

**ANALISIS DINAMIK DAN KONTROL OPTIMAL MODEL
MATEMATIKA PENYAKIT LAYU PINUS**

SKRIPSI

oleh

DITA AYU PERMATASARI

155090401111001



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2019**

**ANALISIS DINAMIK DAN KONTROL OPTIMAL MODEL
MATEMATIKA PENYAKIT LAYU PINUS**

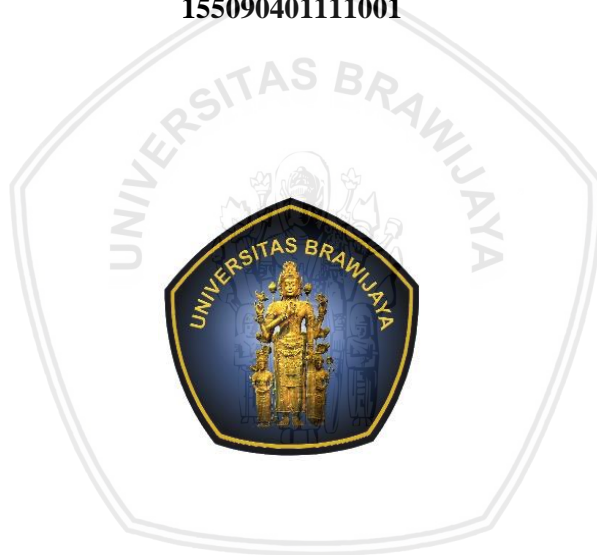
SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Matematika

oleh

DITA AYU PERMATASARI

155090401111001



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2019**



LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI
ANALISIS DINAMIK DAN KONTROL OPTIMAL MODEL
MATEMATIKA PENYAKIT LAYU PINUS

oleh
DITA AYU PERMATASARI
155090401111001

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji
pada tanggal 3 Januari 2019
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Matematika

Pembimbing

Dr. Isnani Darti, S.Si., M.Si
NIP. 197312162002122001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si, M.Si, Ph.D.
NIP. 197509082000031003



LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Dita Ayu Permatasari
NIM : 155090401111001
Jurusan : Matematika
Penulis Skripsi berjudul : Analisis Dinamik dan Kontrol
Optimal Model Matematika
Penyakit Layu Pinus

dengan ini menyatakan bahwa:

1. Skripsi ini adalah hasil pemikiran saya, bukan hasil menjiplak dari tulisan orang lain. Rujukan-rujukan yang tercantum pada Daftar Pustaka hanya digunakan sebagai acuan.
2. Apabila di kemudian hari skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala akibat hukum dari keadaan tersebut.

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 3 Januari 2019
yang menyatakan,

Dita Ayu Permatasari
NIM. 155090401111001



ANALISIS DINAMIK DAN KONTROL OPTIMAL MODEL MATEMATIKA PENYAKIT LAYU PINUS

ABSTRAK

Pada skripsi ini dibahas analisis dinamik dan penerapan kontrol optimal pada model matematika penyakit layu pinus. Analisis dinamik yang dilakukan meliputi penentuan titik kesetimbangan, angka reproduksi dasar (\mathcal{R}_0), dan analisis kestabilan global. Hasil analisis dinamik menunjukkan bahwa model memiliki dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik. Titik kesetimbangan bebas penyakit selalu eksis, sedangkan titik kesetimbangan endemik eksis dengan syarat $\mathcal{R}_0 > 1$. Kestabilan titik kesetimbangan bergantung pada nilai \mathcal{R}_0 . Jika $\mathcal{R}_0 \leq 1$, maka titik kesetimbangan bebas penyakit stabil asimtotik global dan jika $\mathcal{R}_0 > 1$, maka titik kesetimbangan endemik stabil asimtotik global. Selanjutnya, dilakukan penerapan kontrol optimal untuk memaksimalkan subpopulasi pohon pinus rentan, dan meminimalkan subpopulasi pohon pinus *exposed*, pohon pinus terinfeksi, vektor rentan, vektor *exposed*, dan vektor terinfeksi. Kontrol yang digunakan, yaitu injeksi insektisida dan vaksinasi ke tubuh pohon pinus, deforestasi, dan penyemprotan insektisida di udara. Hasil simulasi numerik menunjukkan pemberian ketiga kontrol secara bersamaan memberikan hasil yang paling efektif dibandingkan dengan pemberian kombinasi dua kontrol saja.

Kata kunci: penyakit layu pinus, titik kesetimbangan, angka reproduksi dasar, analisis kestabilan global, kontrol optimal.



DYNAMICAL ANALYSIS AND OPTIMAL CONTROL OF MATHEMATICAL MODEL OF PINE WILT DISEASE

ABSTRACT

This thesis discusses dynamical analysis and the application of optimal control to the mathematical model of pine wilt disease. Dynamical analysis carried out includes determining equilibrium points, basic reproduction numbers (\mathcal{R}_0), and global stability analysis. The model has two equilibrium points, namely disease-free equilibrium point and endemic equilibrium point. Disease-free equilibrium point always exist, whereas endemic equilibrium point exist with conditions $\mathcal{R}_0 > 1$. The stability of the equilibrium point depends on the value of \mathcal{R}_0 . If $\mathcal{R}_0 \leq 1$, then the disease-free equilibrium point is globally asymptotically stable and if $\mathcal{R}_0 > 1$, then the endemic equilibrium point is globally asymptotically stable. Furthermore, optimal control is applied to maximize the subpopulation of susceptible pine trees, and minimize the subpopulation of exposed pine trees, infected pine trees, susceptible vectors, exposed vectors, and infected vectors. Control are used, namely injection of insecticides and vaccinations into the body of pine trees, deforestation, and spraying insecticides in the air. The numerical simulation results show that giving the three controls simultaneously provides the most effective results compared to giving a combination of just two controls.

Keywords: pine wilt disease, equilibrium point, basic reproduction number, global stability analysis, optimal control.



KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Allah SWT. yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul *Analisis Dinamik dan Kontrol Optimal Model Matematika Penyakit Layu Pinus* dengan baik dan lancar. Shalawat dan salam selalu turunkan kepada Rasulullah SAW sebagai suri teladan bagi penulis.

Skripsi ini tidak dapat diselesaikan dengan baik tanpa bantuan, bimbingan, dan motivasi dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada

1. Dr. Isnani Darti, S.Si., M.Si. selaku dosen pembimbing skripsi sekaligus dosen pembimbing akademik atas segala bimbingan, motivasi, dan saran yang diberikan kepada penulis untuk menyelesaikan skripsi ini dengan baik dan benar,
2. Ummu Habibah, S.Si., M.Si., Ph.D. dan Zuraidah Fitriah, S.Si., M.Si. selaku dosen penguji atas segala kritik dan saran yang diberikan untuk perbaikan skripsi ini,
3. Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si., M.Si., Ph.D. selaku Ketua Jurusan Matematika, Dr. Isnani Darti, S.Si., M.Si. selaku Ketua Program Studi Matematika, Bapak dan Ibu Dosen Jurusan Matematika yang telah memberikan ilmu kepada penulis, serta segenap staf dan karyawan TU Jurusan Matematika atas segala bantuan yang diberikan,
4. Ayah (Zainul Arifin), Ibu (Binti Sholikhah), kakak (Reni Lya Purnamasari), adik (Dina Aulia Khoirunnisa dan Dini Alfiatul 'Ilmi) dan seluruh keluarga tercinta yang selalu mendoakan dan memberikan dukungan kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini,
5. Nurizzam Bagus Priambodo atas dukungan, motivasi, dan kebersamaan selama ini,
6. Lisca Indriana Putri, Dian Fatma Lorista, Dessy Rizka Wulandari, Fitri Kurniawati, Wahyu Handayani, dan Muna Afdi Muniroh atas ilmu, kritik, dan saran dalam penulisan skripsi ini,
7. Keluarga Besar Matematika 2015 dan Keluarga LISMATIKA atas kebersamaan selama menikmati proses perkuliahan,
8. Keluarga Mertojoyo Q8 atas dukungan dan kebersamaan selama penulis tinggal di Malang, dan

9. semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih banyak kekurangan. Oleh karena itu, kritik dan saran yang membangun sangat penulis harapkan guna perbaikan pada penulisan selanjutnya. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak yang membutuhkan.

Malang, 3 Januari 2019

Penulis



DAFTAR ISI

	Halaman
JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI	iii
LEMBAR PERNYATAAN	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR GAMBAR	xv
DAFTAR TABEL	xvii
DAFTAR LAMPIRAN	xix
BAB 1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Tujuan.....	3
BAB 2 DASAR TEORI	5
2.1 Sistem Dinamik	5
2.2 Angka Reproduksi Dasar.....	6
2.3 Matriks Generasi Selanjutnya.....	6
2.4 Analisis Kestabilan Global	8
2.5 Teori Kontrol Optimal.....	9
2.5.1 Formulasi masalah kontrol optimal.....	9
2.5.2 Prinsip maksimum Pontryagin	10
2.6 Metode <i>Sweep</i> Maju-Mundur	12
2.7 Metode Runge-Kutta Orde 4	12
2.8 Model Matematika Penyakit Layu Pinus tanpa Kontrol..	13
BAB 3 PEMBAHASAN	15
3.1 Titik Keseimbangan Model Penyakit Layu Pinus	15
3.2 Analisis Kestabilan Global Titik Keseimbangan.....	20
3.2.1 Kestabilan global titik keseimbangan P_0	20
3.2.2 Kestabilan global titik keseimbangan P_1	23
3.3 Kontrol Optimal.....	27
3.3.1 Formulasi model penyakit layu pinus dengan kontrol	27
3.3.2 Penyelesaian masalah kontrol optimal	28
3.4 Simulasi Numerik	31

3.4.1 Simulasi numerik untuk $\mathcal{R}_0 \leq 1$	31
3.4.2 Simulasi numerik untuk $\mathcal{R}_0 > 1$	33
3.4.3 Algoritma metode <i>Sweep</i> Maju-Mundur.....	34
3.4.4 Simulasi dengan kontrol u_2 dan u_3	36
3.4.5 Simulasi dengan kontrol u_1 dan u_3	38
3.4.6 Simulasi dengan kontrol u_1 dan u_2	40
3.4.7 Simulasi dengan kontrol $u_1, u_2,$ dan u_3	42
BAB 4 PENUTUP	47
DAFTAR PUSTAKA	49
LAMPIRAN	51



DAFTAR GAMBAR

	Halaman
Gambar 2.1 Diagram kompartemen model penyakit layu pinus	13
Gambar 3.1 Potret fase untuk $\mathcal{R}_0 < 1$	32
Gambar 3.2 Potret fase untuk $\mathcal{R}_0 = 1$	33
Gambar 3.3 Potret fase untuk $\mathcal{R}_0 > 1$	34
Gambar 3.4 Simulasi numerik model penyakit layu pinus dengan kontrol deforestasi (u_2) dan penyemprotan insektisida (u_3).....	37
Gambar 3.5 Profil kontrol optimal menggunakan kontrol deforestasi (u_2) dan penyemprotan insektisida (u_3).....	38
Gambar 3.6 Simulasi numerik model penyakit layu pinus dengan kontrol vaksinasi dan injeksi insektisida (u_1) dan penyemprotan insektisida (u_3)	39
Gambar 3.7 Profil kontrol optimal menggunakan kontrol vaksinasi dan injeksi insektisida (u_1) dan penyemprotan insektisida (u_3).....	40
Gambar 3.8 Simulasi numerik model penyakit layu pinus dengan kontrol vaksinasi dan injeksi insektisida (u_1) dan deforestasi (u_2).....	41
Gambar 3.9 Profil kontrol optimal menggunakan kontrol vaksinasi dan injeksi insektisida (u_1) dan deforestasi (u_2)	42
Gambar 3.10 Simulasi numerik model penyakit layu pinus dengan kontrol vaksinasi dan injeksi insektisida (u_1), deforestasi (u_2), dan penyemprotan insektisida (u_3).....	43
Gambar 3.11 Profil kontrol optimal menggunakan kontrol vaksinasi dan injeksi insektisida (u_1), deforestasi (u_2), dan penyemprotan insektisida (u_3).....	44
Gambar 3.12 Simulasi numerik fungsi tujuan kontrol optimal	45



DAFTAR TABEL

	Halaman
Tabel 3.1 Nilai awal untuk simulasi numerik	36
Tabel 3.2 Nilai parameter untuk simulasi numerik	36





DAFTAR LAMPIRAN

	Halaman
Lampiran 1. Program Matlab model penyakit layu pinus dengan kontrol dan tanpa kontrol.....	51





BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pohon pinus adalah salah satu jenis tanaman yang banyak dimanfaatkan untuk kehidupan manusia. Menurut Mota dan Vieira (2008), pohon pinus ditanam untuk dimanfaatkan kayunya sebagai bahan konstruksi dan properti seperti perabotan rumah tangga sedangkan getahnya dimanfaatkan sebagai bahan pengenceran cat. Dengan demikian, produktivitas pohon pinus mempengaruhi kehidupan manusia dalam bidang perekonomian dan perindustrian. Dengan adanya penyakit layu pinus, produktivitas pohon pinus akan terganggu dan membuat kebutuhan manusia di bidang tersebut tidak dapat terpenuhi.

Penyakit layu pinus dapat membunuh pohon pinus dalam waktu yang singkat dengan gejalanya, yaitu terkulainya pucuk dan menggulungnya daun. Hal ini dikarenakan pohon pinus tidak dapat memproduksi *Oleoresin* yang merupakan senyawa pertahanan terhadap gangguan serangga dan patogen. Penyakit layu pinus merupakan suatu penyakit pada pohon pinus yang disebabkan oleh nematoda *Bursaphelenchus xylophilus* yang ditransmisikan oleh vektor pembawa, yaitu kumbang *Monochamus alternatus*. Nematoda adalah organisme berukuran mikroskopis dengan bentuk menyerupai cacing. Transmisi *Bursaphelenchus xylophilus* dalam tubuh *Monochamus alternatus* ke pohon pinus melalui kontak langsung pinus dengan *Monochamus alternatus* dan melalui oviposisi (proses perkembangbiakan telur *Monochamus alternatus* pada batang pohon). *Monochamus alternatus* dewasa memakan kulit kayu pinus yang sehat untuk pematangan seksual dan untuk memenuhi kebutuhan makanan. Bekas luka gigitan *Monochamus alternatus* dimanfaatkan oleh *Monochamus alternatus* betina untuk oviposisi dengan meletakkan posisi telur melalui kulit pohon, sehingga akan terjadi pembiakan nematoda selama *Monochamus alternatus* memakan pohon pinus. Selain transmisi *Bursaphelenchus xylophilus* dalam tubuh *Monochamus alternatus* ke pohon pinus, transmisi juga dapat terjadi dari pohon pinus yang terinfeksi penyakit layu pinus ke *Monochamus alternatus* melalui proses dimakannya kulit kayu pohon pinus yang terinfeksi (Mamiya dan Enda, 2008).

Penelitian tentang penyakit layu pinus telah banyak dilakukan. Lee dan Kim (2013) memperkenalkan model matematika penyakit layu pinus dan analisis kestabilan global dengan tingkat insiden nonlinear. Kemudian Lee (2014) menganalisis kestabilan penyakit layu pinus dan menerapkan teknik kontrol optimal dengan membagi populasi pohon pinus menjadi dua, yaitu pohon pinus rentan dan pohon pinus terinfeksi, sedangkan populasi vektor (kumbang) dibagi menjadi dua subpopulasi, yaitu vektor rentan dan vektor terinfeksi. Selanjutnya, Lee dan Lashari (2014) memperkenalkan model matematika yang menggabungkan kelas *exposed* pada populasi pohon pinus dengan dilengkapi analisis kestabilan dan penerapan kontrol optimal dengan transmisi horizontal pada populasi vektor.

Pada skripsi ini, akan dibahas analisis model matematika penyakit layu pinus dengan kontrol optimal yang mengkaji ulang artikel Khan (2017). Analisis dinamik yang dilakukan pada model meliputi penentuan titik kesetimbangan, angka reproduksi dasar, dan analisis kestabilan global. Kemudian diterapkan teknik kontrol optimal untuk meminimalkan subpopulasi pohon pinus *exposed*, pohon pinus terinfeksi, vektor rentan, vektor *exposed*, dan vektor terinfeksi, serta untuk memaksimalkan subpopulasi pohon pinus yang rentan. Kontrol yang digunakan, yaitu injeksi insektisida dan vaksinasi ke tubuh pohon pinus, penebangan pohon pinus yang terinfeksi penyakit layu pinus, dan penyemprotan insektisida di udara. Selanjutnya, untuk mendukung hasil analisis, juga akan dilakukan simulasi numerik.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, rumusan masalah yang akan dibahas dalam skripsi ini adalah sebagai berikut.

1. Bagaimana titik kesetimbangan dan kestabilan global dari titik kesetimbangan model matematika penyakit layu pinus?
2. Bagaimana menyelesaikan masalah kontrol optimal pada model matematika tersebut?
3. Bagaimana hasil simulasi numerik solusi model matematika penyakit layu pinus dan hasil simulasi numerik model matematika tersebut dengan kontrol optimal dan tanpa kontrol optimal?

1.3 Tujuan

Tujuan penulisan skripsi ini adalah sebagai berikut.

1. Menentukan titik kesetimbangan dan kestabilan global dari titik kesetimbangan model matematika penyakit layu pinus.
2. Menyelesaikan masalah kontrol optimal pada model matematika tersebut.
3. Menginterpretasikan hasil simulasi numerik solusi model matematika penyakit layu pinus dan hasil simulasi numerik model matematika tersebut dengan kontrol optimal dan tanpa kontrol optimal.





BAB II DASAR TEORI

2.1 Sistem Dinamik

Sistem dinamik merupakan sistem yang selalu berubah dan dapat diketahui kondisinya di masa yang akan datang jika diketahui kondisinya saat ini atau di masa lalu. Sistem dinamik dibedakan menjadi dua, yaitu sistem dinamik diskrit dengan bentuk umum

$$\vec{x}_{t+1} = \vec{f}(\vec{x}_t), t \in \mathbb{Z} \text{ atau } \mathbb{N}, \vec{x} \in \mathbb{R}^n,$$

dan sistem dinamik kontinu dengan bentuk umum

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}, t), t \in \mathbb{R}, \vec{x} \in \mathbb{R}^n$$

(Alligood, dkk., 2000).

Sistem otonomus adalah suatu sistem persamaan diferensial yang berbentuk,

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{aligned} \tag{2.1}$$

dengan fungsi $f_i(\vec{x})$ adalah fungsi kontinu yang tidak bergantung secara eksplisit terhadap variabel t . Titik $\vec{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ disebut titik kritis sistem otonomus (2.1) jika memenuhi kondisi

$$f_i(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = 0, i = 1, 2, \dots, n.$$

Titik kritis \vec{x}^* merupakan solusi sistem (2.1) yang bernilai konstan, karena $\frac{dx}{dt} = 0$. Keadaan yang menyebabkan $\frac{dx}{dt} = 0$ adalah keadaan setimbang dan titik yang memenuhi disebut titik kesetimbangan, sehingga titik kritis disebut juga titik kesetimbangan (Boyce dan DiPrima, 2012).

Sistem otonomus dibedakan menjadi dua, yaitu linear dan nonlinear. Sistem otonomus linear dengan n persamaan dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n, \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Sistem otonomus nonlinear dengan n persamaan dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(\vec{x}), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.3)$$

dengan f_i merupakan fungsi nonlinear (Finizo dan Ladas, 1982).

2.2 Angka Reproduksi Dasar

Pada model epidemi, angka reproduksi dasar menyatakan banyaknya individu yang terinfeksi akibat satu individu terinfeksi selama proses penularan penyakit dalam suatu populasi rentan. Dalam hal ini angka reproduksi dasar (\mathcal{R}_0) digunakan untuk menentukan ada tidaknya penyakit dalam suatu populasi. $\mathcal{R}_0 < 1$ menyatakan setiap individu terinfeksi menyebabkan rata-rata kurang dari satu individu terinfeksi baru. Dengan kata lain, dapat diprediksi bahwa infeksi akan bersih dari populasi. Ketika $\mathcal{R}_0 > 1$ menyatakan individu terinfeksi menyebabkan rata-rata lebih dari satu individu terinfeksi baru (Heffernan, dkk., 2005).

