap_{y \in X} C(y)$ dengan $y \in X$.

Penyelesaian:
Berdasarkan Contoh 3.1.23 diperoleh $cent(X) = \{1, a, b, c\}$.
Berdasarkan Tabel 3.11, untuk setiap $y \in X$ berlaku
$C(y) = \{x \in X \mid y \bullet x = x \bullet y\}$. Sehingga

$$C(1) = \{x \in X \mid 1 \bullet x = x \bullet 1\} = \{1, a, b, c\}$$
$$C(a) = \{x \in X \mid a \bullet x = x \bullet a\} = \{1, a, b, c\}$$
$$C(b) = \{x \in X \mid b \bullet x = x \bullet b\} = \{1, a, b, c\}$$
$$C(c) = \{x \in X \mid c \bullet x = x \bullet c\} = \{1, a, b, c\}$$

Diperoleh $C(1) \cap C(a) \cap C(b) \cap C(c) = \{1, a, b, c\}$ dan berdasarkan Contoh 3.1.23, $cent(X) = \{1, a, b, c\}$.

Dengan demikian terbukti bahwa $cent(X) = \bigcap_{y \in X} C(y)$ untuk $y \in X$. ■

Lemma 3.1.29
Anggap F adalah *deductive system* dari CS-aljabar X dan $x \in F$. Jika $x \leq y$, maka $y \in F$.
Bukti:
Didefinisikan relasi " $\leq$ " dengan $x \leq y$ mengakibatkan
$x * y = 1 \in F$. Menurut definisi 3.1.17 (2)
$x * y \in F$ dan $x \in F$ maka $y \in F$. ■

Contoh 3.1.30
Berdasarkan Contoh 3.1.18 akan dibuktikan pada *deductive system* F dari CS-aljabar X dan $x \in F$ berlaku jika $x \leq y$, maka $y \in F$.

Penyelesaian:
Diketahui $F = \{1, a\}$ merupakan *deductive system* dari CS-aljabar X dan $x \in F$. Akan dibuktikan jika $x \leq y$, maka $y \in F$.

Ambil $x \in F$ yang memenuhi $x \leq y$ berarti $x * y = 1$
Untuk $x = 1$ diperoleh $y = 1 \in F$
$x = a$ diperoleh $y = 1$ dan $y = a$ dengan $1, a \in F$.

Dengan demikian terbukti pada *deductive system* F dari CS-aljabar X dan $x \in F$ berlaku jika $x \leq y$, maka $y \in F$. ■

Definisi 3.1.31 (*Deductive system* Tertutup)
Deductive system F dari CS-aljabar X dikatakan tertutup jika $x \in F$ maka $x * e \in F$.

Contoh 3.1.32
Menggunakan Contoh 3.1.18 akan ditunjukkan bahwa *deductive system* F tertutup.

Penyelesaian:
Deductive system F dari CS-aljabar X dikatakan tertutup jika $x \in F$ maka $x * 1 \in F$.

Untuk $x \in F$, berlaku

$$x = 1,\ \ 1 * 1 = 1 \in F$$
$$x = a,\ \ a * 1 = 1 \in F$$

sehingga terbukti bahwa *deductive system* F dikatakan tertutup. ■

Teorema 3.1.33

Deductive system dari CS-aljabar X adalah tertutup jika dan hanya jika merupakan subaljabar dari CS-aljabar X.

Bukti:

(⇒) Jika *deductive system* F dari CS-aljabar X adalah tertutup maka F merupakan subaljabar dari CS-aljabar X.

Anggap *deductive system* F dari CS-aljabar X tertutup dan $x, y \in F$.
Berdasarkan Definisi 3.1.31, *deductive system* F dari CS-aljabar X dikatakan tertutup jika $x \in F$ maka $x * e \in F$. Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} x * e &= x * (y * y) \\ &= (x * y) * y \end{aligned}$$

Karena $x, y \in F$ maka $x * y \in F$ dan dengan demikian F merupakan subaljabar dari CS-aljabar X.

