# IDEAL *FUZZY* DALAM SEMIRING TERURUT

**SKRIPSI**

oleh:
**M. YASIN**
**145090401111033**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA**
**JURUSAN MATEMATIKA**
**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**
**UNIVERSITAS BRAWIJAYA**
**MALANG**
**2019**

# IDEAL *FUZZY* DALAM SEMIRING TERURUT

## SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Matematika

oleh:
**M. YASIN**
**145090401111033**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA**
**JURUSAN MATEMATIKA**
**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**
**UNIVERSITAS BRAWIJAYA**
**MALANG**
**2019**

**LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI**

**IDEAL *FUZZY* DALAM SEMIRING TERURUT**

oleh:
**M. YASIN**
**145090401111033**

**Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji**
**pada tanggal 27 Juni 2019**
**dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar**
**Sarjana Matematika**

**Pembimbing**

**<u>Dr. Noor Hidayat, M.Si</u>**
**NIP. 196112041988021001**

**Mengetahui,**
**Ketua Jurusan Matematika**
**Fakultas MIPA Universitas Brawijaya**

**<u>Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si., M.Si., Ph.D</u>**
**NIP. 197509082000031003**

**LEMBAR PERNYATAAN**

**Saya yang bertanda tangan di bawah ini:**

| | |
|---|---|
| **Nama** | **: M. Yasin** |
| **NIM** | **: 145090401111033** |
| **Jurusan** | **: Matematika** |
| **Judul Skripsi** | **: Ideal *Fuzzy* dalam Semiring Terurut** |

**Dengan ini menyatakan bahwa:**

1. **Isi dari skripsi yang saya buat adalah benar-benar karya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain, selain nama-nama yang termaktub di isi dan tertulis di Daftar Pustaka dalam skripsi ini.**
2. **Apabila di kemudian hari ternyata skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala resiko yang akan saya terima.**

**Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.**

**Malang, 27 Juni 2019**
**Yang menyatakan,**

**M. Yasin**
**NIM. 145090401111033**

# IDEAL *FUZZY* DALAM SEMIRING TERURUT

## ABSTRAK

Semiring terurut merupakan semiring yang dilengkapi dengan urutan parsial $\preccurlyeq$. Pada skripsi ini diperkenalkan konsep ideal *fuzzy* dalam semiring terurut. Selanjutnya dibahas tentang beberapa operasi antara ideal *fuzzy* dari semiring terurut seperti penjumlahan, komposisi, hasil kali kartesius, irisan, dan gabungan yang hasilnya juga merupakan ideal *fuzzy* dari semiring terurut. Kemudian, dibentuk semiring terurut dengan elemen berupa himpunan semua ideal *fuzzy* dari semiring terurut $S$ atau $FI(S)$ dibawah operasi penjumlahan dan komposisi.

**Kata kunci:** Semiring terurut, ideal *fuzzy*, penjumlahan, komposisi.

# FUZZY IDEALS IN ORDERED SEMIRINGS

## ABSTRACT

Ordered semirings are semirings that completed with partial order $\preccurlyeq$. This final project introduced fuzzy ideal concept in ordered semiring. Furthermore, it is discussed about several operations of fuzzy ideals of ordered semiring such as sum, composition, cartesian product, intersection, and union which the results are also fuzzy ideals of ordered semiring. Then, an ordered semiring is formed with the elements in the form of a set of all fuzzy ideals of ordered semiring $S$ or $FI(S)$ with sum and composition operations.

**Keyword:** Ordered semiring, fuzzy ideal, sum, composition.

## KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, segala puji bagi Allah SWT yang telah memberikan rahmat, taufiq, dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "**Ideal *Fuzzy* dalam Semiring Terurut**". Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada teladan kita Rasulullah SAW yang membimbing kita menuju jalan kebenaran.

Skripsi ini disusun dan diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Matematika pada Program Studi Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Brawijaya.

Penyusunan skripsi ini tidak lepas dari bantuan, bimbingan, dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Dr. Noor Hidayat, M.Si selaku dosen pembimbing yang telah sabar dalam memberikan bimbingan, nasihat, motivasi, dan saran selama penyusunan skripsi ini.
2. Dra. Ari Andari, MS dan Drs. Bambang Sugandi, M.Si selaku dosen penguji yang memberikan saran, dan tanggapan untuk perbaikan skripsi ini.
3. Ratno Bagus Edy Wibowo S.Si., M.Si., Ph.D selaku ketua Jurusan Matematika dan Dr. Isnani Darti, S.Si., M.Si selaku ketua Program Studi Matematika atas bantuan yang diberikan.
4. Seluruh dosen Jurusan Matematika Universitas Brawijaya yang menyampaikan ilmunya kepada penulis dan staff Tata Usaha Jurusan Matematika atas bantuan yang diberikan.
5. Ibu (Marhumah), Bapak (Abdul Rochim), Kakak (Siti Aminah, Abdulllah, Robi'atul Adawiyah, M. Toyib), dan seluruh keluarga tercinta yang selalu mendoakan, memberikan motivasi, dan kasih sayang kepada penulis.
6. Keluarga besar Matematika 2014 yang telah memberikan dukungan, saran dan semangat kepada penulis.
7. K.H. M. Baidlowi Muslich selaku pengasuh ponpes Anwarul Huda yang selalu mendoakan dan mendidik penulis.
8. Teman-teman anggota Koperasi Anwarul Huda dan asatidz asatidzah serta santri TPQ Birrul Walidain yang membantu memberikan semangat dan mendoakan dalam mengerjakan skripsi ini.

9. Semua pihak yang membantu selama proses perkuliahan di Universitas Brawijaya.

Penulis menyadari bahwa penulisan skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan, untuk itu penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun dari semua pihak guna penyempurnaan selanjutnya melalui email penulis yasinmuch30@gmail.com.

Semoga skripsi ini bermanfaat bagi pembaca khususnya mahasiswa Matematika Universitas Brawijaya.

Malang, 27 Juni 2019

Penulis

# DAFTAR ISI

# DAFTAR TABEL

# DAFTAR NOTASI

| Notasi | Keterangan |
|---|---|
| $+_1$ | Operasi penjumlahan *fuzzy* yang didefinisikan |
| $\circ_1$ | Operasi komposisi *fuzzy* yang didefinisikan |
| $\cup$ | Operasi gabungan |
| $\cap$ | Operasi irisan |
| $\preccurlyeq$ | Relasi terurut parsial |
| $\subseteq$ | Himpunan bagian atau s*ubset* |
| $\oplus$ , $\odot$ | Operasi biner |
| $\mathbb{Z}_0^+$ | Himpunan bilangan bulat nonnegatif |
| $M_2(\mathbb{Z}_0^+)$ | Himpunan matriks berordo $2 \times 2$ dengan entri-entrinya adalah bilangan bulat nonnegatif |
| $\mu, v$ | *Fuzzy subset* |
| $S, R, K$ | Semiring terurut |
| $\chi_S$ | Fungsi karakteristik dari himpunan $S$ |
| $(I], I_S$ | *Subset* dari semiring terurut $S$ yang didefinisikan |

# BAB I
# PENDAHULUAN

## 1.1 Latar Belakang

Struktur aljabar adalah bagian dari ilmu matematika yang berkembang dan merupakan suatu sistem matematika yang dibangun dari himpunan, operasi dan aksioma (Hidayat, 2017). Banyaknya aksioma pada struktur aljabar akan membedakan antara struktur aljabar satu dengan yang lain seperti semigrup, grup, semiring, ring, *fuzzy,* modul dan lain sebagainya.

Semiring yang dilengkapi dengan urutan parsial $\preccurlyeq$ disebut semiring terurut (Mandal, 2014). Satyanarayana (1987) telah mengkaji tentang struktur dari semiring terurut. Kemudian, Gan dan Jiang (2011) mengenalkan sifat-sifat dari ideal terurut dalam semiring terurut.

*Fuzzy* merupakan suatu konsep yang diperkenalkan oleh Zadeh (1965). Setiap elemen dari himpunan *fuzzy* berpasangan dengan suatu interval tertutup bilangan real dari 0 sampai 1 yang dikenal dengan istilah derajat keanggotaan. Kehayopulu dan Tsingelis (2007) mempelajari sifat-sifat ideal *fuzzy* dalam semigrup terurut.

Kemudian, Mandal (2014) mengembangkan konsep *fuzzy* dengan semiring terurut melalui artikelnya yang berjudul "*Fuzzy Ideals and Fuzzy Interior Ideals in Ordered Semiring*". Oleh karena itu, dalam skripsi ini akan dikaji ulang karya Mandal (2014) mengenai sifat-sifat dari ideal *fuzzy* dalam semiring terurut.

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang yang telah dijelaskan, rumusan masalah yang dibahas pada skripsi ini adalah bagaimana sifat-sifat dari ideal *fuzzy* dalam semiring terurut.

## 1.3 Tujuan

Berdasarkan rumusan masalah tersebut, tujuan dari skripsi ini adalah membuktikan sifat-sifat dari ideal *fuzzy* dalam semiring terurut.

# BAB II
# TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini diberikan beberapa Definisi dan contoh mengenai teori-teori yang berkaitan dengan struktur aljabar dan himpunan *fuzzy*. Teori-teori tersebut berguna untuk memberikan pemahaman terhadap materi yang akan dibahas dan digunakan sebagai acuan dalam pembahasan skripsi ini. Teori-teori tersebut meliputi relasi, pemetaan, operasi biner, semigrup, semiring, dan himpunan *fuzzy*.

## 2.1 Relasi dan Pemetaan

Berikut ini diberikan definisi dan contoh yang terkait dengan himpunan bagian, keluarga himpunan, hasil kali kartesius, relasi, relasi terurut parsial, *supremum*, *infimum*, pemetaan, dan fungsi karakteristik sebagaimana dikutip dari Battacharya (1986), Kandasamy (2002), Lee (2005), Simovici (2008), dan Muslikh (2012).

**Definisi 2.1.1 (Himpunan Bagian)**
Misalkan $A$ dan $B$ masing-masing merupakan himpunan tak kosong. $A$ disebut himpunan bagian (*subset*) dari $B$ dinotasikan dengan $A \subseteq B$ jika untuk setiap $x \in A$ maka $x \in B$.

**Contoh 2.1.2**
Diberikan himpunan $A = \{a, b\}$ dan $B = \{a, b, c\}$, jadi $A \subseteq B$.

**Definisi 2.1.3 (Keluarga Himpunan)**
Suatu himpunan $\mathcal{A}$ yang elemen-elemennya berupa himpunan disebut keluarga himpunan.

**Contoh 2.1.4**
Diberikan keluarga himpunan $\mathcal{A}$. Elemen $\mathcal{A}$ berupa himpunan $A_1, A_2, \ldots$ dan dinotasikan dengan $\mathcal{A} = \{A_i | i \in \mathbf{I}\}$ dimana $A_i$ adalah himpunan dan $\mathbf{I}$ adalah himpunan indeks.

**Definisi 2.1.5 (Hasil Kali Kartesius)**
Misalkan $A$ dan $B$ masing-masing adalah himpunan tak kosong.

Himpunan dari pasangan terurut $(x, y)$ dimana $x \in A$ dan $y \in B$ disebut hasil kali kartesius (*cartesian product*) dari himpunan $A$ dan $B$ dan dituliskan sebagai berikut.

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}.$$

**Definisi 2.1.6 (Relasi)**
Misalkan $A$ dan $B$ masing-masing merupakan himpunan tak kosong dan $R$ adalah himpunan bagian dari $A \times B$, maka $R$ disebut relasi dari $A$ ke $B$.

Jika $A = B$ maka $R$ disebut relasi pada himpunan $A$. Jika $(x, y) \in R$ maka dikatakan $x$ berelasi $R$ dengan $y$ dan dinotasikan dengan $xRy$.

**Contoh 2.1.7**
Diberikan himpunan $A = \{1,3,5\}$ dan $B = \{2,3,4\}$. Didefinisikan $xRy \Leftrightarrow x < y$. Akan dibuktikan $R \subseteq A \times B$.

**Bukti:**

$$A \times B = \{(1,2), (1,3), (1,4), (3,2), (3,3), (3,4), (5,2), (5,3), (5,4)\}.$$

$$R = \{(1,2), (1,3), (1,4), (3,4)\}.$$

Jadi, terbukti bahwa $R \subseteq A \times B$.

**Definisi 2.1.8 (Relasi Terurut Parsial)**
Relasi $\preccurlyeq$ pada himpunan $A$ disebut relasi terurut parsial jika relasi $\preccurlyeq$ memenuhi kondisi berikut.

1. Relasi $\preccurlyeq$ bersifat refleksif, yaitu
   untuk semua $a \in A$ berlaku $a \preccurlyeq a$.
2. Relasi $\preccurlyeq$ bersifat antisimetris, yaitu
   untuk semua $a, b \in A$, $a \preccurlyeq b$ dan $b \preccurlyeq a$ maka $a = b$.
3. Relasi $\preccurlyeq$ bersifat transitif, yaitu
   untuk semua $a, b, c \in A$, $a \preccurlyeq b$ dan $b \preccurlyeq c$ maka $a \preccurlyeq c$.

Himpunan $A$ dengan relasi terurut $\preccurlyeq$ dinamakan himpunan terurut $A$.

**Contoh 2.1.9**
Diberikan himpunan $L = \{a | a \in [0,1]\}$. Didefinisikan relasi $\preccurlyeq$, yaitu $a \preccurlyeq b \Leftrightarrow a \leq b$ untuk $a, b \in L$. Akan dibuktikan bahwa $(L, \preccurlyeq)$ merupakan himpunan terurut parsial.

**Bukti:**
Akan ditunjukkan bahwa relasi $\preccurlyeq$ bersifat refleksif, antisimetris, dan transitif pada himpunan bilangan bulat positif.

1. Relasi $\preccurlyeq$ bersifat refleksif jika $a \preccurlyeq a$ untuk setiap elemen $a \in L$. Karena untuk setiap $a \in L$ berlaku $a = a$ maka terbukti bahwa $\preccurlyeq$ memenuhi sifat refleksif.

2. Relasi $\preccurlyeq$ bersifat antisimetris jika untuk semua elemen $a, b \in L$, $a \preccurlyeq b$ dan $b \preccurlyeq a$ maka $a = b$.
   Ambil sembarang $a, b \in L$ berlaku $a \preccurlyeq b$ dan $b \preccurlyeq$ c. Karena $a \preccurlyeq b$ berarti $a \leq b$ dan $b \preccurlyeq a$ berarti $b \leq a$, maka berlaku $a \leq b$ dan $b \leq a$ sehingga diperoleh $a = b$. Jadi, terbukti relasi $\preccurlyeq$ memenuhi sifat antisimetris.

3. Relasi $\preccurlyeq$ bersifat transitif jika untuk semua elemen $a, b, c \in L$, $a \preccurlyeq b$ dan $b \preccurlyeq c$ maka $a \preccurlyeq c$.
   Ambil sembarang $a, b \in L$ berlaku $a \preccurlyeq b$ dan $b \preccurlyeq$ c. Karena $a \preccurlyeq b$ berarti $a \leq b$ dan $b \preccurlyeq c$ berarti $b \leq c$, maka berlaku $a \leq b \leq c$. Dapat dituliskan $a \leq c$ sehingga $a \preccurlyeq c$. Jadi, terbukti bahwa relasi $\preccurlyeq$ bersifat transitif.

Jadi, terbukti bahwa $(L, \preccurlyeq)$ merupakan himpunan terurut parsial.

**Contoh 2.1.10**
Diberikan $\mathbb{Z}_0^+$ adalah himpunan bilangan bulat nonnegatif. Didefinisikan relasi $m \preccurlyeq n \Leftrightarrow n = km$ untuk $k, m, n \in \mathbb{Z}_0^+$ yang berarti bahwa elemen $m$ faktor dari $n$. Akan dibuktikan bahwa relasi $\preccurlyeq$ merupakan relasi terurut parsial.

**Bukti:**

1. Relasi $\preccurlyeq$ bersifat refleksif jika $n \preccurlyeq n$ untuk setiap $n \in \mathbb{Z}_0^+$.
   Karena terdapat $k = 1$ sedemikian sehingga $n = 1.n \in \mathbb{Z}_0^+$ maka $n \preccurlyeq n$. Jadi, relasi $\preccurlyeq$ bersifat refleksif.

2. Relasi $\preccurlyeq$ bersifat antisimetris jika untuk semua $m, n \in \mathbb{Z}_0^+$, $m \preccurlyeq n, n \preccurlyeq m$ maka $m = n$.
   Misalkan $n = pm$ dan $m = qn$ untuk $p, q \in \mathbb{Z}_0^+$. Diperoleh
   $n = pm = p(qn) = (pq)n \Longrightarrow pq = 1 \Longrightarrow p = q = 1$.
   Sehingga $n = pm = (1)m = m$, dan $m = qn = (1)n = n$.

Jadi, relasi $\preccurlyeq$ bersifat antisimetris.

3. Relasi $\preccurlyeq$ bersifat transitif jika untuk semua $m, n, r \in \mathbb{Z}_0^+, m \preccurlyeq n$, $n \preccurlyeq r$ maka $m \preccurlyeq r$.
   Misalkan $n = pm$ dan $r = qn$ untuk $p, q \in \mathbb{Z}_0^+$. Diperoleh $r = qn = q(pm) = (pq)m$ yang berarti $m \preccurlyeq r$.
   Jadi, relasi $\preccurlyeq$ bersifat transitif.

Karena sifat (1), (2), dan (3) dipenuhi maka terbukti bahwa relasi $\preccurlyeq$ merupakan relasi terurut parsial.

**Definisi 2.1.11 (*Supremum*)**
Diberikan himpunan terurut $S$ dengan urutan $\leq$ dan $E \subseteq S$. Suatu elemen $a \in S$ disebut *supremum* (batas atas terkecil) dari himpunan $E$ jika memenuhi ketentuan berikut.
i. $a$ adalah batas atas dari $E$ yaitu $a \in S$ maka untuk setiap $x \in E$ berlaku $x \leq a$.
ii. Jika $p \in S$ dan $p < a$, maka $p$ bukan batas atas dari $E$. Dinotasikan dengan $a = \sup E$.

**Definisi 2.1.12 (*Infimum*)**
Diberikan himpunan terurut $S$ dengan urutan $\leq$ dan $E \subseteq S$. Suatu elemen $b \in S$ disebut *infimum* (batas bawah terbesar) dari himpunan $E$ jika memenuhi ketentuan berikut.
i. $b$ adalah batas bawah dari $E$ yaitu $b \in S$ maka untuk setiap $x \in E$ berlaku $x \geq b$.
ii. Jika $q \in S$ dan $q > b$, maka $q$ bukan batas bawah dari $E$. Dinotasikan dengan $b = \inf E$.

**Contoh 2.1.13**
Diberikan $\mathbb{Z}$ merupakan himpunan bilangan bulat dan himpunan $E = \{-2, -1, 2, 5, 7, 9\} \subseteq \mathbb{Z}$. Akan ditentukan *supremum* dan *infimum* dari himpunan $E$.

**Jawab:**
1. Ambil sembarang $a \in \mathbb{Z}$. Maka semua bilangan bulat $a \geq 9$ merupakan batas atas dari $E$ dan untuk suatu $p \in \mathbb{Z}$, $p < 9$ maka $p$ bukan batas atas dari $E$. Oleh karena itu, 9 adalah batas atas terkecil dari himpunan $E$ atau $\sup E = 9$.

2. Ambil sembarang $b \in \mathbb{Z}$. Maka semua bilangan bulat $b \leq -2$ merupakan batas bawah dari $E$ dan untuk suatu $q \in \mathbb{Z}$, $q > -2$ maka $q$ bukan batas bawah dari $E$. Oleh karena itu, $\inf E = -2$.

**Contoh 2.1.14**
Diberikan $\mathbb{Q}$ adalah himpunan terurut bilangan rasional dengan urutan $a \leq b$ untuk $a, b \in \mathbb{Q}$ dan himpunan $F = \left\{\frac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N}\right\} \subseteq \mathbb{Q}$. Akan ditentukan *supremum* dan *infimum* dari himpunan $F$.

**Jawab:**

1. Ambil sembarang $a \in \mathbb{Q}$. Maka semua bilangan rasional $a \geq 1$ merupakan batas atas dari $F$ dan untuk suatu $p \in \mathbb{Q}$, $p < 1$ sehingga $p$ bukan batas atas dari $F$. Oleh karena itu, $\sup F = 1$.

2. Ambil sembarang $a \in \mathbb{Q}$. Maka untuk setiap $\frac{1}{n} \in \mathbb{N}$, bilangan rasional $a \leq \frac{1}{n}$ termasuk bilangan nol dan bilangan rasional negatif merupakan batas bawah dari $F$. Karena untuk sembarang $r > 0 \in \mathbb{Q}$ selalu dapat dicari $n \in \mathbb{N}$ dan $\frac{1}{n} \in F$ sedemikian sehingga $r > \frac{1}{n} > 0$, maka $r$ bukan batas bawah dari $F$. Oleh karena itu, diperoleh 0 merupakan batas bawah terkecil dari $F$ atau $\inf F = 0$.

Dengan demikian, *supremum* dan *infimum* dari suatu himpunan tidak harus menjadi anggota dari himpunan tersebut.

**Definisi 2.1.15 (Pemetaan)**
Misalkan $A$ dan $B$ masing-masing himpunan tak kosong. Relasi $f$ dari $A$ ke $B$ disebut pemetaan dari $A$ ke $B$ jika untuk setiap $x \in A$ mempunyai kawan tepat satu $y \in B$, dinotasikan sebagai

$$f: A \longrightarrow B$$
$$x \longmapsto y = f(x), \text{ untuk setiap } x \in A.$$

Pada pemetaan $f$ dari $A$ ke $B$, himpunan $A$ disebut daerah asal (domain) dan himpunan $B$ disebut daerah kawan (kodomain). Jika

$x_1 = x_2$ maka $f(x_1) = f(x_2)$, jika $x_1 \neq x_2$ maka $f(x_1) \neq f(x_2)$, untuk setiap $x_1, x_2 \in A$.

**Contoh 2.1.16**
Diberikan suatu relasi $\alpha$ pada himpunan bilangan real $\mathbb{R}$, yaitu

$$\alpha: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$
$$x \longmapsto \alpha(x) = x^3 + 1.$$

Akan dibuktikan bahwa $\alpha$ merupakan pemetaan.

**Bukti:**
Ambil sembarang $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $x_1 = x_2$.
Karena $x_1 = x_2$ maka $x_1^3 = x_2^3$ sehingga diperoleh hasil relasi $\alpha$ sebagai berikut:

$$x_1^3 + 3 = x_2^3 + 3$$
$$\alpha(x_1) = \alpha(x_2).$$

Sehingga $x_1 = x_2 \Longrightarrow \alpha(x_1) = \alpha(x_2)$.
Jadi, terbukti bahwa relasi $\alpha$ merupakan pemetaan.

**Definisi 2.1.17 (Fungsi Karakteristik)**
Misalkan $A$ adalah himpunan tak kosong. Didefinisikan suatu fungsi karakteristik dari himpunan $A$, yaitu $\chi_A: A \to \{0,1\}$.

Dimana $\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{, jika dan hanya jika } x \in A \\ 0 & \text{, jika dan hanya jika } x \notin A. \end{cases}$

**Contoh 2.1.18**
Berdasarkan Contoh 2.1.13, fungsi karakteristik dari himpunan $E$ adalah sebagai berikut.

$\chi_E = \{(-2,1), (-1,1), (0,0), (1,1), (2,1), (3,0), (4,0), (5,1), (6,0), (7,1), (8,0), (9,1)\}.$

## 2.2 Operasi Biner

Struktur aljabar merupakan suatu himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan satu atau lebih operasi biner. Berikut ini diberikan definisi dan contoh terkait dengan operasi biner sebagaimana dikutip dari Hidayat (2017).

**Definisi 2.2.1 (Operasi Biner)**
Misalkan $S$ adalah himpunan tak kosong. Operasi biner $*$ pada himpunan $S$ adalah pemetaan dengan domain $S \times S$ dan kodomain $S$, dinotasikan sebagai

$$*: S \times S \longrightarrow S$$
$$(x, y) \longmapsto *(x, y) = x * y = z \in S.$$

Himpunan $S$ dikatakan tertutup terhadap operasi $*$ jika untuk setiap $x, y \in S$ berlaku $x * y \in S$.