2.3 Matriks Generasi Selanjutnya

Metode matriks generasi selanjutnya adalah suatu metode yang digunakan untuk menentukan angka reproduksi dasar (\mathcal{R}_0). Pada metode ini, model kompartemen penyebaran penyakit dibagi menjadi dua kelompok kompartemen, yaitu kelompok kompartemen terinfeksi dan kelompok kompartemen tidak terinfeksi. Misalkan terdapat $1, \dots, m, m + 1, \dots, n$ kompartemen dengan kompartemen pertama hingga m terdiri dari individu terinfeksi dan kompartemen $m + 1$ hingga n terdiri dari individu tidak terinfeksi. Model kompartemen terinfeksi dapat ditulis sebagai

$$x'_i = F_i - V_i, \text{ dengan } i = 1, 2, \dots, m,$$

dengan x_i menyatakan jumlah individu pada kompartemen ke- i , F_i adalah komponen pembentuk matriks F yang menyatakan infeksi baru yang masuk pada kompartemen ke- i . Infeksi baru hanya dapat diperoleh dari populasi individu rentan dan F_i tidak boleh bernilai negatif. V_i adalah komponen pembentuk matriks V yang menyatakan transfer keluar atau masuk dari kompartemen satu ke kompartemen lainnya. Transfer infeksi dapat terjadi apabila terdapat proses penularan penyakit dari satu kompartemen ke kompartemen lainnya. Jika V_i menyatakan transfer keluar dari kompartemen ke- i , maka V_i

bernilai positif. Jika V_i menyatakan transfer masuk pada suatu kompartemen ke- i , maka V_i bernilai negatif.

Didefinisikan $DF(P_0)$ dan $DV(P_0)$ adalah matriks ukuran $m \times m$ sebagai berikut

$$DF(P_0) = \left(\frac{\partial F_i(P_0)}{\partial x_j} \right) \text{ dan } DV(P_0) = \left(\frac{\partial v_i(P_0)}{\partial x_j} \right), \text{ dengan } i, j = 1, \dots, m,$$

dan P_0 adalah titik kesetimbangan bebas penyakit. Matriks generasi selanjutnya didefinisikan sebagai

$$R = (DF(P_0))(DV(P_0))^{-1},$$

dan bilangan reproduksi dasar dapat diperoleh dari

$$\mathcal{R}_0 = \rho(R),$$

dengan $\rho(R)$ adalah radius *spectral* matriks R , yaitu modulus terbesar dari nilai eigen matriks R (Brauer dan Chavez, 2010).

Contoh:

Diberikan model SLIR sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= A - \beta SL + \omega I - \varepsilon R - \mu S, \\ \frac{dL}{dt} &= \beta SL - (\delta + \gamma + \mu)L, \\ \frac{dI}{dt} &= \gamma L - (\alpha + \mu + \omega)I, \\ \frac{dR}{dt} &= \delta L + \alpha I - (\mu - \varepsilon)R. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Sistem persamaan (2.4) mempunyai titik kesetimbangan $P_0 = \left(\frac{A}{\mu}, 0, 0, 0 \right)$. Matriks F dan V dapat dituliskan sebagai berikut

$$F = \begin{bmatrix} \beta SL \\ 0 \end{bmatrix} \text{ dan } V = \begin{bmatrix} (\delta + \gamma + \mu)L \\ (\alpha + \mu + \omega)I - \gamma L \end{bmatrix}.$$

Dengan penurunan terhadap masing-masing subpopulasi terinfeksi dan mensubstitusikan titik kesetimbangan $P_0 = \left(\frac{A}{\mu}, 0, 0, 0 \right)$ diperoleh

$$DF(P_0) = \begin{bmatrix} \frac{\beta A}{\mu} & 0 \\ \mu & 0 \end{bmatrix} \text{ dan } DV(P_0) = \begin{bmatrix} \delta + \gamma + \mu & 0 \\ -\gamma & \alpha + \mu + \omega \end{bmatrix}.$$

Sebelum menentukan matriks generasi selanjutnya, terlebih dahulu ditentukan invers matriks $DV(P_0)$, yaitu

$$DV(P_0)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\delta + \gamma + \mu} & 0 \\ \frac{-\gamma}{(\delta + \gamma + \mu)(\alpha + \mu + \omega)} & \frac{1}{\alpha + \mu + \omega} \end{bmatrix}.$$

Perkalian matriks $DF(P_0)$ dan $DV(P_0)^{-1}$ menghasilkan matriks R , yaitu

$$R = (DF(P_0))(DV(P_0))^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\beta A}{\mu(\delta + \gamma + \mu)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya, ditentukan nilai eigen dari matriks R dengan menyelesaikan persamaan $|R - \lambda I| = 0$ dan diperoleh akar karakteristik sebagai berikut

$$\lambda = \frac{\beta A}{\mu(\delta + \gamma + \mu)}.$$

Angka reproduksi dasar \mathcal{R}_0 adalah radius *spectral* matriks R , yaitu

$$\mathcal{R}_0 = \rho(R) = \max\{\lambda\} = \max\left\{\frac{\beta A}{\mu(\delta + \gamma + \mu)}\right\}.$$

Dengan demikian diperoleh

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\beta A}{\mu(\delta + \gamma + \mu)}$$

(Khanh, 2015).

2.4 Analisis Kestabilan Global

Kestabilan global dari titik kesetimbangan sistem dapat ditentukan dengan menggunakan fungsi Lyapunov. Fungsi Lyapunov dibedakan menjadi dua, yaitu lemah dan kuat.

Definisi 2.4.1 (Fungsi Lyapunov lemah)

Misalkan \vec{x}^* merupakan titik kesetimbangan sistem persamaan diferensial (2.1). Suatu fungsi $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ disebut fungsi Lyapunov lemah untuk \vec{x}^* jika terdapat suatu persekitaran $W \subseteq \mathbb{R}^n$ dari \vec{x}^* yang memenuhi kondisi

1. $L(\vec{x}^*) = 0$ dan $L(\vec{x}) > 0, \forall \vec{x} \neq \vec{x}^* \in W$,
2. $L'(\vec{x}) \leq 0, \forall \vec{x} \neq \vec{x}^* \in W$

(Alligood, dkk., 2000).

Definisi 2.4.2 (Fungsi Lyapunov kuat)

Suatu fungsi $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ disebut fungsi Lyapunov kuat untuk titik kesetimbangan \vec{x}^* jika terdapat suatu persekitaran $W \subseteq \mathbb{R}^n$ dari \vec{x}^* yang memenuhi kondisi

1. $L(\vec{x}^*) = 0$ dan $L(\vec{x}) > 0, \forall \vec{x} \neq \vec{x}^* \in W$,
2. $L'(\vec{x}) < 0, \forall \vec{x} \neq \vec{x}^* \in W$

(Alligood, dkk., 2000).

Teorema 2.4.3 (Kestabilan global dengan fungsi Lyapunov)

Misalkan \vec{x}^* merupakan titik kesetimbangan sistem persamaan diferensial (2.1). Titik kesetimbangan \vec{x}^* bersifat stabil global jika terdapat suatu fungsi Lyapunov lemah untuk \vec{x}^* dan bersifat stabil asimtotik global jika terdapat suatu fungsi Lyapunov kuat untuk \vec{x}^* (Alligood, dkk., 2000).

2.5 Teori Kontrol Optimal

Kontrol optimal bertujuan untuk menentukan hasil yang paling optimal dengan memperhatikan kondisi dan kendala yang ada pada sistem. Sistem yang digunakan dalam masalah kontrol optimal dapat dinyatakan dalam berbagai bentuk persamaan seperti persamaan diferensial biasa, persamaan diferensial parsial, persamaan diskrit, dan lain-lain. Pada masalah kontrol optimal dengan sistem persamaan diferensial biasa, variabel kontrol dinotasikan dengan $\vec{u}(t)$ dan variabel *state* dinotasikan dengan $\vec{x}(t)$. Variabel *state* memenuhi suatu persamaan diferensial yang bergantung pada variabel kontrol dan dinyatakan sebagai

$$\vec{x}'(t) = \vec{g}(t, \vec{x}(t), \vec{u}(t)).$$

Permasalahan utama kontrol optimal, yaitu menentukan variabel kontrol optimal $\vec{u}(t)$ dan variabel *state* $\vec{x}(t)$ untuk mengoptimalkan fungsional seperti contoh berikut.

$$J(\vec{u}) = \int_{t_0}^{t_f} f(t, \vec{x}(t), \vec{u}(t)) dt,$$

dengan kendala $\vec{x}'(t) = \vec{g}(t, \vec{x}(t), \vec{u}(t))$, dan kondisi batas $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$ (Lenhart dan Workman, 2007).

2.5.1 Formulasi masalah kontrol optimal

Masalah kontrol optimal dengan n variabel *state*, m variabel kontrol, didefinisikan sebagai berikut.

Maksimumkan/ minimumkan fungsional:

$$J(\vec{u}) = \int_{t_0}^{t_f} f(t, \vec{x}(t), \vec{u}(t)) dt,$$

dengan kendala:

$$\begin{aligned} \vec{x}'(t) &= \vec{g}(t, \vec{x}(t), \vec{u}(t)), \\ \vec{x}(t_0) &= \vec{x}_0, \text{ dan } \vec{x}(t_f) \text{ bebas,} \end{aligned}$$

dengan $\vec{x}(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]$, $\vec{u}(t) = [u_1(t), \dots, u_m(t)]$,
 $\vec{x}_0 = [x_{10}, \dots, x_{n0}]$, dan $\vec{g}(t, \vec{x}, \vec{u}) = [g_1(t, \vec{x}, \vec{u}), \dots, g_n(t, \vec{x}, \vec{u})]$.

Variabel kontrol $\vec{u}(t)$ yang optimal dilambangkan dengan $\vec{u}^*(t)$, kemudian $\vec{u}^*(t)$ disubstitusikan ke dalam persamaan *state* $\vec{x}(t)$ dan diperoleh *state* yang optimal $\vec{x}^*(t)$ (Lenhart dan Workman, 2007).

2.5.2 Prinsip maksimum Pontryagin

Prinsip maksimum Pontryagin menyatakan kondisi yang diperlukan agar diperoleh solusi yang optimal dengan kontrol \vec{u} yang dapat meminimumkan fungsi Hamilton. Fungsi Hamilton didefinisikan sebagai

$$H(t, \vec{x}, \vec{u}, \vec{\lambda}) = f(t, \vec{x}, \vec{u}) + \vec{\lambda}(t)g(t, \vec{x}, \vec{u}).$$

Jika $\vec{u}^*(t)$ dan $\vec{x}^*(t)$ adalah nilai yang optimum untuk masalah sistem (2.1), maka variabel *costate* $\lambda(t)$ eksis sehingga

$$H(t, \vec{x}, \vec{u}, \vec{\lambda}) \leq H(t, \vec{x}^*, \vec{u}^*, \vec{\lambda}),$$

untuk semua nilai $\vec{u}(t)$ pada $U = (u(t): 0 \leq u \leq u \text{ max})$. Berdasarkan fungsi Hamilton, persamaan *state* dapat ditulis sebagai

$$\vec{x}_i'(t) = \frac{\partial H(t, \vec{x}, \vec{u}, \vec{\lambda})}{\partial x_i}, \text{ untuk } i = 1, \dots, n,$$

dan persamaan *costate* dapat ditulis sebagai

$$\vec{\lambda}_j'(t) = -\frac{\partial H(t, \vec{x}, \vec{u}, \vec{\lambda})}{\partial x_j}, \text{ untuk } j = 1, \dots, n.$$

Dengan adanya dua turunan yaitu $\vec{x}'(t)$ dan $\vec{\lambda}'(t)$, diperlukan dua kondisi batas untuk menentukan solusi optimal. Jika diberikan nilai awal $\vec{x}(0)$ dan nilai akhir $\vec{x}(t_f)$, maka secara langsung dapat ditentukan $\vec{x}(t)$ dan $\vec{\lambda}(t)$. Jika tidak diberikan kondisi akhir $\vec{x}(t_f)$, maka digunakan suatu kondisi yang disebut dengan kondisi transversal yang nilainya adalah $\vec{\lambda}(t_f) = 0$ sebagai pengganti kondisi akhir.

Dengan demikian prinsip maksimum Pontryagin yang digunakan pada pembahasan selanjutnya memiliki beberapa komponen, yaitu

- i. $H(t, \vec{x}, \vec{u}, \vec{\lambda}) \leq H(t, \vec{x}^*, \vec{u}^*, \vec{\lambda})$, untuk setiap $t \in [0, t_f]$,
- ii. $\vec{x}_i'(t) = \frac{\partial H(t, \vec{x}, \vec{u}, \vec{\lambda})}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$, (persamaan *state*),

iii. $\vec{\lambda}'_j(t) = -\frac{\partial H(t, \vec{x}, \vec{u}, \vec{\lambda})}{\partial x_j}$, $j = 1, \dots, n$, (persamaan *costate*),

iv. $\vec{\lambda}'_i(t_f) = 0$, $i = 1, \dots, n$, (kondisi transversal).

Jika fungsi Hamilton dapat diturunkan terhadap u , maka kondisi (i) dapat diganti oleh

$$\frac{\partial H(t, \vec{x}, \vec{u}, \vec{\lambda})}{\partial u_k} = 0, k = 1, \dots, m,$$

yang dinamakan sebagai kondisi stasioner. Kondisi (ii) dan (iii) pada prinsip maksimum Pontryagin merupakan sistem Hamilton. Kondisi (iv) adalah kondisi transversal yang sesuai untuk masalah kondisi akhir yang tidak diberikan.

Contoh:

Diberikan masalah kontrol optimal sebagai berikut.

Minimumkan:

$$J(u) = \int_0^1 u(t)^2 dt,$$

dengan kendala:

$$x' = x(t) + u(t) \text{ dan } x(0) = 1.$$

Dari permasalahan tersebut didapatkan fungsi Hamilton,

$$H = u^2 + \lambda(x + u).$$

Persamaan *costate* adalah

$$\lambda'(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\lambda,$$

dan kondisi transversal

$$\lambda(1) = 0,$$

yang berarti bahwa

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\lambda,$$

$$\int \frac{d\lambda}{\lambda} = \int -dt,$$

$$\ln \lambda = -t + c,$$

$$\lambda = \lambda_0 e^{-t},$$

dengan λ_0 adalah konstan. Selanjutnya, diperoleh kondisi stasioner,

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 2u + \lambda = 0,$$

$$u^* = -\frac{\lambda}{2}.$$

Kondisi akhir $\lambda(1) = 0$ menunjukkan nilai $\lambda_0 = 0$ yang mengakibatkan nilai $\lambda = 0$. Dengan demikian diperoleh $u^* = 0$ dan

persamaan *state* yang optimal adalah $x^*(t) = e^t$ untuk setiap $t \in [0,1]$ (Lenhart dan Neilan, 2010).

2.6 Metode *Sweep* Maju-Mundur

Metode numerik yang dapat digunakan untuk masalah kontrol optimal salah satunya adalah metode *Sweep* Maju-Mundur dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde 4. Algoritma metode *Sweep* Maju-Mundur sebagai berikut.

Langkah 1 : Membuat dugaan nilai awal \vec{u} .

Langkah 2 : Menggunakan kondisi awal $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$ dan nilai awal \vec{u} untuk menyelesaikan persamaan *state* (\vec{x}) dengan langkah maju metode Runge-Kutta orde 4.

Langkah 3 : Menggunakan kondisi transversal $\vec{\lambda}(t_f) = 0$, nilai awal \vec{u} dan \vec{x} , untuk menyelesaikan persamaan *costate* $\vec{\lambda}$ dengan langkah mundur metode Runge-Kutta orde 4.

Langkah 4 : Memperbarui nilai kontrol \vec{u} dengan memasukan nilai \vec{x} dan $\vec{\lambda}$ yang baru ke dalam persamaan karakteristik dari \vec{u} .

Langkah 5 : Memeriksa konvergensi. Jika selisih nilai-nilai variabel dalam iterasi saat ini dan iterasi sebelumnya sangat kecil, maka cetak nilai-nilai saat ini sebagai solusi. Tetapi, jika selisih nilai-nilai variabel tidak sangat kecil maka kembali ke langkah 2

(Lenhart dan Workman, 2007).

2.7 Metode Runge-Kutta Orde 4

Metode Runge-Kutta merupakan metode numerik satu langkah karena metode tersebut hanya memerlukan satu titik sebelumnya untuk mendapatkan nilai yang baru. Langkah (2) dan (3) pada metode *Sweep* Maju-Mundur dapat diselesaikan menggunakan metode Runge-Kutta orde 4. Persamaan $x'(t) = f(t, x(t))$ dan $x(t)$ diketahui, membentuk aproksimasi $x(t + h)$ dengan h adalah ukuran langkah dalam selang t , sehingga diperoleh rumus berikut.

$$x(t + h) \approx x(t) + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

dengan

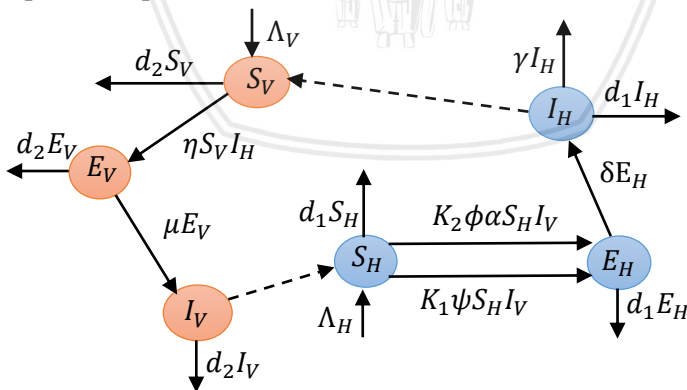
$$\begin{aligned} k_1 &= f(t, x(t)), \\ k_2 &= f\left(t + \frac{h}{2}, x(t) + \frac{h}{2}k_1\right), \\ k_3 &= f\left(t + \frac{h}{2}, x(t) + \frac{h}{2}k_2\right), \\ k_4 &= f\left(t + h, x(t) + hk_3\right) \end{aligned}$$

(Lenhart dan Workman, 2007).

2.8 Model Matematika Penyakit Layu Pinus tanpa Kontrol

Populasi dalam model penyakit layu pinus ada dua, yaitu populasi pohon pinus dan populasi vektor. Total populasi pohon pinus dinotasikan $N_H(t)$ dan dibagi menjadi tiga subpopulasi, yaitu subpopulasi pohon pinus rentan ($S_H(t)$), subpopulasi pohon pinus *exposed* ($E_H(t)$), dan subpopulasi pohon pinus terinfeksi ($I_H(t)$), dengan $N_H(t) = S_H(t) + E_H(t) + I_H(t)$. Total populasi vektor dinotasikan $N_V(t)$ dan dibagi menjadi tiga subpopulasi, yaitu subpopulasi vektor rentan ($S_V(t)$), subpopulasi vektor *exposed* ($E_V(t)$), dan subpopulasi vektor terinfeksi ($I_V(t)$), dengan $N_V(t) = S_V(t) + E_V(t) + I_V(t)$.

Pada model penyakit layu pinus tidak ada subpopulasi sembuh ($R_H(t)$) karena pohon pinus yang sudah terinfeksi akan mati pada tahun ini atau tahun berikutnya. Selanjutnya, aliran subpopulasi antar kompartemen $S_H, E_H, I_H, S_V, E_V,$ dan I_V disajikan dalam diagram kompartemen pada Gambar 2.1.



Gambar 2.1 Diagram kompartemen model penyakit layu pinus

Keterangan:

—————▶ : Transmisi pada masing-masing subpopulasi.

-----▶ : Penginfeksi dari pohon pinus terinfeksi ataupun dari vektor terinfeksi.