(⇐) Jika F merupakan subaljabar dari CS-aljabar X maka *deductive system* F dari CS-aljabar X adalah tertutup.
Anggap F merupakan subaljabar dari CS-aljabar X,

$$x * y \in F$$
$$x * y = (e * x) * y$$

Karena $x * y \in F$, $x, y \in F$ sehingga $e * x \in F$ dan $e \in F$. Dengan demikian *deductive system* F dari CS-aljabar X adalah tertutup. ■

Contoh 3.1.34

Misalkan $X = \{1, a, b, c\}$ adalah CS-aljabar. Akan dibuktikan *Deductive system* F dari CS-aljabar X adalah tertutup jika dan hanya jika merupakan subaljabar dari CS-aljabar X.

Penyelesaian:

(⇒) Diketahui $X = \{1, a, b, c\}$ adalah CS-aljabar. Akan dibuktikan jika *deductive system* F dari CS-aljabar X adalah tertutup maka F merupakan subaljabar dari CS-aljabar X.

Berdasarkan Contoh 3.1.32, terbukti bahwa $F = \{1, a\}$ dikatakan tertutup. Selanjutnya akan dibuktikan $F = \{1, a\}$ merupakan subaljabar dari CS-aljabar X.

Tabel 3.13 Hasil operasi " $\bullet$ " dan " $*$ " pada x dan y.

x	y	$x * y$	$x \bullet y$
1	1	1	1
	a	a	1
a	1	1	1
	a	1	1

Dari Tabel 3.13 diperoleh $x * y \in F$ dan $x \bullet y \in F$ sehingga terbukti jika *deductive system* F dari CS-aljabar X adalah tertutup maka F merupakan subaljabar dari CS-aljabar X.

(⇐) Diketahui $X = \{1, a, b, c\}$ adalah CS-aljabar. Akan dibuktikan jika *deductive system* F merupakan subaljabar dari CS-aljabar X maka F tertutup.

Telah dibuktikan sebelumnya bahwa $F = \{1, a\}$ merupakan subaljabar dari CS-aljabar X. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $F = \{1, a\}$ tertutup, berdasarkan Definisi 3.1.31, $F = \{1, a\}$ tertutup jika $x \in F$ maka $x * 1 \in F$, sehingga

$$x = 1 \in F \rightarrow 1 * 1 = 1 \in F$$
$$x = a \in F \rightarrow a * 1 = 1 \in F$$

Dengan demikian terbukti jika *Deductive system* F merupakan subaljabar dari CS-aljabar X maka F tertutup. ■

3.2 *Near* CS-aljabar

Near CS-aljabar merupakan suatu CS-aljabar yang memenuhi suatu kondisi yang didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 3.2.1 (*Near* CS-aljabar)
Misalkan X adalah CS-aljabar, X disebut *near* CS-aljabar jika memenuhi,

$$x * y = x \bullet y * y, \ \forall\, x, y \ \in X.$$

Contoh 3.2.2
Berdasarkan Contoh 3.1.2, akan ditunjukkan bahwa $X = \{1, a, b, c\}$ terhadap operasi " $*$ " dan " $\bullet$ " merupakan *near* CS-aljabar.

Penyelesaian:
Berdasarkan Contoh 3.1.2 terbukti bahwa $X = \{1, a, b, c\}$ terhadap operasi " $*$ " dan " $\bullet$ " merupakan CS-aljabar. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $(X, \bullet, *)$ merupakan *near* CS-aljabar. Berdasarkan Definisi 3.2.1

Tabel 3.14 Hasil operasi " $\bullet$ " dan " $*$ " pada x dan y.

x	y	$x * y$	$x \bullet y * y$
1	1	1	1
	a	a	a
	b	b	b
	c	c	c
a	1	1	1
	a	1	a
	b	b	b
	c	c	c
b	1	1	1
	a	a	a
	b	1	b
	c	c	c
c	1	1	1
	a	1	a
	b	1	1
	c	1	1

Terlihat pada Tabel 3.14 bahwa $x * y \neq x \bullet y * y$. Sehingga $X = \{1, a, b, c\}$ merupakan CS-aljabar tapi bukan merupakan *near* CS-aljabar. ■

Contoh 3.2.3
Berdasarkan Contoh 3.1.3, akan ditunjukkan bahwa $X = \{1, a, b, c\}$ terhadap operasi " $*$ " dan " $\bullet$ " merupakan *near* CS-aljabar.