**Contoh 2.2.2**
Didefinisikan relasi $*$ pada himpunan bilangan bulat positif $\mathbb{Z}^+$, sebagai berikut:

$$*: \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{Z}^+$$
$$(a, b) \quad \longmapsto *(a, b) \equiv a * b = a^b$$

untuk semua $a, b \in \mathbb{Z}^+$. Akan ditunjukkan bahwa operasi $*$ pada himpunan $\mathbb{Z}^+$ adalah operasi biner.

**Bukti:**
Karena $a$ dan $b$ adalah elemen bilangan bulat positif, maka $a^b$ juga elemen di $Z^+$. Sehingga himpunan $\mathbb{Z}^+$ tertutup terhadap operasi $*$ dan terbukti bahwa operasi $*$ merupakan operasi biner pada himpunan $\mathbb{Z}^+$.

**Contoh 2.2.3**
Diketahui $\mathbb{N}$ adalah himpunan bilangan asli. Didefinisikan operasi $\circledast$ pada himpunan $\mathbb{N}$ sebagai berikut:

$$\circledast: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$(a, b) \longmapsto \circledast\,(a, b) = 2a - b.$$

Akan dibuktikan $\circledast$ bukan operasi biner pada $\mathbb{N}$.

**Bukti:**
Jelas bahwa $2a - b \notin \mathbb{N}$ untuk $b > 2a$. Sebagai contoh, ambil $a$ dan $b$ elemen di $\mathbb{N}$. Misalkan $a = 4$ dan $b = 10$, didapat
$2a - b = 2(4) - 10 = 8 - 10 = -2 \notin \mathbb{N}$.
Sehingga operasi $\circledast$ bukan operasi biner di $\mathbb{N}$.

**Definisi 2.2.4 (Sifat-Sifat Operasi)**
Sifat-sifat operasi adalah sebagai berikut.

1. Asosiatif

   Suatu operasi biner $*$ dikatakan memenuhi hukum asosiatif jika
$$x * (y * z) = (x * y) * z,$$
   untuk setiap $x, y, z \in S$.
2. Komutatif

   Suatu operasi biner $*$ dikatakan memenuhi hukum komutatif jika
$$x * y = y * x,$$
   untuk setiap $x, y \in S$.
3. Distributif

   Misalkan terdapat dua operasi biner yang disimbolkan "$*$" dan "$\circ$". Suatu operasi biner dikatakan memenuhi hukum distributif jika untuk setiap $x, y, z \in S$ berlaku
   i. Distributif kiri atas $\circ$
$$x * (y \circ z) = (x * y) \circ (x * z).$$
   ii. Distributif kanan atas $\circ$
$$(y \circ z) * x = (y * x) \circ (z * x).$$

## 2.3 Semigrup

Semigrup merupakan struktur aljabar yang disertai dengan satu operasi biner dan operasinya memenuhi hukum asosiatif. Berikut ini diberikan definisi dan contoh semigrup sebagaimana dikutip dari Whitelaw (1995) dan Kandasamy (2002).

**Definisi 2.3.1 (Semigrup)**
Misalkan $S$ adalah himpunan tak kosong dan didalamnya didefinisikan operasi biner $*$. $(S,*)$ disebut semigrup jika dan hanya jika
1. $(S,*)$ tertutup, yaitu $x * y \in S$ untuk setiap $x, y \in S$, dan
2. bersifat asosiatif, yaitu berlaku $(x * y) * z = x * (y * z)$ untuk setiap $x, y, z \in S$.

**Contoh 2.3.2**
Diberikan $\mathbb{Z}^+$ merupakan himpunan bilangan bulat positif dan $M_2(\mathbb{Z}^+) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}^+ \right\}$. Akan dibuktikan bahwa $(M_2(\mathbb{Z}^+), +)$ merupakan semigrup.

**Bukti:**

i. $(M_2(\mathbb{Z}^+), +)$ memenuhi sifat tertutup.
Ambil sembarang $A, B \in M_2(\mathbb{Z}^+)$ dengan
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$
untuk suatu $a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{Z}^+$. Didapat
$$\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}. \end{aligned}$$
Karena $a+e, b+f, c+g, d+h \in \mathbb{Z}^+$ sehingga untuk setiap $A, B \in M_2(\mathbb{Z}^+)$ berlaku $A + B \in M_2(\mathbb{Z}^+)$. Jadi, $(M_2(\mathbb{Z}^+), +)$ memenuhi sifat tertutup.

ii. $(M_2(\mathbb{Z}^+), +)$ memenuhi sifat asosiatif.
Ambil sembarang $A, B, C \in M_2(\mathbb{Z}^+)$ dengan
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$$
untuk suatu $a, b, c, d, e, f, g, h, p, q, r, s \in \mathbb{Z}^+$. Didapat
$$\begin{aligned} (A + B) + C &= \left( \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a+e)+p & (b+f)+q \\ (c+g)+r & (d+h)+s \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a+(e+p) & b+(f+q) \\ c+(g+r) & d+(h+s) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e+p & f+q \\ g+r & h+s \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \left( \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \right) \\ &= A + (B + C). \end{aligned}$$
Karena berlaku $(A + B) + C = A + (B + C)$ untuk setiap $A, B, C \in M_2(\mathbb{Z}^+)$ maka $(M_2(\mathbb{Z}^+), +)$ memenuhi hukum asosiatif.

Jadi, terbukti bahwa $(M_2(\mathbb{Z}^+), +)$ merupakan semigrup.

**Definisi 2.3.3 (Semigrup Komutatif)**
Jika di dalam semigrup $(S,*)$ berlaku $x * y = y * x$ untuk setiap $x, y \in S$, maka $S$ adalah semigrup komutatif.

**Contoh 2.3.4**
Berdasarkan Contoh 2.3.2, $(M_2(\mathbb{Z}^+), +)$ merupakan semigrup. Akan dibuktikan $(M_2(\mathbb{Z}^+), +)$ merupakan semigrup komutatif.

**Bukti:**
Ambil sembarang $A, B \in M_2(\mathbb{Z}^+)$ dengan

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

untuk suatu $a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{Z}^+$. Didapat

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a + e & b + f \\ c + g & d + h \end{pmatrix} \end{aligned}$$

karena $a + e, b + f, c + g, d + h \in \mathbb{Z}^+$ sehingga berlaku
$a + e = e + a, b + f = f + b, c + g = g + c, d + h = h + d,$

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} e + a & f + b \\ g + c & h + d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &= B + A. \end{aligned}$$

Sehingga $A + B = B + A$ untuk setiap $A, B \in M_2(\mathbb{Z}^+)$ dan terbukti bahwa $(M_2(\mathbb{Z}^+), +)$ merupakan semigrup komutatif.

**Definisi 2.3.5 (Monoid)**
Jika di dalam semigrup $(S,*)$ terdapat elemen identitas $e$ sedemikian sehingga $e * x = e * x = x$ untuk setiap $x \in S$, maka $S$ adalah semigrup dengan elemen identitas atau monoid.

**Contoh 2.3.6**
Berdasarkan Contoh 2.3.4, $M_2(\mathbb{Z}^+, +)$ merupakan semigrup komutatif. Diberikan $\mathbb{Z}$ adalah himpunan bilangan bulat dan $\mathbb{Z}_0^+$ merupakan himpunan bilangan bulat nonnegatif. Akan dibuktikan $M_2(\mathbb{Z}^+, +)$ dan $M_2(\mathbb{Z}_0^+, +)$ merupakan monoid.

**Bukti:**
Diketahui bahwa $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ merupakan elemen identitas pada $M_2(\mathbb{Z})$ terhadap operasi penjumlahan karena $\mathbf{0} + A = A + \mathbf{0} = A$, untuk setiap $A \in M_2(\mathbb{Z})$. Karena $\mathbf{0} \notin M_2(\mathbb{Z}^+)$ sehingga $M_2(\mathbb{Z}^+)$ tidak memiliki elemen identitas terhadap penjumlahan maka $M_2(\mathbb{Z}^+, +)$ bukan monoid. Sedangkan $\mathbf{0} \in M_2(\mathbb{Z}_0^+)$ sedemikian sehingga $\mathbf{0} + B = B + \mathbf{0} = B$, untuk setiap $B \in M_2(\mathbb{Z}_0^+)$, maka $M_2(\mathbb{Z}_0^+, +)$ adalah monoid.

## 2.4 Semiring

Semiring merupakan struktur aljabar yang terdiri atas suatu himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan dua operasi biner dan memenuhi aksioma tertentu. Berikut ini diberikan definisi dan contoh yang terkait dengan semiring sebagaimana dikutip dari Kandasamy (2002), Gan dan Jiang (2011), Chaudary (2014), dan Mandal (2014).

**Definisi 2.4.1 (Semiring)**
Semiring adalah suatu sistem yang terdiri dari himpunan tak kosong $S$ dengan dua operasi biner, yaitu penjumlahan dan pergandaan atau dituliskan dengan $(S, +, \cdot)$ sedemikian sehingga
1. $(S, +)$ adalah monoid komutatif,
2. $(S, \cdot)$ adalah semigrup,
3. Operasi penjumlahan dan pergandaan memenuhi sifat distributif, yaitu $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$ dan $(x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$ untuk setiap $x, y, z \in S$.

**Contoh 2.4.2**
Akan dibuktikan bahwa $(M_2(\mathbb{Z}_0^+), +, \cdot)$ merupakan semiring.

**Bukti:**
1. $(M_2(\mathbb{Z}_0^+), +)$ adalah monoid komutatif.
   Berdasarkan Contoh 2.3.5, $M_2(\mathbb{Z}_0^+, +)$ merupakan monoid. Karena untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}_0^+$ berlaku $a + b = b + a$ maka untuk setiap $A, B \in M_2(\mathbb{Z}_0^+)$ juga berlaku $A + B = B + A$ sehingga terbukti bahwa $(M_2(\mathbb{Z}_0^+), +)$ adalah monoid komutatif.

2. $(M_2(\mathbb{Z}_0^+)\ ,\cdot)$ adalah semigrup,

i. $(M_2(\mathbb{Z}_0^+),\cdot)$ memenuhi sifat tertutup.

Ambil sembarang $A, B \in M_2(\mathbb{Z}_0^+)$ dengan

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

untuk suatu $a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{Z}_0^+$. Didapat

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}.$$

Karena $ae + bg,\ af + bh,\ ce + dg,\ cf + dh \in \mathbb{Z}_0^+$ maka $A \cdot B \in M_2(\mathbb{Z}_0^+)$.

ii. $(M_2(\mathbb{Z}_0^+),\cdot)$ memenuhi sifat asosiatif.

Ambil sembarang $A, B, C \in M_2(\mathbb{Z}_0^+)$ dengan

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$$

untuk suatu $a, b, c, d, e, f, g, h, p, q, r, s \in \mathbb{Z}_0^+$. Didapat

$$(A \cdot B) \cdot C = \left( \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (ae + bg)p + (af + bh)r & (ae + bg)q + (af + bh)s \\ (ce + dg)p + (cf + dh)r & (ce + dg)q + (cf + dh)s \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a(ep + fr) + b(gp + bh) & a(eq + fs) + b(gq + hs) \\ c(ep + fr) + d(gp + hr) & c(eq + fs) + d(gp + hs) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (ep + fr) & (eq + fs) \\ (gp + bh) & (gq + hs) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \left( \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \right)$$

$$= A \cdot (B \cdot C).$$

Karena berlaku $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ untuk setiap $A, B, C \in M_2(\mathbb{Z}_0^+)$ maka operasi pergandaan memenuhi hukum asosiatif.

Jadi, terbukti bahwa $M_2(\mathbb{Z}_0^+)$ terhadap operasi pergandaan merupakan semigrup.

3. Operasi penjumlahan dan pergandaan pada $M_2(\mathbb{Z}_0^+)$ memenuhi sifat distributif.

Ambil sembarang $A, B, C \in M_2(\mathbb{Z}_0^+)$ dengan

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$$

untuk suatu $a, b, c, d, e, f, g, h, p, q, r, s \in \mathbb{Z}_0^+$. Didapat

i. $A \cdot (B + C) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \left( \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \right)$

$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e+p & f+q \\ g+r & h+s \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} a(e+p) + b(g+r) & a(f+q) + b(h+s) \\ c(e+p) + d(g+r) & c(f+q) + d(h+s) \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ae + bg + ap + br & af + bh + aq + bs \\ ce + dg + cp + dr & cf + dh + cq + ds \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} (ae + bg) + (ap + br) & (af + bh) + (aq + bs) \\ (ce + dg) + (cp + dr) & (cf + dh) + (cq + ds) \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} (ae + bg) & (af + bh) \\ (ce + dg) & (cf + dh) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (ap + br) & (aq + bs) \\ (cp + dr) & (cq + ds) \end{pmatrix}$

$= \left( \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \right) + \left( \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \right)$

$= (A \cdot B) + (A \cdot C),$

ii. $(A + B) \cdot C = \left( \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} (a+e)p + (b+f)r & (a+e)q + (b+f)s \\ (c+g)p + (d+h)r & (c+g)q + (d+h)s \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} (ap + br) + (ep + fr) & (aq + bs) + (eq + fs) \\ (cp + dr) + (gp + hr) & (cq + ds) + (gq + hs) \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} (ap + br) & (aq + bs) \\ (cp + dr) & (cq + ds) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (ep + fr) & (eq + fs) \\ (gp + hr) & (gq + hs) \end{pmatrix}$

$= \left( \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \right) + \left( \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \right)$

$= (A \cdot C) + (B \cdot C).$

Karena terbukti bahwa $A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$ dan $(A + B) \cdot C = (A \cdot C) + (B \cdot C)$ maka sifat distributif terpenuhi.

Jadi, terbukti bahwa $(M_2(\mathbb{Z}_0^+), +, \cdot)$ merupakan semiring.

**Contoh 2.4.3**
Diberikan himpunan $L = \{a | a \in [0,1]\}$. Didefinisikan $(L, \vee, \cdot)$ dengan $x \vee y = \max\{x, y\}$, dan $x \cdot y = \max\{x + y - 1, 0\}$ untuk $x, y \in L$. Akan dibuktikan bahwa $(L, \vee, \cdot)$ merupakan semiring.

**Bukti:**
Akan ditunjukkan bahwa $(L, \vee, \cdot)$ merupakan semiring.

1. $(L, \vee)$ adalah monoid komutatif.
   i. $(L, \vee)$ memenuhi sifat tertutup.
   Ambil sembarang $x, y \in L$. Didapat
   $x \vee y = \max\{x, y\} = x \in L$, untuk $y \leq x$, dan
   $x \vee y = \max\{x, y\} = y \in L$, untuk $x \leq y$.
   Sehingga terbukti bahwa untuk $x, y \in L$ maka $x \vee y \in L$.

   ii. $(L, \vee)$ memenuhi sifat asosisatif.
   Ambil sembarang $x, y, z \in L$.
   i. Jika $x \leq y \leq z$, maka
   $(x \vee y) \vee z = \max\{\max\{x, y\}, z\} = \max\{y, z\} = z$,
   $x \vee (y \vee z) = \max\{x, \max\{y, z\}\} = \max\{x, z\} = z$.
   Sehingga $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$.
   ii. Jika $y \leq x \leq z$, maka
   $(x \vee y) \vee z = \max\{\max\{x, y\}, z\} = \max\{x, z\} = z$,
   $x \vee (y \vee z) = \max\{x, \max\{y, z\}\} = \max\{x, z\} = z$.
   Sehingga $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$.

   iii. Jika $y \leq z \leq x$, maka
   $(x \vee y) \vee z = \max\{\max\{x, y\}, z\} = \max\{x, z\} = x$,
   $x \vee (y \vee z) = \max\{x, \max\{y, z\}\} = \max\{x, z\} = x$.
   Sehingga $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$.

   iv. Jika z$\leq y \leq x$, maka
   $(x \vee y) \vee z = \max\{\max\{x, y\}, z\} = \max\{x, z\} = x$,
   $x \vee (y \vee z) = \max\{x, \max\{y, z\}\} = \max\{x, y\} = x$.
   Sehingga $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$.

   v. Jika $z \leq x \leq y$ atau $x \leq z \leq y$, maka

$(x \vee y) \vee z = \max\{\max\{x, y\}, z\} = \max\{y, z\} = y,$
$x \vee (y \vee z) = \max\{x, \max\{y, z\}\} = \max\{x, y\} = y.$
Sehingga $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$.

Jadi, untuk setiap $x, y, z \in L$ berlaku sifat asosiatif, yaitu $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$.

iii. Memiliki elemen identitas.
Ambil sembarang $x \in L$. Didapat
$x \vee 0 = \max\{x, 0\} = \max\{0, x\} = 0 \vee x = x$, untuk $0 \in L$.
Jadi, terbukti $(L,\vee)$ memeiliki elemen identitas, yaitu 0.

d) $(L,\vee)$ memenuhi sifat komutatif.
Ambil sembarang $x, y \in L$.
Karena $x \vee y = \max\{x, y\} = \max\{y, x\} = y \vee x \in L$, maka sifat komutatif terpenuhi.

Jadi, terbukti bahwa $(L,\vee)$ merupakan monoid komutatif.

2. $(L,\cdot)$ adalah semigrup,
a) $(L,\cdot)$ memenuhi sifat tertutup.
Ambil sembarang $x, y \in L$. Didapat
$x \cdot y = \max\{(x + y - 1), 0\}$
$= 0 \in L$, untuk $(x + y - 1) \leq 0$, dan
$x \cdot y = \max\{(x + y - 1), 0\}$
$= (x + y - 1) \in L$, untuk $0 \leq (x + y - 1)$.
Sehingga terbukti bahwa untuk $x, y \in L$ maka $x \cdot y \in L$.

b) $(L,\cdot)$ memenuhi sifat asosisatif.
Ambil sembarang $x, y, z \in L$.
i. Jika $(x + y - 1) \leq (y + z - 1) \leq 0$ atau $(y + z - 1) \leq (z + y - 1) \leq 0$, maka

$$
\begin{aligned}
(x \cdot y) \cdot z &= (\max\{(x + y - 1), 0\}) \cdot z \\
&= 0 \cdot z \\
&= \max\{(0 + z - 1), 0\} = 0, \\
x \cdot (y \cdot z) &= x \cdot (\max\{(y + z - 1), 0\}) \\
&= x \cdot 0 \\
&= \max\{(x + 0 - 1), 0\} = 0.
\end{aligned}
$$

Sehingga $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

ii. Jika $0 \leq (y+z-1) \leq (x+y-1)$ atau $0 \leq (x+y-1) \leq (y+z-1)$, maka

$$\begin{aligned}(x\cdot y)\cdot z &= (\max\{(x+y-1),0\})\cdot z\\ &= (x+y-1)\cdot z\\ (x\cdot y)\cdot z &= \max\{((x+y-1)+z-1),0\}\\ &= \max\{(x+y+z-2),0\}\\ x\cdot(y\cdot z) &= x\cdot(\max\{(y+z-1),0\})\\ &= x\cdot(y+z-1)\\ &= \max\{(x+(y+z-1)-1),0\}\\ &= \max\{(x+y+z-2),0\}.\end{aligned}$$

Sehingga $(x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z)$.

iii. Jika $(x+y-1) \leq 0 \leq (y+z-1)$, maka

$$\begin{aligned}(x\cdot y)\cdot z &= (\max\{(x+y-1),0\})\cdot z\\ &= 0\cdot z\\ &= \max\{(0+z-1),0\} = 0,\\ x\cdot(y\cdot z) &= x\cdot(\max\{(y+z-1),0\})\\ &= x\cdot(y+z-1)\\ &= \max\{(x+(y+z-1)-1),0\}\\ &= \max\{((x+y-1)+z-1),0\} = 0.\end{aligned}$$

Sehingga $(x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z)$.

iv. Jika $(y+z-1) \leq 0 \leq (x+y-1)$, maka

$$\begin{aligned}(x\cdot y)\cdot z &= (\max\{(x+y-1),0\})\cdot c\\ &= (x+y-1)\cdot z\\ &= \max\{((x+y-1)+z-1),0\}\\ &= \max\{(x-1+(y+z-1)),0\} = 0,\\ x\cdot(y\cdot z) &= x\cdot(\max\{(y+z-1),0\})\\ &= x\cdot 0\\ &= \max\{(x+0-1),0\} = 0.\end{aligned}$$

Sehingga $(x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z)$.

Jadi, untuk setiap $x, y, z \in L$ berlaku sifat asosiatif, yaitu $(x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z)$.

Sehingga terbukti bahwa $(L,\cdot)$ merupakan semigrup.

3. Operasi $\vee$ dan $\cdot$ pada $L$ memenuhi sifat distributif.
   Ambil sembarang $x, y, z \in L$.

i. Jika $x \leq y \leq z$, maka

$$\begin{aligned} x \cdot (y \vee z) &= \max\{(x + (\max\{y, z\}) - 1), 0\} \\ &= \max\{(x + z - 1), 0\}, \\ (x \cdot y) \vee (x \cdot z) &= \max\{\max\{(x + y - 1), 0\}, \\ &\qquad \max\{(x + z - 1), 0\}\} \\ &= \max\{(x + z - 1), 0\}. \end{aligned}$$

Sehingga $x \cdot (y \vee z) = (x \cdot y) \vee (x \cdot z)$. Kemudian,

$$\begin{aligned} (x \vee y) \cdot z &= \max\{(\max\{x, y\}) + z - 1) \vee 0\} \\ &= \max\{(y + z - 1), 0\}, \\ (x \cdot z) \vee (y \cdot z) &= \max\{\max\{(x + z - 1), 0\}, \\ &\qquad \max\{(y + z - 1), 0\}\} \\ &= \max\{(y + z - 1), 0\}. \end{aligned}$$

Sehingga $(x \vee y) \cdot z = (x \cdot z) \vee (y \cdot z)$.

ii. Jika $y \leq x \leq z$ atau $y \leq z \leq x$, maka

$$\begin{aligned} x \cdot (y \vee z) &= \max\{(x + (\max\{y, z\}) - 1), 0\} \\ &= \max\{(x + z - 1), 0\}, \\ (x \cdot y) \vee (x \cdot z) &= \max\{\max\{(x + y - 1), 0\}, \\ &\qquad \max\{(x + z - 1), 0\}\} \\ &= \max\{(x + z - 1), 0\}. \end{aligned}$$

Sehingga $x \cdot (y \vee z) = (x \cdot y) \vee (x \cdot z)$. Kemudian,

$$\begin{aligned} (x \vee y) \cdot z &= \max\{(\max\{x, y\}) + z - 1), 0\} \\ &= \max\{(x + z - 1), 0\}, \\ (x \cdot z) \vee (y \cdot z) &= \max\{\max\{(x + z - 1), 0\}, \\ &\qquad \max\{(y + z - 1), 0\}\} \\ &= \max\{(x + z - 1), 0\}. \end{aligned}$$

Sehingga $(x \vee y) \cdot z = (x \cdot z) \vee (y \cdot z)$.

iii. Jika $z \leq y \leq x$, maka

$$\begin{aligned} x \cdot (y \vee z) &= \max\{(x + (\max\{y, z\}) - 1), 0\} \\ &= \max\{(x + y - 1), 0\}, \\ (x \cdot y) \vee (x \cdot z) &= \max\{\max\{(x + y - 1), 0\}, \\ &\qquad \max\{(x + z - 1), 0\}\} \\ &= \max\{(x + y - 1), 0\}. \end{aligned}$$

Sehingga $x \cdot (y \vee z) = (x \cdot y) \vee (x \cdot z)$. Kemudian,

$$\begin{aligned} (x \vee y) \cdot z &= \max\{(\max\{x, y\}) + z - 1), 0\} \\ &= \max\{(x + z - 1), 0\}, \\ (x \cdot z) \vee (y \cdot z) &= \max\{\max\{(x + z - 1), 0\}, \end{aligned}$$

$$\max\{(y+z-1),0\}\}$$
$$= \max\{(x+z-1),0\}.$$

Sehingga $(x \vee y) \cdot z = (x \cdot z) \vee (y \cdot z)$.

iv. Jika $x \leq z \leq y$ atau $z \leq x \leq y$, maka

$$x \cdot (y \vee z) = \max\{(x + (\max\{y,z\}) - 1), 0\}$$
$$= \max\{(x+y-1),0\},$$
$$(x \cdot y) \vee (x \cdot z) = \max\{\max\{(x+y-1),0\},$$
$$\max\{(x+z-1),0\}\}$$
$$= \max\{(x+y-1),0\}.$$

Sehingga $x \cdot (y \vee z) = (x \cdot y) \vee (x \cdot z)$. Kemudian,

$$(x \vee y) \cdot z = \max\{(\max\{x,y\}) + z - 1), 0\}$$
$$= \max\{(y+z-1),0\},$$
$$(x \cdot z) \vee (y \cdot z) = \max\{\max\{(x+z-1),0\},$$
$$\max\{(y+z-1),0\}\}$$
$$= \max\{(y+z-1),0\}.$$

Sehingga $(x \vee y) \cdot z = (x \cdot z) \vee (y \cdot z)$.