Berdasarkan diagram kompartemen model penyakit layu pinus, diperoleh sistem persamaan otonomus nonlinear sebagai berikut

$$\begin{aligned}\frac{dS_H}{dt} &= \Lambda_H - K_1\psi S_H I_V - K_2\phi\alpha S_H I_V - d_1 S_H, \\ \frac{dE_H}{dt} &= K_1\psi S_H I_V + K_2\phi\alpha S_H I_V - (d_1 + \delta)E_H, \\ \frac{dI_H}{dt} &= \delta E_H - (d_1 + \gamma)I_H, \\ \frac{dS_V}{dt} &= \Lambda_V - \eta S_V I_H - d_2 S_V, \\ \frac{dE_V}{dt} &= \eta S_V I_H - (d_2 + \mu)E_V, \\ \frac{dI_V}{dt} &= \mu E_V - d_2 I_V,\end{aligned}\tag{2.5}$$

dengan

Λ_H : laju pertumbuhan pohon pinus,

K_1 : laju penyebaran nemathoda dengan kontak langsung antara pohon pinus dan kumbang selama pematangan,

ψ : laju rata-rata jumlah kontak langsung per hari antara pohon pinus dan kumbang selama pematangan,

K_2 : laju penyebaran nemathoda dengan oviposisi,

ϕ : laju rata-rata jumlah penyebaran nemathoda per hari dengan oviposisi,

α : probabilitas pohon pinus rentan berhenti mengeluarkan *Oleoresin* tanpa terinfeksi oleh nemathoda,

δ : laju perubahan pohon pinus *exposed* menjadi pohon pinus terinfeksi,

d_1 : laju kematian alami pohon pinus,

γ : laju kematian pohon pinus karena terinfeksi penyakit,

Λ_V : laju pertumbuhan vektor,

η : laju terinfeksi vektor karena kontak dengan pinus yang terinfeksi penyakit layu pinus,

μ : laju perubahan vektor *exposed* menjadi vektor terinfeksi,

d_2 : laju kematian alami vektor,

dan semua parameter bernilai positif (Khan, dkk., 2017).



BAB III PEMBAHASAN

3.1 Titik Kesetimbangan Model Penyakit Layu Pinus

Titik kesetimbangan sistem (2.5) diperoleh apabila memenuhi

$$\frac{dS_H}{dt} = \frac{dE_H}{dt} = \frac{dI_H}{dt} = \frac{dS_V}{dt} = \frac{dE_V}{dt} = \frac{dI_V}{dt} = 0, \text{ yaitu}$$

$$\Lambda_H - K_1\psi S_H I_V - K_2\phi\alpha S_H I_V - d_1 S_H = 0, \quad (3.1. a)$$

$$K_1\psi S_H I_V + K_2\phi\alpha S_H I_V - (d_1 + \delta)E_H = 0, \quad (3.1. b)$$

$$\delta E_H - (d_1 + \gamma)I_H = 0, \quad (3.1. c)$$

$$\Lambda_V - \eta S_V I_H - d_2 S_V = 0, \quad (3.1. d)$$

$$\eta S_V I_H - (d_2 + \mu)E_V = 0, \quad (3.1. e)$$

$$\mu E_V - d_2 I_V = 0. \quad (3.1. f)$$

Berdasarkan persamaan (3.1.a) sampai (3.1.f) diperoleh

$$S_H = \frac{\Lambda_H}{K_1\psi I_V + K_2\phi\alpha I_V + d_1}, \quad (3.2. a)$$

$$E_H = \frac{K_1\psi S_H I_V + K_2\phi\alpha S_H I_V}{d_1 + \delta}, \quad (3.2. b)$$

$$I_H = \frac{\delta E_H}{d_1 + \gamma}, \quad (3.2. c)$$

$$S_V = \frac{\Lambda_V}{\eta I_H + d_2}, \quad (3.2. d)$$

$$E_V = \frac{\eta S_V I_H}{d_2 + \mu}, \quad (3.2. e)$$

$$I_V = \frac{\mu E_V}{d_2}. \quad (3.2. f)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.2.a) dan (3.2.f) ke persamaan (3.2.b) diperoleh

$$E_H = \frac{\Lambda_H \mu E_V (K_1 \psi + K_2 \phi \alpha)}{(K_1 \psi \mu E_V + K_2 \phi \alpha \mu E_V + d_1 d_2)(d_1 + \delta)}. \quad (3.3)$$

Selanjutnya, persamaan (3.2.e) disubstitusikan ke persamaan (3.3) diperoleh

$$E_H = \frac{\Lambda_H \mu \eta S_V I_H (K_1 \psi + K_2 \phi \alpha)}{(K_1 \psi \mu \eta S_V I_H + K_2 \phi \alpha \mu \eta S_V I_H + d_1 d_2 (d_2 + \mu))(d_1 + \delta)}. \quad (3.4)$$

Kemudian, dengan mensubstitusikan persamaan (3.2.c) dan (3.2.d) ke persamaan (3.4) diperoleh

$$E_H = \frac{\Lambda_H \mu \eta \Lambda_V \delta E_H (K_1 \psi + K_2 \phi \alpha)}{(K_1 \psi \mu \eta \Lambda_V \delta E_H + K_2 \phi \alpha \mu \eta \Lambda_V \delta E_H + d_1 d_2 (d_2 + \mu)(\eta \delta E_H + d_2((d_1 + \gamma))(d_1 + \delta))}. \quad (3.5)$$

Dengan demikian persamaan (3.5) dapat dituliskan sebagai

$$E_H((\mu\eta\Lambda_V\delta E_H(K_1\psi + K_2\phi\alpha) + d_1d_2(d_2 + \mu)\eta\delta E_H + d_1d_2^2(d_2 + \mu)(d_1 + \gamma))(d_1 + \delta) - \Lambda_H\mu\eta\Lambda_V\delta(K_1\psi + K_2\phi\alpha)) = 0,$$

sehingga terdapat dua kemungkinan nilai E_H , yaitu

$$E_H = 0$$

atau

$$E_H = \frac{\Lambda_H\mu\eta\Lambda_V\delta(K_1\psi + K_2\phi\alpha) - d_1d_2^2(d_2 + \mu)(d_1 + \gamma)(d_1 + \delta)}{\eta\delta(d_1 + \delta)(\mu\Lambda_V(K_1\psi + K_2\phi\alpha) + d_1d_2(d_2 + \mu))}. \quad (3.6)$$

Jika $E_H = 0$, maka berdasarkan persamaan (3.2.c), (3.2.e), dan (3.2.f) diperoleh

$$E_H = I_H = E_V = I_V = 0.$$

Dengan mensubstitusikan $E_H = I_H = E_V = I_V = 0$ ke persamaan (3.2.a) dan (3.2.b) diperoleh

$$\Lambda_H - d_1S_H = 0 \text{ atau } S_H = \frac{\Lambda_H}{d_1} = S_H^0$$

dan

$$\Lambda_V - d_2S_V = 0 \text{ atau } S_V = \frac{\Lambda_V}{d_2} = S_V^0.$$

Dengan demikian, diperoleh titik kesetimbangan yang pertama, yaitu

$$P_0 = \left(\frac{\Lambda_H}{d_1}, 0, 0, \frac{\Lambda_V}{d_2}, 0, 0 \right) = (S_H^0, 0, 0, S_V^0, 0, 0).$$

Titik kesetimbangan P_0 merupakan titik kesetimbangan bebas penyakit karena $E_H = I_H = E_V = I_V = 0$ yang berarti tidak ada transmisi *Bursaphelenchus xylophilus*.

Angka reproduksi dasar menyatakan banyaknya individu yang terinfeksi akibat satu individu terinfeksi selama proses penularan penyakit dalam suatu populasi rentan. Angka reproduksi dasar dapat diperoleh dengan menggunakan metode matriks generasi selanjutnya. Sistem (2.5) dapat dituliskan sebagai

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix},$$

dengan x_1' , x_2' , x_3' , dan x_4' masing-masing menyatakan subpopulasi pohon pinus *exposed*, subpopulasi pohon pinus terinfeksi, subpopulasi vektor *exposed*, dan subpopulasi vektor terinfeksi.

Berdasarkan sistem (2.5), matriks F didefinisikan

$$F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1\psi S_H I_V + K_2\phi\alpha S_H I_V \\ 0 \\ \eta S_V I_H \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Turunan parsial matriks F adalah

$$DF = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial E_H} & \frac{\partial f_1}{\partial I_H} & \frac{\partial f_1}{\partial E_V} & \frac{\partial f_1}{\partial I_V} \\ \frac{\partial f_2}{\partial E_H} & \frac{\partial f_2}{\partial I_H} & \frac{\partial f_2}{\partial E_V} & \frac{\partial f_2}{\partial I_V} \\ \frac{\partial f_3}{\partial E_H} & \frac{\partial f_3}{\partial I_H} & \frac{\partial f_3}{\partial E_V} & \frac{\partial f_3}{\partial I_V} \\ \frac{\partial f_4}{\partial E_H} & \frac{\partial f_4}{\partial I_H} & \frac{\partial f_4}{\partial E_V} & \frac{\partial f_4}{\partial I_V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & K_1\psi S_H + K_2\phi\alpha S_H \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta S_V & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

sehingga pada titik kesetimbangan P_0 , DF dinyatakan sebagai

$$DF(P_0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & K_1\psi S_H^0 + K_2\phi\alpha S_H^0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta S_V^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya, didefinisikan matriks V , yaitu

$$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (d_1 + \delta)E_H \\ (d_1 + \gamma)I_H - \delta E_H \\ (d_2 + \mu)E_V \\ d_2 I_V - \mu E_V \end{bmatrix}.$$

Turunan parsial matriks V adalah

$$DV = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial E_H} & \frac{\partial v_1}{\partial I_H} & \frac{\partial v_1}{\partial E_V} & \frac{\partial v_1}{\partial I_V} \\ \frac{\partial v_2}{\partial E_H} & \frac{\partial v_2}{\partial I_H} & \frac{\partial v_2}{\partial E_V} & \frac{\partial v_2}{\partial I_V} \\ \frac{\partial v_3}{\partial E_H} & \frac{\partial v_3}{\partial I_H} & \frac{\partial v_3}{\partial E_V} & \frac{\partial v_3}{\partial I_V} \\ \frac{\partial v_4}{\partial E_H} & \frac{\partial v_4}{\partial I_H} & \frac{\partial v_4}{\partial E_V} & \frac{\partial v_4}{\partial I_V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (d_1 + \delta) & 0 & 0 & 0 \\ -\delta & (d_1 + \gamma) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (d_2 + \mu) & 0 \\ 0 & 0 & -\mu & d_2 \end{bmatrix},$$

sehingga pada titik kesetimbangan P_0 diperoleh DV , yaitu

$$DV(P_0) = \begin{bmatrix} (d_1 + \delta) & 0 & 0 & 0 \\ -\delta & (d_1 + \gamma) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (d_2 + \mu) & 0 \\ 0 & 0 & -\mu & d_2 \end{bmatrix}.$$

Invers dari matriks $DV(P_0)$ adalah

$$DV(P_0)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{d_1+\delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\delta}{(d_1+\delta)(d_1+\gamma)} & \frac{1}{d_1+\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{d_2+\mu} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mu}{d_2(d_2+\mu)} & \frac{1}{d_2} \end{bmatrix}.$$

Berdasarkan definisi matriks generasi selanjutnya, diperoleh

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\mu S_H^0(K_1\psi+K_2\phi\alpha)}{d_2(d_2+\mu)} & \frac{S_H^0(K_1\psi+K_2\phi\alpha)}{d_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\delta\eta S_V^0}{(d_1+\delta)(d_1+\gamma)} & \frac{\eta S_V^0}{(d_1+\gamma)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nilai eigen dari matriks R diperoleh dengan menyelesaikan persamaan $|R - \lambda I| = 0$, sehingga diperoleh akar karakteristik

$$\lambda_{1,2} = 0 \text{ dan } \lambda_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{\delta\mu\eta\Lambda_H\Lambda_V(K_1\psi+K_2\phi\alpha)}{d_1d_2^2(d_1+\gamma)(d_1+\delta)(d_2+\mu)}}.$$

Angka reproduksi dasar adalah radius *spectral* dari matriks R . Dengan demikian diperoleh angka reproduksi dasar \mathcal{R}_0 , yaitu

$$\mathcal{R}_0 = \sqrt{\frac{\delta\mu\eta\Lambda_H\Lambda_V(K_1\psi+K_2\phi\alpha)}{d_1d_2^2(d_1+\gamma)(d_1+\delta)(d_2+\mu)}}.$$

Selanjutnya, ketika $E_H \neq 0$ diperoleh titik kesetimbangan yang kedua, yaitu titik kesetimbangan endemik yang berarti terjadi penyebaran penyakit layu pinus dalam suatu populasi dan masih terdapat populasi yang terinfeksi *Bursaphelenchus xylophilus*. Jika persamaan (3.6) dikaitkan dengan nilai \mathcal{R}_0 diperoleh

$$\begin{aligned} E_H &= \frac{d_1d_2^2(d_2+\mu)(d_1+\gamma)(d_1+\delta)\left(\frac{\Lambda_H\mu\eta\Lambda_V\delta(K_1\psi+K_2\phi\alpha)}{d_1d_2^2(d_2+\mu)(d_1+\gamma)(d_1+\delta)}-1\right)}{\eta\delta(d_1+\delta)(\mu\Lambda_V(K_1\psi+K_2\phi\alpha)+d_1d_2(d_2+\mu))} \\ &= \frac{d_1d_2^2(d_1+\gamma)(d_1+\delta)(d_2+\mu)(\mathcal{R}_0^2-1)}{\delta\eta(d_1+\delta)(d_1d_2(d_2+\mu)+\Lambda_V\mu(\alpha K_2\phi+K_1\psi))}. \end{aligned}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.6) ke persamaan (3.2.c) diperoleh

$$I_H = \frac{\Lambda_H\mu\eta\Lambda_V\delta(K_1\psi+K_2\phi\alpha)-d_1d_2^2(d_1+\gamma)(d_1+\delta)(d_2+\mu)}{\eta(d_1+\gamma)(d_1+\delta)(d_1d_2(d_2+\mu)+\Lambda_V\mu(\alpha K_2\phi+K_1\psi))} \quad (3.7)$$

atau I_H dapat dituliskan sebagai

$$I_H = \frac{d_1d_2^2(d_1+\gamma)(d_1+\delta)(d_2+\mu)(\mathcal{R}_0^2-1)}{\eta(d_1+\gamma)(d_1+\delta)(d_1d_2(d_2+\mu)+\Lambda_V\mu(\alpha K_2\phi+K_1\psi))}.$$

Kemudian, persamaan (3.7) disubstitusikan ke persamaan (3.2.d) diperoleh

$$S_V = \frac{(d_1+\gamma)(d_1+\delta)(d_1d_2(d_2+\mu)+\Lambda_V\mu(\alpha K_2\phi+K_1\psi))}{\mu(\alpha K_2\phi+K_1\psi)(d_2(d_1+\gamma)(d_1+\delta)+\delta\eta\Lambda_H)}. \quad (3.8)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.7) dan (3.8) ke persamaan (3.2.e) diperoleh

$$E_V = \frac{\Lambda_H\mu\eta\Lambda_V\delta(K_1\psi+K_2\phi\alpha)-d_1d_2^2(d_1+\gamma)(d_1+\delta)(d_2+\mu)}{(d_2+\mu)\mu(\alpha K_2\phi+K_1\psi)(d_2(d_1+\gamma)(d_1+\delta)+\delta\eta\Lambda_H)} \quad (3.9)$$

atau E_V dapat dituliskan sebagai

$$E_V = \frac{d_1d_2^2(d_1+\gamma)(d_1+\delta)(d_2+\mu)(\mathcal{R}_0^2-1)}{(d_2+\mu)\mu(\alpha K_2\phi+K_1\psi)(d_2(d_1+\gamma)(d_1+\delta)+\delta\eta\Lambda_H)}.$$

Selanjutnya, persamaan (3.9) disubstitusikan ke persamaan (3.2.f) diperoleh

$$I_V = \frac{\Lambda_H\mu\eta\Lambda_V\delta(K_1\psi+K_2\phi\alpha)-d_1d_2^2(d_1+\gamma)(d_1+\delta)(d_2+\mu)}{d_2(d_2+\mu)(\alpha K_2\phi+K_1\psi)(d_2(d_1+\gamma)(d_1+\delta)+\delta\eta\Lambda_H)} \quad (3.10)$$

atau I_V dapat dituliskan sebagai

$$I_V = \frac{d_1d_2^2(d_1+\gamma)(d_1+\delta)(d_2+\mu)(\mathcal{R}_0^2-1)}{d_2(d_2+\mu)(\alpha K_2\phi+K_1\psi)(d_2(d_1+\gamma)(d_1+\delta)+\delta\eta\Lambda_H)}.$$

Untuk memperoleh nilai S_H , persamaan (3.10) disubstitusikan ke persamaan (3.2.a) diperoleh

$$S_H = \frac{d_2(d_2+\mu)(d_2(d_1+\gamma)(d_1+\delta)+\delta\eta\Lambda_H)}{\delta\eta(d_1d_2(d_2+\mu)+\Lambda_V\mu(\alpha K_2\phi+K_1\psi))}. \quad (3.11)$$

Dengan demikian, berdasarkan persamaan (3.6) sampai (3.11) diperoleh titik kesetimbangan endemik sistem (2.5), yaitu

$$P_1 = (S_H^*, E_H^*, I_H^*, S_V^*, E_V^*, I_V^*),$$

dengan

$$S_H^* = \frac{d_2(d_2+\mu)(d_2(d_1+\gamma)(d_1+\delta)+\delta\eta\Lambda_H)}{\delta\eta(d_1d_2(d_2+\mu)+\Lambda_V\mu(\alpha K_2\phi+K_1\psi))},$$

$$E_H^* = \frac{d_1d_2^2(d_1+\gamma)(d_1+\delta)(d_2+\mu)(\mathcal{R}_0^2-1)}{\delta\eta(d_1+\delta)(d_1d_2(d_2+\mu)+\Lambda_V\mu(\alpha K_2\phi+K_1\psi))},$$

$$I_H^* = \frac{d_1d_2^2(d_1+\gamma)(d_1+\delta)(d_2+\mu)(\mathcal{R}_0^2-1)}{\eta(d_1+\gamma)(d_1+\delta)(d_1d_2(d_2+\mu)+\Lambda_V\mu(\alpha K_2\phi+K_1\psi))},$$

$$S_V^* = \frac{(d_1+\gamma)(d_1+\delta)(d_1d_2(d_2+\mu)+\Lambda_V\mu(\alpha K_2\phi+K_1\psi))}{\mu(\alpha K_2\phi+K_1\psi)(d_2(d_1+\gamma)(d_1+\delta)+\delta\eta\Lambda_H)},$$

$$E_V^* = \frac{d_1d_2^2(d_1+\gamma)(d_1+\delta)(d_2+\mu)(\mathcal{R}_0^2-1)}{(d_2+\mu)\mu(\alpha K_2\phi+K_1\psi)(d_2(d_1+\gamma)(d_1+\delta)+\delta\eta\Lambda_H)},$$

$$I_V^* = \frac{d_1d_2^2(d_1+\gamma)(d_1+\delta)(d_2+\mu)(\mathcal{R}_0^2-1)}{d_2(d_2+\mu)(\alpha K_2\phi+K_1\psi)(d_2(d_1+\gamma)(d_1+\delta)+\delta\eta\Lambda_H)}.$$

Nilai E_H^* , I_H^* , E_V^* , dan I_V^* positif apabila $\mathcal{R}_0 > 1$, sehingga titik kesetimbangan P_1 eksis apabila $\mathcal{R}_0 > 1$.

3.2 Analisis Kestabilan Global Titik Kesetimbangan

Sifat kestabilan global titik kesetimbangan dapat diketahui dengan mengkonstruksi fungsi Lyapunov. Fungsi Lyapunov yang digunakan pada skripsi ini sesuai dengan artikel Khan (2017). Pada subbab ini dilakukan analisis kestabilan global titik kesetimbangan P_0 dan P_1 .