Penyelesaian:
Berdasarkan Contoh 3.1.3 terbukti bahwa $X = \{1, a, b, c\}$ terhadap operasi " $*$ " dan " $\bullet$ " merupakan CS-aljabar. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $(X, \bullet, *)$ merupakan *near* CS-aljabar. Berdasarkan Definisi 3.2.1

Tabel 3.15 Hasil Operasi syarat *near* CS-aljabar pada X.

x	y	$x * y$	$x \bullet y * y$
1	1	1	1
	a	a	a
	b	b	b
	c	c	c
a	1	1	1
	a	1	1
	b	b	b
	c	c	c
b	1	1	1
	a	a	a
	b	1	1
	c	a	a
c	1	1	1
	a	1	1
	b	1	1
	c	1	1

Terlihat pada Tabel 3.15 bahwa $x * y = x \bullet y * y, \forall\, x, y \in X$. Sehingga terbukti X adalah *near* CS-aljabar. ■

Proposisi 3.2.4
Jika X adalah *near* CS-aljabar, maka berlaku.
(1) $x \leq x \bullet y,\ \forall x, y \in X$,
(2) $x \leq y,\ x, y \in X$ jika dan hanya jika $x \bullet y \leq y$.

Bukti:
Didefinisikan relasi " $\leq$ ", jika $x \leq y$ maka $x * y = e$.
(1) Diketahui X adalah *near* CS-aljabar, akan dibuktikan $x \leq x \bullet y$ yang berarti $x * x \bullet y = e$.
Karena X adalah *near* CS-aljabar sehingga berlaku

$$\begin{aligned} x * x \bullet y &= x \bullet (x \bullet y) * x \bullet y \\ &= (x \bullet x) \bullet y * x \bullet y \\ &= ((x \bullet x) * x) \bullet y \\ &= (x * x) \bullet y \\ &= e \bullet y \\ &= e \end{aligned}$$

Diperoleh $x * x \bullet y = e$ berarti $x \leq x \bullet y$.
Sehingga terbukti jika X adalah *near* CS-aljabar, maka berlaku $x \leq x \bullet y,\ \forall x, y \in X$.

(2) Diketahui X adalah *near* CS-aljabar, akan dibuktikan $x \leq y$, $x, y \in X$ jika dan hanya jika $x \bullet y \leq y$.

($\Rightarrow$) Diketahui $x \leq y,\ x, y \in X$.
Akan dibuktikan $x \bullet y \leq y$, artinya $x \bullet y * y = e$
Karena X *near* CS-aljabar maka berlaku
$x * y = x \bullet y * y$ dan $x \leq y$ berarti $x * y = e$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} x * y &= x \bullet y * y \\ e &= x \bullet y * y \end{aligned}$$

Karena $e = x \bullet y * y$ berarti $x \bullet y \leq y$ sehingga terbukti jika $x \leq y,\ x, y \in X$ maka $x \bullet y \leq y$.

($\Leftarrow$) Diketahui $x \bullet y \leq y$ berarti $x \bullet y * y = e$
Akan dibuktikan $x \leq y,\ x, y \in X$.
Karena X *near* CS-aljabar maka berlaku

$$
\begin{aligned}
x * y &= x \bullet y * y \\
x * y &= e
\end{aligned}
$$

Karena $x * y = e$ maka berarti $x \leq y$. Sehingga terbukti jika $x \bullet y \leq y$ maka $x \leq y,\ x, y \in X$.

Dengan demikian terbukti jika X adalah *near* CS-aljabar, maka berlaku $x \leq y,\ x, y \in X$ jika dan hanya jika $x \bullet y \leq y$. ■

Contoh 3.2.5
Dengan menggunakan Contoh 3.2.3 akan ditunjukkan bahwa Proposisi 3.2.4 berlaku.

Penyelesaian:

(1) Jika X adalah *near* CS-aljabar maka $x \leq x \bullet y,\ \forall\, x, y \in X$ berlaku.
Ambil sebarang $x, y \in X$ misalkan $x = b, y = c$. Diketahui X adalah *near* CS-aljabar sehingga,

$$
\begin{aligned}
x * x \bullet y &= b * b \bullet c \\
&= b \bullet (b \bullet c) * b \bullet c \\
&= (b \bullet b) \bullet c * b \bullet c \\
&= ((b \bullet b) * b) \bullet c \\
&= (b * b) \bullet c \\
&= 1 \bullet c \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Terbukti jika X adalah *near* CS-aljabar, maka $x \leq x \bullet y$ dipenuhi. Dengan cara yang sama berlaku untuk setiap $x, y \in X$.