Jadi, untuk setiap $x, y, z \in L$, operasi $\vee$ dan $\cdot$ pada $L$ memenuhi sifat distributif, yaitu

$x \cdot (y \vee z) = (x \cdot y) \vee (x \cdot z)$ dan $(x \vee y) \cdot z = (x \cdot z) \vee (y \cdot z)$.

Sehingga terbukti bahwa $(L, \vee, \cdot)$ merupakan semiring.

**Contoh 2.4.4**

Diberikan himpunan $(S, \oplus, \odot)$ dimana $S = \{0, a, b, c\}$ dengan $0 < a < b < c$. Didefinisikan operasi pada $S$ sebagai berikut:

**Tabel 2.1** Operasi $\oplus$ pada $S$

| $\oplus$ | **0** | $\boldsymbol{a}$ | $\boldsymbol{b}$ | $\boldsymbol{c}$ |
|---|---|---|---|---|
| **0** | 0 | $a$ | $b$ | $c$ |
| $\boldsymbol{a}$ | $a$ | $a$ | $b$ | $c$ |
| $\boldsymbol{b}$ | $b$ | $b$ | $b$ | $c$ |
| $\boldsymbol{c}$ | $c$ | $c$ | $c$ | $c$ |

**Tabel 2.2** Operasi $\odot$ pada $S$

| $\odot$ | **0** | $\boldsymbol{a}$ | $\boldsymbol{b}$ | $\boldsymbol{c}$ |
|---|---|---|---|---|
| **0** | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $\boldsymbol{a}$ | 0 | $a$ | $a$ | $a$ |
| $\boldsymbol{b}$ | 0 | $a$ | $b$ | $b$ |
| $\boldsymbol{c}$ | 0 | $a$ | $b$ | $c$ |

Akan dibuktikan bahwa himpunan $(S, \oplus, \odot)$ adalah semiring.

**Bukti:**

1. $(S, \oplus)$ adalah monoid komutatif.
   a) $(S, \oplus)$ memenuhi sifat tertutup.
   Berdasarkan Tabel 2.1, jelas bahwa untuk setiap $x, y \in S$, $x \oplus y \in S$. Sehingga terbukti bahwa $(S, \oplus)$ bersifat tertutup.

   b) $(S, \oplus)$ memenuhi sifat asosiatif.
   Berdasarkan Tabel 2.1, dapat ditunjukkan bahwa untuk $x = a, y = b, z = c \in S$, jelas bahwa
   $(a \oplus b) \oplus c = b \oplus c = c$,
   $a \oplus (b \oplus c) = a \oplus c = c$.
   Sehingga $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$.
   Dengan cara yang sama, untuk setiap $x, y, z \in S$ berlaku $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$.
   Sehingga terbukti bahwa $(S, \oplus)$ bersifat asosiatif.

   c) $(S, \oplus)$ memiliki elemen identitas.
   Ambil sembarang $x \in S$.
   Berdasarkan Tabel 2.1, dapat ditunjukkan bahwa
   i. untuk $x = 0$, jelas bahwa $0 \oplus 0 = 0$,
   ii. untuk $x = a$, jelas bahwa $a \oplus 0 = 0 \oplus a = a$,
   iii. untuk $x = b$, jelas bahwa $b \oplus 0 = 0 \oplus b = b$,
   iv. untuk $x = c$, jelas bahwa $c \oplus 0 = 0 \oplus c = c$.
   Sehingga untuk setiap $x \in S$ memenuhi $x \oplus 0 = 0 \oplus x = x$.
   Jadi, terbukti bahwa $(S, \oplus)$ memiliki elemen identitas, yaitu 0.

   d) $(S, \oplus)$ memenuhi sifat komutatif.
   Berdasarkan Tabel 2.1, jelas bahwa untuk setiap $x, y \in S$ berlaku $x \oplus y = y \oplus x$.

   Karena sifat (a), (b), (c), dan (d) terpenuhi, maka terbukti bahwa $(S, \oplus)$ adalah monoid komutatif.

2. $(S, \odot)$ merupakan semigrup.
   a) $(S, \odot)$ memenuhi sifat tertutup.
   Berdasarkan Tabel 2.2, jelas bahwa untuk setiap $x, y \in S$, $x \odot y \in S$. Sehinga terbukti bahwa $(S, \odot)$ bersifat tertutup.

   b) $(S, \odot)$ mmenuhi sifat asosiatif.

Berdasarkan Tabel 2.2, dapat ditunjukkan bahwa untuk $x = a, y = b, z = c \in S$, jelas bahwa
$(a \odot b) \odot c = a \odot c = a$,
$a \odot (b \odot c) = a \odot b = a$.
Sehingga $(a \odot b) \odot c = a \odot (b \odot c)$.
Dengan cara yang sama, untuk setiap $x, y, z \in S$ berlaku $(x \odot y) \odot z = x \odot (y \odot z)$.
Sehingga terbukti bahwa $(S,\odot)$ bersifat asosiatif.

Karena sifat (a) dan (b) terpenuhi, maka terbukti bahwa $(S,\odot)$ merupakan semigrup.

3. Operasi $\oplus$ dan $\odot$ pad $S$ bersifat distributif.
Akan ditunjukkan bahwa untuk setiap elemen $x, y, z \in S$ berlaku
$(x \oplus y) \odot z = (x \odot z) \oplus (y \odot z)$ dan
$x \odot (y \oplus z) = (x \odot y) \oplus (x \odot z)$.
   a) Ambil sembarang elemen $x, y, z \in S$.
   Misal $x = 0, y = b,$ dan $z = c$, maka
   $(0 \oplus b) \odot c = b \odot c = b$,
   $(0 \odot c) \oplus (b \odot c) = 0 \oplus b = b$.
   Sehingga $(0 \oplus b) \odot c = (0 \odot c) \oplus (b \odot c)$.
   Dengan cara yang sama, untuk setiap $x, y, z \in S$ berlaku $(x \oplus y) \odot z = (x \odot z) \oplus (y \odot z)$.

   b) Ambil sembarang elemen $x, y, z \in S$.
   Misal $x = a, y = b,$ dan $z = c$, maka
   $a \odot (b \oplus c) = a \odot c = a$,
   $(a \odot b) \oplus (a \odot c) = a \oplus a = a$.
   Sehingga $a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c)$.
   Dengan cara yang sama, untuk setiap $x, y, z \in S$ berlaku $x \odot (y \oplus z) = (x \odot y) \oplus (x \odot z)$.

   Karena sifat (a) dan (b) terpenuhi maka terbukti bahwa operasi $\oplus$ dan $\odot$ bersifat distributif.

Jadi, terbukti bahwa $(S,\oplus,\odot)$ merupakan semiring.

**Contoh 2.4.5**
Diberikan himpunan $(R,*,\diamond)$ dimana $R = \{0,1,2,4\} \subseteq \mathbb{Z}_0^+$ dan didefinisikan operasi pada $S$ sebagai berikut:

**Tabel 2.3** Operasi $*$ pada $R$

| $*$ | **0** | **1** | **2** | **4** |
|---|---|---|---|---|
| **0** | 0 | 1 | 2 | 4 |
| **1** | 1 | 1 | 2 | 4 |
| **2** | 2 | 2 | 2 | 4 |
| **4** | 4 | 4 | 4 | 4 |

**Tabel 2.4** Operasi $\diamond$ pada $R$

| $\diamond$ | **0** | **1** | **2** | **4** |
|---|---|---|---|---|
| **0** | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **1** | 0 | 1 | 1 | 1 |
| **2** | 0 | 1 | 1 | 1 |
| **4** | 0 | 1 | 1 | 1 |

Akan dibuktikan bahwa himpunan $(R,*,\diamond)$ adalah semiring.

**Bukti:**

1. $(R,*)$ adalah monoid komutatif.
   a) $(R,*)$ memenuhi sifat tertutup.
   Bedasarkan Tabel 2.1, jelas bahwa untuk setiap $x, y \in R$, $x * y \in R$. Sehingga terbukti bahwa $(R,*)$ bersifat tertutup.

   b) $(R,*)$ memenuhi sifat asosiatif.
   Berdasarkan Tabel 2.1, dapat ditunjukkan bahwa untuk $x = 1, y = 2, z = 4 \in R$, jelas bahwa
   $(1 * 2) * 4 = 2 * 4 = 4$,
   $1 * (2 * 4) = 1 * 4 = 4$.
   Sehingga $(1 * 2) * 4 = 1 * (2 * 4)$.
   Dengan cara yang sama, untuk setiap $x, y, z \in R$ berlaku $(x * y) * z = x * (y * z)$.
   Sehingga terbukti bahwa $(S,*)$ bersifat asosiatif.

   c) $(R,*)$ memiliki elemen identitas.
   Ambil sembarang $x \in R$.
   Berdasarkan Tabel 2.1, dapat ditunjukkan bahwa
   i. untuk $x = 0$, jelas bahwa $0 * 0 \quad = 0$,
   ii. untuk $x = 1$, jelas bahwa $1 * 0 \quad = 0 * 1 = 1$,
   iii. untuk $x = 2$, jelas bahwa $2 * 0 \quad = 0 * 2 \quad = 2$,
   iv. untuk $x = 4$, jelas bahwa $4 * 0 \quad = 0 * 4 \quad = 4$.
   Sehingga untuk setiap $x \in R$ memenuhi $x * 0 = 0 * x = x$.
   Jadi, terbukti bahwa $(R,*)$ memiliki elemen identitas, yaitu 0.

   d) $(R,*)$ memenuhi sifat komutatif.

Berdasarkan Tabel 2.1, jelas bahwa untuk setiap $x, y \in R$ berlaku $x * y = y * x$.

Karena sifat (a), (b), (c), dan (d) terpenuhi, maka terbukti bahwa $(R,*)$ adalah monoid komutatif.

2. $(R,\diamond)$ merupakan semigrup.
   a) $(R,\diamond)$ memenuhi sifat tertutup.
   Berdasarkan Tabel 2.2, jelas bahwa untuk setiap $x, y \in R$, $x \diamond y \in R$. Sehinga terbukti bahwa $(R,\diamond)$ bersifat tertutup.

   b) $(R,\diamond)$ mmenuhi sifat asosiatif.
   Berdasarkan Tabel 2.2, dapat ditunjukkan bahwa untuk $x = 0, y = 2, z = 4 \in R$, jelas bahwa
   $(1 \diamond 2) \diamond 4 = 1 \diamond 4 = 1$,
   $1 \diamond (2 \diamond 4) = 1 \diamond 1 = 1$.
   Sehingga $(1 \diamond 2) \diamond 4 = 1 \diamond (2 \diamond 4)$.
   Dengan cara yang sama, untuk setiap $x, y, z \in R$ berlaku $(x \diamond y) \diamond z = x \diamond (y \diamond z)$.
   Sehingga terbukti bahwa $(R,\diamond)$ bersifat asosiatif.

   Karena sifat (a) dan (b) terpenuhi, maka terbukti bahwa $(R,\diamond)$ merupakan semigrup.

3. Operasi $*$ dan $\diamond$ pada $R$ bersifat distributif.
   Akan ditunjukkan bahwa untuk setiap elemen $x, y, z \in R$ berlaku
   $(x * y) \diamond z = (x \diamond z) * (y \diamond z)$ dan
   $x \diamond (y * z) = (x \diamond y) * (x \diamond z)$.
   a) Ambil sembarang elemen $x, y, z \in R$.
   Misal $x = 0, y \neq 0, z \neq 0 \in R$, maka
   $(0 * y) \diamond z = y \diamond z = 1$,
   $(0 \diamond z) \otimes (y \diamond z) = 0 * 1 = 1$.
   Sehingga $(0 * y) \diamond z = (0 \diamond z) * (y \diamond z)$.
   Dengan cara yang sama, untuk setiap $x, y, z \in R$ berlaku $(x * y) \diamond z = (x \diamond z) * (y \diamond z)$.

   b) Ambil sembarang elemen $x, y, z \in R$.
   Jika $x = 0, y \neq 0, z \neq 0 \in R$, maka
   $0 \diamond (y * z) = 0 \diamond 1 = 0$,
   $(0 \diamond y) * (0 \diamond z) = 0 * 0 = 0$.

Sehingga $0 \diamond (y * z) = (0 \diamond y) * (0 \diamond z)$.

Dengan cara yang sama, untuk setiap $x, y, z \in R$ berlaku $x \diamond (y * z) = (x \diamond y) * (x \diamond z)$.

Sehingga terbukti bahwa operasi $*$ dan $\diamond$ pada $R$ bersifat distributif.

Jadi, terbukti bahwa $(R, *, \diamond)$ merupakan semiring.

**Definisi 2.4.6 (*zerosumfree*)**
Semiring $(S, +, \cdot)$ disebut *zerosumfree* jika dan hanya jika $x + y = \mathbf{0}$ mengakibatkan $x = y = \mathbf{0}$ untuk $\mathbf{0}, x, y \in S$.

**Contoh 2.4.7**
Misalkan $\mathbb{Z}_0^+$ adalah semiring di bawah operasi penjumlahan dan pergandaan. Akan dibuktikan bahwa $(\mathbb{Z}_0^+, +, \cdot)$ adalah *zerosumfree*.

**Bukti:**
Akan ditunjukkan bahwa jika $x + y = 0$ maka $x = y = 0$ untuk $0, x, y \in \mathbb{Z}_0^+$. Andaikan $x, y \neq 0$ maka terdapat elemen $-x, -y \notin \mathbb{Z}_0^+$ sedemikian sehingga untuk $x + y = 0$ diperoleh solusi $x = -y \notin \mathbb{Z}_0^+$ atau $y = -x \notin \mathbb{Z}_0^+$. Sehingga, kontradiksi dengan pernyataan $x, y \in \mathbb{Z}_0^+$. Oleh karena itu, Jika $x + y = 0$ maka didapat $x = 0$ jika dan hanya jika $y = 0$ atau $x = y = 0$ untuk $0, x, y \in \mathbb{Z}_0^+$.

**Definisi 2.4.8 (Semiring Terurut)**
Semiring terurut adalah semiring $S$ yang dilengkapi dengan urutan parsial $\preccurlyeq$ sedemikian sehingga memenuhi kondisi berikut.

1. Operasinya monoton, yaitu untuk setiap $x, y, z \in S$ berlaku
   a) terhadap operasi penjumlahan, yaitu
      $x \preccurlyeq y \Rightarrow x + z \preccurlyeq y + z$, dan
   b) terhadap operasi pergandaan, yaitu
      $x \preccurlyeq y, 0 \preccurlyeq z \Rightarrow xz \preccurlyeq yz$ dan $zx \preccurlyeq zy$.
2. Konstanta 0 adalah elemen terkecil dari $S$.

Misalkan $H$ adalah *subset* tak kosong dari $S$. Maka himpunan $\{x \in S \mid x \preccurlyeq h, \text{untuk sembarang } h \in H\}$ dinotasikan dengan $(H]$.

**Contoh 2.4.9**
Berdasarkan Contoh 2.4.3, diketahui bahwa $(L, \vee, \cdot)$ adalah semiring dan dari Contoh 2.1.9, himpunan $(L, \preccurlyeq)$ merupakan himpunan terurut parsial. Akan dibuktikan bahwa $(L, \vee, \cdot, \preccurlyeq)$ adalah semiring terurut.

**Bukti:**
1. Akan ditunjukkan bahwa pada $(L, \vee, \cdot, \preccurlyeq)$ berlaku operasi monoton sebagai berikut.
   a) Terhadap operasi $\vee$, yaitu $x \preccurlyeq y \Rightarrow x \vee z \preccurlyeq y \vee z$.
      Ambil sembarang elemen $x, y, z \in L$.
      i. Jika $z \preccurlyeq x \preccurlyeq y$, maka
         $x \vee z = \max\{x, z\} = x$ dan $y \vee z = \max\{y, z\} = y$.
         Sehingga berlaku $x \vee z \preccurlyeq y \vee z$.
      ii. Jika $x \preccurlyeq z \preccurlyeq y$, maka
         $x \vee z = \max\{x, z\} = z$ dan $y \vee z = \max\{y, z\} = y$.
         Sehingga berlaku $x \vee z \preccurlyeq y \vee z$.

      iii. Jika $x \preccurlyeq y \preccurlyeq z$, maka
         $x \vee z = \max\{x, z\} = z$ dan $x \vee z = \max\{y, z\} = z$.
         Sehingga $x \vee z = y \vee z$ atau berlaku $x \vee z \preccurlyeq y \vee z$.
      Jadi, terbukti bahwa jika $x \preccurlyeq y$, maka $x \vee z \preccurlyeq y \vee z$.

   b) Terhadap operasi $\cdot$, yaitu $x \preccurlyeq y,\ 0 \preccurlyeq z \Rightarrow x \cdot z \preccurlyeq y \cdot z$ dan $z \cdot x \preccurlyeq z \cdot y$.
      Ambil sembarang elemen $x, y, z \in L$, dimana $0 \preccurlyeq z$.
      i. Jika $0 \leq x + z - 1 \leq y + z - 1$, maka
         $x \cdot z = \max\{x + z - 1, 0\} = x + z - 1$, dan
         $y \cdot z = \max\{y + z - 1, 0\} = y + z - 1$.
         Sehingga berlaku $x \cdot z \preccurlyeq y \cdot z$.

      ii. Jika $x + z - 1 \leq 0 \leq y + z - 1$, maka
         $x \cdot z = \max\{x + z - 1, 0\} = 0$, dan
         $y \cdot z = \max\{y + z - 1, 0\} = y + z - 1$.
         Sehingga berlaku $x \cdot z \preccurlyeq y \cdot z$.

      iii. Jika $x + z - 1 \leq y + z - 1 \leq 0$, maka
         $x \cdot z = \max\{x + z - 1, 0\} = 0$, dan
         $y \cdot z = \max\{y + z - 1, 0\} = 0$.

Sehingga $x \cdot z = y \cdot z$ atau berlaku $x \cdot z \preccurlyeq y \cdot z$.

Karena $x + z - 1 = z + x - 1$ dan $y + z - 1 = z + y - 1$, maka $x \cdot z = z \cdot x$ dan $y \cdot z = z \cdot y$. Sehingga terbukti bahwa jika $x \preccurlyeq y$, $0 \preccurlyeq z$, maka $x \cdot z \preccurlyeq y \cdot z$ dan $z \cdot x \preccurlyeq z \cdot y$.

Jadi, operasi monoton pada semiring $(L, \vee, \cdot, \preccurlyeq)$ terpenuhi.

2. Elemen 0 merupakan elemen terkecil dari semiring $L$ karena $L$ merupakan himpunan elemen dari interval tertutup bilangan real dari 0 sampai 1.

Jadi, terbukti bahwa $(L, \vee, \cdot, \preccurlyeq)$ merupakan semiring terurut.

**Contoh 2.4.10**

Berdasarkan Contoh 2.4.4, diketahui bahwa himpunan $(S, \oplus, \odot)$ dengan $S = \{0, a, b, c\}$ merupakan semiring. Didefinisikan relasi terurut parsial $x \preccurlyeq y \Leftrightarrow x \oplus y = y$ dan $x \odot y = x$ untuk setiap $x, y \in S$. Akan dibuktikan bahwa $(S, \preccurlyeq)$ merupakan semiring terurut.

**Bukti:**

1. Akan ditunjukkan bahwa relasi $\preccurlyeq$ pada $S$ adalah relasi terurut parsial.
   a) Relasi $\preccurlyeq$ bersifat refleksif.
   Jelas untuk setiap $x \in S$ berlaku $x \oplus x = x$ dan $x \odot x = x$. Sehingga terbukti bahwa $x \preccurlyeq x$ untuk setiap $x \in S$ atau memenuhi sifat refleksif.

   b) Relasi $\preccurlyeq$ bersifat antisimetris.
   Ambil sembarang $x, y \in S$ berlaku $x \preccurlyeq y$ dan $y \preccurlyeq x$.
   $x \preccurlyeq y$ berarti $x \oplus y = y$ dan $x \odot y = x$,
   $y \preccurlyeq x$ berarti $y \oplus x = x$ dan $y \odot x = y$.
   Diperoleh
   i. $y = x \oplus y$ $\quad (x \preccurlyeq y)$
   $= y \oplus x$ $\quad$ (sifat komutatif)
   $= x$ $\quad (y \preccurlyeq x)$
   Sehingga $y = x$.

   ii. $x \odot y = (y \oplus x) \odot y$ $\quad (y \preccurlyeq x)$
   $= (y \odot y) \oplus (x \odot y)$ $\quad$ (sifat distributif)

$$= y \oplus x \quad \text{(sifat refleksif dan } x \preccurlyeq y\text{)}$$
$$= x \oplus y \quad \text{(sifat komutatif)}$$

Sehingga $x \odot y = x \oplus y \Longrightarrow x = y$.

Jadi, terbukti bahwa untuk semua elemen $x, y \in S$, $x \preccurlyeq y$ dan $y \preccurlyeq x$ maka $x = y$ atau memenuhi sifat antisimetris.

c) Relasi $\preccurlyeq$ bersifat transitif.
Ambil sembarang $x, y, z \in L$ berlaku $x \preccurlyeq z$ dan $y \preccurlyeq z$.
$x \preccurlyeq y$ berarti $x \oplus y = y$ dan $x \odot y = x$,
$y \preccurlyeq z$ berarti $y \oplus z = z$ dan $y \odot z = y$.
Diperoleh

i. $y \oplus z = (x \oplus y) \oplus z \quad (x \preccurlyeq y)$
$$= x \oplus (y \oplus z) \quad \text{(sifat asosiatif)}$$
$$y \oplus z = x \oplus z \quad (y \preccurlyeq z)$$
$$z = x \oplus z \quad (y \preccurlyeq z)$$
Sehingga $x \oplus z = z \Longrightarrow x \preccurlyeq z$.

ii. $x \odot y = x \odot (y \odot z) \quad (y \preccurlyeq z)$
$$= (x \odot y) \odot z \quad \text{(sifat asosiatif)}$$
$$x \odot y = x \odot z \quad (x \preccurlyeq y)$$
$$z = x \odot z \quad (x \preccurlyeq y)$$
Sehingga $x \odot z = z \Longrightarrow x \preccurlyeq z$.

Jadi, terbukti bahwa untuk semua elemen $x, y \in S$, $x \preccurlyeq y$ dan $y \preccurlyeq z$ maka $x \preccurlyeq z$ atau memenuhi sifat antisimetris.

Jadi, terbukti bahwa relasi $\preccurlyeq$ pada $S$ merupakan relasi terurut parsial.

2. Akan ditunjukkan bahwa pada $(S, \oplus, \odot, \preccurlyeq)$ berlaku operasi monoton sebagai berikut.
   a) Terhadap operasi $\oplus$, yaitu $x \preccurlyeq y \Longrightarrow x \oplus z \preccurlyeq y \oplus z$.
   Ambil sembarang elemen $x, y, z \in S$.
   i. Jika $z \preccurlyeq x \preccurlyeq y$, maka
   $x \oplus z = x$ dan $y \oplus z = y$.
   Sehingga berlaku $x \oplus z \preccurlyeq y \oplus z$.

   ii. Jika $x \preccurlyeq z \preccurlyeq y$, maka
   $x \oplus z = z$ dan $y \oplus z = y$.
   Sehingga berlaku $x \oplus z \preccurlyeq y \oplus z$.

iii. Jika $x \preccurlyeq y \preccurlyeq z$, maka
$x \oplus z = z$ dan $y \oplus z = z$.
Sehingga $x \oplus z = y \oplus z$ atau berlaku $x \oplus z \preccurlyeq y \oplus z$.
Jadi, terbukti bahwa jika $x \preccurlyeq z$, maka $x \oplus z \preccurlyeq y \oplus z$.

b) Terhadap operasi $\odot$, yaitu $x \preccurlyeq y,\ 0 \preccurlyeq z \Longrightarrow x \odot z \preccurlyeq y \odot z$ dan $z \odot x \preccurlyeq z \odot y$.
Ambil sembarang elemen $x, y, z \in L$, dimana $0 \preccurlyeq z$.
i. Jika $z = 0$, maka
$x \odot z = 0$ dan $y \odot z = 0$.
Sehingga berlaku $x \odot z \preccurlyeq y \odot z$.
ii. Jika $z \neq 0$, maka
$x \odot z = a \in S$ dan $y \odot z = a \in S$.
Sehingga berlaku $x \odot z \preccurlyeq y \odot z$.