3.2.1 Kestabilan global titik kesetimbangan P_0

Didefinisikan fungsi Lyapunov

$$L_1(S_H, E_H, I_H, S_V, E_V, I_V) = w_1(S_H - S_H^0 \ln S_H - S_H^0 + S_H^0 \ln S_H^0) + w_2 E_H + w_3 I_H + w_4(S_V - S_V^0 \ln S_V - S_V^0 + S_V^0 \ln S_V^0) + w_5 E_V + w_6 I_V, \quad (3.12)$$

pada $\Psi = \left\{ (S_H, E_H, I_H, S_V, E_V, I_V) \in \mathbb{R}_+^6 \mid 0 \leq S_H + E_H + I_H \leq \frac{\Lambda_H}{a_1}, 0 \leq S_V + E_V + I_V \leq \frac{\Lambda_V}{a_2} \right\}$. dengan $w_i \in \mathbb{R}^+$, $i = 1, 2, \dots, 6$. Selanjutnya, untuk memeriksa apakah fungsi tersebut merupakan fungsi Lyapunov kuat atau lemah untuk titik kesetimbangan $P_0 = (S_H^0, 0, 0, S_V^0, 0, 0)$, perlu diperiksa apakah fungsi $L_1(S_H, E_H, I_H, S_V, E_V, I_V)$ memenuhi kondisi 1 pada Definisi 2.4.1, yaitu $L_1(P_0) = 0$ dan $L_1(S_H, E_H, I_H, S_V, E_V, I_V) > 0$, untuk setiap $(S_H, E_H, I_H, S_V, E_V, I_V) \neq P_0$.

a. Pembuktian $L_1(P_0) = 0$

$$L_1(P_0) = w_1(S_H^0 - S_H^0 \ln S_H^0 - S_H^0 + S_H^0 \ln S_H^0) + w_2(0) + w_3(0) + w_4(S_V^0 - S_V^0 \ln S_V^0 - S_V^0 + S_V^0 \ln S_V^0) + w_5(0) + w_6(0),$$

$$L_1(P_0) = 0.$$

b. Pembuktian untuk $L_1(S_H, E_H, I_H, S_V, E_V, I_V) > 0$, untuk setiap $(S_H, E_H, I_H, S_V, E_V, I_V) \neq P_0$.

Diketahui

$$L_1(S_H, E_H, I_H, S_V, E_V, I_V) = w_1(S_H - S_H^0 \ln S_H - S_H^0 + S_H^0 \ln S_H^0) + w_2 E_H + w_3 I_H + w_4(S_V - S_V^0 \ln S_V - S_V^0 + S_V^0 \ln S_V^0) + w_5 E_V + w_6 I_V.$$

Misalkan $f(S_H) = S_H - S_H^0 \ln S_H - S_H^0 + S_H^0 \ln S_H^0$ dan $f(S_H)$ terdefinisi pada domain $S_H \in \mathbb{R}^+$ sehingga turunan pertama $f(S_H)$ terhadap S_H dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$f'(S_H) = 1 - \frac{S_H^0}{S_H}, S_H \in (0, \infty).$$

Titik stasioner diperoleh ketika $f'(S_H) = 0$. Nilai yang memenuhi $f'(S_H) = 0$ adalah $S_H = S_H^0$, sehingga $f'(S_H^0) = 0$. Jika $S_H \in (0, S_H^0)$, maka berlaku $f'(S_H) < 0$ dan jika $S_H \in (S_H^0, \infty)$, maka berlaku $f'(S_H) > 0$. Oleh karena itu, $f(S_H)$ monoton turun pada selang $(0, S_H^0)$ dan monoton naik pada selang (S_H^0, ∞) . Berdasarkan uraian tersebut, jelas bahwa $(S_H^0, 0)$ merupakan titik minimum $f(S_H)$. Dengan demikian, nilai minimum $f(S_H)$ adalah 0 dan pasti berlaku $f(S_H) > 0, \forall S_H \neq S_H^0 \in \Psi$. Hal ini juga berlaku untuk membuktikan $f(S_V) = S_V - S_V^0 \ln S_V - S_V^0 + S_V^0 \ln S_V^0 > 0$. Jadi terbukti bahwa $L_1(S_H, E_H, I_H, S_V, E_V, I_V) > 0$.

Selanjutnya, akan ditunjukkan $L_1(S_H, E_H, I_H, S_V, E_V, I_V)$ merupakan fungsi Lyapunov kuat, sehingga harus memenuhi Definisi 2.4.2 kondisi 2, yaitu $L_1'(S_H, E_H, I_H, S_V, E_V, I_V) < 0$, untuk setiap $(S_H, E_H, I_H, S_V, E_V, I_V) \neq (S_H^0, E_H^0, I_H^0, S_V^0, E_V^0, I_V^0)$, dengan $(S_H, E_H, I_H, S_V, E_V, I_V) \in \Psi$. Berdasarkan persamaan (3.12) diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{dL_1}{dt} = & w_1 \left(1 - \frac{S_H^0}{S_H} \right) \frac{dS_H}{dt} + w_2 \frac{dE_H}{dt} + w_3 \frac{dI_H}{dt} + \\ & w_4 \left(1 - \frac{S_V^0}{S_V} \right) \frac{dS_V}{dt} + w_5 \frac{dE_V}{dt} + w_6 \frac{dI_V}{dt}. \end{aligned}$$

Dengan mengubah $\frac{dS_H}{dt}, \frac{dE_H}{dt}, \frac{dI_H}{dt}, \frac{dS_V}{dt}, \frac{dE_V}{dt}$, dan $\frac{dI_V}{dt}$ sesuai dengan sistem persamaan (2.5) diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{dL_1}{dt} = & w_1 \left(1 - \frac{S_H^0}{S_H} \right) (\Lambda_H - K_1 \psi S_H I_V - K_2 \phi \alpha S_H I_V - d_1 S_H) + \\ & w_2 (K_1 \psi S_H I_V + K_2 \phi \alpha S_H I_V - (d_1 + \delta) E_H) + \\ & w_3 (\delta E_H - (d_1 + \gamma) I_H) + w_4 \left(1 - \frac{S_V^0}{S_V} \right) (\Lambda_V - \eta S_V I_H - \\ & d_2 S_V) + w_5 (\eta S_V I_H - (d_2 + \mu) E_V) + w_6 (\mu E_V - d_2 I_V), \\ \frac{dL_1}{dt} = & w_1 \Lambda_H - w_1 K_1 \psi S_H I_V - w_1 K_2 \phi \alpha S_H I_V - w_1 d_1 S_H - \\ & w_1 \Lambda_H \frac{S_H^0}{S_H} + w_1 \frac{S_H^0}{S_H} K_1 \psi S_H I_V + w_1 \frac{S_H^0}{S_H} K_2 \phi \alpha S_H I_V + \\ & w_1 \frac{S_H^0}{S_H} d_1 S_H + w_2 K_1 \psi S_H I_V + w_2 K_2 \phi \alpha S_H I_V - \end{aligned}$$

$$w_2(d_1 + \delta)E_H + w_3\delta E_H - w_3(d_1 + \gamma)I_H + w_4\Lambda_V - w_4\eta S_V I_H - w_4 d_2 S_V - w_4 \frac{S_V^0}{S_V} \Lambda_V + w_4 \frac{S_V^0}{S_V} \eta S_V I_H + w_4 \frac{S_V^0}{S_V} d_2 S_V + w_5 \eta S_V I_H - w_5(d_2 + \mu)E_V + w_6 \mu E_V - w_6 d_2 I_V .$$

Diketahui bahwa $S_H^0 = \frac{\Lambda_H}{d_1}$ dan $S_V^0 = \frac{\Lambda_V}{d_2}$, sehingga $\frac{dL_1}{dt}$ dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned} \frac{dL_1}{dt} = & w_1 S_H^0 d_1 + (w_2 - w_1)(K_1 \psi S_H I_V + K_2 \phi \alpha S_H I_V) - \\ & w_1 d_1 S_H - w_1 d_1 \frac{(S_H^0)^2}{S_H} + w_1 \frac{\Lambda_H}{d_1} K_1 \psi I_V + w_1 \frac{\Lambda_H}{d_1} K_2 \phi \alpha I_V + \\ & w_1 S_H^0 d_1 + (w_3 \delta - w_2(d_1 + \delta))E_H + w_4 S_V^0 d_2 - \\ & w_4 S_V d_2 + (w_4 \frac{\Lambda_V}{d_2} \eta - w_3(d_1 + \gamma))I_H - w_4 \Lambda_V \frac{S_V^0}{S_V} + \\ & w_4 S_V^0 d_2 + (w_5 - w_4)\eta S_V I_H + (w_6 \mu - w_5(d_2 + \mu))E_V - \\ & w_6 d_2 I_V, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dL_1}{dt} = & -w_1 d_1 \frac{(S_H - S_H^0)^2}{S_H} - w_4 d_2 \frac{(S_V - S_V^0)^2}{S_V} + \\ & (w_2 - w_1)(K_1 \psi S_H I_V + K_2 \phi \alpha S_H I_V) + (w_1 \frac{\Lambda_H}{d_1} (K_1 \psi + \\ & K_2 \phi \alpha) - w_6 d_2) I_V + (w_3 \delta - w_2(d_1 + \delta))E_H + \\ & (w_4 \frac{\Lambda_V}{d_2} \eta - w_3(d_1 + \gamma))I_H + (w_5 - w_4)\eta S_V I_H + \\ & (w_6 \mu - w_5(d_2 + \mu))E_V. \end{aligned}$$

Pilih $w_1 = w_2 = \delta$, $w_3 = d_1 + \delta$, $w_4 = w_5 = \frac{d_2(d_1 + \gamma)(d_1 + \delta)}{\eta \Lambda_V}$, dan $w_6 = \frac{d_2(d_1 + \gamma)(d_1 + \delta)(d_2 + \mu)}{\eta \mu \Lambda_V}$ diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{dL_1}{dt} = & -\delta d_1 \frac{(S_H - S_H^0)^2}{S_H} - \frac{d_2^2(d_1 + \gamma)(d_1 + \delta)}{\eta \Lambda_V} \frac{(S_V - S_V^0)^2}{S_V} + \\ & \left(\delta \frac{\Lambda_H}{d_1} (K_1 \psi + K_2 \phi \alpha) - \frac{d_2^2(d_1 + \gamma)(d_1 + \delta)(d_2 + \mu)}{\eta \mu \Lambda_V} \right) I_V, \\ \frac{dL_1}{dt} = & -\delta d_1 \frac{(S_H - S_H^0)^2}{S_H} - \frac{d_2^2(d_1 + \gamma)(d_1 + \delta)}{\eta \Lambda_V} \frac{(S_V - S_V^0)^2}{S_V} + \\ & \left(\frac{\delta \eta \mu \Lambda_V \Lambda_H (K_1 \psi + K_2 \phi \alpha) - d_1 d_2^2(d_1 + \gamma)(d_1 + \delta)(d_2 + \mu)}{d_1 \eta \mu \Lambda_V} \right) I_V, \\ \frac{dL_1}{dt} = & -\frac{d_1 \delta (S_H - S_H^0)^2}{S_H} - \frac{d_2^2(d_1 + \gamma)(d_1 + \delta)(S_V - S_V^0)^2}{\eta \Lambda_V S_V} - \\ & \frac{d_2^2(d_1 + \gamma)(d_1 + \delta)(d_1 + \mu)}{\eta \mu \Lambda_V} (1 - \mathcal{R}_0^2) I_V. \end{aligned}$$

$\frac{dL_1}{dt}$ bernilai negatif apabila $\mathcal{R}_0 \leq 1$ dan bernilai nol jika dan hanya jika $S_H = S_H^0$, $S_V = S_V^0$, dan $I_V = 0$. Dengan demikian, titik kesetimbangan P_0 stabil asimtotik global apabila $\mathcal{R}_0 \leq 1$.

3.2.2 Kestabilan global titik kesetimbangan P_1

Didefinisikan fungsi Lyapunov

$$\begin{aligned}
 L_2(S_H, E_H, I_H, S_V, E_V, I_V) &= S_H - S_H^* \ln S_H - S_H^* + S_H^* \ln S_H^* + E_H - \\
 &E_H^* \ln E_H - E_H^* + E_H^* \ln E_H^* + \\
 &\frac{d_1 + \delta}{\delta} (I_H - I_H^* \ln I_H - I_H^* + I_H^* \ln I_H^*) + \\
 &S_V - S_V^* \ln S_V - S_V^* + S_V^* \ln S_V^* + E_V - \\
 &E_V^* \ln E_V - E_V^* + E_V^* \ln E_V^* + \\
 &\frac{d_2 + \delta}{\mu} (I_V - I_V^* \ln I_V - I_V^* + I_V^* \ln I_V^*),
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

pada $\Psi = \{(S_H, E_H, I_H, S_V, E_V, I_V) \in \mathbb{R}_+^6 \mid 0 \leq S_H + E_H + I_H \leq \frac{\Lambda_H}{d_1}, 0 \leq S_V + E_V + I_V \leq \frac{\Lambda_V}{d_2}\}$. Selanjutnya, untuk memeriksa apakah fungsi tersebut merupakan fungsi Lyapunov kuat atau lemah untuk titik kesetimbangan $P_1 = (S_H^*, E_H^*, I_H^*, S_V^*, E_V^*, I_V^*)$, perlu diperiksa apakah fungsi $L_2(S_H, E_H, I_H, S_V, E_V, I_V)$ memenuhi kondisi 1 pada Definisi 2.4.1, yaitu $L_2(P_1) = 0$ dan $L_2(S_H, E_H, I_H, S_V, E_V, I_V) > 0$, untuk setiap $(S_H, E_H, I_H, S_V, E_V, I_V) \neq P_1$.

a. Pembuktian $L_2(P_1) = 0$

$$\begin{aligned}
 L_2(P_1) &= S_H^* - S_H^* \ln S_H^* - S_H^* + S_H^* \ln S_H^* + E_H^* - \\
 &E_H^* \ln E_H^* - E_H^* + E_H^* \ln E_H^* - \\
 &\frac{d_1 + \delta}{\delta} (I_H^* - I_H^* \ln I_H^* - I_H^* + I_H^* \ln I_H^*) + \\
 &S_V^* - S_V^* \ln S_V^* - S_V^* + S_V^* \ln S_V^* + E_V^* - \\
 &E_V^* \ln E_V^* - E_V^* + E_V^* \ln E_V^* + \\
 &\frac{d_2 + \delta}{\mu} (I_V^* - I_V^* \ln I_V^* - I_V^* + I_V^* \ln I_V^*),
 \end{aligned}$$

$$L_2(P_1) = 0.$$

b. Pembuktian untuk $L_2(S_H, E_H, I_H, S_V, E_V, I_V) > 0$, untuk setiap $(S_H, E_H, I_H, S_V, E_V, I_V) \neq P_1$.

Diketahui

$$\begin{aligned}
 L_2(S_H, E_H, I_H, S_V, E_V, I_V) &= S_H - S_H^* \ln S_H - S_H^* + S_H^* \ln S_H^* + E_H - E_H^* \ln E_H - \\
 &E_H^* + E_H^* \ln E_H^* + \frac{d_1 + \delta}{\delta} (I_H - I_H^* \ln I_H - I_H^* + I_H^* \ln I_H^*) +
 \end{aligned}$$

$$S_V - S_V^* \ln S_V - S_V^* + S_V^* \ln S_V^* + E_V - E_V^* \ln E_V - E_V^* + E_V^* \ln E_V^* + \frac{d_2 + \delta}{\mu} (I_V - I_V^* \ln I_V - I_V^* + I_V^* \ln I_V^*).$$

Misalkan $g(S_H) = S_H - S_H^* \ln S_H - S_H^* + S_H^*$ dan $g(S_H)$ terdefinisi pada domain $S_H \in \mathbb{R}^+$, sehingga turunan pertama $g(S_H)$ terhadap S_H dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$g'(S_H) = 1 - \frac{S_H^*}{S_H}, S_H \in (0, \infty).$$

Titik stasioner diperoleh ketika $g'(S_H) = 0$. Nilai yang memenuhi $g'(S_H) = 0$ adalah $S_H = S_H^*$. Dengan menggunakan cara pembuktian yang sama pada subsubbab (3.2.2) bagian b, diperoleh nilai minimum $g(S_H)$ adalah 0 dan pasti berlaku $g(S_H) > 0, \forall S_H \neq S_H^* \in \Psi$. Hal ini juga berlaku untuk membuktikan

$$\begin{aligned} g(E_H) &= E_H - E_H^* \ln E_H - E_H^* + E_H^* \ln E_H^* > 0, \\ g(I_H) &= I_H - I_H^* \ln I_H - I_H^* + I_H^* \ln I_H^* > 0, \\ g(S_V) &= S_V - S_V^* \ln S_V - S_V^* + S_V^* \ln S_V^* > 0, \\ g(E_V) &= E_V - E_V^* \ln E_V - E_V^* + E_V^* \ln E_V^* > 0, \end{aligned}$$

dan

$$g(I_V) = I_V - I_V^* \ln I_V - I_V^* + I_V^* \ln I_V^* > 0.$$

Dengan demikian, terbukti bahwa $L_2(S_H, E_H, I_H, S_V, E_V, I_V) > 0$.