(2) Jika X adalah *near* CS-aljabar maka berlaku $x \leq y,\ x, y \in X$ jika dan hanya jika $x \bullet y \leq y$ yang berarti $x \bullet y * y = e$.

Ambil sebarang $x, y \in X$ yang memenuhi $x \leq y$ berarti $x * y = e$.

Misalkan $x = c, y = a$ sedemikian sehingga,

$$x * y = c * a = 1, \text{ maka}$$

$$x \bullet y * y = c \bullet a * a = a * a = 1$$

Dengan cara yang sama berlaku untuk setiap $x, y \in X$ yang memenuhi $x \leq y$ yang berarti $x * y = e$ sehingga terbukti jika X adalah *near* CS-aljabar maka berlaku $x \leq y,\ x, y \in X$ jika dan hanya jika $x \bullet y \leq y$. ■

Proposisi 3.2.6

Misalkan X adalah *near* CS-aljabar. Maka berlaku sifat-sifat sebagai berikut.

(1) Jika $x \leq y$, maka $x \bullet y \leq y \bullet x$ untuk setiap $x, y \in X$.

(2) Jika $x \bullet y = e$, maka $x * y = y$.

Bukti:

(1) Diketahui $x \leq y$ berarti $x * y = e$.

Akan dibuktikan $x \bullet y \leq y \bullet x, \forall x, y \in X$ berarti $x \bullet y * y \bullet x = e$.

Berdasarkan Definisi 3.2.1, $x * y = x \bullet y * y = e$, sehingga diperoleh

$$x * y = x \bullet y * y$$
$$e = x \bullet y * x \bullet y$$
$$e = x \bullet y * y \bullet x$$

Karena $e = x \bullet y * y \bullet x$ maka $x \bullet y \leq y \bullet x$. Sehingga terbukti jika X adalah *near* CS-aljabar, $x \leq y$ maka $x \bullet y \leq y \bullet x$ untuk setiap $x, y \in X$.

(2) Diketahui X adalah *near* CS-aljabar.

Akan dibuktikan jika $x \bullet y = e$, maka $x * y = y$.

Karena X *near* CS-aljabar maka berlaku

$$x * y = x \bullet y * y$$
$$= e * y$$
$$= y$$

Sehingga terbukti jika X adalah *near* CS-aljabar, $x \bullet y = e$, maka $x * y = y$. ■

Contoh 3.2.7
Berdasarkan Contoh 3.2.3 akan ditunjukkan bahwa sifat-sifat pada Proposisi 3.2.6 berlaku.

Penyelesaian:

(1) Diketahui X adalah *near* CS-aljabar, $x \leq y$ berarti $x * y = e$.
Akan dibuktikan $x \bullet y \leq y \bullet x$ yang berarti $x \bullet y * y \bullet x = e$.
Ambil sebarang $x, y \in X$ yang memenuhi $x \leq y$.
Misalkan $x = a, y = 1$ sedemikian sehingga,

$$x \bullet y * y \bullet x = a \bullet 1 * 1 \bullet a = 1 * 1 = 1$$

Dengan cara yang sama berlaku untuk setiap $x, y \in X$ yang memenuhi $x \leq y$ yang berarti $x * y = e$ sehingga terbukti jika X adalah *near* CS-aljabar, $x \leq y$ maka $x \bullet y \leq y \bullet x$ untuk setiap $x, y \in X$.

(2) Diketahui X adalah *near* CS-aljabar. Akan dibuktikan jika $x \bullet y = e$, maka $x * y = y$.
Ambil sebarang $x, y \in X$ yang memenuhi $x \bullet y = e$.
Misalkan $x = a, y = b$ sedemikian sehingga,

$$\text{jika } x \bullet y = a \bullet b = 1, \text{ maka } x * y = a \bullet b = b.$$

Dengan cara yang sama berlaku untuk setiap $x, y \in X$ yang memenuhi $x \bullet y = e$ sehingga terbukti jika X adalah *near* CS-aljabar, $x \bullet y = e$ maka $x * y = y$. ■

Teorema 3.2.8
Misalkan X adalah *near* CS-aljabar dan A merupakan himpunan bagian dari X. Jika $y \in A$ dan $x \leq y$ berakibat $x \in A$, maka A adalah *stable subsets* dari X.