Berdasarkan Tabel 2.2, jelas bahwa $x \odot z = z \odot x$, dan $y \odot z = z \odot y$ untuk setiap $x, y, z \in S$. Sehingga terbukti bahwa jika $x \preccurlyeq y$, maka $x \odot z \preccurlyeq z \odot y$ dan $z \odot x \preccurlyeq y \odot z$.
Jadi, operasi monoton pada semiring $(S, \oplus, \odot, \preccurlyeq)$ terpenuhi.

3. Elemen 0 merupakan elemen terkecil dari semiring $S$, jelas dari definisi bahwa $0 < a < b < c$.

Jadi, terbukti bahwa $(S, \oplus, \odot, \preccurlyeq)$ merupakan semiring terurut.

**Contoh 2.4.11**
Berdasarkan Contoh 2.4.5, diketahui bahwa $(R, *, \diamond)$ adalah semiring dimana $R = \{0,1,2,4\} \subseteq \mathbb{Z}_0^+$ dan didefinisikan relasi terurut parsial $\preccurlyeq$ pada $R$ dimana $x \preccurlyeq y \Leftrightarrow y = k * x$ untuk $x, y, k \in R$. Akan dibuktikan bahwa $(R, \preccurlyeq)$ merupakan semiring terurut.

**Bukti:**
1. Akan ditunjukkan bahwa relasi $\preccurlyeq$ pada $R$ merupakan relasi terurut parsial.
Diketahui bahwa $x \preccurlyeq y \Leftrightarrow y = k * x$ untuk $x, y, k \in R$, yaitu
a. Jika $x = 0$, maka
$0 = 0 * 0$ berarti $0 \preccurlyeq 0$
$1 = 1 * 0$ berarti $0 \preccurlyeq 1$

$2 = 2 * 0$ berarti $0 \preccurlyeq 2$
$4 = 4 * 0$ berarti $0 \preccurlyeq 4$

b. Jika $x = 1$, maka
$1 = 0 * 1 = 1 * 1$ berarti $1 \preccurlyeq 1$
$2 = 2 * 1$ berarti $1 \preccurlyeq 2$
$4 = 4 * 1$ berarti $1 \preccurlyeq 4$

c. Jika $x = 2$, maka
$2 = 0 * 2 = 1 * 2 = 2 * 2$ berarti $2 \preccurlyeq 2$
$4 = 4 * 2$ berarti $2 \preccurlyeq 4$

d. Jika $x = 4$, maka
$4 = 0 * 4 = 1 * 4 = 2 * 4 = 4 * 4$ berarti $4 \preccurlyeq 4$

Dari (a), (b), (c), dan (d) maka relasi $\preccurlyeq$ memenuhi.

1. Sifat refleksif, yaitu untuk setiap $x \in R$, $x \preccurlyeq x$.
2. Sifat antrisimetris,
   Karena $0 \preccurlyeq y$ dan $y \not\preccurlyeq 0, \forall y \in R$, $1 \preccurlyeq 2$ dan $2 \not\preccurlyeq 1$, $1 \preccurlyeq 4$ dan $4 \not\preccurlyeq 1$, $2 \preccurlyeq 4$ dan $4 \not\preccurlyeq 2$.
   Sehingga jelas untuk $x, y \in R$, $x \preccurlyeq y$ dan $y \preccurlyeq x$ maka $x = y$.
3. Sifat transitif,
   Ambil $x = 0, y = 1, z = 4 \in R$. Didapat
   $0 \preccurlyeq 1$ dan $1 \preccurlyeq 4$ maka $0 \preccurlyeq 4$.
   Jelas untuk $x, y, z \in R$, $x \preccurlyeq y$ dan $y \preccurlyeq z$ maka $x \preccurlyeq z$.

Jadi, terbukti bahwa relasi $\preccurlyeq$ pada $R$ merupakan relasi terurut parsial.

2. Akan ditunjukkan bahwa $(R, *, \diamond, \preccurlyeq)$ adalah semiring terurut.
   a. Akan ditunjukkan bahwa pada $(R, *, \diamond, \preccurlyeq)$ berlaku operasi monoton sebagai berikut.
      i. Terhadap operasi $*$, yaitu $x \preccurlyeq y \Rightarrow x * z \preccurlyeq y * z$.
         Ambil $x = 4, y = 2$. Sehingga $x * z = 4 * z = 4, \forall z \in R$.
         - Untuk $z \leq 2$ , $y * z = 2 * z = 2$.
           Sehingga $x * z = 4 \preccurlyeq 2 = y * z$.
         - Untuk $z = 4$, $y * z = 2 * 4 = 4$.
           Sehingga $x * z = 4 \preccurlyeq 4 = y * z$.

      Dengan cara yang sama, untuk setiap $x, y, z \in R$ berlaku $x \preccurlyeq y \Rightarrow x * z \preccurlyeq y * z$.

ii. Terhadap operasi $\diamond$, yaitu $x \preccurlyeq y, 0 \preccurlyeq z \Rightarrow x \diamond z \preccurlyeq y \diamond z$ dan $z \diamond x \preccurlyeq z \diamond y$.
Ambil sembarang $x, y \in R$. Karena $0 \preccurlyeq c, \forall c \in R$ maka
- Jika $z = 0$, $x \diamond z = 0 \preccurlyeq 0 = y \diamond z$.
- Jika $z \neq 0, x \diamond z = 0 \preccurlyeq c = y \diamond z, \forall c \in R$, dan $x \diamond z = 1 \preccurlyeq 1 = y \diamond z, x = y \neq 0$.
Sehingga $x \diamond z \preccurlyeq y \diamond z$.

Dengan cara yang sama, untuk setiap $x, y, z \in R$ berlaku $x \preccurlyeq y \Rightarrow z \diamond x \preccurlyeq z \diamond y$.

b. Konstanta 0 adalah elemen terkecil dari $R$, jelas karena $R \subseteq \mathbb{Z}_0^+$.

**Contoh 2.4.12**
Berdasarkan Contoh 2.4.10, diketahui bahwa $(S, \oplus, \odot)$ merupakan semiring terurut. Diberikan himpunan $H = \{0, a, c\} \subseteq S$. Akan ditentukan himpunan $(H]$.

**Jawab:**
Berdasarkan definisi relasi terurut pada himpunan $(S, \oplus, \odot)$, yaitu $x \preccurlyeq y \Leftrightarrow x \preccurlyeq y \Leftrightarrow x \oplus y = y$ dan $x \odot y = x$, diperoleh $(H] = \{x \in S | x \preccurlyeq h, \text{untuk sembarang } h \in H\} = \{0, a, b, c\}$.

**Definisi 2.4.13 (Ideal)**
Misalkan $S$ adalah semiring. *Subset* tak kosong $I$ dari $S$ disebut ideal kanan (kiri) dari $S$ jika syarat berikut dipenuhi.
1. $x, y \in I$, maka $x + y \in I$,
2. Untuk semua $x \in I$ dan $s \in S$, maka $xs \in I$ $(sx \in I)$.

$I$ disebut ideal dari $S$ jika $I$ merupakan ideal kanan dan ideal kiri.

**Contoh 2.4.14**
Diberikan semiring $(\mathbb{Z}_0^+, +, \cdot)$ dan $n\mathbb{Z}_0^+ \subseteq \mathbb{Z}_0^+$ dimana $n\mathbb{Z}_0^+ = \{nz \in \mathbb{Z}_0^+ | z \in \mathbb{Z}_0^+, n \in \mathbb{N}\}$. Akan dibuktikan bahwa $n\mathbb{Z}_0^+$ merupakan ideal dari $\mathbb{Z}_0^+$.

**Bukti:**
i. Ambil sembarang $x, y, \in n\mathbb{Z}_0^+$ dengan $x = nz_1$, dan $y = nz_2$, untuk $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}_0^+$. Didapat

$x + y = nz_1 + nz_2 = n(z_1 + z_2) \in n\mathbb{Z}_0^+$.

ii. Untuk setiap $x \in n\mathbb{Z}_0^+$ dan $z \in \mathbb{Z}_0^+$. Didapat
$xz = (nz_1)z = n(z_1 z) \in n\mathbb{Z}_0^+$, dan
$zx = z(nz_1) = znz_1 = n(zz_1) \in n\mathbb{Z}_0^+$.

Jadi, terbukti bahwa $n\mathbb{Z}_0^+$ merupakan ideal dari semiring $\mathbb{Z}_0^+$.

**Contoh 2.4.15**

Berdasarkan Contoh 2.4.12, $H = \{0, a, c\} \subseteq S$. Akan ditunjukkan bahwa $H$ merupakan ideal dari $S$

**Bukti:**

1. Ambil sembarang $x, y, \in H$. Didapat
   $x \oplus y = y \in H$, untuk $x \preccurlyeq y$, dan
   $x \oplus y = x \in H$, untuk $y \preccurlyeq x$.
2. Untuk setiap $x \in H$ dan $z \in S$. Didapat
   $x \odot z = z \odot x = 0 \in H$, untuk $z = 0$, dan
   $x \odot z = z \odot x = a \in H$, untuk $z \neq 0$.

Jadi, terbukti bahwa $H$ merupakan ideal dari $S$.

**Definisi 2.4.16 (Ideal Terurut)**

Misalkan $S$ adalah semiring terurut dan $I$ adalah ideal dari $S$. Ideal kiri (kanan) $I$ dari $S$ disebut ideal terurut kiri (kanan) jika terdapat $x \in S$, $y \in I, x \preccurlyeq y$ maka $x \in I$ atau $(I] \subseteq I$. $I$ disebut ideal terurut dari $S$ jika $I$ merupakan ideal terurut kiri dan ideal terurut kanan dari $S$.

**Contoh 2.4.17**

Berdasarkan Contoh 2.4.8, diketahui $(L,\vee,\cdot,\preccurlyeq)$ merupakan semiring terurut. Akan dibuktikan bahwa interval $I = \left[0,\frac{1}{2}\right]$ merupakan ideal terurut dari semiring terurut $L$.

**Bukti:**

Akan dibuktikan bahwa $(I] \subseteq I$, yaitu jika $x \in L, y \in I, x \preccurlyeq y$ maka $x \in I$.

1. Akan ditunjukkan bahwa interval $I = [0,\frac{1}{2}]$ merupakan ideal dari semiring $L$.
   i. Jelas $\left[0,\frac{1}{2}\right] \subseteq [0,1]$ sehingga $I \subseteq L$.

ii. Ambil sembarang $x, y \in I$. Didapat
$x \vee y = \max\{x, y\} = y \in I$, untuk $x \leq y$, dan
$x \vee y = \max\{x, y\} = x \in I$, untuk $y \leq x$.
Sehingga, jelas $a \vee b \in I$.

iii. Akan ditunjukkan bahwa untuk setiap $y \in I$ dan $x \in L$ berlaku
$y \cdot x = \max\{(y + x - 1), 0\} \in I$, dan
$x \cdot y = \max\{(x + y - 1), 0\} \in I$.
Ambil sembarang $y \in I$ dan $x \in L$, tentulah $y + x - 1 \leq \frac{1}{2}$.
Misalkan $y = \frac{1}{2}$ dan $x = 1$. Didapat
$y + x - 1 = \frac{1}{2} + 1 - 1 = \frac{1}{2} \in I$.
Sehingga, jika $y \leq \frac{1}{2}$ dan $x \leq 1$ maka $y + x - 1 \leq \frac{1}{2}$.
Kemudian, jika $(y + x - 1) \preccurlyeq 0$, maka
$y \cdot x = \max\{(y + x - 1), 0\} = 0 \in I$, dan
jika $0 \preccurlyeq (y + x - 1)$, maka
$y \cdot x = \max\{(y + x - 1), 0\} = (y + x - 1) \in I$.
Karena $y + x - 1 = x + y - 1$ maka $y \cdot x = x \cdot y \in I$.
Sehingga terbukti bahwa untuk setiap $y \in I$ dan $x \in L$ maka
$y \cdot x = x \cdot y \in I$.

Jadi, interval $I = [0, \frac{1}{2}]$ terbukti merupakan ideal dari semiring terurut $L$.

2. Ambil sembarang elemen $x \in [0,1], y \in [0, \frac{1}{2}]$.
Karena $x \leq y$, maka jelas didapat $x = [0, \frac{1}{2}] \in I$.
Sehingga terbukti bahwa jika terdapat $x \in L, y \in I, x \preccurlyeq y$ maka $x \in I$ atau $(I] \subseteq I$.

Jadi, interval $I = [0, \frac{1}{2}]$ terbukti merupakan ideal terurut dari semiring terurut $L$.

**Contoh 2.4.18**
Berdasarkan Contoh 2.4.13, $H = \{0, a, c\}$ merupakan ideal dari $S$ dan dari Contoh 2.4.10, diperoleh $(H] = \{0, a, b, c\}$. Karena $(H] \nsubseteq H$ maka $H$ bukan merupakan ideal terurut dari $S$.

**Definisi 2.4.19 (Homomorfisma)**
Misalkan $S$ dan $S'$ masing-masing adalah semiring. Pemetaan $\phi: S \to S'$ disebut homomorfisma semiring jika syarat berikut dipenuhi.
1. $\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y)$, dan
2. $\phi(x \cdot y) = \phi(x) \cdot \phi(y)$, untuk semua $x, y \in S$.

**Contoh 2.4.20**
Diketahui $(\mathbb{Z}_0^+, +, \cdot)$ dan $(M_2(\mathbb{Z}_0^+), +, \cdot)$ masing-masing adalah semiring. Didefinisikan pemetaan

$$\theta: \mathbb{Z}_0^+ \longrightarrow M_2(\mathbb{Z}_0^+)$$
$$x \longmapsto \theta(x) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}, \text{untuk } x \in \mathbb{Z}_0^+.$$

Akan dibuktikan bahwa pemetaan $\theta$ merupakan homomorfisma semiring.

**Bukti:**
Ambil sembarang $x, y \in \mathbb{Z}_0^+$. Didapat
1. $\theta(x+y) = \begin{pmatrix} x+y & 0 \\ 0 & x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} = \theta(x) + \theta(y)$,

2. $\theta(x \cdot y) = \begin{pmatrix} xy & 0 \\ 0 & xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} = \theta(x) \cdot \theta(y)$.

Karena sifat (1) dan (2) dipenuhi maka terbukti bahwa pemetaan $\theta$ merupakan homomorfisma semiring.

## 2.5 Himpunan *Fuzzy*

Himpunan *fuzzy* mulai diperkenalkan pada tahun 1965 oleh Zadeh. Himpunan *fuzzy* merupakan himpunan yang setiap elemennya berpasangan dengan bilangan real pada interval tetutup dari 0 sampai 1 yang biasa dikenal sebagai derajat keanggotaan. Berikut diberikan definisi dan contoh mengenai himpunan *fuzzy* yang akan digunakan sebagai dasar dalam pembahasan skripsi ini sebagaimana dikutip dari Zadeh (1965), Kandasamy (2003), dan Mandal (2014).

**Definisi 2.5.1 (*Fuzzy Subset*)**
Misalkan $X$ adalah himpunan tak kosong. *Fuzzy subset* $\mu$ dari $X$ didefinisikan sebagai suatu pemetaan dari $X$ ke $[0,1]$, dinotasikan dalam bentuk fungsi sebagai berikut.

$$\mu: X \to [0,1],$$

atau dituliskan sebagai himpunan pasangan terurut sebagai berikut.

$$\mu = \{(x, \mu(x)) \mid \forall x \in X\},$$

untuk setiap $\mu(x) \in [0,1]$ dan disebut sebagai derajat keanggotaan.

**Contoh 2.5.2**
Diberikan himpunan $X = \{a, b, c, d, e\}$ dan pemetaan $\mu: X \to [0,1]$. Didefinisikan $\mu(a) = 0, \mu(b) = 0.1, \mu(c) = 0.3, \mu(d) = 1, \mu(e) = 0.2$. Maka $\mu = \{(a, 0), (b, 0.1), (c, 0.3), (d, 1), (e, 0.2)\}$ merupakan *fuzzy subset* dari himpunan $X$.

**Definisi 2.5.3 (Himpunan Kosong)**
*Fuzzy subset* $\mu$ merupakan himpunan kosong jika dan hanya jika untuk setiap $x \in X$, $\mu(x) = 0$. Dituliskan dengan

$$\mu = \emptyset \Leftrightarrow \mu(x) = 0, \forall x \in X.$$

**Contoh 2.5.4**
Diberikan himpunan $2\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, 8, \dots\}$. Didefinisikan *fuzzy subset* $\mu(x) = 0$ untuk setiap $x \in 2\mathbb{Z}$. Sehingga $\mu = \emptyset$.

**Definisi 2.5.5 (Memuat)**
Misalkan $\mu$ dan $v$ masing-masing adalah *fuzzy subset* dari $X$. *Fuzzy subset* $v$ dikatakan memuat $\mu$ atau $\mu$ adalah *subset* dari $v$ jika dan hanya jika $\mu(x) \leq v(x)$ untuk setiap $x \in X$. Dituliskan dengan

$$\mu \subseteq v \Leftrightarrow \mu(x) \leq v(x), \forall x \in X.$$

Jika $\mu(x) = v(x)$ untuk setiap $x \in X$ maka $\mu$ dan $v$ dikatakan sama dan dituliskan dengan $\mu = v$.

**Contoh 2.5.6**
Diberikan himpunan $X = \{a, b, c, d\}$ dan pemetaan $\mu: X \to [0,1]$. Didefinisikan dua *fuzzy subset* dari himpunan $X$ sebagai berikut.
$\mu = \{(a, 0.1), (b, 0.4), (c, 0.3), (d, 0.6)\}$,

$v = \{(a, 0.4), (b, 0.6), (c, 0.5), (d, 0.8)\}$.
Tunjukkan bahwa $\mu \subseteq v$.

**Jawab:**
$\mu(a) = 0.1 \leq v(a) = 0.4$,
$\mu(b) = 0.4 \leq v(b) = 0.6$,
$\mu(c) = 0.3 \leq v(c) = 0.5$,
$\mu(d) = 0.6 \leq v(d) = 0.8$.
Karena berlaku $\mu(x) \leq v(x)$ untuk setiap $x \in X$ maka terbukti bahwa $\mu \subseteq v$.

**Definisi 2.5.7 (*Level Subset*)**
Misalkan $\mu$ adalah *fuzzy subset* dari himpunan $X$ dan $t \in [0,1]$. Himpunan $\mu_t = \{x \in X |\ \mu(x) \geq t\}$ disebut *level subset* dari $\mu$.

**Lemma 2.5.8**
Misalkan $\mu_t$ dan $\mu_s$ masing-masing adalah *level subset* dari *fuzzy subset* $\mu$ dengan $t, s \in [0,1]$. Jika $t \geq s$ maka $\mu_t \subseteq \mu_s$.

**Contoh 2.5.9**
Diberikan himpunan $X = \{1,2,3,4,5,6,7\}$. Didefinisikan *fuzzy subset* $\mu$ dari himpunan $X$ sebagai berikut.

$$\mu(x) = \begin{cases} 0.2 & \text{, jika } 1 \leq x < 5 \\ 0.4 & \text{, jika } 5 \leq x < 7 \\ 1 & \text{, jika } x = 7 \end{cases}$$

Akan ditentukan $\mu_{0.2}, \mu_{0.3}$, dan $\mu_{0.5}$.

**Jawab:**
$\mu_{0.2} = \{x \in X | x \geq 0.2\} = \{1,2,3,45,6,7\}$,
$\mu_{0.3} = \{x \in X | x \geq 0.3\} = \{5,6,7\}$, dan
$\mu_{0.5} = \{x \in X | x \geq 0.5\} = \{7\}$.
Jelas $\mu_{0.5} \subseteq \mu_{0.3} \subseteq \mu_{0.2}$.

**Definisi 2.5.10 (Komplemen)**
Misalkan $\mu$ adalah *fuzzy subset* dari himpunan $X$. Komplemen dari *fuzzy subset* $\mu$ dinotasikan dengan $\mu'$ dan didefinisikan sebagai

$$\mu' = \{(x, \mu'(x)) \big| \forall x \in X\},$$

dengan $\mu'(x) = 1 - \mu(x)$.

**Contoh 2.5.11**
Diberikan *fuzzy subset* $\mu$ dari himpunan $X$ sebagai berikut.
$\mu \quad = \{(-2, 0.1), (-1, 0.8), (0, 0), (1, 0.4), (2, 0.3)\}$.
Didapat komplemen dari $\mu$, yaitu
$\mu' = \{(-2, 0.9), (-1, 0.2), (0, 1), (1, 0.6), (2, 0.7)\}$.

**Definisi 2.5.12 (Perkalian dan Penjumlahan Aljabar)**
Misalkan $\mu$ dan $v$ masing-masing adalah *fuzzy subset* dari himpunan $X$. Didefinisikan operasi perkalian dan penjumlahan aljabar sebagai berikut.
1. $\mu v \quad = \{(x, (\mu v)(x)) \mid \forall x \in X\}$, dengan $(\mu v)(x) = \mu(x)v(x)$.
2. $\mu + v \ = \{(x, (\mu + v)(x) \mid \forall x \in X\}$, dengan
$(\mu + v)(x) = \mu(x) + v(x) - \mu(x)v(x)$.

**Definisi 2.5.13 (Beda Mutlak)**
Misalkan $\mu$ dan $v$ masing-masing adalah *fuzzy subset* dari himpunan $X$. Beda mutlak dari kedua *fuzzy subset* $\mu$ dan $v$ didefinisikan sebagai

$$|\mu - v| = \{(x, |\mu - v|(x)) \mid \forall x \in X\},$$

dengan $|\mu - v|(x) = |\mu(x) - v(x)|$.

**Contoh 2.5.14**
Berdasarkan Contoh 2.5.6, akan ditentukan hasil dari penjumlahan aljabar, perkalian aljabar, beda mutlak dari *fuzzy subset* $\mu$ dan $v$.

**Jawab:**
**Tabel 2.5** Penjumlahan aljabar, perkalian aljabar, dan beda mutlak dari *fuzzy subset* $\mu$ dan $v$.

| $x$ | $\mu(x)$ | $v(x)$ | $\mu(x)v(x)$ | $\mu(x) + v(x) - \mu(x)v(x)$ | $\lvert\mu(x) - v(x)\rvert$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | 0.1 | 0.4 | 0.04 | 0.46 | 0.3 |
| $b$ | 0.4 | 0.6 | 0.24 | 0.76 | 0.2 |
| $c$ | 0.3 | 0.5 | 0.15 | 0.65 | 0.2 |
| $d$ | 0.6 | 0.8 | 0.48 | 0.72 | 0.2 |

Dari Tabel 2.5, diperoleh penjumlahan aljabar, perkalian aljabar, dan beda mutlak dari kedua *fuzzy subset* $\mu$ dan $v$, yaitu
i. $\mu + v \quad = \{(a, 0.46), (b, 0.76), (c, 0.65), (d, 0.72)\}$,

ii. $\mu v \quad = \{(a, 0.04), (b, 0.24), (c, 0.15), (d, 0.48)\}$, dan
iii. $|\mu - v| \quad = \{(a, 0.3), (b, 0.2), (c, 0.2), (d, 0.2)\}$.

**Definisi 2.5.15 (Gabungan dan Irisan)**
Misalkan $\mu$ dan $v$ masing-masing adalah *fuzzy subset* dari himpunan $X$. Didefinisikan operasi gabungan dan irisan sebagai berikut.

1. $\mu \cup v = \{(x, (\mu \cup v)(x)) | \forall x \in X\}$, dengan
   $(\mu \cup v)(x) = \max\{\mu(x), v(x)\}$.
2. $\mu \cap v = \{(x, (\mu \cap v)(x)) | \forall x \in X\}$, dengan
   $(\mu \cap v)(x) = \min\{\mu(x), v(x)\}$.