Selanjutnya, akan ditunjukkan $L_2(S_H, E_H, I_H, S_V, E_V, I_V)$ merupakan fungsi Lyapunov kuat, sehingga harus memenuhi Definisi 2.4.2 kondisi 2, yaitu $L_2'(S_H, E_H, I_H, S_V, E_V, I_V) < 0$, untuk setiap $(S_H, E_H, I_H, S_V, E_V, I_V) \neq (S_H^*, E_H^*, I_H^*, S_V^*, E_V^*, I_V^*)$, dengan $(S_H, E_H, I_H, S_V, E_V, I_V) \in \Psi$. Berdasarkan persamaan (3.4) diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{dL_2}{dt} &= \left(1 - \frac{S_H^*}{S_H}\right) \frac{dS_H}{dt} + \left(1 - \frac{E_H^*}{E_H}\right) \frac{dE_H}{dt} + \frac{d_1 + \delta}{\delta} \left(1 - \frac{I_H^*}{I_H}\right) \frac{dI_H}{dt} + \\ &\quad \left(1 - \frac{S_V^*}{S_V}\right) \frac{dS_V}{dt} + \left(1 - \frac{E_V^*}{E_V}\right) \frac{dE_V}{dt} + \frac{d_2 + \mu}{\mu} \left(1 - \frac{I_V^*}{I_V}\right) \frac{dI_V}{dt}. \end{aligned}$$

Dengan mengubah $\frac{dS_H}{dt}, \frac{dE_H}{dt}, \frac{dI_H}{dt}, \frac{dS_V}{dt}, \frac{dE_V}{dt}$, dan $\frac{dI_V}{dt}$ sesuai dengan sistem persamaan (2.5) diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{dL_2}{dt} &= \left(1 - \frac{S_H^*}{S_H}\right) (\Lambda_H - K_1 \psi S_H I_V - K_2 \phi \alpha S_H I_V - d_1 S_H) + \\ &\quad \left(1 - \frac{E_H^*}{E_H}\right) (K_1 \psi S_H I_V + K_2 \phi \alpha S_H I_V - (d_1 + \delta) E_H) + \\ &\quad \frac{d_1 + \delta}{\delta} \left(1 - \frac{I_H^*}{I_H}\right) (\delta E_H - (d_1 + \gamma) I_H) + \left(1 - \frac{S_V^*}{S_V}\right) (\Lambda_V - \end{aligned}$$

$$\eta S_V I_H - d_2 S_V) + \left(1 - \frac{E_V^*}{E_V}\right) (\eta S_V I_H - (d_2 + \mu) E_V) + \frac{d_2 + \mu}{\mu} \left(1 - \frac{I_V^*}{I_V}\right) (\mu E_V - d_2 I_V).$$

Misalkan $Q = K_1 \psi - K_2 \phi \alpha$. Berdasarkan persamaan (3.1.a) sampai (3.1.f), pada titik kesetimbangan P_1 berlaku

$$\begin{aligned} \Lambda_H &= Q S_H^* I_V^* + d_1 S_H^*, (d_1 + \delta) E_H^* = Q S_H^* I_V^*, \\ \delta E_H^* &= (d_1 + \gamma) I_H^*, \frac{(d_1 + \delta)(d_1 + \gamma) I_H^*}{\delta} = Q S_H^* I_V^*, \\ \Lambda_V &= \eta S_V^* I_H^* + d_2 S_V^*, \eta S_V^* I_H^* = (d_2 + \mu) E_V^*, \\ \mu E_V^* &= d_2 I_V^*, \eta S_V^* I_H^* = \frac{(d_2 + \mu) d_2 I_V^*}{\mu}. \end{aligned}$$

Dengan demikian $\frac{dL_2}{dt}$ dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned} \frac{dL_2}{dt} &= \left(1 - \frac{S_H^*}{S_H}\right) (Q S_H^* I_V^* + d_1 S_H^* - Q S_H I_V - d_1 S_H) + Q S_H I_V - \\ &Q S_H I_V \frac{E_H^*}{E_H} - (d_1 + \delta) E_H + (d_1 + \delta) E_H^* + (d_1 + \delta) E_H - \\ &(d_1 + \delta) E_H \frac{I_H^*}{I_H} - \frac{(d_1 + \delta)(d_1 + \gamma) I_H^*}{\delta} + \frac{(d_1 + \delta)(d_1 + \gamma) I_H^*}{\delta} + \\ &\left(1 - \frac{S_V^*}{S_V}\right) (\eta S_V^* I_H^* + d_2 S_V^* - \eta S_V I_H - d_2 S_V) + \eta S_V I_H - \\ &(d_2 + \mu) E_V - \eta S_V I_H \frac{E_V^*}{E_V} + (d_2 + \mu) E_V^* + (d_2 + \mu) E_V - \\ &\frac{(d_2 + \mu) d_2 I_V}{\mu} - (d_2 + \mu) E_V \frac{I_V^*}{I_V} + \frac{(d_2 + \mu) d_2 I_V}{\mu}, \\ \frac{dL_2}{dt} &= d_1 S_H^* - \frac{(d_1 S_H^*)^2}{S_H} - d_1 S_H + d_1 S_H^* + \left(1 - \frac{S_H^*}{S_H}\right) Q S_H^* I_V^* + \\ &Q S_H^* I_V - Q S_H I_V \frac{E_H^*}{E_H} + Q S_H^* I_V^* - Q S_H^* I_V^* \frac{E_H}{E_H^*} \frac{I_H^*}{I_H} - \\ &Q S_H^* I_V^* \frac{I_H}{I_H^*} + Q S_H^* I_V^* + d_2 S_V^* - \frac{(d_1 S_V^*)^2}{S_V} - d_2 S_V + d_2 S_V^* + \\ &\left(1 - \frac{S_V^*}{S_V}\right) \eta S_V^* I_H^* + \eta S_V^* I_H - \eta S_V I_H \frac{E_V^*}{E_V} + \eta S_V^* I_H^* + \\ &\eta S_V^* I_H^* - \eta S_V^* I_H^* \frac{E_V}{E_V^*} \frac{I_V^*}{I_V} - \eta S_V^* I_H^* \frac{I_V}{I_V^*} + \eta S_V^* I_H^*, \\ \frac{dL_2}{dt} &= -d_1 S_H^* \left(\frac{S_H}{S_H^*} + \frac{S_H^*}{S_H} - 2\right) - d_2 S_V^* \left(\frac{S_V}{S_V^*} + \frac{S_V^*}{S_V} - 2\right) - \\ &Q S_H^* I_V^* \left(\frac{S_H^*}{S_H} + \frac{I_H}{I_H^*} + \frac{E_H I_H^*}{E_H^* I_H} + \frac{I_V}{I_V^*} \left(\frac{S_H E_H^*}{S_H^* E_H} - 1\right) - 3\right) - \\ &\eta S_V^* I_H^* \left(\frac{S_V^*}{S_V} + \frac{I_V}{I_V^*} + \frac{E_V I_V^*}{E_V^* I_V} + \frac{I_H}{I_H^*} \left(\frac{S_V E_V^*}{S_V^* E_V} - 1\right) - 3\right). \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa

$$\frac{S_H}{S_H^*} + \frac{S_H^*}{S_H} - 2 = \frac{S_H^2 + S_H^{*2} - 2S_H^*S_H}{S_H^*S_H} = \frac{(S_H - S_H^*)^2}{S_H^*S_H} \geq 0,$$

sehingga diperoleh $\frac{S_H}{S_H^*} + \frac{S_H^*}{S_H} - 2 \geq 0$. Dengan cara yang sama,

diperoleh $\frac{S_V}{S_V^*} + \frac{S_V^*}{S_V} - 2 \geq 0$. Selanjutnya, akan dibuktikan $\frac{S_H^*}{S_H} +$

$$\frac{I_H}{I_H^*} + \frac{E_H I_H^*}{E_H^* I_H} + \frac{I_V}{I_V^*} \left(\frac{S_H E_H^*}{S_H^* E_H} - 1 \right) - 3 \geq 0 \quad \text{atau} \quad \frac{S_H^*}{S_H} + \frac{I_H}{I_H^*} + \frac{E_H I_H^*}{E_H^* I_H} +$$

$$\frac{I_V S_H E_H^*}{I_V^* S_H^* E_H} - \frac{I_V}{I_V^*} + \frac{I_V^*}{I_V} - \frac{I_V^*}{I_V} - 3 \geq 0. \text{ Berdasarkan pertaksamaan rata-}$$

rata Aritmatika dan Geometri, jika $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$ dengan $n \geq 2$, maka berlaku

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n}.$$

Jika $a_1 = \frac{S_H^*}{S_H}$, $a_2 = \frac{I_H}{I_H^*}$, $a_3 = \frac{E_H I_H^*}{E_H^* I_H}$, $a_4 = \frac{I_V S_H E_H^*}{I_V^* S_H^* E_H}$, dan $a_5 = \frac{I_V^*}{I_V}$,

maka berlaku

$$\frac{\frac{S_H^*}{S_H} + \frac{I_H}{I_H^*} + \frac{E_H I_H^*}{E_H^* I_H} + \frac{I_V S_H E_H^*}{I_V^* S_H^* E_H} + \frac{I_V^*}{I_V}}{5} \geq \sqrt[5]{\frac{S_H^*}{S_H} \times \frac{I_H}{I_H^*} \times \frac{E_H I_H^*}{E_H^* I_H} \times \frac{I_V S_H E_H^*}{I_V^* S_H^* E_H} \times \frac{I_V^*}{I_V}},$$

atau

$$\frac{S_H^*}{S_H} + \frac{I_H}{I_H^*} + \frac{E_H I_H^*}{E_H^* I_H} + \frac{I_V S_H E_H^*}{I_V^* S_H^* E_H} + \frac{I_V^*}{I_V} \geq 5.$$

Kemudian jika $b_1 = \frac{I_V^*}{I_V}$ dan $b_2 = \frac{I_V}{I_V^*}$, maka berlaku

$$\frac{\frac{I_V^*}{I_V} + \frac{I_V}{I_V^*}}{2} \geq \sqrt{\frac{I_V^*}{I_V} \times \frac{I_V}{I_V^*}},$$

atau

$$\frac{I_V^*}{I_V} + \frac{I_V}{I_V^*} \geq 2.$$

a_2, a_3, a_4, a_5 , dan b_2 pasti bernilai positif apabila $\mathcal{R}_0 > 1$, karena E_H^*, I_H^*, E_V^* , dan I_V^* positif apabila $\mathcal{R}_0 > 1$. Dengan demikian dapat dipastikan bahwa

$$\frac{S_H^*}{S_H} + \frac{I_H}{I_H^*} + \frac{E_H I_H^*}{E_H^* I_H} + \frac{I_V S_H E_H^*}{I_V^* S_H^* E_H} + \frac{I_V^*}{I_V} - \left(\frac{I_V}{I_V^*} + \frac{I_V^*}{I_V} \right) - 3 \geq 0$$

atau

$$\frac{S_H^*}{S_H} + \frac{I_H}{I_H^*} + \frac{E_H I_H^*}{E_H^* I_H} + \frac{I_V}{I_V^*} \left(\frac{S_H E_H^*}{S_H^* E_H} - 1 \right) - 3 \geq 0.$$

Dengan cara yang sama, juga dapat dipastikan bahwa

$$\frac{S_V^*}{S_V} + \frac{I_V}{I_V^*} + \frac{E_V I_V^*}{E_V^* I_V} + \frac{I_H}{I_H^*} \left(\frac{S_V E_V^*}{S_V^* E_V} - 1 \right) - 3 \geq 0.$$

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa $\frac{dL_2}{dt}$ akan bernilai negatif apabila $\mathcal{R}_0 > 1$ untuk setiap $(S_H, E_H, I_H, S_V, E_V, I_V) \neq P_1$ dan bernilai nol apabila $(S_H, E_H, I_H, S_V, E_V, I_V) = P_1$. Berdasarkan uraian tersebut, titik kesetimbangan P_1 bersifat stabil asimtotik global apabila $\mathcal{R}_0 > 1$.

3.3 Kontrol Optimal

Pada subbab ini dibahas formulasi model penyakit layu pinus dengan melibatkan variabel kontrol dan lebih ditekankan pada penyelesaian masalah kontrol optimal dengan menerapkan prinsip maksimum Pontryagin. Pemberian kontrol hanya dilakukan ketika terjadi penyebaran penyakit layu pinus atau $\mathcal{R}_0 > 1$.

3.3.1 Formulasi model penyakit layu pinus dengan kontrol

Tujuan utama penerapan kontrol optimal pada model penyakit layu pinus, yaitu menyelidiki strategi kontrol terbaik untuk memaksimalkan jumlah subpopulasi pohon pinus rentan dan meminimalkan jumlah subpopulasi pohon pinus *exposed*, pohon pinus terinfeksi, vektor rentan, vektor *exposed*, dan vektor terinfeksi dengan biaya implementasi yang minimum. Laju rekrutmen atau laju masuknya individu baru pada subpopulasi rentan model penyakit layu pinus dengan kontrol dimodifikasi dengan menambahkan efek kepadatan populasi, yaitu Λ_H diubah menjadi $\Lambda_H + cN_H$ dan Λ_V diubah menjadi $\Lambda_V N_V$, dengan c mewakili efek kepadatan populasi pada laju rekrutmen.

Pada model penyakit layu pinus dengan kontrol, digunakan tiga kontrol untuk mengurangi penyebaran *Bursaphelenchus xylophilus*. Kontrol yang pertama menggunakan injeksi insektisida dan vaksinasi yang diberikan pada subpopulasi S_H , E_H , dan I_H yang dinotasikan dengan $u_1(t)$. Kekuatan infeksi pada pohon pinus akan berkurang sebesar $1 - u_1$. Kemudian untuk mengurangi subpopulasi I_H diterapkan kontrol yang kedua, yaitu deforestasi (penebangan pohon pinus yang terinfeksi *Bursaphelenchus xylophilus*) yang dinotasikan dengan $u_2(t)$. Dengan adanya deforestasi, telur, lava, dan pupa *Bursaphelenchus xylophilus* yang menghuni pohon pinus dapat dimusnahkan. Selanjutnya, kontrol yang ketiga, yaitu penyemprotan insektisida guna mengurangi subpopulasi S_V , E_V , dan I_V yang

dinotasikan dengan $u_3(t)$. Pada skripsi ini, diasumsikan bahwa tingkat kematian populasi vektor (kumbang dewasa) meningkat ketika u_3 meningkat. Koefisien $1 - u_3$ merupakan ukuran pengurangan populasi vektor. Model penyakit layu pinus dengan kontrol dinyatakan sebagai berikut,

$$\begin{aligned} \frac{dS_H}{dt} &= \Lambda_H + cN_H - K_1\psi S_H I_V(1 - u_1) - K_2\phi\alpha S_H I_V(1 - u_1) - d_1 S_H, \\ \frac{dE_H}{dt} &= K_1\psi S_H I_V(1 - u_1) + K_2\phi\alpha S_H I_V(1 - u_1) - (d_1 + \delta)E_H, \\ \frac{dI_H}{dt} &= \delta E_H - (d_1 + \gamma)I_H - u_2 I_H, \\ \frac{dS_V}{dt} &= \Lambda_V N_V(1 - u_3) - (1 - u_1)\eta S_V I_H - d_2 S_V - \alpha_0 u_3 S_V, \\ \frac{dE_V}{dt} &= (1 - u_1)\eta S_V I_H - (d_2 + \mu)E_V - \alpha_0 u_3 E_V, \\ \frac{dI_V}{dt} &= \eta E_V - d_2 I_V - \alpha_0 u_3 I_V, \end{aligned} \quad (3.5)$$

dengan semua parameter bernilai positif dan α_0 merupakan laju kematian vektor karena pemberian kontrol u_3 .

Masalah kontrol optimal dinyatakan dalam fungsi tujuan sebagai berikut.

Minimumkan:

$$J(u_1, u_2, u_3) = \int_0^{t_f} \left[C_1 I_H + C_2 N_V + \frac{1}{2}(B_1 u_1^2 + B_2 u_2^2 + B_3 u_3^2) \right] dt, \quad (3.6)$$

dengan kendala sistem persamaan (3.5) dan kondisi awal

$$S_H(0) = S_{H_0}, E_H(0) = E_{H_0}, I_H(0) = I_{H_0},$$

$$S_V(0) = S_{V_0}, E_V(0) = E_{V_0}, I_V(0) = I_{V_0}.$$

Parameter C_1 , C_2 , B_1 , B_2 , dan B_3 masing-masing menyatakan bobot subpopulasi pohon pinus yang terinfeksi, bobot populasi vektor, bobot biaya untuk pemberian injeksi pohon dan vaksinasi, bobot biaya untuk deforestasi, dan bobot biaya untuk penyemprotan insektisida. Variabel u_1 , u_2 , dan u_3 adalah kontrol yang akan diminimumkan dan t_f merupakan waktu akhir. Selanjutnya, akan ditentukan u_1^* , u_2^* , dan u_3^* sedemikian sehingga

$$J(u_1^*, u_2^*, u_3^*) = \min_{\mathcal{U}} J(u_1, u_2, u_3),$$

dengan $\mathcal{U} = \{(u_1, u_2, u_3) | 0 \leq u_i \leq 1, i = 1, 2, 3\}$.

3.3.2 Penyelesaian masalah kontrol optimal

Berdasarkan fungsi tujuan (3.6) dan kendala sistem persamaan (3.5), langkah pertama untuk menyelesaikan permasalahan kontrol

optimal dengan menggunakan prinsip Pontryagin adalah membentuk fungsi Hamilton sebagai berikut.

$$H(t, \vec{x}, \vec{u}, \vec{\lambda}) = f(t, \vec{x}, \vec{u}) + \vec{\lambda}_i(t)g_i(t, \vec{x}, \vec{u}), \quad i = 1, \dots, 6, \quad (3.7)$$

dengan $f(t, \vec{x}, \vec{u})$, $\vec{\lambda}_i(t)$, dan $g_i(t, \vec{x}, \vec{u})$ masing-masing menyatakan integral dari fungsi objektif yang diminimumkan, variabel *costate*, dan ruas kanan dari sistem (3.5). Selanjutnya, persamaan Hamilton (3.7) diuraikan sebagai berikut

$$\begin{aligned} H(t, \vec{x}, \vec{u}, \vec{\lambda}) = & C_1 I_H + C_2 N_V + \frac{1}{2}(B_1 u_1^2 + B_2 u_2^2 + B_3 u_3^2) + \\ & \lambda_1[\Lambda_H + cN_H - K_1 \psi S_H I_V(1 - u_1) - \\ & K_2 \phi \alpha S_H I_V(1 - u_1) - d_1 S_H] + \\ & \lambda_2[K_1 \psi S_H I_V(1 - u_1) + K_2 \phi \alpha S_H I_V(1 - u_1) - \\ & (d_1 + \delta)E_H] + \lambda_3[\delta E_H - (d_1 + \gamma)I_H - u_2 I_H] + \\ & \lambda_4[\Lambda_V N_V(1 - u_3) - (1 - u_1)\eta S_V I_H - d_2 S_V - \\ & \alpha_0 u_3 S_V] + \lambda_5[(1 - u_1)\eta S_V I_H - (d_2 + \mu)E_V - \\ & \alpha_0 u_3 E_V] + \lambda_6[\eta E_V - d_2 I_V - \alpha_0 u_3 I_V]. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Berdasarkan prinsip maksimum Pontryagin, fungsi Hamilton mencapai solusi optimal jika persamaan *state* dan *costate* berlaku dan kondisi stasioner terpenuhi. Persamaan *state* diperoleh dengan menurunkan fungsi Hamilton (3.8) terhadap masing-masing variabel *costate* sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \frac{dS_H}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \lambda_1} &= \Lambda_H + cN_H - K_1 \psi S_H I_V(1 - u_1) - K_2 \phi \alpha S_H I_V(1 - u_1) - d_1 S_H, \\ \frac{dE_H}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \lambda_2} &= K_1 \psi S_H I_V(1 - u_1) + K_2 \phi \alpha S_H I_V(1 - u_1) - (d_1 + \delta)E_H, \\ \frac{dI_H}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \lambda_3} &= \delta E_H - (d_1 + \gamma)I_H - u_2 I_H, \\ \frac{dS_V}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \lambda_4} &= \Lambda_V N_V(1 - u_3) - (1 - u_1)\eta S_V I_H - d_2 S_V - \alpha_0 u_3 S_V, \\ \frac{dE_V}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \lambda_5} &= (1 - u_1)\eta S_V I_H - (d_2 + \mu)E_V - \alpha_0 u_3 E_V, \\ \frac{dI_V}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \lambda_6} &= \eta E_V - d_2 I_V - \alpha_0 u_3 I_V, \end{aligned}$$

dengan kondisi awal

$$\begin{aligned} S_H(0) &= S_{H0}, \quad E_H(0) = E_{H0}, \quad I_H(0) = I_{H0}, \\ S_V(0) &= S_{V0}, \quad E_V(0) = E_{V0}, \quad I_V(0) = I_{V0}. \end{aligned}$$