Bukti:
Diketahui $x \in A$ dan $x \leq y$ berarti $y \in A$. Jika $s \in X$ dan $a \in A$, berdasarkan Proposisi 3.2.4 (1), $s \leq a \bullet s$, maka $a \bullet s \in A$.
Karena $s \leq a$, berdasarkan Proposisi 3.2.4 (2) diperoleh $s \bullet a \leq a$ dan

$$
\begin{aligned}
s * s \bullet a &= s \bullet s \bullet a * s \bullet a \\
&= s \bullet e \\
&= e
\end{aligned}
$$

sehingga $s \bullet a \in A$. Dengan demikian terbukti A adalah *stable subsets* dari X. ■

Definisi 3.2.9 (*Unit divisor*)
Misalkan X adalah CS-aljabar, $x, y \in X$. $x \neq e, y \neq e$. x disebut *left unit divisor* jika $\exists y \in X$ sehingga berlaku $(x \bullet y = e)$. Dan *right unit divisor* jika $\exists y \in X$ sehingga berlaku $(y \bullet x = e)$.
Unit divisor adalah elemen dari X yang memenuhi keduanya, yaitu *left* dan *right unit divisor*.

Contoh 3.2.10
Misalkan $X = \{1, a, b, c\}$ merupakan CS-aljabar. Berdasarkan contoh 3.2.3 akan ditentukan elemen *unit divisor* pada X

Penyelesaian:

Tabel 3.16 Hasil operasi syarat elemen *unit divisor* pada X.

x	y	$x \bullet y$	$y \bullet x$
a	a	a	a
	b	1	1
	c	a	a
b	a	1	1
	b	b	b
	c	b	b
c	a	a	a
	b	b	b
	c	c	c

Terlihat pada Tabel 3.16, $x = a$ dan $x = b$ memenuhi Definisi *unit divisor* sehingga diperoleh $x = a$ dan $x = b$ merupakan elemen *unit divisor* pada X. ■

Teorema 3.2.11

Misalkan $(X, \bullet, *, e)$ adalah CS-aljabar. Jika X memenuhi hukum kanselasi kiri, yaitu

$$(\forall x \neq e, y, z \in X) \qquad (x \bullet y = x \bullet z \Rightarrow y = z)$$

dan hukum kanselasi kanan, yaitu

$$(\forall x \neq e, y, z \in X) \qquad (y \bullet x = z \bullet x \Rightarrow y = z)$$

maka X tidak memuat *left* (*right*) *unit divisor*.

Bukti:

Diketahui X memenuhi hukum kanselasi kiri dan hukum kanselasi kanan. Akan dibuktikan X tidak memuat *left* (*right*) *unit divisor*.

(1) Anggap X memenuhi hukum kanselasi kiri terhadap operasi " $\bullet$ " sebagai berikut. $x \bullet y = x \bullet z \Rightarrow y = z$.
Ambil $x \in X, x \neq e$. Akan dibuktikan X tidak memuat *left unit divisor*.
Diasumsikan $x \bullet y = e$. Berdasarkan Proposisi 3.1.4, $x \bullet e = e$, sehingga $x \bullet y = e$ mengakibatkan $y = e$.
Karena diperoleh $y = e$, sehingga berdasarkan Definisi 3.2.9 syarat *unit divisor* tidak dipenuhi.

(2) Anggap X memenuhi hukum kanselasi kanan terhadap operasi " $\bullet$ " sebagai berikut, $y \bullet x = z \bullet x \Rightarrow y = z$.
Ambil $x \in X, x \neq e$. Akan dibuktikan X tidak memuat *right unit divisor*.
Diasumsikan $y \bullet x = e$. Berdasarkan Proposisi 3.1.4, $e \bullet x = e$ sehingga $y \bullet x = 1$ mengakibatkan $y = e$.
Karena diperoleh $y = e$, sehingga berdasarkan Definisi 3.2.9 syarat *unit divisor* tidak dipenuhi.