**Contoh 2.5.16**
Diberikan himpunan $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ dan pemetaan $\mu: X \rightarrow [0,1]$. Didefinisikan dua *fuzzy subset* dari himpunan $X$ sebagai berikut.
$\mu = \{(-2, 0.1), (-1, 0.8), (0, 0), (1, 0.4), (2, 0.3)\}$,
$v = \{(-2, 0.4), (-1, 0.2), (0, 0.5), (1, 1), (2, 0.6)\}$.
Akan ditentukan gabungan dan irisan dari dua *fuzzy subset* $\mu$ dan $v$.

**Jawab:**
**Tabel 2.6** Gabungan dan irisan *fuzzy subset* $\mu$ dan $v$ dari $X$.

| $\boldsymbol{x}$ | $\boldsymbol{\mu(x)}$ | $\boldsymbol{v(x)}$ | $\max\{\boldsymbol{\mu(x)}, \boldsymbol{v(x)}\}$ | $\min\{\boldsymbol{\mu(x)}, \boldsymbol{v(x)}\}$ |
|---|---|---|---|---|
| **−2** | 0.1 | 0.4 | 0.4 | 0.1 |
| **−1** | 0.8 | 0.2 | 0.8 | 0.2 |
| **0** | 0 | 0.5 | 0.5 | 0 |
| **1** | 0.4 | 1 | 1 | 0.4 |
| **2** | 0.3 | 0.6 | 0.6 | 0.3 |

Dari Tabel 2.6, diperoleh gabungan dan irisan dari $\mu$ dan $v$, yaitu
$\mu \cup v = \{(-2, 0.4), (-1, 0.8), (0, 0.5), (1, 1), (2, 0.6)\}$,
$\mu \cap v = \{(-2, 0.1), (-1, 0.2), (0, 0), (1, 0.4), (2, 0.3)\}$.

**Definisi 2.5.17 (Sifat-sifat Operasi pada *Fuzzy Subset*)**
Misalkan $\mu$, $v$, dan $\sigma$ masing-masing adalah *fuzzy subset*. Maka operasi gabungan, irisan, dan komplemen dari masing-masing *fuzzy subset* tersebut memenuhi sifat-sifat sebagai berikut.

1. Asosiatif, yaitu
   $\mu \cup (v \cup \sigma) = (\mu \cup v) \cup \sigma$,

$\mu \cap (v \cap \sigma) = (\mu \cap v) \cap \sigma$.

2. De Morgan, yaitu
   $(\mu \cup v)' = \mu' \cap v'$,
   $(\mu \cap v)' = \mu' \cup v'$.
3. Distributif, yaitu
   $\mu \cap (v \cup \sigma) = (\mu \cap v) \cup (\mu \cap \sigma)$,
   $\mu \cup (v \cap \sigma) = (\mu \cup v) \cap (\mu \cup \sigma)$.
4. Jika $v \subseteq \mu$ dan $\sigma \subseteq \mu$ maka $(v \cup \sigma) \subseteq \mu$ dan $(v \cap \sigma) \subseteq \mu$.

**Definisi 2.5.18 (Gabungan dan Irisan Keluarga Himpunan)**
Misalkan $\mathbf{I}$ adalah himpunan indeks dan $\{\mu_i \mid i \in \mathbf{I}\}$ merupakan keluarga himpunan *fuzzy subset* dari himpunan $X$. Didefinisikan operasi gabungan dan irisan sebagai berikut.

1. $\bigcup_{i \in I} \mu_i(x) = \sup_{i \in I}\{\mu_i(x)\}$,
2. $\bigcap_{i \in I} \mu_i(x) = \inf_{i \in I}\{\mu_i(x)\}$.

**Contoh 2.5.19**
Misalkan $X = \mathbb{N}$ adalah bilangan asli dan *fuzzy subset* $\mu$ dari $X$ adalah $\mu(x) = \frac{1}{x}$ untuk setiap $x \in X$. Diberikan keluarga himpunan *fuzzy subset* dari $X$, yaitu $\mu_i(x) = \left(1 - \frac{1}{i}\right)\frac{1}{x}$ untuk setiap $x \in X$, $i \in \mathbf{I}$. Akan ditentukan gabungan dan irisan dari $\mu_i$.

**Jawab:**

1. $\bigcup_{i \in I} \mu_i(x) = \sup_{i \in I}\left\{\left(1 - \frac{1}{i}\right)\frac{1}{x}\right\} = \frac{1}{x}$, karena $\frac{1}{i} \to 0$ untuk $i \to \infty$.
2. $\bigcap_{i \in I} \mu_i(x) = \inf_{i \in I}\left\{\left(1 - \frac{1}{i}\right)\frac{1}{x}\right\} = 0$, karena $\frac{1}{i} = 1$ untuk $i = 1$.

**Definisi 2.5.20 (Fungsi Invers)**
Misalkan $X$ dan $Y$ masing-masing adalah himpunan tak kosong dan $\mu$ adalah *fuzzy subset* dari $Y$. Untuk suatu fungsi $f: X \to Y$ didefinisikan fungsi invers sebagai berikut.

$$f^{-1}(\mu) = \{(x, f^{-1}(\mu(x)) | \forall x \in X\},$$
dengan $f^{-1}(\mu(x)) = \mu(f(x))$.

**Contoh 2.5.21**
Diberikan himpunan $X = \{1,2,3,4,5\}$ dan $\mathbb{Q}$ merupakan himpunan bilangan rasional. Diberikan suatu pemetaan
$$f: X \longrightarrow \mathbb{Q}$$
$$x \longmapsto f(x) = \frac{1}{x}.$$
Didefinisikan *fuzzy subset* $\mu$ dari $\mathbb{Q}$ adalah sebagai berikut.
$$\mu(y) = \begin{cases} 1 & \text{, untuk } y < 1 \in \mathbb{Q}, \text{dan} \\ 0 & \text{, untuk } y = 1 \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$
Akan ditentukan $f^{-1}(\mu)$ untuk setiap $x \in X$.

**Jawab:**
*Fuzzy subset* $\mu$ dari $\mathbb{Q}$ adalah sebagai berikut.
- Untuk $x = 1 \Longrightarrow f^{-1}(\mu(1)) = \mu(f(1)) = \mu(1) = 0$,
- untuk $x = 2 \Longrightarrow f^{-1}(\mu(2)) = \mu(f(2)) = \mu\left(\frac{1}{2}\right) = 1$,
- untuk $x = 3 \Longrightarrow f^{-1}(\mu(3)) = \mu(f(3)) = \mu\left(\frac{1}{3}\right) = 1$,
- untuk $x = 4 \Longrightarrow f^{-1}(\mu(4)) = \mu(f(4)) = \mu\left(\frac{1}{4}\right) = 1$, dan
- untuk $x = 5 \Longrightarrow f^{-1}(\mu(5)) = \mu(f(5)) = \mu\left(\frac{1}{5}\right) = 1$.

Jadi, didapat $f^{-1}(\mu) = \left\{(1,0), \left(\frac{1}{2}, 1\right), \left(\frac{1}{3}, 1\right), \left(\frac{1}{4}, 1\right), \left(\frac{1}{5}, 1\right)\right\}$.

# BAB III
# PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas tentang sifat-sifat dari ideal *fuzzy* dalam semiring terurut. Selanjutnya, selama operasi biner dari $S$ tidak didefinisikan, maka $S$ adalah semiring terurut dibawah operasi penjumlahan dan pergandaan atau dituliskan dengan $(S, +, \cdot, \leqslant)$.

## 3.1 Struktur Ideal *Fuzzy* dalam Semiring Terurut

Berikut ini dijelaskan definisi dan contoh yang terkait dengan ideal *fuzzy* dalam semiring terurut.

**Definisi 3.1.1 (Komposisi dan Penjumlahan)**
Misalkan $\mu$ dan $v$ merupakan *fuzzy subset* dari semiring terurut $(S, +, \cdot, \leqslant)$ dan $x, y, z \in S$. Didefinisikan operasi komposisi dan penjumlahan dari $\mu$ dan $v$ sebagai berikut.

$$(\mu \circ_1 v)(x) = \begin{cases} \sup\{\min\{\mu(y), v(z)\}\} & \text{, untuk } x \leqslant yz \\ 0 & \text{, untuk } x \nleqslant yz, \end{cases}$$

dan

$$(\mu +_1 v)(x) = \begin{cases} \sup\{\min\{\mu(y), v(z)\}\} & \text{, untuk } x \leqslant y + z \\ 0 & \text{, untuk } x \nleqslant y + z. \end{cases}$$

Jika $x \leqslant yz$ dan $x \leqslant y + z$, maka dapat dituliskan sebagai berikut.

$$(\mu \circ_1 v)(x) = \sup_{x \leqslant yz} \{\min\{\mu(y), v(z)\}\},$$
$$(\mu +_1 v)(x) = \sup_{x \leqslant y+z} \{\min\{\mu(y), v(z)\}\}.$$

**Contoh 3.1.2**
Berdasarkan Contoh 2.4.11, diketahui bahwa $(R, *, \diamond, \leqslant)$ adalah semiring terurut dengan $x \leqslant y \Leftrightarrow y = k * x$, untuk $x, y, k \in R$. Didefinisikan *fuzzy subset* $\mu$ dan $v$ dari $R$, yaitu

| | | |
|---|---|---|
| $\mu: R \to [0,1]$ | dan | $v: R \to [0,1]$ |
| $y \mapsto \mu(y)$ | | $z \mapsto v(z)$ |
| $0 \mapsto \mu(0) = 0.3$ | | $0 \mapsto v(0) = 0.6$ |
| $1 \mapsto \mu(1) = 0.5$ | | $1 \mapsto v(1) = 0.8$ |
| $2 \mapsto \mu(2) = 0.7$ | | $2 \mapsto v(2) = 0.4$ |
| $4 \mapsto \mu(4) = 0.1$ | | $4 \mapsto v(4) = 0.2$ |

Akan ditentukan komposisi dan penjumlahan dari *fuzzy subset* $\mu$ dan $v$.

**Jawab:**

**Tabel 3.1** Hasil operasi $\min\{\mu(y), v(z)\}$

| **min** | $v(0)$ | $v(1)$ | $v(2)$ | $v(4)$ |
|---|---|---|---|---|
| $\mu(0)$ | 0.3 | 0.3 | 0.3 | 0.2 |
| $\mu(1)$ | 0.5 | 0.5 | 0.4 | 0.2 |
| $\mu(2)$ | 0.6 | 0.7 | 0.4 | 0.2 |
| $\mu(4)$ | 0.1 | 0.1 | 0.1 | 0.1 |

1. Komposisi dari *fuzzy subset* $\mu$ dan $v$ adalah sebagai berikut.
   a. Untuk $x = 0$. Karena $0 \preccurlyeq 0, 0 \preccurlyeq 1, 0 \preccurlyeq 2, 0 \preccurlyeq 4$ berarti
   - Jika $0 \preccurlyeq 0, 0 = 0 \diamond c = c \diamond 0, \forall c \in R$.
   - Jika $0 \preccurlyeq 1, 1 = a \diamond b = b \diamond a,\ \forall a, b \neq 0 \in R$.
   - Jika $0 \preccurlyeq 2, 2 \neq c \diamond 2 = 2 \diamond c,\ \forall c \in R$.
   - Jika $0 \preccurlyeq 4, 4 \neq c \diamond 4 = 4 \diamond c, \forall c \in R$.

   Maka diperoleh himpunan pasangan terurut $(y, z)$, yaitu
   $\{(y, z)\} = \{(0,0), (0,1), (0,2), (0,4), (1,0), (2,0), (4,0), (1,1),$
   $(1,2), (1,4), (2,1), (4,1), (2,2), (2,4), (4,2), (4,4)\}$.
   Dari Tabel 3.1 diperoleh
   $\{\min\{\mu(y), v(z)\}\} = \{0.3, 0.3, 0.3, 0.2, 0.5, 0.6, 0.1, 0.5, 0.4, 0.2,$
   $0.7, 0.1, 0.4, 0.2, 0.1, 0.1\}$.
   Jadi, $(\mu \circ_1 v)(0) = \sup\limits_{0 \preccurlyeq y \diamond z} \{\min\{\mu(y), v(z)\}\} = 0.7$.

   b. Untuk $x = 1$. Karena $1 \preccurlyeq 1, 1 \preccurlyeq 2$ dan $1 \preccurlyeq 4$ berarti
   - Jika $1 \preccurlyeq 1, 1 = a \diamond b = b \diamond a,\ \forall a, b \neq 0 \in R$.
   - Jika $1 \preccurlyeq 2, 2 \neq c \diamond 2 = 2 \diamond c,\ \forall c \in R$.
   - Jika $1 \preccurlyeq 4, 4 \neq c \diamond 4 = 4 \diamond c, \forall c \in R$.

   Maka diperoleh himpunan pasangan terurut $(y, z)$, yaitu
   $\{(y, z)\} = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,1), (4,1), (2,2), (2,4), (4,2),$
   $(4,4)\}$.
   Dari Tabel 3.1 diperoleh
   $\{\min\{\mu(y), v(z)\}\} = \{0.5, 0.4, 0.2, 0.7, 0.1, 0.4, 0.2, 0.1, 0.1\}$.
   Jadi, $(\mu \circ_1 v)(1) = \sup\limits_{1 \preccurlyeq y \diamond z} \{\min\{\mu(y), v(z)\}\} = 0.7$.

c. Untuk $x = 2$. Karena $2 \preccurlyeq 2$ dan $2 \preccurlyeq 4$ berarti
- Jika $2 \preccurlyeq 2$, $2 \neq c \diamond 2 = 2 \diamond c,\ \forall c \in R$.
- Jika $2 \preccurlyeq 4$, $4 \neq c \diamond 4 = 4 \diamond c, \forall c \in R$.

Maka $2 \not\preccurlyeq y \diamond z$.
Jadi, $(\mu \circ_1 v)(2) = 0$.

d. Untuk $x = 4$. Karena $4 \preccurlyeq 4$ dan $4 \neq c \diamond 4 = 4 \diamond c, \forall c \in R$.
Maka $4 \not\preccurlyeq y \diamond z$.
Jadi, $(\mu \circ_1 v)(4) = 0$.

2. Penjumlahan dari *fuzzy subset* $\mu$ dan $v$ adalah sebagai berikut.

a. Untuk $x = 0$. Karena $0 \preccurlyeq 0, 0 \preccurlyeq 1, 0 \preccurlyeq 2, 0 \preccurlyeq 4$ berarti
- Jika $0 \preccurlyeq 0$, $0 = 0 * 0$.
- Jika $0 \preccurlyeq 1$, $1 = 0 * 1 = 1 * 0 = 1 * 1$.
- Jika $0 \preccurlyeq 2$, $2 = 0 * 2 = 2 * 0 = 1 * 2 = 2 * 1 = 2 * 2$.
- Jika $0 \preccurlyeq 4$, $4 = 4 * c = c * 4, \forall c \in R$.

Maka diperoleh himpunan pasangan terurut $(y, z)$, yaitu
$\{(y,z)\} = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1), (0,2), (2,0), (1,2), (2,1), (2,2), (0,4), (1,4), (2,4), (4,4), (4,0), (4,1), (4,2)\}$.
Dari Tabel 3.1 diperoleh
$\{\min\{\mu(y), v(z)\}\} = \{0.3, 0.3, 0.5, 0.5, 0.3, 0.6, 0.4, 0.7, 0.4, 0.2, 0.2, 0.2, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1\}$.
Jadi, $(\mu +_1 v)(0) = \sup\limits_{0 \preccurlyeq y * z} \{\min\{\mu(y), v(z)\}\} = 0.7$.

b. Untuk $x = 1$. Karena $1 \preccurlyeq 1, 1 \preccurlyeq 2$ dan $1 \preccurlyeq 4$ berarti
- Jika $1 \preccurlyeq 1$, $1 = 0 * 1 = 1 * 0 = 1 * 1$.
- Jika $1 \preccurlyeq 2$, $2 = 0 * 2 = 2 * 0 = 1 * 2 = 2 * 1 = 2 * 2$.
- Jika $1 \preccurlyeq 4$, $4 = 4 * c = c * 4, \forall c \in R$.

Sehingga diperoleh pasangan terurut $(y, z)$, yaitu
$\{(y,z)\} = \{(0,1), (1,0), (1,1), (0,2), (2,0), (1,2), (2,1), (2,2), (0,4), (1,4), (2,4), (4,4), (4,0), (4,1), (4,2)\}$.
Dari Tabel 3.1 diperoleh
$\{\min\{\mu(y), v(z)\}\} = \{0.3, 0.5, 0.5, 0.3, 0.6, 0.4, 0.7, 0.4, 0.2, 0.2, 0.2, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1\}$.
Jadi, $(\mu +_1 v)(1) = \sup\limits_{1 \preccurlyeq y * z} \{\min\{\mu(y), v(z)\}\} = 0.7$.

c. Untuk $x = 2$. Karena $2 \preccurlyeq 2$ dan $2 \preccurlyeq 4$ berarti
- Jika $2 \preccurlyeq 2, 2 = 0 * 2 = 2 * 0 = 1 * 2 = 2 * 1 = 2 * 2$.
- Jika $2 \preccurlyeq 4, 4 = 4 * c = c * 4, \forall c \in R$.

Maka diperoleh himpunan pasangan terurut $(y, z)$, yaitu
$\{(y,z)\} = \{(0,2),(2,0),(1,2),(2,1),(2,2),(0,4),(1,4),$
$(2,4),(4,4),(4,0),(4,1),(4,2)\}$.
Dari Tabel 3.1 diperoleh
$\{\min\{\mu(y), v(z)\}\} = \{0.3, 0.6, 0.4, 0.7, 0.4, 0.2, 0.2, 0.2, 0.1, 0.1,$
$0.1, 0.1\}$.
Jadi, $(\mu +_1 v)(2) = \sup_{2 \preccurlyeq y*z} \{\min\{\mu(y), v(z)\}\} = 0.7$.

d. Untuk $x = 4$. Karena $4 \preccurlyeq 4$ dan $4 = 4 * c = c * 4, \forall c \in R$.
Maka diperoleh himpunan pasangan terurut $(y, z)$, yaitu
$\{(y,z)\} = \{(0,4),(1,4),(2,4),(4,4),(4,0),(4,1),(4,2)\}$.
Dari Tabel 3.1 diperoleh
$\{\min\{\mu(y), v(z)\}\} = \{0.2, 0.2, 0.2, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1\}$.
Jadi, $(\mu +_1 v)(4) = \sup_{4 \preccurlyeq y*z} \{\min\{\mu(y), v(z)\}\} = 0.2$.

**Definisi 3.1.3 (Ideal *Fuzzy*)**
Misalkan $\mu$ merupakan *fuzzy subset* tak kosong dari semiring terurut $(S, +, \cdot, \preccurlyeq)$, yaitu $\mu(x) \neq 0$ untuk setiap $x \in S$. $\mu$ dikatakan sebagai ideal kiri (kanan) *fuzzy* dari $S$ jika untuk setiap $x, y \in S$ memenuhi kondisi berikut.
(i) $\mu(x + y) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$,
(ii) $\mu(xy) \geq \mu(y)$ $\big(\mu(xy) \geq \mu(x)\big)$,
(iii) $x \preccurlyeq y \Rightarrow \mu(x) \geq \mu(y)$.
Kemudian, $\mu$ disebut ideal *fuzzy* jika $\mu$ merupakan ideal kiri *fuzzy* dan ideal kanan *fuzzy*.

**Contoh 3.1.4**
Berdasarkan Contoh 2.4.10, diketahui bahwa $(S, \oplus, \odot, \preccurlyeq)$ adalah semiring terurut dimana $S = \{0, a, b, c\}$ dan $0 < a < b < c$ dengan relasi terurut $x \preccurlyeq y \Leftrightarrow x \oplus y = y$ dan $x \odot y = x$.

Didefinisikan *fuzzy subset* $\mu$ dari $S$, yaitu $\mu(0) = 1, \mu(a) = 0.7$, $\mu(b) = 0.4$ dan $\mu(c) = 0.2$. Akan dibuktikan bahwa $\mu$ merupakan ideal *fuzzy* dari $S$.

**Bukti:**
Dari Tabel 3.2 berikut, dapat ditunjukkan bahwa *fuzzy subset* $\mu$ merupakan ideal *fuzzy* dari $S$.

**Tabel 3.2** Pembuktian ideal *fuzzy* pada $(S, \oplus, \odot, \preccurlyeq)$

| $x$ | $y$ | $x \otimes y$ | $x \odot y$ | $\mu(x)$ | $\mu(y)$ | min $\{\mu(x), \mu(y)\}$ | $\mu(x \otimes y)$ | $\mu(x \odot y)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0** | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | $a$ | $a$ | 0 | | 0.7 | 0.7 | 0.7 | 1 |
| | $b$ | $b$ | 0 | | 0.4 | 0.4 | 0.4 | 1 |
| | $c$ | $c$ | 0 | | 0.2 | 0.2 | 0.2 | 1 |
| $a$ | 0 | $a$ | 0 | 0.7 | 1 | 0.7 | 0.7 | 1 |
| | $a$ | $a$ | $a$ | | 0.7 | 0.7 | 0.7 | 0.7 |
| | $b$ | $b$ | $a$ | | 0.4 | 0.4 | 0.4 | 0.7 |
| | $c$ | $c$ | $a$ | | 0.2 | 0.2 | 0.2 | 0.7 |
| $b$ | 0 | $b$ | 0 | 0.4 | 1 | 0.4 | 0.4 | 1 |
| | $a$ | $b$ | $a$ | | 0.7 | 0.4 | 0.4 | 0.7 |
| | $b$ | $b$ | $b$ | | 0.4 | 0.4 | 0.4 | 0.4 |
| | $c$ | $c$ | $b$ | | 0.2 | 0.2 | 0.2 | 0.4 |
| $c$ | 0 | $c$ | 0 | 0.2 | 1 | 0.2 | 0.2 | 1 |
| | $a$ | $c$ | $a$ | | 0.7 | 0.2 | 0.2 | 0.7 |
| | $b$ | $c$ | $b$ | | 0.4 | 0.2 | 0.2 | 0.4 |
| | $c$ | $c$ | $c$ | | 0.2 | 0.2 | 0.2 | 0.2 |

1. $\mu(x \otimes y) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$.
   Ambil $x = 0, y \in S$. Sehingga diperoleh
   $\mu(0 \otimes 0) = 1 \geq 1 = \min\{\mu(0), \mu(0)\}$,
   $\mu(0 \otimes a) = 0.7 \geq 0.7 = \min\{\mu(0), \mu(a)\}$,
   $\mu(0 \otimes b) = 0.4 \geq 0.4 = \min\{\mu(0), \mu(b)\}$,
   $\mu(0 \otimes c) = 0.2 \geq 0.2 = \min\{\mu(0), \mu(c)\}$.

Dengan cara yang sama, diperoleh untuk setiap $x, y \in S$ berlaku $\mu(x \otimes y) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$.

2. $\mu(x \odot y) \geq \mu(y)$ dan $\mu(x \odot y) \geq \mu(x)$.
   1. Ambil $x = 0, y \in S$. Sehingga diperoleh
      $\mu(0 \odot 0) = 1 \geq 1 = \mu(0)$,
      $\mu(0 \odot a) = 1 \geq 0.7 = \mu(a)$,
      $\mu(0 \odot b) = 1 \geq 0.4 = \mu(b)$,
      $\mu(0 \odot c) = 1 \geq 0.2 = \mu(c)$.
      Dengan cara yang sama, diperoleh untuk setiap $x, y \in S$ berlaku $\mu(x \odot y) \geq \mu(y)$.

   2. Ambil $y = a, x \in S$. Sehingga diperoleh
      $\mu(0 \odot a) = 1 \geq 1 = \mu(0)$,
      $\mu(a \odot a) = 0.7 \geq 0.7 = \mu(a)$,
      $\mu(b \odot a) = 0.7 \geq 0.4 = \mu(b)$,
      $\mu(c \odot a) = 0.7 \geq 0.2 = \mu(c)$.
      Dengan cara yang sama, diperoleh untuk setiap $x, y \in S$ berlaku $\mu(x \odot y) \geq \mu(x)$.

3. Jika $x \preccurlyeq y$ maka $\mu(x) \geq \mu(y)$.
   Diketahui bahwa relasi $x \preccurlyeq y$ untuk setiap $x, y \in S$ adalah sebagai berikut.
   $0 \otimes a = 0$ dan $0 \odot a = a$ berarti $0 \preccurlyeq a$,
   $a \otimes b = b$ dan $a \odot b = a$ berarti $a \preccurlyeq b$,
   $b \otimes c = c$ dan $b \odot c = b$ berarti $b \preccurlyeq c$.
   Sehingga diperoleh relasi $0 \preccurlyeq a \preccurlyeq b \preccurlyeq c$.
   Jelas dari definisi *fuzzy subset* μ dari $S$ bahwa
   $\mu(0) = 1 \geq \mu(a) = 0.7 \geq \mu(b) = 0.4 \geq \mu(c) = 0.2$.
   Jadi, terbukti bahwa jika $x \preccurlyeq y$ maka $\mu(x) \geq \mu(y)$.