Persamaan *costate* merupakan nilai negatif dari turunan fungsi Hamilton (3.8) terhadap masing-masing variabel *state* sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial S_H} &= -c\lambda_1 + (\lambda_1 - \lambda_2)[K_1 \psi I_V(1 - u_1) + K_2 \phi \alpha I_V(1 - u_1)] + \\ & \lambda_1 d_1, \\ \frac{d\lambda_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial E_H} &= -c\lambda_1 + \lambda_3 \delta + \lambda_2(d_1 + \delta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\lambda_3}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial I_H} = -C_1 - c\lambda_1 + \lambda_3(d_1 + \gamma) + (\lambda_4 - \lambda_5)\eta S_V(1 - u_1) + \lambda_3 u_2, \\ \frac{d\lambda_4}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial S_V} = -C_2 - \lambda_4 \Lambda_V(1 - u_3) + \eta I_H(1 - u_1)(\lambda_4 - \lambda_5) + \lambda_4 d_2 + \\ &\quad \lambda_4 \alpha_0 u_3, \\ \frac{d\lambda_5}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial E_V} = -C_2 - \lambda_4 \Lambda_V(1 - u_3) + \lambda_5(d_2 + \mu) + \lambda_5 \alpha_0 u_3 - \lambda_6 \mu, \\ \frac{d\lambda_6}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial I_V} = -C_2 - \lambda_4 \Lambda_V(1 - u_3) + (\lambda_1 - \lambda_2)[K_1 \psi I_V(1 - u_1) + \\ &\quad K_2 \phi \alpha I_V(1 - u_1)] + d_2 \mu \lambda_6 + \lambda_6 \alpha_0 u_3,\end{aligned}$$

dengan kondisi transversal $\lambda_1(t_f) = \lambda_2(t_f) = \lambda_3(t_f) = \lambda_4(t_f) = \lambda_5(t_f) = \lambda_6(t_f) = 0$. Untuk mendapatkan kontrol yang optimal, digunakan kondisi stasioner, yaitu $\frac{\partial H}{\partial u_i} = 0$ dengan $i = 1, 2, 3$. Dengan demikian, diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial u_1} &= B_1 u_1 + (\lambda_1 - \lambda_2)(K_1 \psi S_H I_V - K_2 \phi \alpha S_H I_V) + (\lambda_4 - \lambda_5)\eta S_V I_H = 0, \\ \frac{\partial H}{\partial u_2} &= B_2 u_2 - \lambda_3 I_H = 0,\end{aligned}$$

dan

$$\frac{\partial H}{\partial u_3} = B_3 u_3 - \lambda_4(\Lambda_V N_V + \alpha_0 S_V) - \alpha_0(\lambda_5 E_V + \lambda_6 I_V) = 0,$$

sehingga

$$\begin{aligned}u_1 &= \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)(K_1 \psi S_H I_V - K_2 \phi \alpha S_H I_V) + (\lambda_5 - \lambda_4)\eta S_V I_H}{B_1}, \\ u_2 &= \frac{\lambda_3 I_H}{B_2},\end{aligned}$$

dan

$$u_3 = \frac{\lambda_4(\Lambda_V N_V + \alpha_0 S_V) + \alpha_0(\lambda_5 E_V + \lambda_6 I_V)}{B_3}.$$

Kontrol u_1^* , u_2^* , dan u_3^* dinyatakan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}u_1^* &= \max \left\{ \min \left\{ 1, \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)(K_1 \psi S_H^* I_V^* - K_2 \phi \alpha S_H^* I_V^*) + (\lambda_5 - \lambda_4)\eta S_V^* I_H^*}{B_1} \right\}, 0 \right\}, \\ u_2^* &= \max \left\{ \min \left\{ 1, \frac{\lambda_3 I_H^*}{B_2} \right\}, 0 \right\},\end{aligned}$$

dan

$$u_3^* = \max \left\{ \min \left\{ 1, \frac{\lambda_4(\Lambda_V N_V^* + \alpha_0 S_V^*) + \alpha_0(\lambda_5 E_V^* + \lambda_6 I_V^*)}{B_3} \right\}, 0 \right\}.$$

Sistem yang optimal diperoleh dengan mensubstitusikan u_1^* , u_2^* , dan u_3^* ke sistem persamaan *state* dan *costate*, sehingga diperoleh sistem yang optimal sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\frac{dS_H^*}{dt} &= \Lambda_H + cN_H^* - K_1 \psi S_H^* I_V^*(1 - u_1^*) - K_2 \phi \alpha S_H^* I_V^*(1 - u_1^*) - \\ &\quad d_1 S_H^*,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dE_H^*}{dt} &= K_1\psi S_H^* I_V^* (1 - u_1^*) + K_2\phi\alpha S_H^* I_V^* (1 - u_1^*) - (d_1 + \delta)E_H^*, \\ \frac{dI_H^*}{dt} &= \delta E_H^* - (d_1 + \gamma)I_H^* - u_2^* I_H^*, \\ \frac{dH^*}{dt} &= \Lambda_V N_V^* (1 - u_3^*) - (1 - u_1^*)\eta S_V^* I_H^* - d_2 S_V^* - \alpha_0 u_3^* S_V^*, \\ \frac{dE_V^*}{dt} &= (1 - u_1^*)\eta S_V^* I_H^* - (d_2 + \mu)E_V^* - \alpha_0 u_3^* E_V^*, \\ \frac{dI_V^*}{dt} &= \eta E_V^* - d_2 I_V^* - \alpha_0 u_3^* I_V^*, \\ \frac{d\lambda_1}{dt} &= -c\lambda_1 + (\lambda_1 - \lambda_2)[K_1\psi I_V^* (1 - u_1^*) + K_2\phi\alpha I_V^* (1 - u_1^*)] + \\ &\quad \lambda_1 d_1, \\ \frac{d\lambda_2}{dt} &= -c\lambda_1 + \lambda_3\delta + \lambda_2(d_1 + \delta), \\ \frac{d\lambda_3}{dt} &= -C_1 - c\lambda_1 + \lambda_3(d_1 + \gamma) + \lambda_3 u_2^* + (\lambda_4 - \lambda_5)\eta S_V^* (1 - u_1^*), \\ \frac{d\lambda_4}{dt} &= -C_2 - \lambda_4\Lambda_V(1 - u_3^*) + \eta I_H^* (1 - u_1^*)(\lambda_4 - \lambda_5) + \lambda_4 d_2 + \\ &\quad \lambda_4\alpha_0 u_3^*, \\ \frac{d\lambda_5}{dt} &= -C_2 - \lambda_4\Lambda_V(1 - u_3^*) + \lambda_5(d_2 + \mu) + \lambda_5\alpha_0 u_3^* - \lambda_6, \\ \frac{d\lambda_6}{dt} &= -C_2 - \lambda_4\Lambda_V(1 - u_3^*) + (\lambda_1 - \lambda_2)[K_1\psi I_V^* (1 - u_1^*) + \\ &\quad K_2\phi\alpha I_V^* (1 - u_1^*)] + d_2\mu\lambda_6 + \lambda_6\alpha_0 u_3^*. \end{aligned}$$

3.4 Simulasi Numerik

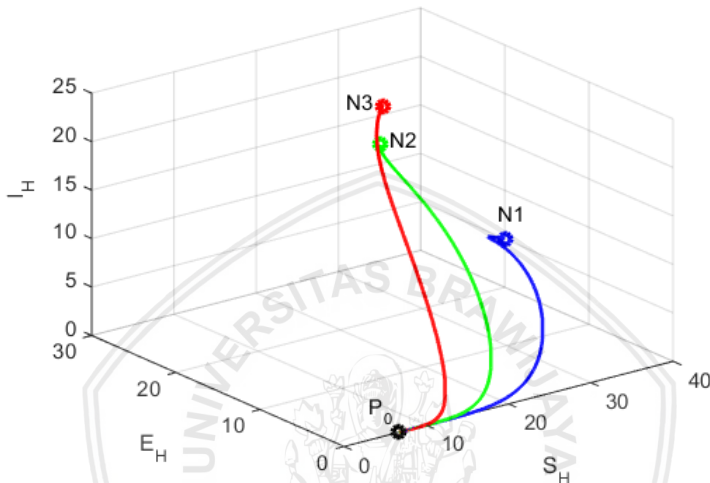
Pada subbab ini ditunjukkan simulasi numerik solusi sistem (2.5) dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde 4 untuk mengilustrasikan hasil analisis pada subbab sebelumnya dan simulasi numerik penerapan kontrol optimal dengan menggunakan metode *Sweep* Maju-Mundur untuk mengetahui pengaruh kontrol pada model penyakit layu pinus.

3.4.1 Simulasi numerik untuk $\mathcal{R}_0 \leq 1$

Pada simulasi ini digunakan nilai parameter $\Lambda_H = 0.02$, $K_1 = 0.0016$, $K_2 = 0.0004$, $\psi = 0.2$, $\gamma = 0.02$, $d_1 = 0.00301$, $\delta = 0.0133$, $\alpha = 0.0032$, $\eta = 0.00305$, $\mu = 0.01$, $\Lambda_V = 0.0132$, $\phi = 0.0023$, dan $d_2 = 0.117$, sehingga diperoleh

$$\mathcal{R}_0 = \sqrt{\frac{\delta\mu\eta\Lambda_H\Lambda_V(K_1\psi + K_2\phi\alpha)}{d_1 d_2^2 (d_1 + \gamma)(d_1 + \delta)(d_2 + \mu)}} = 0.004177326592 < 1.$$

Pada saat $\mathcal{R}_0 < 1$ hanya terdapat satu titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit. Berdasarkan nilai parameter tersebut, diperoleh nilai $P_0 = (6.644518272, 0, 0, 0.1128205128, 0, 0)$. Simulasi numerik dilakukan dengan tiga nilai awal, yaitu $N1 = (40, 20, 5, 60, 10, 30)$, $N2 = (30, 25, 15, 45, 35, 20)$, dan $N3 = (20, 15, 25, 50, 30, 35)$. Hasil simulasi numerik diperlihatkan pada Gambar 3.1.



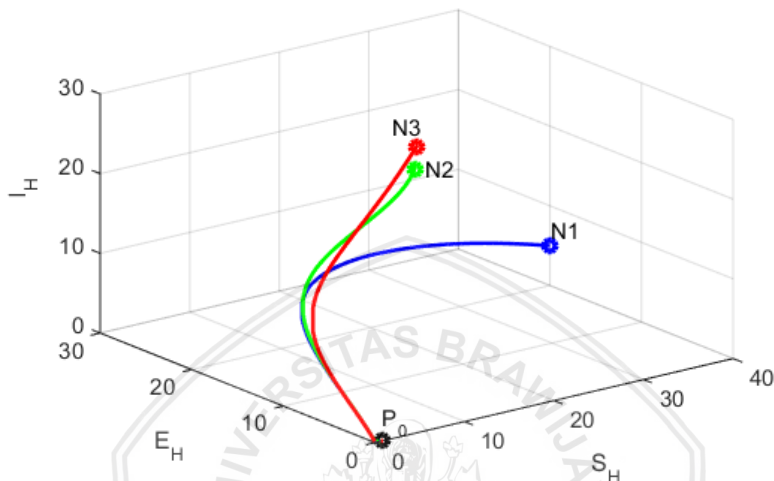
Gambar 3.1 Potret fase untuk $\mathcal{R}_0 < 1$

Gambar 3.1 menunjukkan bahwa dengan tiga nilai awal yang diberikan, orbit-orbit pada ruang $S_H E_H I_H$ menuju titik kesetimbangan P_0 . Hal ini menyatakan bahwa apabila $\mathcal{R}_0 < 1$ titik kesetimbangan bebas penyakit P_0 bersifat stabil asimtotik global.

Ketika masing-masing parameter Λ_H , Λ_V , dan d_2 diubah menjadi 0.00234, 0.05686442611, dan 0.00117 diperoleh nilai $\mathcal{R}_0 = 1$. Ketika $\mathcal{R}_0 = 1$ hanya terdapat satu titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit. Berdasarkan nilai parameter tersebut, diperoleh nilai $P_0 = (0.7774086379, 0, 0, 48.60207360, 0, 0)$. Dengan menggunakan nilai awal yang sama, yaitu $N1$, $N2$, dan $N3$ diperoleh hasil simulasi numerik pada Gambar 3.2.

Berdasarkan tiga nilai awal yang diberikan, orbit-orbit pada ruang $S_H E_H I_H$ menuju titik kesetimbangan P_0 . Hal ini menyatakan bahwa ketika $\mathcal{R}_0 = 1$ titik kesetimbangan bebas penyakit P_0 bersifat

stabil asimtotik global. Dengan demikian hasil simulasi numerik yang diperoleh mendukung hasil analisis kestabilan pada subbab sebelumnya bahwa apabila nilai $\mathcal{R}_0 \leq 1$ titik kesetimbangan P_0 bersifat stabil asimtotik global.



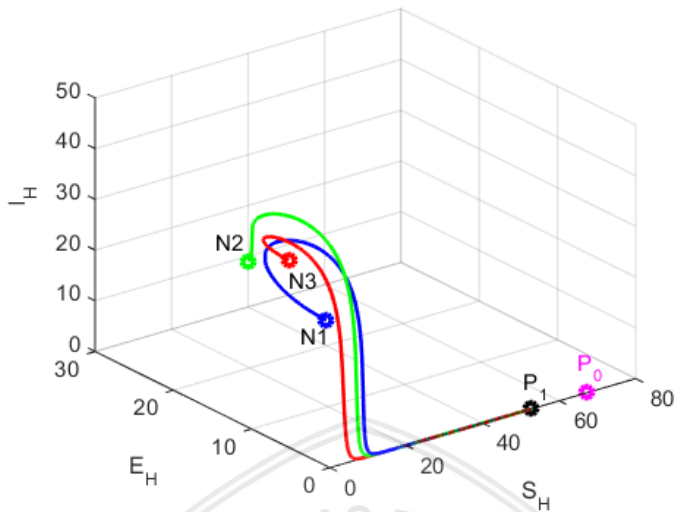
Gambar 3.2 Potret fase untuk $\mathcal{R}_0 = 1$

3.4.2 Simulasi numerik untuk $\mathcal{R}_0 > 1$

Pada simulasi ini digunakan nilai parameter $\Lambda_H = 0.002021$, $K_1 = 0.00166$, $K_2 = 0.0004$, $\psi = 0.2$, $\gamma = 0.0022$, $d_1 = 0.0000301$, $\delta = 0.0133$, $\alpha = 0.0032$, $\eta = 0.00305$, $\mu = 0.01$, $\Lambda_V = 0.0132652$, $\phi = 0.0023$, dan $d_2 = 0.011764$, sehingga diperoleh

$$\mathcal{R}_0 = \sqrt{\frac{\delta\mu\eta\Lambda_H\Lambda_V(K_1\psi+K_2\phi\alpha)}{d_1d_2^2(d_1+\gamma)(d_1+\delta)(d_2+\mu)}} = 1.157444754 > 1.$$

Ketika $\mathcal{R}_0 > 1$ terdapat dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik. Berdasarkan nilai parameter yang diberikan diperoleh nilai $P_0 = (67.14, 0, 0, 1.19, 0, 0)$ dan $P_1 = (52.65, 0.03, 0.19, 1.07, 0.029, 0.02)$. Simulasi numerik dilakukan dengan tiga nilai awal, yaitu $N1 = (40, 20, 5, 60, 10, 30)$, $N2 = (30, 25, 15, 45, 35, 20)$, dan $N3 = (20, 15, 25, 50, 30, 35)$.



Gambar 3.3 Potret fase untuk $\mathcal{R}_0 > 1$

Berdasarkan Gambar 3.3, dengan tiga nilai awal yang diberikan, orbit-orbit pada ruang $S_H E_H I_H$ menuju titik kesetimbangan P_1 . Hasil simulasi numerik yang diperoleh mendukung hasil analisis kestabilan pada subbab sebelumnya bahwa apabila nilai $\mathcal{R}_0 > 1$ titik kesetimbangan P_1 bersifat stabil asimtotik global.

3.4.3 Algoritma Sweep Maju-Mundur

Metode yang digunakan dalam menyelesaikan kontrol optimal pada skripsi ini adalah metode *Sweep* Maju-Mundur dengan *software* Matlab. Pada metode ini, dilakukan diskritisasi interval $[t_0, t_f]$ di titik $t_i = t_0 + ih, i = 0, 1, \dots, n$, dengan h merupakan ukuran langkah waktu. Variabel-variabel yang digunakan pada skripsi ini, yaitu $u_1, u_2, u_3, S_H, E_H, I_H, S_V, E_V, I_V, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$, dan λ_6 yang dinyatakan dalam bentuk $u_1(i), u_2(i), u_3(i), S_H(i), E_H(i), I_H(i), S_V(i), E_V(i), I_V(i), \lambda_1(i), \lambda_2(i), \lambda_3(i), \lambda_4(i), \lambda_5(i)$, dan $\lambda_6(i)$, dengan $i = 0, 1, 2, \dots, n$.

Nilai variabel *state* S_H, E_H, I_H, S_V, E_V , dan I_V didekati dengan metode Runge Kutta orde 4 langkah maju, dengan nilai awal $S_H(0) = S_{H0}, E_H(0) = E_{H0}, I_H(0) = I_{H0}, S_V(0) = S_{V0}, E_V(0) = E_{V0}, I_V(0) = I_{V0}$, sedangkan variabel *costate* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4,$

λ_5 , dan λ_6 didekati dengan metode Runge Kutta orde 4 langkah mundur, dengan nilai awal $\lambda_1(n)$, $\lambda_2(n)$, $\lambda_3(n)$, $\lambda_4(n)$, $\lambda_5(n)$, dan $\lambda_6(n)$. Langkah-langkah algoritma metode *Sweep* Maju-Mundur sebagai berikut.

Langkah 1: Membuat dugaan nilai awal $u_1, u_2, u_3, S_H(0), E_H(0), I_H(0), S_V(0), E_V(0), I_V(0), \lambda_1(0), \lambda_2(0), \lambda_3(0), \lambda_4(0), \lambda_5(0)$, dan $\lambda_6(0)$.

Langkah 2: Menggunakan kondisi awal $S_H(0) = S_{H0}, E_H(0) = E_{H0}, I_H(0) = I_{H0}, S_V(0) = S_{V0}, E_V(0) = E_{V0}, I_V(0) = I_{V0}$ dan nilai awal u_1, u_2 , dan u_3 untuk menyelesaikan persamaan *state* dengan langkah maju metode Runge Kutta orde 4.

Langkah 3: Menggunakan kondisi transversal $\lambda_1(t_f), \lambda_2(t_f), \lambda_3(t_f), \lambda_4(t_f), \lambda_5(t_f)$, dan $\lambda_6(t_f)$ dan nilai $u_1, u_2, u_3, S_H, E_H, I_H, S_V, E_V, I_V$ untuk menyelesaikan persamaan *costate* dengan langkah mundur metode Runge Kutta orde 4.

Langkah 4: Memeriksa konvergensi. Jika nilai error setiap variabel dalam iterasi saat ini dan iterasi sebelumnya kurang dari 10^{-3} , maka proses selesai. Jika nilai error lebih dari 10^{-3} , maka kembali ke langkah 2. Pada skripsi ini digunakan toleransi error sebesar 10^{-3} karena tingkat kesalahannya sudah sangat kecil, yaitu 10^{-12} .

Nilai awal yang digunakan diberikan pada Tabel 3.1 dan nilai parameter pada Tabel 3.2. Simulasi dilakukan dengan waktu awal $t = 0$ dan nilai akhir $t_f = 40$ (hari). Pada masing-masing simulasi digunakan nilai bobot $C_1 = 0.01, C_2 = 0.0036, B_1 = 0.02, B_2 = 0.3$, dan $B_3 = 3$. *Source code* program kontrol optimal model penyakit layu pinus dapat dilihat pada Lampiran 1. Berdasarkan Tabel 3.1 dan Tabel 3.2 diperoleh

$$\mathcal{R}_0 = \sqrt{\frac{\delta\mu\eta(\Lambda_H + cN_H)\Lambda_V N_V(K_1\psi + K_2\phi\alpha)}{d_1 d_2^2 (d_1 + \gamma)(d_1 + \delta)(d_2 + \mu)}} = 234.1161495 > 1 \cdot$$

Hal ini menunjukkan adanya penyebaran penyakit layu pinus dan perlu diterapkan kontrol optimal.