Dengan demikian terbukti jika X memenuhi hukum kanselasi kiri dan hukum kanselasi kanan, maka X tidak mengandung *left* (*right*) *unit divisor*. ■

Teorema 3.2.12
Misalkan $(X, \bullet, *, e)$ adalah CS-aljabar yang tidak memuat *left* (*right*) *unit divisor*. Maka X memenuhi hukum kanselasi kiri (kanan) untuk operasi " $\bullet$ ".

Bukti:
Berdasarkan Definisi 3.2.9, karena tidak memuat *left* (*right*) *unit divisor* pada CS-aljabar X sehingga berlaku $x \neq e, y \neq e$ dan
$x \bullet y \neq e$ $(y \bullet x \neq e)$ $\forall x, y \in X$.
Akan dibuktikan X memenuhi hukum kanselasi kiri (kanan) untuk operasi " $\bullet$ ", yaitu

$$(\forall x \neq e, y, z \in X) \qquad (x \bullet y = x \bullet z \; (y \bullet x = z \bullet x) \Rightarrow y = z)$$

Karena diketahui $x \bullet y \neq e$ berarti $x \bullet z \neq e$ sehingga berlaku
$x \bullet y = x \bullet z \neq e$.
Dengan demikian diperoleh $y = z$ dan memenuhi hukum kanselasi kiri.
Selanjutnya diketahui $y \bullet x \neq e$ berarti $z \bullet x \neq e$ sehingga berlaku $\bullet\, x = z \bullet x \neq e$, dengan demikian diperoleh $y = z$ dan memenuhi hukum kanselasi kanan.

Sehingga terbukti X memenuhi hukum kanselasi kiri (kanan) untuk operasi " $\bullet$ ". ■

BAB IV
PENUTUP

Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan mengenai CS-aljabar dan sifat-sifatnya, dapat disimpulkan bahwa:

1. Pada suatu himpunan X yang merupakan CS-aljabar dapat ditentukan himpunan bagian dari CS-aljabar X yang merupakan *left* (*right*) *stable*, *left* (*right*) *deductive system*, subaljabar, dan center dari X.
2. Sifat-sifat yang ada pada CS-aljabar adalah sebagai berikut:
   a. Jika X adalah CS-aljabar, $a \in X$ adalah atom jika dan hanya jika memenuhi $a = (a * x) * x$ untuk setiap $x \in X$.
   b. Jika X adalah CS-aljabar maka $A(X)$ dan $G(X)$ adalah *stable subsets* dari X.
   c. Untuk setiap CS-aljabar X, *cent*(X) adalah subaljabar dari X.
   d. *Deductive system* dari CS-aljabar X tertutup jika dan hanya jika merupakan subaljabar dari CS-aljabar X.

DAFTAR PUSTAKA

Andari, A. 2015. *Teori Grup*. Malang: UB Press.

Bhattacharya, P.B. dkk. 1994. *Basic Abstract Algebra*. Cambridge: Cambridge University Press.

Hidayat, N. 2017. *Cara Mudah Memahami Struktur Aljabar*. Malang: UB Press.

Kim, K. H. 2010. A Note on BE-algebras. *Scientiae Mathematicae Japonicae Online*, e-2010, 369-374.

Kim, K. H. 2011. A Note on CI-algebras. *International Mathematical Forum*. Vol. 6, No. 1: 1-5.

Kim, K. H. 2012. On CS-algebras. *Pure Mathematical Sciences*. Vol. 1, No. 3: 115-121.

Marsudi. 2010. *Logika dan Teori Himpunan*. Malang: UB Press.

Meng, J., Y. B. Jun, dan X. L. Xin. 2000. On BCI-algebras with Condition (*S*). *Scientiae Mathematicae*. Vol. 3, No. 3(2000): 427-434.

Meng, B. L. 2009. CI-algebras. *Scientiae Mathematicae Japonicae Online*, e-2009, 695-701.

Meng, B. L. 2010. Atoms in CI-algebras and Singular CI-algebras. *Scientiae Mathematicae Japonicae Online*, e-2010, 319-324.

Muslikh, M. 2012. *Analisis Real.* Malang: UB Press.

Peng, J. 2017. Structure of BCK-algebras: A New Approach Based on Complete Residuated Lattice-Valued Logic. International Journal of Innovative Computing, Information and Control. Vol. 13, No. 1: 219-241.

Roman, S. 2008. *Lattices and Ordered Sets*. Springer-Science+Business Media. New York.