Karena sifat (1), (2), dan (3) terpenuhi maka terbukti bahwa *fuzzy subset* μ merupakan ideal *fuzzy* dari semiring terurut $S$.

**Contoh 3.1.5**
Berdasarkan Contoh 3.1.2, Diketahui bahwa *fuzzy subset* μ dan $v$ dari semiring terurut $R$, yaitu
$\mu(0) = 0.3,\ \mu(1) = 0.5,\ \mu(2) = 0.7,\ \mu(4) = 0.1$, dan
$v(0) = 0.6,\ v(1) = 0.8,\ v(2) = 0.4,\ v(4) = 0.2$.

Karena
$1 \preccurlyeq 2 \Longrightarrow \mu(1) = 0.5 \not\succcurlyeq 0.7 = \mu(2)$, dan
$0 \preccurlyeq 1 \Longrightarrow \upsilon(0) = 0.6 \not\succcurlyeq 0.8 = \upsilon(1)$.
Maka $\mu$ dan $\upsilon$ bukan ideal *fuzzy* dari $R$.

**Definisi 3.1.6 (*Fuzzy Subset* Semiring Terurut)**
Misalkan $\mu$ merupakan *fuzzy subset* dari semiring terurut $S$ dan $x \in S$. Dinotasikan $I_x$, yaitu *subset* dari $S$ yang didefinisikan sebagai berikut.

$$I_x = \{y \in S \mid \mu(y) \geq \mu(x)\}.$$

**Contoh 3.1.7**
Berdasarkan Contoh 3.1.4, untuk suatu $x \in S$ diperoleh $I_x$, yaitu
$I_0 = \{0\}$, $I_a = \{0, a\}$, $I_b = \{0, a, b\}$, dan $I_c = \{0, a, b, c\}$.

**Definisi 3.1.8 (Hasil Kali Kartesius *Fuzzy*)**
Misalkan $\mu$ dan $\upsilon$ merupakan *fuzzy subset* dari $X$. Hasil kali kartesius dari $\mu$ dan $\upsilon$ didefinisikan dengan

$$(\mu \times \upsilon)(x, y) = \min\{\mu(x), \upsilon(y)\}, \text{ untuk semua } x, y \in X.$$

Atau dinotasikan sebagai

$$\mu \times \upsilon = \{((x, y), (\mu \times \upsilon)(x, y)) \mid x, y \in X\}.$$

**Contoh 3.1.9**
Berdasarkan Contoh 3.1.2, diketahui *fuzzy subset* $\mu$ dan $\upsilon$ dari semiring terurut $(R, *, \diamond, \preccurlyeq)$, yaitu
$\mu(0) = 0.3$, $\mu(1) = 0.5$, $\mu(2) = 0.7$, $\mu(4) = 0.1$, dan
$\upsilon(0) = 0.6$, $\upsilon(1) = 0.8$, $\upsilon(2) = 0.4$, $\upsilon(4) = 0.2$.
Akan ditentukan hasil kali kartesius dari $\mu$ dan $\upsilon$.

**Jawab:**
Dari Tabel 3.3 berikut, diperoleh hasil kali kartesius *fuzzy subset* $\mu$ dan $\upsilon$ dari $R$, yaitu

$$\begin{aligned}\mu \times \upsilon = \{&((0,0), 0.3), ((0,1), 0.3), ((0,2), 0.3), ((0,4), 0.2),\\ &((1,0), 0.5), ((1,1), 0.5), ((1,2), 0.4), ((1,4), 0.2),\\ &((2,0), 0.6), ((2,1), 0.7), ((2,2), 0.4), ((2,4), 0.2),\\ &((4,0), 0.1), ((4,1), 0.1), ((4,2), 0.1), ((4,4), 0.1)\}.\end{aligned}$$

**Tabel 3.3** Hasil kali kartesius $\mu$ dan $v$ dari $(R,*,\diamond,\preccurlyeq)$

| $x$ | $y$ | $\mu(x)$ | $v(y)$ | $(\mu \times v)(x,y)$ |
|---|---|---|---|---|
| **0** | 0 | 0.3 | 0.6 | 0.3 |
| | 1 | | 0.8 | 0.3 |
| | 2 | | 0.4 | 0.3 |
| | 4 | | 0.2 | 0.2 |
| **1** | 0 | 0.5 | 0.6 | 0.5 |
| | 1 | | 0.8 | 0.5 |
| | 2 | | 0.4 | 0.4 |
| | 4 | | 0.2 | 0.2 |
| **2** | 0 | 0.7 | 0.6 | 0.6 |
| | 1 | | 0.8 | 0.7 |
| | 2 | | 0.4 | 0.4 |
| | 4 | | 0.2 | 0.2 |
| **4** | 0 | 0.1 | 0.6 | 0.1 |
| | 1 | | 0.8 | 0.1 |
| | 2 | | 0.4 | 0.1 |
| | 4 | | 0.2 | 0.1 |

## 3.2 Sifat-sifat Ideal *Fuzzy* dalam Semiring Terurut

Berikut ini dijelaskan sifat-sifat dari ideal *fuzzy* dalam semiring terurut berupa teorema dan proposisi beserta contohnya.

**Proposisi 3.2.1**
Diberikan fungsi karakteristik $\chi_S$ dan *fuzzy subset* $\mu$ dari semiring terurut $(S,+,\cdot,\preccurlyeq)$. Untuk setiap $x,y \in S$ dan $x \preccurlyeq y$ berlaku
1. $(\chi_S \circ_1 \mu)(x) \geq (\chi_S \circ_1 \mu)(y)$,
2. $(\chi_S +_1 \mu)(x) \geq (\chi_S +_1 \mu)(y)$.

**Bukti:**
Didefinisikan pemetaan $\chi_S = \begin{cases} 1 & ,x \in S \\ 0 & ,x \notin S \end{cases}$ dan $\mu: S \to [0,1]$.

Karena $\chi_S: S \to \{0,1\} \subseteq [0,1]$ sehingga $\chi_S$ merupakan *fuzzy subset*.
Misalkan $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in S$ maka berlaku

$$(\chi_S \circ_1 \mu)(x) = \begin{cases} \sup\{\min\{\chi_S(x_1), \mu(x_2)\}\} & \text{, untuk } x \preccurlyeq x_1x_2 \\ 0 & \text{, untuk } x \not\preccurlyeq x_1x_2, \end{cases}$$

$$(\chi_S \circ_1 \mu)(y) = \begin{cases} \sup\{\min\{\chi_S(y_1), \mu(y_2)\}\} & \text{, untuk } y \preccurlyeq y_1y_2 \\ 0 & \text{, untuk } y \not\preccurlyeq y_1y_2, \end{cases}$$

$$(\chi_S +_1 \mu)(x) = \begin{cases} \sup\{\min\{\chi_S(x_1), \mu(x_2)\}\} & \text{, untuk } x \preccurlyeq x_1 + x_2 \\ 0 & \text{, untuk } x \not\preccurlyeq x_1 + x_2, \end{cases}$$

$$(\chi_S +_1 \mu)(y) = \begin{cases} \sup\{\min\{\chi_S(y_1), \mu(y_2)\}\} & \text{, untuk } y \preccurlyeq y_1 + y_2 \\ 0 & \text{, untuk } y \not\preccurlyeq y_1 + y_2. \end{cases}$$

Jika $y \not\preccurlyeq y_1\, y_2$ dan $y \not\preccurlyeq y_1 + y_2$ untuk $y_1, y_2 \in S$ maka didapat
$(\chi_S \circ_1 \mu)(y) = 0 \leq (\chi_S \circ_1 \mu)(x)$ dan
$(\chi_S +_1 \mu)(y) = 0 \leq (\chi_S +_1 \mu)(x)$.

Jika $y \preccurlyeq y_1\, y_2$ dan $y \preccurlyeq y_1 + y_2$ untuk $y_1, y_2 \in S$ maka didapat

$$\begin{aligned} (\chi_S \circ_1 \mu)(y) &= \sup_{y \preccurlyeq y_1 y_2} \{\min\{\chi_S(y_1), \mu(y_2)\}\} \\ &= \sup_{y \preccurlyeq y_1 y_2} \{\min\{1, \mu(y_2)\}\} \\ &= \sup_{y \preccurlyeq y_1 y_2} \{\mu(y_2)\}, \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} (\chi_S +_1 \mu)(y) &= \sup_{y \preccurlyeq y_1 + y_2} \{\min\{\chi_S(y_1), \mu(y_2)\}\} \\ &= \sup_{y \preccurlyeq y_1 + y_2} \{\min\{1, \mu(y_2)\}\} \\ &= \sup_{y \preccurlyeq y_1 + y_2} \{\mu(y_2)\}. \end{aligned}$$

Karena $x \preccurlyeq y \preccurlyeq y_1y_2$ dan $x \preccurlyeq y \preccurlyeq y_1 + y_2$ maka didapat

1. $$\begin{aligned} (\chi_S \circ_1 \mu)(x) &= \sup_{x \preccurlyeq x_1 x_2} \{\min\{\chi_S(x_1), \mu(x_2)\}\} \\ &\geq \sup_{x \preccurlyeq y_1 y_2} \{\min\{\chi_S(y_1), \mu(y_2)\}\} \\ &= \sup_{y \preccurlyeq y_1 y_2} \{\mu(y_2)\} \\ &= (\chi_S \circ_1 \mu)(y). \end{aligned}$$

Sehingga terbukti bahwa $(\chi_S \circ_1 \mu)(x) \geq (\chi_S \circ_1 \mu)(y)$.

2. $\left(\chi_S +_1 \mu\right)(x) = \sup_{x \preccurlyeq x_1 + x_2} \{\min\{\chi_S(x_1), \mu(x_2)\}\}$
$\geq \sup_{x \preccurlyeq y_1 + y_2} \{\min\{\chi_S(y_1), \mu(y_2)\}\}$
$= \sup_{y \preccurlyeq y_1 + y_2} \{\mu(y_2)\}$
$= (\chi_S +_1 \mu)(y).$

Sehingga terbukti bahwa $(\chi_S +_1 \mu)(x) \geq (\chi_S +_1 \mu)(y)$.

**Contoh 3.2.2**

Berdasarkan Contoh 2.4.10, diketahui bahwa $(S, \oplus, \odot, \preccurlyeq)$ adalah semiring terurut. Didefinisikan fungsi karakteristik $\chi_S$ dan *fuzzy subset* $\mu$ dari $S$, yaitu

$\mu: S \to [0,1]$ dan $\chi_S = \begin{cases} 1, & \text{jika } x \in S \\ 0, & \text{jika } x \neq S. \end{cases}$

$x \mapsto \mu(x)$
$0 \mapsto \mu(0) = 0.1$
$a \mapsto \mu(a) = 0.3$
$b \mapsto \mu(b) = 0.4$
$c \mapsto \mu(c) = 0.2$

Akan ditunjukkan bahwa untuk setiap $x, y \in R$ dan $x \preccurlyeq y$ berlaku
1. $(\chi_S \circ_1 \mu)(x) \geq (\chi_S \circ_1 \mu)(y)$,
2. $(\chi_S +_1 \mu)(x) \geq (\chi_S +_1 \mu)(y)$.

**Jawab:**

1. Akan ditunjukkan bahwa $(\chi_S \circ_1 \mu)(x) \geq (\chi_S \circ_1 \mu)(y)$.
   Ambil $x = b$. Karena $b \preccurlyeq b$ dan $b \preccurlyeq c$ maka $y = b$ atau $y = c$. Karena $b = b \odot b = b \odot c = c \odot c$ dan $c = c \odot c$ maka diperoleh himpunan pasangan terurut $(x_1, x_2)$, yaitu
   $\{(x_1, x_2)\} = \{(b, b), (b, c), (c, b), (c, c)\}$.
   Jelas $\chi_S(x_1) = 1$. Sehingga
   $\{\min\{\chi_S(x_1), \mu(x_2)\}\} = \{0.4, 0.2, 0.4, 0.2\}$.
   Jadi, $(\chi_S \circ_1 \mu)(b) = \sup_{b \preccurlyeq x_1 x_2} \{\min\{\chi_S(x_1), \mu(x_2)\}\} = 0.4$.

   a. Jika diambil $y = b$ maka diperoleh
      $(\chi_S \circ_1 \mu)(b) = \sup_{b \preccurlyeq y_1 y_2} \{\min\{\chi_S(y_1), \mu(y_2)\}\} = 0.4$.
      Sehingga jika $b \preccurlyeq b$ maka $(\chi_S \circ_1 \mu)(b) = (\chi_S \circ_1 \mu)(b)$.

b. Untuk $y = c$. Karena $c \preccurlyeq c$ maka diperoleh pasangan terurut $(y_1, y_2) = (c, c)$.
Jelas $\chi_S(y_1) = 1$. Sehingga
$\min\{\chi_S(y_1), \mu(y_2)\} = 0.2$.
Jadi, $(\chi_S \circ_1 \mu)(b) = \sup_{b \preccurlyeq y_1 y_2} \{\min\{\chi_S(y_1), \mu(y_2)\}\} = 0.2$.
Sehingga jika $b \preccurlyeq c$ maka $\chi_S \circ_1 \mu(b) > \chi_S \circ_1 \mu(c)$.

Dari (a) dan (b) diperoleh $(\chi_S \circ_1 \mu)(x) \geq (\chi_S \circ_1 \mu)(y)$.

Dengan cara yang sama, berlaku untuk setiap $x, y \in S, x \preccurlyeq y$ maka $(\chi_S \circ_1 \mu)(x) \geq (\chi_S \circ_1 \mu)(y)$.

2. Akan ditunjukkan bahwa $(\chi_S +_1 \mu)(x) \geq (\chi_S +_1 \mu)(y)$.
Ambil $x = a$. Karena $a \preccurlyeq a, a \preccurlyeq b$ dan $a \preccurlyeq c$ maka $y = a, y = b$ dan $y = c$.
$a = 0 \oplus a = a \oplus 0 = a \oplus a$,
$b = 0 \oplus b = b \oplus 0 = a \oplus b = b \oplus a = b \oplus b$, dan
$c = k \oplus c = c \oplus k, \forall k \in S$.
Sehinga diperoleh himpunan pasangan terurut $(x_1, x_2)$, yaitu
$\{(x_1, x_2)\} = \{(0, a), (a, 0), (a, a), (0, b), (b, 0), (a, b), (b, a),$
$(b, b), (0, c), (c, 0), (a, c), (c, a), (b, c), (c, b), (c, c)\}$.
Jelas $\chi_S(x_1) = 1$. Sehingga
$\{\min\{\chi_S(x_1), \mu(x_2)\}\} = \{0.3, 0.1, 0.3, 0.4, 0.1, 0.4, 0.3, 0.3, 0.2,$
$0.1, 0.2, 0.3, 0.2, 0.4, 0.2\}$.
Jadi, $\chi_S +_1 \mu(a) = \sup_{a \preccurlyeq x_1 x_2} \{\min\{\chi_S(x_1), \mu(x_2)\}\} = 0.4$.

a. Jika diambil $y = a$ maka diperoleh
$\chi_S +_1 \mu(a) = \sup_{a \preccurlyeq y_1 y_2} \{\min\{\chi_S(y_1), \mu(y_2)\}\} = 0.4$.
Sehingga jika $a \preccurlyeq a$ maka $\chi_S +_1 \mu(a) = \chi_S +_1 \mu(a)$.

b. Untuk $y = b$. Karena $b \preccurlyeq b$ dan $b \preccurlyeq c$ maka diperoleh himpunan pasangan terurut $(y_1, y_2)$, yaitu
$\{(y_1, y_2)\} = \{(0, b), (b, 0), (a, b), (b, a), (b, b), (0, c), (c, 0),$
$(a, c), (c, a), (b, c), (c, b), (c, c)\}$.
Jelas $\chi_S(y_1) = 1$. Sehingga
$\{\min\{\chi_S(y_1), \mu(y_2)\}\} = \{0.4, 0.1, 0.4, 0.3, 0.3, 0.2, 0.1, 0.2,$
$0.3, 0.2, 0.4, 0.2\}$.

Jadi, $\chi_S +_1 \mu(b) = \sup_{b \preccurlyeq y_1 y_2} \{\min\{\chi_S(y_1), \mu(y_2)\}\} = 0.4.$

Sehingga jika $a \preccurlyeq b$ maka $\chi_S +_1 \mu(a) = \chi_S +_1 \mu(b)$.

c. Untuk $y = c$. Karena $c \preccurlyeq c$ maka diperoleh himpunan pasangan terurut $(y_1, y_2)$, yaitu $\{(y_1, y_2)\} = \{(0, c), (c, 0), (a, c), (c, a), (b, c), (c, b), (c, c)\}$.
Jelas $\chi_S(y_1) = 1$. Sehingga $\{\min\{\chi_S(y_1), \mu(y_2)\}\} = \{0.2, 0.1, 0.2, 0.3, 0.2, 0.4, 0.2\}$.
Jadi, $\chi_S +_1 \mu(b) = \sup_{c \preccurlyeq y_1 y_2} \{\min\{\chi_S(y_1), \mu(y_2)\}\} = 0.4.$
Sehingga jika $a \preccurlyeq c$ maka $\chi_S +_1 \mu(a) = \chi_S \circ_1 \mu(c)$.

Dari (a), (b), dan (c) diperoleh $(\chi_S +_1 \mu)(x) \geq (\chi_S +_1 \mu)(y)$.

Dengan cara yang sama, berlaku untuk setiap $x, y \in S$, $x \preccurlyeq y$ maka $(\chi_S +_1 \mu)(x) \geq (\chi_S +_1 \mu)(y)$.

Jadi, terbukti bahwa untuk setiap $x, y \in R$ dan $x \preccurlyeq y$ berlaku $(\chi_S \circ_1 \mu)(x) \geq (\chi_S \circ_1 \mu)(y)$ dan $(\chi_S +_1 \mu)(x) \geq (\chi_S +_1 \mu)(y)$.

**Teorema 3.2.3**
*Fuzzy subset* $\mu$ dari semiring terurut $S$ merupakan ideal terurut *fuzzy* jika dan hanya jika *level subset* $\mu_t$ dengan $t \in [0,1]$ adalah ideal terurut dari $S$.

**Bukti:**
($\Longrightarrow$) Diketahui bahwa $\mu$ merupakan ideal terurut *fuzzy* dari $S$ dan $\mu_t = \{y \in S | \mu(y) \geq t, t \in [0,1]\}$. Jelas $\mu_t \subseteq S$. Akan ditunjukkan bahwa $\mu_t$ adalah ideal terurut dari $S$, yaitu jika $x \in S$ dan $y \in \mu_t$ dengan $x \preccurlyeq y$ maka $x \in \mu_t$.
Ambil $x \in S, y \in \mu_t, x \preccurlyeq y$. Karena $\mu_t \subseteq S$ maka $y \in S$.
Karena $\mu$ adalah ideal terurut kiri *fuzzy* dari $S$ maka berlaku

$$x \preccurlyeq y \Rightarrow \mu(x) \geq \mu(y)$$
$$\mu(x) \geq \mu(y) \geq t \qquad \text{(definisi } \mu_t\text{)}$$
$$\mu(x) \geq t \qquad \text{(sifat transitif)}$$

Sehingga $x \in \mu_t$ dan terbukti bahwa $\mu_t$ adalah ideal terurut dari $S$.

($\Longleftarrow$) Diketahui bahwa $\mu_t$ merupakan ideal terurut dari $S$, yaitu untuk suatu $x \in S, y \in \mu_t$ dengan $x \preccurlyeq y$ maka $x \in \mu_t$.

i) Akan ditunjukkan bahwa $\mu(x+y) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$.
Karena $x, y \in \mu_t$ maka jelas $x+y \in \mu_t$.
Andaikan $\mu(x+y) < \mu(x)$ atau $\mu(x+y) < \mu(y)$ maka terdapat $t_1 \in [0,1]$ sedemikian sehingga
$\mu(x+y) < t_1 < \mu(x)$ atau $\mu(x+y) < t_1 < \mu(y)$.
Sehingga diperoleh $x, y \in \mu_{t_1}$ dan $\mu(x+y) \notin \mu_{t_1}$ yang kontradiksi dengan $x+y \in \mu_t$.

ii) Akan ditunjukkan bahwa $\mu(xy) \geq \mu(x)$ dan $\mu(xy) \geq \mu(y)$.
Andaikan $\mu(xy) < \mu(x)$ dan $\mu(xy) < \mu(y)$ maka terdapat $t_1 \in [0,1]$ sedemikian sehingga $\mu(xy) < t_1 < \mu(x)$ atau $\mu(xy) < t_1 < \mu(y)$. Sehingga diperoleh $x, y \in \mu_{t_1}$ dan $xy \notin \mu_{t_1}$. Karena $\mu_t \subseteq S$ maka dapat dituliskan bahwa terdapat $x \in S, y \in \mu_t \Rightarrow xy \notin \mu_t$ atau $\mu_t$ bukan ideal kiri dari $S$ dan terdapat $y \in S, x \in \mu_t \Rightarrow xy \notin \mu_t$ atau $\mu_t$ bukan ideal kanan dari $S$. Sehingga kontradiksi dengan pernyataan bahwa $\mu_t$ adalah ideal terurut dari $S$.

iii) Akan ditunjukan bahwa jika $x \preccurlyeq y$ maka $\mu(x) \geq \mu(y)$.
Andaikan $\mu(x) < \mu(y)$ maka terdapat $t_1 \in [0,1]$ sedemikian sehingga $\mu(x) < t_1 < \mu(y)$. Sehingga diperoleh $y \in \mu_{t_1}$ dan $x \notin \mu_{t_1}$ yang kontradiksi dengan pernyataan bahwa $\mu_t$ adalah ideal terurut dari $S$.

Jadi, terbukti jika $\mu_t$ adalah ideal terurut dari $S$ maka $\mu$ merupakan ideal terurut *fuzzy* dari $S$.

**Contoh 3.2.4**
Berdasarkan Contoh 3.1.4, diketahui bahwa $\mu(0) = 1$, $\mu(a) = 0.7$, $\mu(b) = 0.4$, $\mu(c) = 0.2$ adalah ideal *fuzzy* dari semiring terurut $S$. Akan ditunjukkan bahwa *subset level* $\mu_t$ adalah ideal terurut dari $S$.

**Jawab:**
Misalkan *level subset* $\mu_t$ dari $S$ adalah sebagai berikut.
$\mu_{0.1} = \{0, a, b, c\}$, $\mu_{0.3} = \{0, a, b\}$, $\mu_{0.5} = \{0, a\}$, dan $\mu_1 = \{0\}$.
$\mu_t$ disebut ideal terurut dari $S$ jika $x \in S, y \in \mu_t, x \preccurlyeq y \Rightarrow x \in \mu_t$ atau $(\mu_t] \subseteq \mu_t$.

1. $0 \preccurlyeq 0$, berarti $(\mu_1] = \{0\} \subseteq \mu_1$.
2. $0 \preccurlyeq 0$, $0 \preccurlyeq a$, dan $a \preccurlyeq a$, berarti $(\mu_{0.5}] = \{0, a\} \subseteq \mu_{0.5}$.
3. $0 \preccurlyeq 0$, $0 \preccurlyeq a$, $0 \preccurlyeq b$, $a \preccurlyeq a$, $a \preccurlyeq b$, dan $b \preccurlyeq b$ berarti $(\mu_{0.3}] = \{0, a, b\} \subseteq \mu_{0.3}$.
4. $0 \preccurlyeq 0$, $0 \preccurlyeq a$, $0 \preccurlyeq b$, $0 \preccurlyeq c$, $a \preccurlyeq a$, $a \preccurlyeq b$, $a \preccurlyeq c$, $b \preccurlyeq b$, $b \preccurlyeq c$, dan $c \preccurlyeq c$ berarti $(\mu_{0.1}] = \{0, a, b, c\} \subseteq \mu_{0.1}$.

Sehingga diperoleh untuk suatu $t \in [0,1]$, $(\mu_t] \subseteq \mu_t$.
Jadi, terbukti bahwa $\mu_t$ merupakan ideal terurut dari $S$.