Tabel 3.1 Nilai awal untuk simulasi numerik

S_{H_0}	E_{H_0}	I_{H_0}	S_{V_0}	E_{V_0}	I_{V_0}
40	20	5	60	10	30

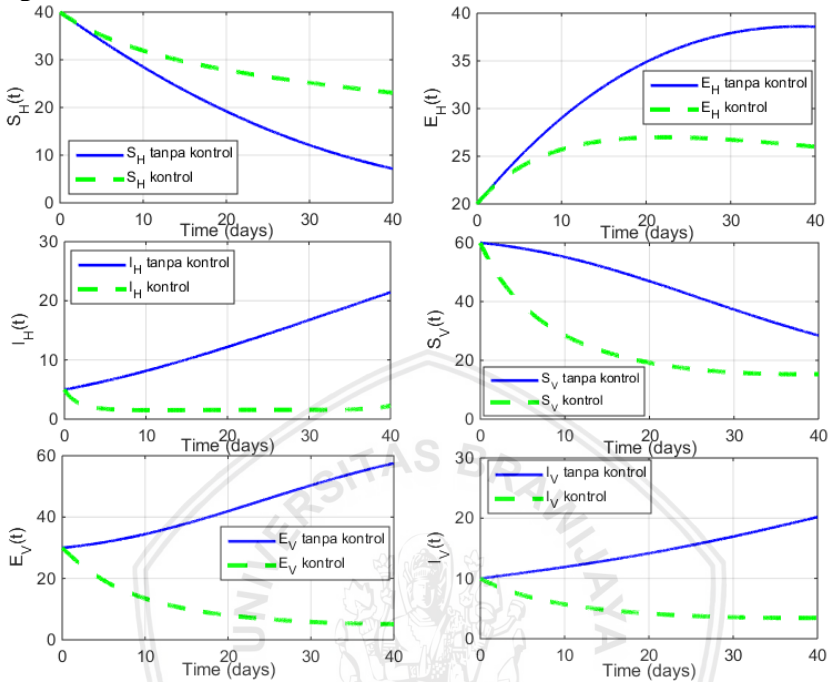
Tabel 3.2 Nilai parameter untuk simulasi numerik

Parameter	Nilai
Λ_H	0.002021
c	0.001241
K_1	0.00166
K_2	0.0004
ψ	2
γ	0.0022
δ	0.0133
α	0.0032
d_1	0.0000301
η	0.00305
μ	0.01
Λ_V	0.0132652
α_0	0.21
ϕ	0.0023
d_2	0.011764

3.4.4 Simulasi numerik dengan kontrol u_2 dan u_3

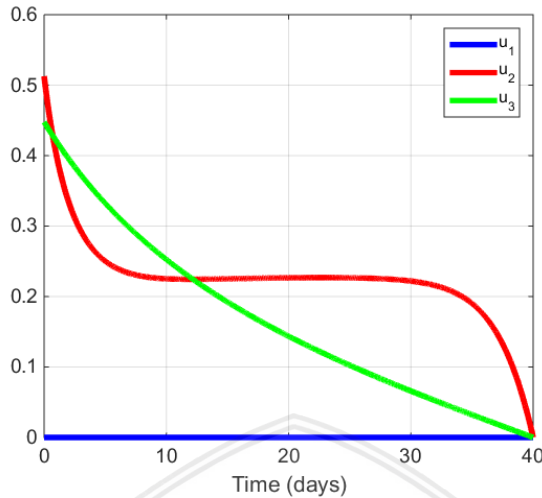
Simulasi ini menunjukkan perubahan jumlah subpopulasi dari model penyakit layu pinus sebelum dan sesudah adanya kontrol deforestasi (u_2) dan penyemprotan insektisida (u_3) yang diberikan pada Gambar 3.4. Jumlah subpopulasi S_H dan S_V sebelum diberikan kontrol u_2 dan u_3 mengalami penurunan jumlah subpopulasi, namun setelah diberikan kontrol u_2 dan u_3 jumlah subpopulasi S_H mengalami kenaikan dan S_V mengalami penurunan hingga akhir periode. Berbeda dengan subpopulasi terinfeksi E_H , I_H , E_V , dan I_V , sebelum diberikan kontrol u_2 dan u_3 mengalami kenaikan yang drastis hingga akhir periode, namun setelah diberikan kontrol u_2 dan u_3 , jumlah subpopulasi terinfeksi I_H , E_V , dan I_V mengalami penurunan yang signifikan hingga akhir periode, sedangkan jumlah subpopulasi E_H

juga mengalami penurunan hingga akhir periode namun kurang signifikan.



Gambar 3.4 Simulasi numerik model penyakit layu pinus dengan kontrol deforestasi (u_2) dan penyemprotan insektisida (u_3)

Profil kontrol pada Gambar 3.5 menunjukkan pemberian kontrol deforestasi (u_2) yang diberikan sebesar 0.5127 pada awal periode, kemudian pada waktu $t = 8$ sampai $t = 29$ diberikan kontrol sebesar 0.23. Selanjutnya, pemberian kontrol u_2 berangsur-angsur mengalami penurunan hingga akhir periode mencapai nol, sedangkan pemberian kontrol penyemprotan insektisida (u_3) diberikan sebesar 0.4417 pada awal periode dan berangsur-angsur mengalami penurunan hingga akhir periode mencapai nol. Hal ini menunjukkan tidak ada lagi kontrol u_2 dan u_3 pada akhir periode, sehingga subpopulasi S_H mengalami penurunan secara perlahan pada akhir periode dan subpopulasi E_H , I_H , S_V , E_V , dan I_V mengalami kenaikan secara perlahan pada akhir periode.

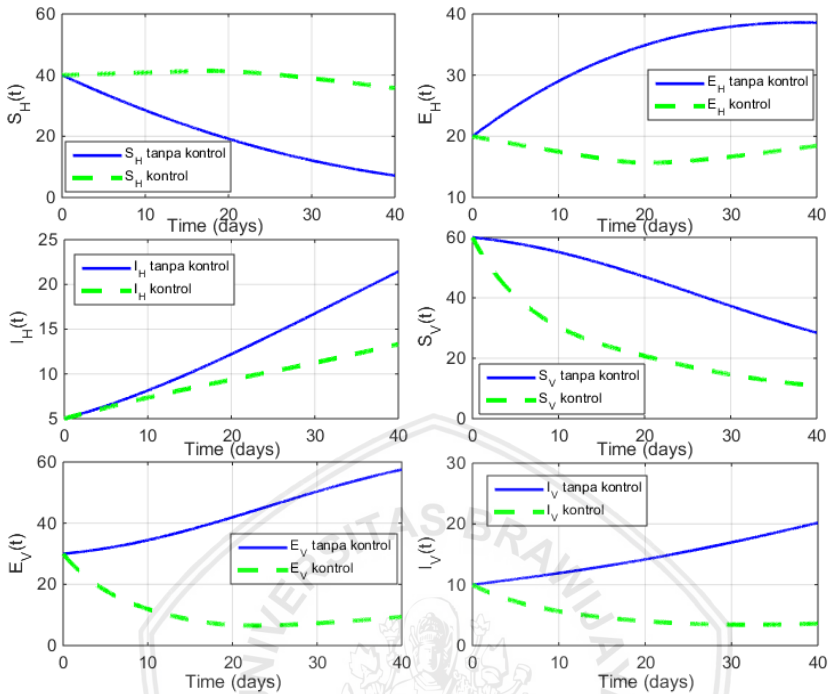


Gambar 3.5 Profil kontrol optimal menggunakan kontrol deforestasi (u_2) dan penyemprotan insektisida (u_3)

Secara keseluruhan pemberian kontrol u_2 dan u_3 efektif untuk menurunkan jumlah subpopulasi pohon pinus terinfeksi, vektor rentan, vektor *exposed*, dan vektor terinfeksi, namun kurang efektif untuk menurunkan jumlah subpopulasi pohon pinus *exposed* dan menaikkan jumlah subpopulasi pohon pinus rentan.

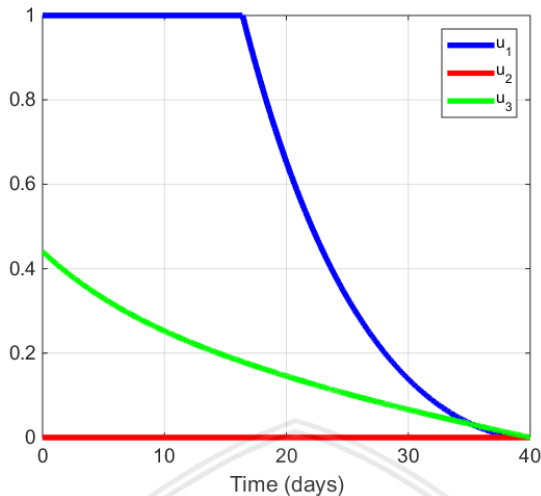
3.4.5 Simulasi numerik dengan kontrol u_1 dan u_3

Simulasi pada Gambar 3.6 menunjukkan perubahan jumlah subpopulasi dari model penyakit layu pinus sebelum dan sesudah adanya kontrol vaksinasi dan injeksi insektisida (u_1) dan penyemprotan insektisida (u_3). Jumlah subpopulasi terinfeksi E_H , I_H , E_V , dan I_V mengalami kenaikan yang drastis hingga akhir periode sebelum diberikan kontrol u_2 dan u_3 , namun setelah diberikan kontrol u_2 dan u_3 , jumlah subpopulasi E_H , E_V , dan I_V mengalami penurunan yang signifikan hingga akhir periode dan jumlah subpopulasi I_H juga mengalami penurunan hingga akhir periode, namun kurang signifikan. Berbeda dengan subpopulasi S_H dan S_V , sebelum diberikan kontrol u_2 dan u_3 mengalami penurunan jumlah subpopulasi, namun setelah diberikan kontrol u_2 dan u_3 jumlah subpopulasi S_H mengalami kenaikan dan S_V mengalami penurunan hingga akhir periode.



Gambar 3.6 Simulasi numerik model penyakit layu pinus dengan kontrol vaksinasi dan injeksi insektisida (u_1) dan penyemprotan insektisida (u_3)

Pada Gambar 3.7 ditunjukkan profil kontrol dengan pemberian kontrol vaksinasi dan injeksi insektisida (u_1) diberikan secara maksimal hingga $t=17$, kemudian berangsur-angsur mengalami penurunan hingga akhir periode mencapai nol, sedangkan pemberian kontrol penyemprotan insektisida (u_3) diberikan sebesar 0.42 pada awal periode dan berangsur-angsur mengalami penurunan hingga akhir periode mencapai nol. Hal ini menunjukkan tidak ada lagi kontrol u_1 dan u_3 pada akhir periode, sehingga subpopulasi S_H mengalami penurunan secara perlahan pada akhir periode dan subpopulasi E_H , I_H , S_V , E_V , dan I_V mengalami kenaikan secara perlahan pada akhir periode.



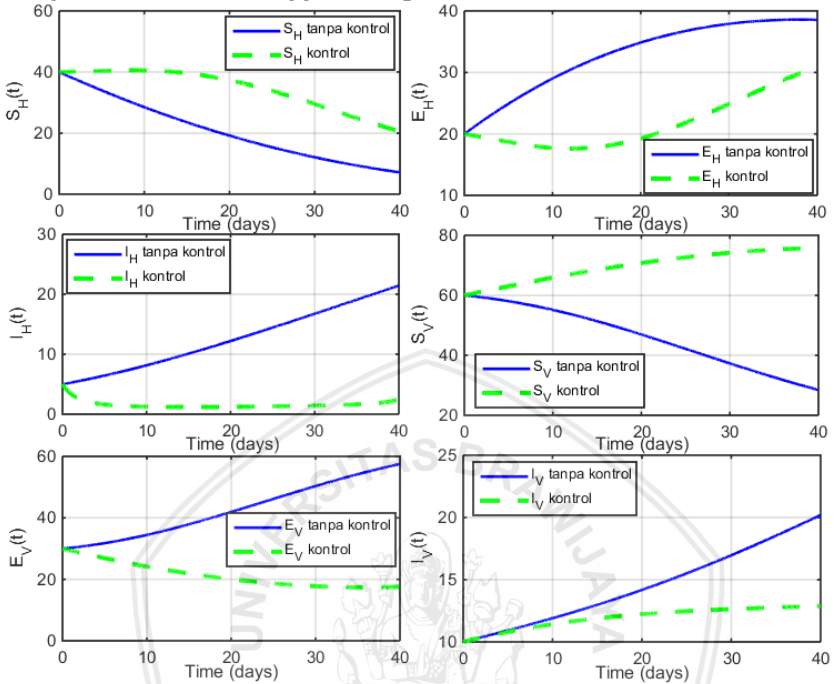
Gambar 3.7 Profil kontrol optimal menggunakan kontrol vaksinasi dan injeksi insektisida (u_1) dan penyemprotan insektisida (u_3)

Secara keseluruhan pemberian kontrol u_1 dan u_3 kurang efektif untuk menurunkan jumlah subpopulasi pohon pinus terinfeksi, namun pemberian kontrol u_1 dan u_3 efektif untuk menaikkan jumlah subpopulasi pohon pinus rentan dan menurunkan jumlah subpopulasi pohon pinus *exposed*, vektor rentan, vektor *exposed*, dan vektor terinfeksi.

3.4.6 Simulasi numerik dengan kontrol u_1 dan u_2

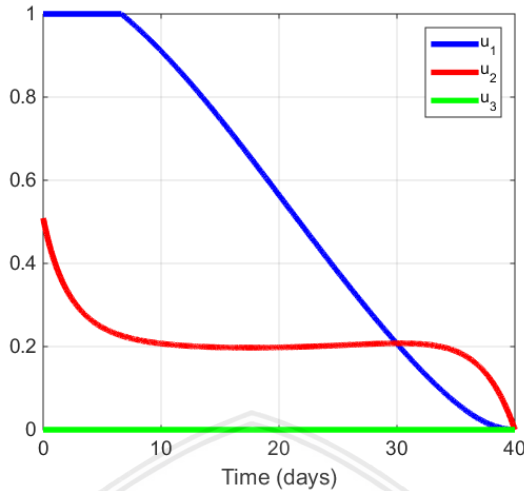
Pada simulasi ini ditunjukkan perubahan jumlah subpopulasi dari model penyakit layu pinus sebelum dan sesudah adanya kontrol vaksinasi dan injeksi insektisida (u_1) dan deforestasi (u_2) yang diberikan pada Gambar 3.8. Jumlah subpopulasi terinfeksi E_H , I_H , E_V , dan I_V mengalami kenaikan yang drastis hingga akhir periode sebelum diberikan kontrol u_1 dan u_2 , namun setelah diberikan kontrol u_1 dan u_2 , jumlah subpopulasi terinfeksi E_H dan I_H mengalami penurunan yang signifikan hingga akhir periode, sedangkan subpopulasi E_V dan I_V juga mengalami penurunan, namun kurang signifikan. Berbeda dengan subpopulasi S_H dan S_V , sebelum diberikan kontrol u_1 dan u_2 mengalami penurunan jumlah subpopulasi, namun

setelah diberikan kontrol u_1 dan u_2 jumlah subpopulasi S_H dan S_V mengalami kenaikan hingga akhir periode.



Gambar 3.8 Simulasi numerik model penyakit layu pinus dengan kontrol vaksinasi dan injeksi insektisida (u_1) dan deforestasi (u_2)

Berdasarkan Gambar 3.9, pemberian kontrol vaksinasi dan injeksi insektisida (u_1) diberikan secara maksimal hingga $t = 8$, kemudian mengalami penurunan yang drastis hingga akhir periode mencapai nol, sedangkan pemberian kontrol deforestasi (u_2) diberikan sebesar 0.51 pada awal periode, kemudian pada waktu $t = 10$ sampai $t = 30$ diberikan kontrol sebesar 0.2. Selanjutnya, pemberian kontrol u_2 berangsur-angsur mengalami penurunan hingga akhir periode mencapai nol. Hal ini menunjukkan tidak ada lagi kontrol u_1 dan u_2 pada akhir periode, sehingga subpopulasi S_H dan S_V mengalami penurunan secara perlahan pada akhir periode dan subpopulasi E_H , I_H , E_V , dan I_V mengalami kenaikan secara perlahan pada akhir periode.



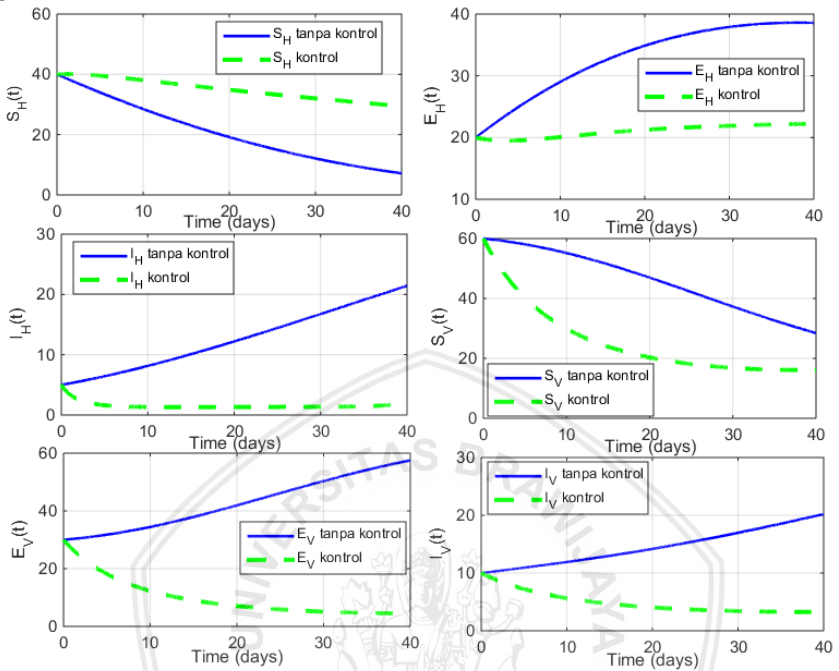
Gambar 3.9 Profil kontrol optimal menggunakan kontrol vaksinasi dan injeksi insektisida (u_1) dan deforestasi (u_2)

Secara keseluruhan pemberian kontrol u_1 dan u_2 kurang efektif untuk menurunkan jumlah subpopulasi vektor rentan, vektor *exposed*, dan vektor terinfeksi, namun pemberian kontrol u_1 dan u_2 efektif untuk menaikkan jumlah subpopulasi pohon pinus rentan dan menurunkan jumlah subpopulasi pohon pinus *exposed* dan pohon pinus terinfeksi.

3.4.7 Simulasi numerik dengan kontrol u_1 , u_2 , dan u_3

Simulasi pada Gambar 3.10 menunjukkan perubahan jumlah subpopulasi dari model penyakit layu pinus sebelum dan sesudah adanya kontrol vaksinasi dan injeksi insektisida (u_1), deforestasi (u_2), dan penyemprotan insektisida (u_3). Sebelum diberikan kontrol u_1 , u_2 , dan u_3 , jumlah subpopulasi terinfeksi E_H , I_H , E_V , dan I_V mengalami kenaikan yang drastis hingga akhir periode, namun setelah diberikan kontrol u_1 , u_2 dan u_3 , jumlah subpopulasi terinfeksi E_H , I_H , E_V , dan I_V mengalami penurunan yang signifikan hingga akhir periode. Berbeda dengan subpopulasi S_H dan S_V , sebelum diberikan kontrol u_1 , u_2 , dan u_3 mengalami penurunan jumlah subpopulasi, namun setelah diberikan kontrol u_1 , u_2 , dan u_3 jumlah subpopulasi S_H

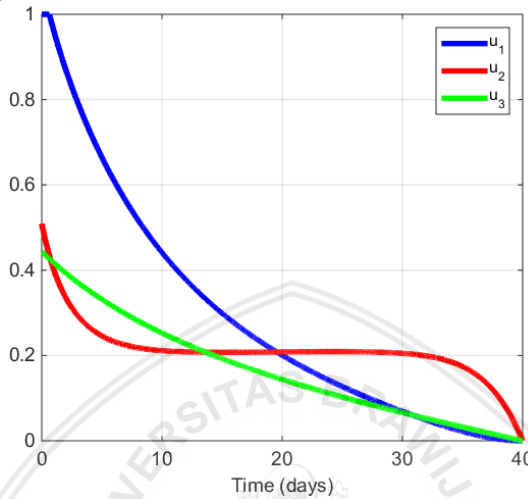
mengalami kenaikan dan S_V mengalami penurunan hingga akhir periode.