**Teorema 3.2.5**
Misalkan $I$ merupakan *subset* tak kosong dari semiring terurut $S$. $I$ adalah ideal terurut kiri dari $S$ jika dan hanya jika fungsi karakteristik $\chi_I$ adalah ideal terurut kiri *fuzzy* dari $S$.

**Bukti:**
Diketahui bahwa $I \neq \emptyset$, $I \subseteq S$, dan fungsi karakteristik dari $I$, yaitu $\chi_I = \begin{cases} 1 & , x \in I \\ 0 & , x \notin I \end{cases}$ atau $\chi_I : I \longrightarrow \{0,1\} \subseteq [0,1]$ sehingga $\chi_I$ merupakan *fuzzy subset* dari $S$.

$(\Longrightarrow)$ Diketahui bahwa $I$ merupakan ideal terurut kiri dari $S$, yaitu jika $x \in S$, $y \in I$, $x \preccurlyeq y$ maka $x \in I$. Akan ditunjukkan bahwa $\chi_I$ adalah ideal terurut kiri *fuzzy* dari $S$, yaitu berlaku

i) $\chi_I(x + y) \geq \min\{\chi_I(x), \chi_I(y)\}$
Karena $x, y \in I$ maka jelas $x + y \in I$.
Andaikan $\mu(x + y) < \mu(x)$ atau $\mu(x + y) < \mu(y)$ maka $\mu(x + y) = 0 < 1 = \mu(x)$ atau $\mu(x + y) = 0 < 1 = \mu(y)$. Sehingga diperoleh $x, y \in I$ dan $x + y \notin I$ yang kontradiksi dengan $x + y \in I$.

ii) $\chi_I(xy) \geq \chi_I(y)$, untuk setiap $x, y \in I$.
Andaikan $\chi_I(xy) < \chi_I(y)$ berarti $\chi_I(xy) = 0 < 1 = \chi_I(y)$. Sehingga diperoleh $y \in I$ dan $xy \notin I$.
Karena $I \subseteq S$ maka dapat dituliskan bahwa terdapat $x \in S$, untuk $y \in I$ sedemikian sehingga $xy \notin I$ atau $I$ bukan ideal kiri dari $S$ sehingga kontradiksi dengan pernyataan bahwa $I$ merupakan ideal terurut kiri dari $S$.

iii) Jika $x \preccurlyeq y$ maka $\mu(x) \geq \mu(y)$.
Andaikan $\chi_I(xy) < \chi_I(y)$ berarti $\chi_I(xy) = 0 < 1 = \chi_I(y)$. Sehingga $xy \notin I$, $y \in I$. Karena $I \subseteq S$ maka dapat dituliskan bahwa terdapat $x \in S, y \in I \Rightarrow xy \notin I$ atau $I$ bukan ideal kiri dari $S$. Sehingga kontradiksi dengan pernyataan bahwa $I$ merupakan ideal terurut kiri dari $S$.

Jadi, terbukti bahwa $\chi_I$ adalah ideal terurut kiri *fuzzy* dari $S$.

($\Leftarrow$) Diketahui bahwa $\chi_I$ adalah ideal terurut kiri *fuzzy* dari $S$. $(I] = \{x \in S | x \preccurlyeq y, y \in I\}$. Jelas $I \subseteq (I] \subseteq S$. Akan ditunjukan bahwa $I$ merupakan ideal terurut kiri dari $S$, yaitu jika $x \in S$, $y \in I$, $x \preccurlyeq y$ maka $x \in I$ atau $(I] \subseteq I$ dan $xy \in I$.
Ambil $x \in (I], y \in I$. Karena $I \subseteq (I) \subseteq S$ maka $x, y \in S$.
Karena $\chi_I$ adalah ideal terurut kiri *fuzzy* dari $S$ maka berlaku

i) Jika $x \preccurlyeq y$ maka $\chi_I(x) \geq \chi_I(y)$.
Karena $y \in I$ maka $\chi_I(x) \geq 1$ yang berarti $x \in I$.
Sehingga $(I] \subseteq I$.

ii) $\chi_I(xy) \geq \chi_I(y)$.
Karena $y \in I$ maka $\chi_I(y) = 1$ sehingga
$\chi_I(xy) \geq 1$ yang berarti $xy \in I$.

Jadi, tebukti bahwa $I$ adalah ideal terurut kiri dari $S$.

**Contoh 3.2.6**
Diberikan semiring terurut $(R, \otimes, \circledast)$ dengan $R = \{0, a, b, c\}$ dan $0 < a < b < c$. Didefinisikan relasi terurut $x \preccurlyeq y \Leftrightarrow x \otimes y = y$ dan $x \circledast y = x$ dengan operasi sebagai berikut.

**Tabel 3.4** Operasi $\otimes$ pada $R$

| $\otimes$ | **0** | $\boldsymbol{a}$ | $\boldsymbol{b}$ | $\boldsymbol{c}$ |
|---|---|---|---|---|
| **0** | 0 | $a$ | $b$ | $c$ |
| $\boldsymbol{a}$ | $a$ | $a$ | $a$ | $a$ |
| $\boldsymbol{b}$ | $b$ | $a$ | $b$ | $a$ |
| $\boldsymbol{c}$ | $c$ | $a$ | $a$ | $c$ |

**Tabel 3.5** Operasi $\circledast$ pada $R$

| $\circledast$ | **0** | $\boldsymbol{a}$ | $\boldsymbol{b}$ | $\boldsymbol{c}$ |
|---|---|---|---|---|
| **0** | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $\boldsymbol{a}$ | 0 | $a$ | $b$ | $c$ |
| $\boldsymbol{b}$ | 0 | $a$ | $b$ | $c$ |
| $\boldsymbol{c}$ | 0 | $a$ | $b$ | $c$ |

Diketahui bahwa $I = \{0, a, b\} \subseteq R$ merupakan ideal terurut kiri dari $R$ dan fungsi karakteristik $\chi_I$ dari $R$ yaitu
$\chi_I = \{(0,1), (a, 1), (b, 1), (c, 0)\}$.

Akan ditunjukkan bahwa $\chi_I$ merupakan ideal terurut kiri *fuzzy* dari $R$.

**Jawab:**

1. $\chi_I(x \otimes y) \geq \min\{\chi_I(x), \chi_I(y)\}$.
   Ambil $x = 0, y \in R$. Sehingga diperoleh
   $\chi_I(0 \otimes 0) = 1 = 1 = \min\{\chi_I(0), \chi_I(0)\}$,
   $\chi_I(0 \otimes a) = 1 = 1 = \min\{\chi_I(0), \chi_I(a)\}$,
   $\chi_I(0 \otimes b) = 1 = 1 = \min\{\chi_I(0), \chi_I(b)\}$,
   $\chi_I(0 \otimes c) = 1 > 0 = \min\{\chi_I(0), \chi_I(c)\}$.
   Dengan cara yang sama, diperoleh untuk setiap $x, y \in R$ berlaku $\chi_I(x \otimes y) \geq \min\{\chi_I(x), \chi_I(y)\}$.

2. $\chi_I(x \circledast y) \geq \chi_I(y)$ dan $\chi_I(x \circledast y) \ngeq \chi_I(x)$.
   a) Ambil $x = 0, y \in R$. Sehingga diperoleh
      $\chi_I(0 \circledast 0) = 1 = 1 = \chi_I(0)$,
      $\chi_I(0 \circledast a) = 1 = 1 = \chi_I(a)$,
      $\chi_I(0 \circledast b) = 1 = 1 = \chi_I(b)$,
      $\chi_I(0 \circledast c) = 1 > 0 = \chi_I(c)$.
      Dengan cara yang sama, diperoleh untuk setiap $x, y \in R$ berlaku $\chi_I(x \odot y) \geq \chi_I(y)$.

   b) Ambil $y = a, x \in R$. Sehingga diperoleh
      $\chi_I(0 \circledast a) = 1 = 1 = \chi_I(0)$,
      $\chi_I(a \circledast a) = 1 = 1 = \chi_I(a)$,
      $\chi_I(b \circledast a) = 1 = 1 = \chi_I(b)$,
      $\chi_I(c \circledast a) = 0 < 1 = \chi_I(c)$.
      Dengan cara yang sama, diperoleh untuk setiap $x, y \in R$ berlaku $\chi_I(x \circledast y) \leq \chi_I(x)$ atau $\chi_I(x \circledast y) \ngeq \chi_I(x)$.

3. Jika $x \preccurlyeq y$ maka $\chi_I(x) \geq \chi_I(y)$.
   Akan ditentukan relasi $x \preccurlyeq y$ untuk setiap $x, y \in R$.
   $0 \otimes a = 0$ dan $0 \circledast a = a$ berarti $0 \preccurlyeq a$,
   $a \otimes b = b$ dan $a \circledast b = a$ berarti $a \preccurlyeq b$,
   $b \otimes c = c$ dan $b \circledast c = b$ berarti $b \preccurlyeq c$.
   Sehingga diperoleh relasi $0 \preccurlyeq a \preccurlyeq b \preccurlyeq c$.
   Jelas dari definisi fungsi karakteristik $\chi_I$ dari $R$ bahwa
   $\chi_I(0) = 1 \geq \chi_I(a) = 1 \geq \chi_I(b) = 1 \geq \chi_I(c) = 0$.

Jadi, terbukti bahwa jika $x \preccurlyeq y$ maka $\chi_I(x) \geq \mu(y)$.

Karena sifat (1), (2), dan (3) terpenuhi maka terbukti bahwa *fuzzy subset* $\chi_I$ merupakan ideal terurut kiri *fuzzy* dari semiring terurut $R$.

**Proposisi 3.2.7**

Diberikan $S$ merupakan semiring terurut dan $\mu$ merupakan ideal kanan (kiri) *fuzzy* dari $S$. Maka $I_a$ adalah ideal kanan (kiri) dari $S$ untuk setiap $a \in S$.

**Bukti:**

Diketahui bahwa $\mu$ merupakan ideal kanan (kiri) *fuzzy* dari $S$ dan $a \in S$. Akan ditunjukkan bahwa $I_a = \{b \in S | \mu(b) \geq \mu(a)\}$ merupakan ideal kanan (kiri) dari $S$.

a) Jelas $I_a \neq \emptyset$ karena $a \in I_a$ untuk setiap $a \in S$.

b) Ambil sembarang $b, c \in I_a$ sehingga $\mu(b) \geq \mu(a)$, $\mu(c) \geq \mu(a)$ dengan $a \in S$. Karena $\mu$ adalah ideal kanan (kiri) *fuzzy* dari $S$ berlaku

   i. $\mu(b + c) \geq \min\{\mu(b), \mu(c)\}$
   $\geq \mu(a)$,
   Sehingga $b + c \in I_a$.

   ii. Untuk setiap $x \in S$, $\mu(bx) \geq \mu(b) \geq \mu(a)$ dan $\mu(xb) \geq \mu(b) \geq \mu(a)$. Sehingga $bx \in I_a$ dan $xb \in I_a$.

Karena kondisi (a) dan (b) dipenuhi, maka terbukti bahwa $I_a$ adalah ideal kanan (kiri) dari $S$.

**Contoh 3.2.8**

Diberikan semiring terurut $(K, \oplus, \odot)$ dengan $K = \{0, a, b, c\}$ dan $0 < a < b < c$. Didefinisikan relasi terurut $x \preccurlyeq y \Leftrightarrow x < y$ dan operasi sebagai berikut.

**Tabel 3.6** Operasi $\oplus$ pada $K$

| $\oplus$ | **0** | ***a*** | ***b*** | ***c*** |
|---|---|---|---|---|
| **0** | 0 | $a$ | $b$ | $c$ |
| ***a*** | $a$ | $a$ | $a$ | $a$ |
| ***b*** | $b$ | $a$ | $b$ | $a$ |
| ***c*** | $c$ | $a$ | $a$ | $c$ |

**Tabel 3.7** Operasi $\odot$ pada $K$

| $\odot$ | **0** | ***a*** | ***b*** | ***c*** |
|---|---|---|---|---|
| **0** | 0 | 0 | 0 | 0 |
| ***a*** | 0 | $a$ | $a$ | $a$ |
| ***b*** | 0 | $b$ | $b$ | $b$ |
| ***c*** | 0 | $c$ | $c$ | $c$ |

Diberikan *fuzzy subset* $\mu(0) = 1$, $\mu(a) = 0.8$, $\mu(b) = 0.6$, dan $\mu(c) = 0.3$ sebagai ideal kanan *fuzzy* dari $K$. Akan ditunjukkan bahwa untuk setiap $z \in K$, $I_z$ adalah ideal kanan dari $K$.

**Jawab:**
Ambil $z = b \in K$ sehingga $I_b = \{0, a, b\}$.

i. Jelas dari Tabel 3.5 bahwa untuk setiap $x, y \in I_b$ maka $x \oplus y \in I_b$.
ii. Dari Tabel 3.6 diperoleh untuk setiap $x \in K$, $y \in I_b$ maka $xy \in I_b$ tetapi $yx \notin I_b$ karena terdapat $x = c$ sedemikian sehingga $yc = c \notin I_b$.
iii. Dengan cara yang sama, untuk setiap $z \in K$ diperoleh $I_z$ merupakan ideal kanan dari $K$.

**Proposisi 3.2.9**
Irisan dari koleksi tak kosong ideal kanan (kiri) *fuzzy* dari semiring terurut *S* merupakan ideal kanan (kiri) *fuzzy* dari *S*.

**Bukti:**
Misalkan $\{\mu_i \mid i \in \mathbf{I}\}$ merupakan keluarga tak kosong dari ideal kanan (kiri) *fuzzy* dari $S$ dan $x, y \in S$. Didapat

1. $$\bigcap_{i\in I} \mu_i(x+y) = \inf_{i\in I}\{\mu_i(x+y)\} \qquad \text{(Definisi 2.5.16)}$$
$$\geq \inf_{i\in I}\{\min\{\mu_i(x), \mu_i(y)\}\} \qquad (\mu_i \text{ ideal kanan (kiri) } fuzzy)$$
$$= \min\left\{\inf_{i\in I}\{\mu_i(x)\}, \inf_{i\in I}\{\mu_i(y)\}\right\}$$
$$= \min\left\{\bigcap_{i\in I}\mu_i(x), \bigcap_{i\in I}\mu_i(y)\right\}.$$
Sehingga $\bigcap_{i\in I}\mu_i(x+y) \geq \min\left\{\bigcap_{i\in I}\mu_i(x), \bigcap_{i\in I}\mu_i(y)\right\}$.

2. $$\bigcap_{i\in I} \mu_i(xy) = \inf_{i\in I}\{\mu_i(xy)\} \qquad \text{(Definisi 2.5.16)}$$

$$\geq \inf_{i\in I}\{\mu_i(x)\} \left( \inf_{i\in I}\{\mu_i(y)\} \right) \qquad (\mu_i \text{ ideal kanan (kiri) } fuzzy)$$

$$= \bigcap_{i\in I}\mu_i(x) \left( \bigcap_{i\in I}\mu_i(y) \right).$$

Sehingga $\bigcap_{i\in I}\mu_i(xy) \geq \bigcap_{i\in I}\mu_i(x) \left( \bigcap_{i\in I}\mu_i(y) \right)$.

3. $x \preccurlyeq y \Rightarrow \mu_i(x) \geq \mu_i(y)$, untuk semua $i \in$ **I**.

   Sehingga jelas $\bigcap_{i\in I}\mu_i(x) \geq \bigcap_{i\in I}\mu_i(y)$.

Jadi, $\bigcap_{i\in I}\mu_i$ adalah ideal kanan (kiri) fuzzy dari $S$.

**Contoh 3.2.10**

Berdasarkan Contoh 3.2.8 diketahui bahwa $(K, \oplus, \odot, \preccurlyeq)$ merupakan semiring terurut. Didefinisikan koleksi ideal kanan *fuzzy* dari $K$ yaitu $\mu_i = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}, i \in I$ dimana

$\mu_1(0) = 0.5$, $\mu_1(a) = 0.4$, $\mu_1(b) = 0.3$, $\mu_1(c) = 0.1$,
$\mu_2(0) = 0.8$, $\mu_2(a) = 0.5$, $\mu_2(b) = 0.4$, $\mu_2(c) = 0.2$,
$\mu_3(0) = 0.6$, $\mu_3(a) = 0.5$, $\mu_3(b) = 0.2$, $\mu_3(c) = 0.1$.

Akan ditunjukkan bahwa $\bigcap_{i\in I}\mu_i$ adalah ideal kanan $fuzzy$ dari $K$.

**Jawab:**

$\inf_{i\in I}\{\mu_i(0)\} = \inf\{0.5, 0.8, 0.6\} = 0.5$,
$\inf_{i\in I}\{\mu_i(a)\} = \inf\{0.4, 0.5, 0.5\} = 0.4$,
$\inf_{i\in I}\{\mu_i(b)\} = \inf\{0.3, 0.4, 0.2\} = 0.2$,
$\inf_{i\in I}\{\mu_i(c)\} = \inf\{0.1, 0.2, 0.1\} = 0.1$.

1. Ambil $x = a, y = b \in K$. Didapat

   $\bigcap_{i\in I}\mu_i(a \oplus b) = \inf_{i\in I}\{\mu_i(a)\} = 0.4$

$$> 0.2 = \min\left\{\inf_{i\in I}\{\mu_i(a)\}, \inf_{i\in I}\{\mu_i(b)\}\right\}.$$

Ambil $x = a$, $y = 0 \in K$. Didapat

$$\bigcap_{i\in I} \mu_i(a \oplus b) = \inf_{i\in I}\{\mu_i(a)\} = 0.4$$

$$= \min\left\{\inf_{i\in I}\{\mu_i(a)\}, \inf_{i\in I}\{\mu_i(0)\}\right\}.$$

Dengan cara yang sama, untuk setiap $x, y \in K$ dapat ditunjukkan bahwa $\bigcap_{i\in I} \mu_i(x + y) \geq \min\left\{\bigcap_{i\in I} \mu_i(x), \bigcap_{i\in I} \mu_i(y)\right\}$.

2. Ambil $x = a$, $y = b \in K$. Didapat

$$\bigcap_{i\in I} \mu_i(a \odot b) = \inf_{i\in I}\{\mu_i(a)\} = 0.4.$$

Ambil $x = a$, $y = 0 \in K$. Didapat

$$\bigcap_{i\in I} \mu_i(a \odot 0) = \inf_{i\in I}\{\mu_i(0)\} = 0.5$$

$$> 0.4 = \inf_{i\in I}\{\mu_i(a)\}.$$

Dengan cara yang sama, untuk setiap $x, y \in K$ dapat ditunjukkan bahwa $\bigcap_{i\in I} \mu_i(xy) \geq \bigcap_{i\in I} \mu_i(x)$.

3. Sehingga jelas $x \preccurlyeq y \Rightarrow \bigcap_{i\in I} \mu_i(x) \geq \bigcap_{i\in I} \mu_i(y)$.

$$0 \preccurlyeq a \preccurlyeq b \preccurlyeq c \Rightarrow \bigcap_{i\in I} \mu_i(0) \geq \bigcap_{i\in I} \mu_i(a) \geq \bigcap_{i\in I} \mu_i(b) \geq \bigcap_{i\in I} \mu_i(c).$$

Jadi, $\bigcap_{i\in I} \mu_i$ adalah ideal kanan fuzzy dari $K$.

**Proposisi 3.2.11**

Misalkan $\{\mu_i \mid i \in I\}$ merupakan keluarga ideal *fuzzy* dari semiring terurut $S$ sedemikian sehingga $\mu_i \subseteq \mu_j$ atau $\mu_j \subseteq \mu_i$ untuk $i, j \in I$. Maka $\bigcup_{i\in I} \mu_i$ adalah ideal *fuzzy* dari $S$.

**Bukti:**
Diketahui $\{\mu_i \mid i \in \mathbf{I}\}$ merupakan keluarga tak kosong dari ideal *fuzzy* dari $S$ dan $x, y \in S$. Didapat

1. $\bigcup_{i\in I} \mu_i(x+y) = \sup_{i\in I}\{\mu_i(x+y)\}$ (Definisi 2.5.16)

   $\sup_{i\in I}\{\mu_i(x+y)\} \geq \sup_{i\in I}\{\mu_i(x)\}$ ($\mu_i$ ideal fuzzy)
   atau
   $\sup_{i\in I}\{\mu_i(x+y)\} \geq \sup_{i\in I}\{\mu_i(y)\}$ ($\mu_i$ ideal fuzzy)
   Sehingga
   $$\bigcup_{i\in I} \mu_i(x+y) \geq \min\left\{\sup_{i\in I}\{\mu_i(x)\}, \sup_{i\in I}\{\mu_i(y)\}\right\}$$
   $$= \min\left\{\bigcup_{i\in I} \mu_i(x), \bigcup_{i\in I} \mu_i(y)\right\}.$$
   Sehingga $\bigcup_{i\in I} \mu_i(x+y) \geq \min\left\{\bigcup_{i\in I} \mu_i(x), \bigcup_{i\in I} \mu_i(y)\right\}$.

2. $\bigcup_{i\in I} \mu_i(xy) = \sup_{i\in I}\{\mu_i(xy)\}$ (Definisi 2.5.16)
   $$\geq \sup_{i\in I}\{\mu_i(x)\} \left(\sup_{i\in I}\{\mu_i(y)\}\right)$$ ($\mu_i$ ideal kanan (kiri) $fuzzy$)
   $$= \bigcup_{i\in I} \mu_i(x) \left(\bigcup_{i\in I} \mu_i(y)\right).$$

3. $x \preccurlyeq y \Rightarrow \mu_i(x) \geq \mu_i(y)$, untuk semua $i \in \mathbf{I}$.
   Sehingga jelas $\bigcup_{i\in I} \mu_i(x) \geq \bigcup_{i\in I} \mu_i(y)$.

Jadi, $\bigcup_{i\in I} \mu_i$ adalah ideal fuzzy dari $S$.

**Contoh 3.2.12**
Berdasarkan Contoh 2.4.10, diketahui bahwa $(S, \oplus, \odot, \preccurlyeq)$ adalah semiring terurut. Didefinisikan keluarga ideal *fuzzy* dari $S$ yaitu

$\mu_i = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}, i \in I$ dimana
$\mu_1(0) = 0.9, \quad \mu_1(a) = 0.8, \quad \mu_1(b) = 0.5, \quad \mu_1(c) = 0.3,$
$\mu_2(0) = 1, \quad \mu_2(a) = 0.8, \quad \mu_2(b) = 0.7, \quad \mu_2(c) = 0.5,$
$\mu_3(0) = 0.8, \quad \mu_3(a) = 0.7, \quad \mu_3(b) = 0.5, \quad \mu_3(c) = 0.2.$
Jelas $\mu_3 \subseteq \mu_1 \subseteq \mu_2$.
Akan ditunjukkan bahwa $\bigcup_{i \in I} \mu_i$ adalah ideal *fuzzy* dari $S$.

**Jawab:**

$$\sup_{i \in I}\{\mu_i(0)\} = \sup\{0.9, 1, 0.8\} = 1,$$
$$\sup_{i \in I}\{\mu_i(a)\} = \sup\{0.8, 0.8, 0.7\} = 0.8,$$
$$\sup_{i \in I}\{\mu_i(b)\} = \sup\{0.5, 0.7, 0.5\} = 0.7,$$
$$\sup_{i \in I}\{\mu_i(c)\} = \sup\{0.3, 0.5, 0.2\} = 0.2.$$

1. Ambil $x = a, y = b \in S$. Didapat
$$\bigcup_{i \in I} \mu_i(a \oplus b) = \sup_{i \in I}\{\mu_i(b)\} = 0.7$$
$$= \min\left\{\sup_{i \in I}\{\mu_i(a)\}, \sup_{i \in I}\{\mu_i(b)\}\right\}.$$
Ambil $x = a, y = 0 \in S$. Didapat
$$\bigcup_{i \in I} \mu_i(a \oplus 0) = \sup_{i \in I}\{\mu_i(a)\} = 0.8$$
$$= \min\left\{\sup_{i \in I}\{\mu_i(a)\}, \sup_{i \in I}\{\mu_i(0)\}\right\}.$$
Dengan cara yang sama, untuk setiap $x, y \in S$ dapat ditunjukkan bahwa $\bigcup_{i \in I} \mu_i(x \oplus y) \geq \min\left\{\bigcup_{i \in I} \mu_i(x), \bigcup_{i \in I} \mu_i(y)\right\}$.