Gambar 3.10 Simulasi numerik model penyakit layu pinus dengan kontrol vaksinasi dan injeksi insektisida (u_1), deforestasi (u_2), dan penyemprotan insektisida (u_3)

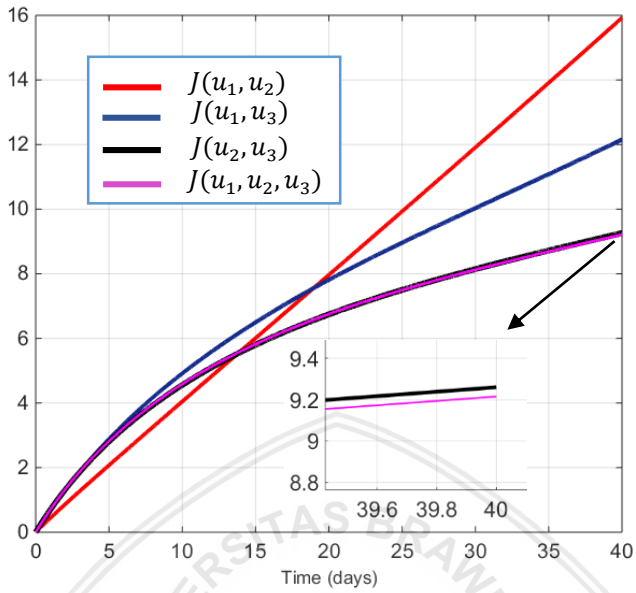
Pemberian kontrol vaksinasi dan injeksi insektisida (u_1) diberikan secara maksimal hingga $t = 2$, sedangkan pemberian kontrol deforestasi (u_2) diberikan sebesar 0.5117 pada awal periode, kemudian pada waktu $t = 10$ sampai $t = 30$ diberikan kontrol u_2 sebesar 0.2 dan pemberian kontrol penyemprotan insektisida (u_3) diberikan sebesar 0.43 pada awal periode. Selanjutnya, pemberian kontrol u_1 , u_2 , dan u_3 berangsur-angsur mengalami penurunan hingga akhir periode mencapai nol seperti yang ditunjukkan pada Gambar 3.11. Hal ini menunjukkan tidak ada lagi kontrol u_1 , u_2 , dan u_3 pada akhir periode, sehingga subpopulasi S_H mengalami penurunan secara perlahan pada akhir periode dan subpopulasi E_H , I_H , S_V , E_V , dan I_V mengalami kenaikan secara perlahan pada akhir periode. Secara

keseluruhan pemberian kontrol u_1 , u_2 , dan u_3 efektif untuk menurunkan jumlah subpopulasi pohon pinus *exposed*, pohon pinus terinfeksi, vektor rentan, vektor *exposed*, dan vektor terinfeksi, serta menaikkan jumlah subpopulasi pohon pinus rentan.



Gambar 3.11 Profil kontrol optimal menggunakan kontrol vaksinasi dan injeksi insektisida (u_1), deforestasi (u_2), dan penyemprotan insektisida (u_3)

Untuk menentukan strategi kontrol yang paling efektif dapat dilihat dari nilai fungsi tujuan kontrol optimal ($J(\vec{u})$). Berdasarkan Gambar 3.12, nilai $J(\vec{u})$ selama 40 hari ketika digunakan kontrol u_1 dan u_2 , u_1 dan u_3 , u_2 dan u_3 , serta u_1 , u_2 , dan u_3 masing-masing sebesar 15.9250, 12.1561, 9.26, serta 9.2151. Tujuan utama dari penerapan kontrol optimal model penyakit layu pinus, yaitu meminimumkan fungsi tujuan. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa nilai fungsi tujuan ketika diterapkan kontrol u_1 , u_2 , dan u_3 memiliki nilai yang paling minimum, sehingga penerapan kontrol u_1 , u_2 , dan u_3 paling efektif untuk menaikkan jumlah subpopulasi pohon pinus rentan dan menurunkan jumlah subpopulasi pohon pinus *exposed*, pohon pinus terinfeksi, vektor rentan, vektor *exposed*, dan vektor terinfeksi.



Gambar 3.12 Simulasi numerik fungsi tujuan kontrol optimal



BAB IV PENUTUP

Berdasarkan pembahasan pada skripsi ini, dapat disimpulkan sebagai berikut.

1. Model penyakit layu pinus memiliki 2 titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit (P_0) dan titik kesetimbangan endemik (P_1). Titik kesetimbangan P_0 selalu eksis dan bersifat stabil asimtotik global apabila nilai $R_0 \leq 1$, sedangkan titik kesetimbangan E_1 eksis dan bersifat stabil asimtotik global apabila nilai $R_0 > 1$.
2. Penyelesaian masalah kontrol optimal dilakukan dengan membentuk fungsi Hamilton untuk mendapatkan sistem yang optimal sesuai dengan prinsip maksimum Pontryagin yang memenuhi persamaan *state*, *costate*, dan kondisi stasioner.
3. Hasil simulasi numerik menunjukkan perilaku solusi model penyakit layu pinus bersifat stabil asimtotik global sesuai dengan hasil analisis. Pemberian kontrol injeksi insektisida dan vaksinasi (u_1), deforestasi (u_2), dan penyemprotan insektisida (u_3) secara bersamaan memberikan hasil yang paling efektif, yaitu mampu memaksimalkan jumlah subpopulasi pohon pinus rentan dan meminimalkan jumlah subpopulasi pohon pinus *exposed*, pohon pinus terinfeksi, vektor rentan, vektor *exposed*, dan vektor terinfeksi dengan biaya minimum.



DAFTAR PUSTAKA

- Alligood, K. T., T. D. Sauer, dan J. A. Yorke. 2000. *CHAOS: An introduction to Dynamical Systems*. Springer. New York.
- Boyce, W. E. dan R. C. DiPrima. 2012. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. Tenth Edition. John Willey & Sons, Inc. New York.
- Brauer, F. dan C. C. Chavez. 2010. *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*. Second Edition. Springer-Verlag. New York.
- Finizio, N. dan G. Ladas. 1982. *An Introduction to Differential Equation*. Wadsworth Publishing Company Belmont. California.
- Heffernan, J. M, R. J. Smith, dan L. M. Wahl. 2005. Perspective on the Basic Reproductive Ratio. *The Royal Society Interface*. vol. 2 hal. 281-293.
- Khan, M. A., K. Ali, E. Bonyah, K. O. Okosun, dan A. Khan. 2017. Mathematical Modeling and Stability Analysis of Pine Wilt Disease with Optimal control. *Scientific Reports*. vol. 7 hal. 3115-3133.
- Khanh, N. H. 2015. Stability Analysis of a Computer Virus Propagation Model with Antidote in Vulnerable System. *Acta Mathematica Scientia*. vol. 36B hal. 49-61.
- Lee, K.S. dan D. Kim. 2013. Global dynamics of a pine wilt disease transmission model with nonlinear incidence rates. *Appl. Math. Model*. vol. 37 hal. 4561–4569.
- Lee, K.S. 2014. Stability Analysis and Optimal Control Strategy for Prevention of Pine Wilt Disease. *Abstract and Applied Analysis*. vol. 2014 hal 1-15.
- Lee, K.S. dan A. Lashari. 2014. A Stability analysis and optimal control of pine wilt disease with horizontal transmission in vector population. *Applied Mathematics and Computation*. vol. 226 hal. 793–804.
- Lenhart, S. dan J. T. Workman. 2007. *Optimal Control Applied to Biological Models: Mathematical and Computational Biology Series*. Chapman & Hall/ CRC Press. London/ Boca Raton.
- Lenhart, S. dan R. M. Neilan. 2010. An Introduction to Optimal Control with an Application in Disease Modeling. *DIMACS*

- Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*. vol 75 hal. 66-81.
- Mamiya, Y. dan N. Enda. 1972. Transmission of *Bursaphelenchus lignicolus* (Nematoda: Alphelenchoididae) by *Monochamus alternatus* (Coleoptera Cerambycidae). *Nematolog*. vol 18 hal. 159-162.
- Mota, M.M. dan P. C. Vieira. 2008. *Pine Wilt Disease in Portugal*. Springer. Tokyo. pp 33-38.



Lampiran

Lampiran 1. Program Matlab model penyakit layu pinus dengan kontrol dan tanpa kontrol

```
function
dy=st(y,u1,u2,u3,etah,c,kk1,ksi,kk2,tsi,alf,d1,d
elta,gam,etav,eta,d2,alfanol,miu)

x(1)=etah+c*(y(1)+y(2)+y(3))-
      kk1*ksi*y(1)*y(6)+kk1*ksi*y(1)*y(6)*u1-
      kk2*tsi*alf*y(1)*y(6)+kk2*tsi*alf*y(1)*y(6
      )*u1-d1*y(1);
x(2)=kk1*ksi*y(1)*y(6)-
      kk1*ksi*y(1)*y(6)*u1+kk2*tsi*alf*y(1)*y(6)
      -kk2*tsi*alf*y(1)*y(6)*u1-(d1+delta)*y(2);
x(3)=delta*y(2)-(d1+gam)*y(3)-u2*y(3);
x(4)=(etav*(y(4)+y(5)+y(6))*(1-u3))-
      eta*y(4)*y(3)*(1-u1)-d2*y(4)-
      alfanol*u3*y(4);
x(5)=eta*y(4)*y(3)*(1-u1)-(d2+miu)*y(5)-
      alfanol*u3*y(5);
x(6)=miu*y(5)-d2*y(6)-alfanol*u3*y(6);

dy=[x(1) x(2) x(3) x(4) x(5) x(6)];
```

```
function
dg=co(y,SH,IH,SV,IV,c1,c2,u1,u2,u3,c,kk1,ksi,kk2
,tsi,alf,d1,delta,gam,etav,eta,d2,alfanol,miu)
g1=y(1); g2=y(2); g3=y(3); g4=y(4); g5=y(5);
g6=y(6);
x(1)=((kk1*ksi*IV-kk1*ksi*IV*u1)+kk2*tsi*alf*IV-
      kk2*tsi*alf*IV*u1)*(g1-g2)+g1*d1-c*g1;
x(2)=g2*(d1+delta)-g3*delta-g1*c;
x(3)=g3*(d1+gam)+g3*u2+(g4-g5)*eta*SV*
      (1-u1)-g1*c-c1;
x(4)=-c2-g4*etav*(1-u3)+eta*IH*(1-u1)*
      (g4-g5)+g4*d2+g4*alfanol*u3;
x(5)=-c2-g4*etav*(1-u3)+g5*(d2+miu)+
      g5*alfanol*u3-g6*miu;
```

```
x(6)=-c2-g4*etav*(1-u3)+(kk1*ksi*SH*(1-
u1)+kk2*tsi*alf*SH*(1-u1))*(g1-
g2)+d2*miu*g6+alfanol*u3*g6;
```

```
dg=[x(1) x(2) x(3) x(4) x(5) x(6)];
```

```
clear all;
```

```
clc;
```

```
tic
```

```
SH0=40; EH0=20; IH0=5; SV0=60; EV0=30; IV0=10;
```

```
etah=0.002021;
```

```
c=0.001241;
```

```
kk1=0.00166;
```

```
kk2=0.0004;
```

```
ksi=2;
```

```
gam=0.00220;
```

```
d1=0.0000301;
```

```
delta=0.0133;
```

```
alf=0.0032;
```

```
eta=0.00305;
```

```
miu=0.01;
```

```
etav=0.0132652;
```

```
alfanol=0.21;
```

```
tsi=0.0023;
```

```
d2=0.011764;
```

```
u1max=1; u2max=1; u3max=1;
```

```
c1=0.01; c2=0.0036; b1=0.02; b2=0.3; b3=3;
```

```
h=0.01;
```

```
t=0:h:40;
```

```
N=length(t);
```

```
u1=zeros(N,1); u1o=zeros(N,1);
```

```
u2=zeros(N,1); u2o=zeros(N,1);
```

```
u3=zeros(N,1); u3o=zeros(N,1);
```

```
SH=zeros(N,1); SHo=zeros(N,1);
```

```
EH=zeros(N,1); EHo=zeros(N,1);
```

```
IH=zeros(N,1); IHo=zeros(N,1);
```



```

SV=zeros(N,1); SVo=zeros(N,1);
EV=zeros(N,1); EVo=zeros(N,1);
IV=zeros(N,1); IVo=zeros(N,1);

g1=zeros(N,1); g1o=zeros(N,1);
g2=zeros(N,1); g2o=zeros(N,1);
g3=zeros(N,1); g3o=zeros(N,1);
g4=zeros(N,1); g4o=zeros(N,1);
g5=zeros(N,1); g5o=zeros(N,1);
g6=zeros(N,1); g6o=zeros(N,1);

tes=1;
it=0;
J(1)=0;

while tes>1e-3
    u1o=u1; u2o=u2; u3o=u3;
    SHo=SH;  EHo=EH;  IHo=IH;  SVo=SV;  EVo=EV;
    IVo=IV;
    g1o=g1; g2o=g2; g3o=g3; g4o=g4; g5o=g5;
    g6o=g6;
    SH(1)=SH0; EH(1)=EH0; IH(1)=IH0; SV(1)=SV0;
    EV(1)=EV0; IV(1)=IV0;

    for i=1:N-1
        y=[SH(i) EH(i) IH(i) SV(i) EV(i) IV(i)];

        k11=h*st(y,u1o(i),u2o(i),u3o(i),etah,c,kk
            1,ksi,kk2,tsi,alf,d1,delta,gam,etav,eta,d
            2,alfanol,miu);
        k12=h*st(y+0.5*k11,u1o(i),u2o(i),u3o(i),etah
            ,c,kk1,ksi,kk2,tsi,alf,d1,delta,gam,etav,
            eta,d2,alfanol,miu);
        k13=h*st(y+0.5*k12,u1o(i),u2o(i),u3o(i),etah
            ,c,kk1,ksi,kk2,tsi,alf,d1,delta,gam,etav,
            eta,d2,alfanol,miu);
        k14=h*st(y+k13,u1o(i),u2o(i),u3o(i),etah,c,k
            k1,ksi,kk2,tsi,alf,d1,delta,gam,etav,eta,
            d2,alfanol,miu);
        y=y+(1/6)*(k11+2*k12+2*k13+k14);
        SH(i+1)=y(1);
        EH(i+1)=y(2);
    end
end

```

```
IH(i+1)=y(3);
SV(i+1)=y(4);
EV(i+1)=y(5);
IV(i+1)=y(6);
J(i+1)=J(it+1)+h*(c1*IH(i)+c2*(SV(i)+EV(i)
)+IV(i))+0.5*(b1*u1o(i)^2+b2*u2o(i)^2+b3*
u3o(i)^2);
end

if it==0
    figure(1)
    subplot(3,2,1)
    plot(t,SH,'b','LineWidth',2);
    hold on;

    subplot(3,2,2)
    plot(t,EH,'b','LineWidth',2);
    hold on;

    subplot(3,2,3)
    plot(t,IH,'b','LineWidth',2);
    hold on;

    subplot(3,2,4)
    plot(t,SV,'b','LineWidth',2);
    hold on;

    subplot(3,2,5)
    plot(t,EV,'b','LineWidth',2);
    hold on;

    subplot(3,2,6)
    plot(t,IV,'b','LineWidth',2);
    hold on;
end
g1(N)=0; g2(N)=0; g3(N)=0; g4(N)=0; g5(N)=0;
g6(N)=0;
u1(N)=0; u2(N)=0; u3(N)=0;

for i=1:N-1
    je=N-i;
```

```

y=[g1(je+1) g2(je+1) g3(je+1) g4(je+1) g5(je+1)
g6(je+1)];

k21=h*co(y,SH(je+1),IH(je+1),SV(je+1),IV(je+1)
,c1,c2,u1o(je+1),u2o(je+1),u3o(je+1),c,kk1,k
si,kk2,tsi,alf,d1,delta,gam,etav,eta,d2,alfa
nol,miu);

k22=h*co(y+0.5*k21,SH(je+1),IH(je+1),SV(je+1),IV
(je+1),c1,c2,u1o(je+1),u2o(je+1),u3o(je+1),c
,kk1,ksi,kk2,tsi,alf,d1,delta,gam,etav,eta,d
2,alfanol,miu);

k23=h*co(y+0.5*k22,SH(je+1),IH(je+1),SV(je+1),
IV(je+1),c1,c2,u1o(je+1),u2o(je+1),u3o(je+1)
,c,kk1,ksi,kk2,tsi,alf,d1,delta,gam,etav,eta
,d2,alfanol,miu);

k24=h*co(y+k23,SH(je+1),IH(je+1),SV(je+1),
IV(je+1),c1,c2,u1o(je+1),u2o(je+1),u3o(je+1)
,c,kk1,ksi,kk2,tsi,alf,d1,delta,gam,etav,eta
,d2,alfanol,miu);
y=y-(1/6)*(k21+2*k22+2*k23+k24);
g1(je)=y(1);
g2(je)=y(2);
g3(je)=y(3);
g4(je)=y(4);
g5(je)=y(5);
g6(je)=y(6);

temp1=max([0 ((g2(je)-
g1(je))* (kk1*ksi*SH(je)*IV(je)+kk2*eta*alf
*SH(je)*IV(je))+ (g5(je)-
g4(je))*eta*SV(je)*IH(je))/b1]);
u1(je)=min([temp1 ulmax]);
temp2=max([0 (g3(je)*IH(je))/b2]);
u2(je)=min([temp2 u2max]);
temp3=max([0
(g4(je)*(etav*(SV(je)+EV(je)+IV(je))+alfan
ol*SV(je))+alfanol*(g5(je)*EV(je)+g6(je)*I
V(je)))/b3]);

```

```

u3(je)=min([temp3 u3max]);
end

eSH=sum(abs(SH-SHo));
eEH=sum(abs(EH-EHo));
eIH=sum(abs(IH-IHo));
eSV=sum(abs(SV-SVo));
eEV=sum(abs(EV-EVo));
eIV=sum(abs(IV-IVo));

eg1=sum(abs(g1-g1o));
eg2=sum(abs(g2-g2o));
eg3=sum(abs(g3-g3o));
eg4=sum(abs(g4-g4o));
eg5=sum(abs(g5-g5o));
eg6=sum(abs(g6-g6o));

eu1=sum(abs(u1-u1o));
eu2=sum(abs(u2-u2o));
eu3=sum(abs(u3-u3o));

tes=eSH+eEH+eIH+eSV+eEV+eIV+eg1+eg2+eg3+eg4+
eg5+eg6+eu1+eu2+eu3;
it=it+1;

u1=(0.5*u1+0.5*u1o);
u2=(0.5*u2+0.5*u2o);
u3=(0.5*u3+0.5*u3o);
end

```

```

figure(1)
subplot(3,2,1)
plot(t,SH,'g--','Linewidth',3);
xlabel('Time (days)');
ylabel('S_H(t)');
legend('S_H Tanpa Kontrol', 'S_H dengan
Kontrol');
grid on; hold on;

subplot(3,2,2)
plot(t,EH,'g--','Linewidth',3);

```

```
xlabel('Time (days)');
ylabel('E_H(t)');
legend('E_H Tanpa Kontrol', 'E_H dengan
Kontrol');
grid on; hold on;

subplot(3,2,3)
plot(t,IH,'g--','Linewidth',3);
xlabel('Time (days)');
ylabel('I_H(t)');
legend('I_H Tanpa Kontrol', 'I_H dengan
Kontrol');
grid on; hold on;

subplot(3,2,4)
plot(t,SV,'g--','Linewidth',3);
xlabel('Time (days)');
ylabel('SV(t)');
legend('SV Tanpa Kontrol', 'SV dengan Kontrol');
grid on; hold on;

subplot(3,2,5)
plot(t,EV,'g--','Linewidth',3);
xlabel('Time (days)');
ylabel('E_V(t)');
legend('E_V Tanpa Kontrol', 'E_V dengan
Kontrol');
grid on; hold on;

subplot(3,2,6)
plot(t,IV,'g--','Linewidth',3);
xlabel('Time (days)');
ylabel('I_V(t)');
legend('I_V Tanpa Kontrol', 'I_V dengan
Kontrol');
grid on; hold on;

figure (2)
plot(t,u1,'b','LineWidth',4);
hold on;
plot(t,u2,'r','LineWidth',4);
```

```
hold on;  
plot(t,u3,'g','LineWidth',4);  
xlabel('Time (days)');  
legend('u_1','u_2','u_3');  
grid on;  
  
plot(t,J,'g','LineWidth',3);  
xlabel('Time (days)');  
legend('Fungsi tujuan J(u_1,u_2,u_3)');  
grid on;  
  
toc
```