2. Ambil $x = a, y = b \in S$. Didapat
$$\bigcup_{i \in I} \mu_i(a \odot b) = \sup_{i \in I}\{\mu_i(a)\} = 0.8 > 0.7 = \sup_{i \in I}\{\mu_i(b)\}.$$
Ambil $x = a, y = 0 \in S$. Didapat
$$\bigcup_{i \in I} \mu_i(a \odot 0) = \sup_{i \in I}\{\mu_i(0)\} = 1 > 0.8 = \sup_{i \in I}\{\mu_i(a)\}.$$

Dengan cara yang sama, untuk setiap $x, y \in S$ dapat ditunjukkan bahwa $\bigcup_{i\in I} \mu_i(x \odot y) \geq \bigcup_{i\in I} \mu_i(x)$ dan $\bigcup_{i\in I} \mu_i(x \odot y) \geq \bigcup_{i\in I} \mu_i(y)$.

3. $0 \preccurlyeq a \preccurlyeq b \preccurlyeq c \Rightarrow \bigcup_{i\in I} \mu_i(0) \geq \bigcup_{i\in I} \mu_i(a) \geq \bigcup_{i\in I} \mu_i(b) \geq \bigcup_{i\in I} \mu_i(c)$.

   Sehingga jelas $x \preccurlyeq y \Rightarrow \bigcup_{i\in I} \mu_i(x) \geq \bigcup_{i\in I} \mu_i(y)$.

Jadi, $\bigcup_{i\in I} \mu_i$ adalah ideal $fuzzy$ dari $S$.

**Proposisi 3.2.13**
Misalkan $R$ dan $S$ adalah semiring terurut. Didefinisikan fungsi $f : R \rightarrow S$ merupakan morfisma dari semiring terurut, yaitu homomorfisma semiring dengan sifat tambahan untuk setiap $a, b \in R, a \preccurlyeq b \Rightarrow f(a) \preccurlyeq f(b)$. Jika $\phi$ adalah ideal kiri *fuzzy* dari $S$, maka $f^{-1}(\phi)$ adalah ideal kiri *fuzzy* dari $R$.

**Bukti:**
Akan ditunjukkan bahwa $f^{-1}(\phi)$ merupakan ideal kiri *fuzzy* dari $R$.
a) Karena $f$ merupakan morfisma, maka
   $f^{-1}(\phi)(0_R) = \phi(0_S) \geq \phi(x) \neq 0$ untuk suatu $x \in S$.
   Sehingga $f^{-1}(\phi) \neq \emptyset$ dan $f^{-1}(\phi) \subseteq R$.

b) Ambil sembarang $r, s \in R$. Didapat
   i. $f^{-1}(\phi)(r + s) = \phi\big(f(r + s)\big)$ (Definisi 2.5.18)
   $= \phi\big(f(r) + f(s)\big)$ (homomorfisma)
   $\geq \min\{\phi\big(f(r)\big), \phi\big(f(s)\big)\}$ ($\phi$ ideal kiri *fuzzy*)
   $= \min\{\big(f^{-1}(\phi)\big)(r), \big(f^{-1}(\phi)\big)(s)\}$. (Definisi 2.5.18)

   Sehingga $f^{-1}(\phi)(r + s) \geq \min\{\big(f^{-1}(\phi)\big)(r), \big(f^{-1}(\phi)\big)(s)\}$.

   ii. $\big(f^{-1}(\phi)\big)(rs) = \phi\big(f(rs)\big)$ (Definisi 2.5.18)
   $= \phi\big(f(r)f(s)\big)$ (homomorfisma)

$\geq \phi(f(s))$ ($\phi$ ideal kiri *fuzzy*)
$= (f^{-1}(\phi))(s).$ (Definisi 2.5.18)

Sehingga $(f^{-1}(\phi))(rs) \geq (f^{-1}(\phi))(s)$.

c) $r \preccurlyeq s \Rightarrow f(r) \preccurlyeq f(s)$. Didapat

$(f^{-1}(\phi))(r) = \phi(f(r))$ (Definisi 2.5.18)
$\geq \phi(f(s))$ ($\phi$ ideal kiri *fuzzy*)
$= (f^{-1}(\phi))(s).$ (Definisi 2.5.18)

Sehingga $(f^{-1}(\phi))(r) \geq (f^{-1}(\phi))(s)$.

Jadi, $f^{-1}(\phi)$ adalah ideal kiri *fuzzy* dari $R$.

**Teorema 3.2.14**

Jika $\mu$ dan $v$ adalah ideal kiri *fuzzy* dari semiring terurut $S$ maka $\mu \times v$ adalah ideal kiri *fuzzy* dari $S \times S$.

**Bukti:**

Ambil sembarang $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in S \times S$. Maka berlaku

1. $(\mu \times v)((x_1, x_2) + (y_1, y_2))$
$= (\mu \times v)(x_1 + y_1, x_2 + y_2)$
$= \min\{\mu(x_1 + y_1), v(x_2 + y_2)\}$ (Definisi 3.1.7)
$\geq \min\{\min\{\mu(x_1), \mu(y_1)\}, \min\{v(x_2), v(y_2)\}\}$ ($\mu, v$ ideal kiri *fuzzy*)
$= \min\{\min\{\mu(x_1), v(x_2)\}, \min\{\mu(y_1), v(y_2)\}\}$
$= \min\{(\mu \times v)(x_1, x_2), (\mu \times v)(y_1, y_2)\}.$ (Definisi 3.1.7)
Sehingga $(\mu \times v)((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) \geq \min\{(\mu \times v)(x_1, x_2), (\mu \times v)(y_1, y_2)\}$.

2. $(\mu \times v)((x_1, x_2)(y_1, y_2))$
$= (\mu \times v)(x_1 y_1, x_2 y_2)$
$= \min\{\mu(x_1 y_1), v(x_2 y_2)\}$ (Definisi 3.1.7)
$\geq \min\{\mu(y_1), v(y_2)\}$ ($\mu, v$ ideal kiri *fuzzy*)
$= (\mu \times v)(y_1, y_2).$ (Definisi 3.1.7)
Sehingga $(\mu \times v)((x_1, x_2)(y_1, y_2)) \geq (\mu \times v)(y_1, y_2)$.

3. $(x_1, x_2) \preccurlyeq (y_1, y_2)$ berarti $x_1 \preccurlyeq y_1 \Rightarrow \mu(x_1) \geq \mu(y_1)$ dan $x_2 \preccurlyeq y_2 \Rightarrow v(x_2) \geq v(y_2)$ maka didapat

$(\mu \times v)(x_1, x_2)$
$= \min\{\mu(x_1), v(x_2)\}$ (Definisi 3.1.7)
$\geq \min\{\mu(y_1), v(y_2)\}$
$= (\mu \times v)(y_1, y_2).$ (Definisi 3.1.7)

Sehingga $(\mu \times v)(x_1, x_2) \geq (\mu \times v)(y_1, y_2)$.

Jadi, terbukti bahwa $\mu \times v$ adalah ideal kiri *fuzzy* dari $S \times S$.

**Contoh 3.2.15**

Berdasarkan Contoh 3.2.6, diketahui bahwa $(R,\otimes,\circledast,\preccurlyeq)$ merupakan semiring terurut. Didefinisikan ideal kiri *fuzzy* $\mu$ dan $v$ dari $R$ sebagai berikut.

$\mu = \{(0,0.9), (a, 0.7), (b, 0.5), (c, 0.2)\}$,
$v = \{(0,1), (a, 0.7), (b, 0.4), (c, 0.1)\}$.

Akan ditunjukkan bahwa $\mu \times v$ adalah ideal kiri *fuzzy* dari $R \times R$.

**Jawab:**

**Tabel 3.8** Hasil Kali Kartesius $\mu$ dan $v$ dari $(R,\otimes,\circledast,\preccurlyeq)$

| $x$ | $y$ | $\mu(x)$ | $v(y)$ | $(\mu \times v)(x, y)$ | $\mu(y)$ | $(\mu \times \mu)(x, y)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **0** | 0 | 0.9 | 1 | 0.9 | 0.9 | 0.9 |
| | $a$ | | 0.7 | 0.7 | 0.7 | 0.7 |
| | $b$ | | 0.4 | 0.4 | 0.5 | 0.5 |
| | $c$ | | 0.1 | 0.1 | 0.2 | 0.2 |
| $\boldsymbol{a}$ | 0 | 0.7 | 1 | 0.7 | 0.9 | 0.7 |
| | $a$ | | 0.7 | 0.7 | 0.7 | 0.7 |
| | $b$ | | 0.4 | 0.4 | 0.5 | 0.5 |
| | $c$ | | 0.1 | 0.1 | 0.2 | 0.2 |
| $\boldsymbol{b}$ | 0 | 0.5 | 1 | 0.5 | 0.9 | 0.5 |
| | $a$ | | 0.7 | 0.5 | 0.7 | 0.5 |
| | $b$ | | 0.4 | 0.4 | 0.5 | 0.5 |
| | $c$ | | 0.1 | 0.1 | 0.2 | 0.2 |
| $\boldsymbol{c}$ | 0 | 0.2 | 1 | 0.2 | 0.9 | 0.2 |
| | $a$ | | 0.7 | 0.2 | 0.7 | 0.2 |
| | $b$ | | 0.4 | 0.2 | 0.5 | 0.2 |
| | $c$ | | 0.1 | 0.1 | 0.2 | 0.2 |

Dari Tabel 3.8, diperoleh hasil kali kartesius dari $\mu$ dan $v$, yaitu

$$\begin{aligned}\mu \times v = \{&\big((0,0), 0.9\big), \big((0,a), 0.7\big), \big((0,b), 0.4\big), \big((0,c), 0.1\big),\\ &\big((a,0), 0.7\big), \big((a,a), 0.7\big), \big((a,b), 0.4\big), \big((a,c), 0.1\big),\\ &\big((b,0), 0.5\big), \big((b,a), 0.5\big), \big((b,b), 0.4\big), \big((b,c), 0.1\big),\\ &\big((c,0), 0.2\big), \big((c,a), 0.2\big), \big((c,b), 0.2\big), \big((c,c), 0.1\big)\}.\end{aligned}$$

1. Ambil $x_1 = 0$, $x_2 = a$, $y_1 = b$, dan $y_2 = c$ dengan $(0,a), (b,c) \in R \times R$. Didapat

$$\begin{aligned}(\mu \times v)\big((0,a) + (b,c)\big) &= (\mu \times v)(0 + b, a + c)\\ &= (\mu \times v)(b,a)\\ &= \min\{\mu(b), v(a)\} = 0.5.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\min\{(\mu \times v)(0,a), (\mu \times v)(b,c)\}\\ &= \min\{\min\{\mu(0), v(a)\}, \min\{\mu(b), v(c)\}\}\\ &= \min\{0.7, 0.1\} = 0.1.\end{aligned}$$

Sehingga $(\mu \times v)\big((0,a) + (b,c)\big) > \min\{(\mu \times v)(0,a), (\mu \times v)(b,c)\}$.

2. Ambil $x_1 = a$, $x_2 = c$, $y_1 = b$, dan $y_2 = c$ dengan $(a,c), (b,c) \in R \times R$. Didapat

$$\begin{aligned}(\mu \times v)\big((a,c) + (b,c)\big) &= (\mu \times v)(a + b, c + c)\\ &= (\mu \times v)(b,c)\\ &= \min\{\mu(b), v(c)\} = 0.1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\min\{(\mu \times v)(a,c), (\mu \times v)(b,c)\}\\ &= \min\{\min\{\mu(a), v(c)\}, \min\{\mu(b), v(c)\}\}\\ &= \min\{0.1, 0.1\} = 0.1.\end{aligned}$$

Sehingga $(\mu \times v)\big((a,c) + (b,c)\big) = \min\{(\mu \times v)(a,c), (\mu \times v)(b,c)\}$.

Dengan cara yang sama seperti (1) dan (2), dapat ditunjukkan bahwa untuk setiap $x_1, x_2, y_1, y_2 \in R$ berlaku $(\mu \times v)\big((x_1,x_2) + (y_1,y_2)\big) \geq \min\{(\mu \times v)(x_1,x_2), (\mu \times v)(y_1,y_2)\}$.

3. Ambil $x_1 = 0$, $x_2 = c$, $y_1 = b$, dan $y_2 = a$ dengan $(0,c), (b,a) \in R \times R$. Didapat

$$(\mu \times v)\big((0,c)(b,a)\big) = \min\{\mu(0 \circledast b), v(c \circledast a)\}$$

$= \min\{\mu(0), v(a)\} = 0.7.$
$(\mu \times v)(b, a) = \min\{\mu(b), v(a)\} = 0.5.$
Sehingga $(\mu \times v)\big((0, c)(b, a)\big) \geq (\mu \times v)(b, a).$

Dengan cara yang sama, dapat ditunjukkan bahwa untuk setiap $x_1, x_2, y_1, y_2 \in R$ berlaku
$(\mu \times v)\big((x_1, x_2)(y_1, y_2)\big) \geq (\mu \times v)(y_1, y_2).$

4. Ambil $x_1 = 0$, $x_2 = a$, $y_1 = c$, dan $y_2 = b$ dengan $(0, a), (c, b) \in R \times R$.
   $(0, a) \preccurlyeq (c, b)$ berarti $0 \preccurlyeq c \Rightarrow \mu(0) \geq \mu(c)$ dan $a \preccurlyeq b \Rightarrow v(a) \geq v(b)$. Didapat
   $(\mu \times v)(0, a) = \min\{\mu(0), v(a)\} = 0.7.$
   $(\mu \times v)(c, b) = \min\{\mu(c), v(b)\} = 0.2.$
   Sehingga $(\mu \times v)(0, a) \geq (\mu \times v)(c, b).$

   Dengan cara yang sama, dapat ditunjukkan bahwa untuk setiap $x_1, x_2, y_1, y_2 \in R, (x_1, x_2) \preccurlyeq (y_1, y_2)$ berlaku
   $(\mu \times v)(x_1, x_2) \geq (\mu \times v)(y_1, y_2).$

Jadi, terbukti bahwa $\mu \times v$ adalah ideal kiri *fuzzy* dari $R \times R$.

**Teorema 3.2.16**
Diberikan *fuzzy subset* $\mu$ dari semiring terurut $S$. $\mu$ adalah ideal kiri *fuzzy* dari $S$ jika dan hanya jika $\mu \times \mu$ adalah ideal kiri *fuzzy* dari $S \times S$.

**Bukti:**
($\Longrightarrow$) Diketahui bahwa $\mu$ adalah ideal kiri *fuzzy* dari $S$. Berdasarkan Teorema 3.2.8, maka $\mu \times \mu$ adalah ideal kiri *fuzzy* dari $S \times S$.

($\Longleftarrow$) Diketahui bahwa $\mu \times \mu$ adalah ideal kiri *fuzzy* dari $S \times S$. Akan ditunjukkan bahwa $\mu$ adalah ideal kiri $fuzzy$ dari $S$.
Ambil sembarang $x_1, x_2, y_1, y_2 \in S$. Didapat

1. $\min\{\mu(x_1 + y_1), \mu(x_2 + y_2)\}$
   $= (\mu \times \mu)(x_1 + y_1, x_2 + y_2)$
   $= (\mu \times \mu)\big((x_1, x_2) + (y_1, y_2)\big)$ (Definisi 3.1.7)
   $\geq \min\{(\mu \times \mu)(x_1, x_2), (\mu \times \mu)(y_1, y_2)\}$ ($\mu \times \mu$ ideal kiri *fuzzy*)

$= \min\{\min\{\mu(x_1), \mu(x_2)\}, \min\{\mu(y_1), \mu(y_2)\}\}$. (Definisi 3.1.7)

Sehingga

$$\min\{\mu(x_1 + y_1), \mu(x_2 + y_2)\} \geq \min\{\min\{\mu(x_1), \mu(x_2)\}, \min\{\mu(y_1), \mu(y_2)\}\}.$$

Ambil $x_1 = x$, $x_2 = 0$, $y_1 = y$, dan $y_2 = 0$. Karena $\mu(0) \geq \mu(x)$ untuk setiap $x \in S$ maka diperoleh $\mu(x + y) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$.

2. $\min\{\mu(x_1y_1), \mu(x_2y_2)\}$
   $= (\mu \times \mu)(x_1y_1, x_2y_2)$
   $= (\mu \times \mu)\big((x_1, x_2)(y_1, y_2)\big)$ (Definisi 3.1.7)
   $\geq (\mu \times \mu)(y_1, y_2)$ ($\mu \times \mu$ ideal kiri *fuzzy*)
   $= \min\{\mu(y_1), \mu(y_2)\}$. (Definisi 3.1.7)
   Sehingga $\min\{\mu(x_1y_1), \mu(x_2y_2)\} \geq \min\{\mu(y_1), \mu(y_2)\}$.
   Ambil $x_1 = x$, $y_1 = y$, dan $y_2 = 0$ sehingga diperoleh $\mu(xy) \geq \mu(y)$.

3. Jika $(x_1, x_2) \preccurlyeq (y_1, y_2)$ maka
   $\min\{\mu(x_1), \mu(x_2)\}$
   $= (\mu \times \mu)(x_1, x_2)$ (Definisi 3.1.7)
   $\geq (\mu \times \mu)(y_1, y_2)$ ($\mu \times \mu$ ideal kiri *fuzzy*)
   $= \min\{\mu(y_1), \mu(y_2)\}$. (Definisi 3.1.7)
   Sehingga $\min\{\mu(x_1), \mu(x_2)\} \geq \min\{\mu(y_1), \mu(y_2)\}$.
   Ambil $x_1 = x$ , $x_2 = 0$, $y_1 = y$, dan $y_2 = 0$ sehingga diperoleh $\mu(x) \geq \mu(y)$.

Jadi, terbukti bahwa $\mu$ adalah ideal kiri *fuzzy* dari $S$.

**Contoh 3.2.17**

Berdasarkan Contoh 3.2.15, diketahui bahwa $\mu$ merupakan ideal kiri *fuzzy* dari semiring terurut $R$. Akan ditunjukkan bahwa $\mu \times \mu$ merupakan ideal kiri *fuzzy* dari $R \times R$.

**Jawab:**

Dari Tabel 3.8, diperoleh hasil kali kartersius dari $\mu$ dan $\mu$, yaitu

$$\begin{aligned} \mu \times \mu = \{&\big((0,0), 0.9\big), \big((0, a), 0.7\big), \big((0, b), 0.5\big), \big((0, c), 0.2\big), \\ &\big((a, 0), 0.7\big), \big((a, a), 0.7\big), \big((a, b), 0.5\big), \big((a, c), 0.2\big), \\ &\big((b, 0), 0.5\big), \big((b, a), 0.5\big), \big((b, b), 0.2\big), \big((b, c), 0.2\big), \\ &\big((c, 0), 0.2\big), \big((c, a), 0.2\big), \big((c, b), 0.2\big), \big((c, c), 0.2\big)\}. \end{aligned}$$

1. Ambil $x_1 = 0, x_2 = a, y_1 = b$, dan $y_2 = c$ dengan $(0,a),(b,c) \in R \times R$. Didapat
$$\begin{aligned}(\mu \times \mu)\big((0,a)+(b,c)\big) &= (\mu \times \mu)(0+b, a+c)\\ &= (\mu \times \mu)(b,a)\\ &= \min\{\mu(b),\mu(a)\} = 0.5.\end{aligned}$$
$\min\{(\mu \times \mu)(0,a),(\mu \times \mu)(b,c)\}$
$= \min\{\min\{\mu(0),\mu(a)\}, \min\{\mu(b),\mu(c)\}\}$
$= \min\{0.5, 0.2\} = 0.2.$
Sehingga $(\mu \times \mu)\big((0,a)+(b,c)\big) > \min\{(\mu \times \mu)(0,a),$
$(\mu \times \mu)(b,c)\}.$

2. Ambil $x_1 = a, x_2 = c, y_1 = b$, dan $y_2 = c$ dengan $(a,c),(b,c) \in R \times R$. Didapat
$$\begin{aligned}(\mu \times \mu)\big((a,c)+(b,c)\big) &= (\mu \times \mu)(a+b, c+c)\\ &= (\mu \times \mu)(b,c)\\ &= \min\{\mu(b),\mu(c)\} = 0.2.\end{aligned}$$
$\min\{(\mu \times \mu)(a,c),(\mu \times \mu)(b,c)\}$
$= \min\{\min\{\mu(a),\mu(c)\}, \min\{\mu(b),\mu(c)\}\}$
$= \min\{0.2, 0.2\} = 0.2.$
Sehingga $(\mu \times \mu)\big((a,c)+(b,c)\big) = \min\{(\mu \times \mu)(a,c),$
$(\mu \times \mu)(b,c)\}.$

Dengan cara yang sama seperti (1) dan (2), dapat ditunjukkan bahwa untuk setiap $x_1, x_2, y_1, y_2 \in R$ berlaku
$(\mu \times \mu)\big((x_1,x_2)+(y_1,y_2)\big) \geq \min\{(\mu \times \mu)(x_1,x_2),$
$(\mu \times \mu)(y_1,y_2)\}.$

3. Ambil $x_1 = 0, x_2 = c, y_1 = b$, dan $y_2 = a$ dengan $(0,c),(b,a) \in R \times R$. Didapat
$$\begin{aligned}(\mu \times \mu)\big((0,c)(b,a)\big) &= \min\{\mu(0 \circledast b),\mu(c \circledast a)\}\\ &= \min\{\mu(0),\mu(a)\} = 0.7.\end{aligned}$$
$(\mu \times \mu)(b,a) = \min\{\mu(b),\mu(a)\} = 0.5.$
Sehingga $(\mu \times \mu)\big((0,c)(b,a)\big) = (\mu \times \mu)(b,a).$

Dengan cara yang sama, dapat ditunjukkan bahwa untuk setiap $x_1, x_2, y_1, y_2 \in R$ berlaku
$(\mu \times \mu)\big((x_1,x_2)(y_1,y_2)\big) \geq (\mu \times \mu)(y_1,y_2).$

4. Ambil $x_1 = 0, x_2 = a, y_1 = c$, dan $y_2 = b$ dengan $(0, a), (c, b) \in R \times R$.
   $(0, a) \preccurlyeq (c, b)$ berarti $0 \preccurlyeq c \Rightarrow \mu(0) \geq \mu(c)$ dan $x_2 \preccurlyeq y_2 \Rightarrow \mu(a) \geq \mu(b)$. Didapat
   $(\mu \times \mu)(0, a) = \min\{\mu(0), \mu(a)\} = 0.7.$
   $(\mu \times \mu)(c, b) = \min\{\mu(c), \mu(b)\} = 0.2.$
   Sehingga $(\mu \times \mu)(0, a) > (\mu \times \mu)(c, b)$.

   Dengan cara yang sama, dapat ditunjukkan bahwa untuk setiap $x_1, x_2, y_1, y_2 \in R, (x_1, x_2) \preccurlyeq (y_1, y_2)$ berlaku $(\mu \times \mu)(x_1, x_2) \geq (\mu \times \mu)(y_1, y_2)$.

Jadi, terbukti bahwa $\mu \times \mu$ adalah ideal kiri *fuzzy* dari $R \times R$.

**Proposisi 3.2.18**
Diberikan *fuzzy subset* $\mu_1$, $\mu_2$, dan $\mu_3$ dari semiring terurut $S$. Maka berlaku $\mu_1 \circ_1 (\mu_2 +_1 \mu_3) = (\mu_1 \circ_1 \mu_2) +_1 (\mu_1 \circ_1 \mu_3)$.

**Bukti:**
Diketahui bahwa $\mu_1$, $\mu_2$, dan $\mu_3$ merupakan *fuzzy subset* dari semiring terurut $S$. Ambil sembarang $x, y, z, a, b \in S$. Didapat

i. $\big(\mu_1 \circ_1 (\mu_2 +_1 \mu_3)\big)(x)$
$$= \sup_{x \preccurlyeq yz}\{\min\{\mu_1(y), (\mu_2 +_1 \mu_3)(z)\}\}$$
$$= \sup_{x \preccurlyeq yz}\left\{\min\left\{\mu_1(y), \sup_{z \preccurlyeq a+b}\{\min\{\mu_2(a), \mu_3(b)\}\}\right\}\right\}$$
$$= \sup\{\min\{\sup\{\min\{\mu_1(y), \mu_2(a)\}\}, \sup\{\min\{\mu_1(y), \mu_3(b)\}\}\}\}$$
$$\leq \sup_{x \preccurlyeq ya+yb}\{\min\{(\mu_1 \circ_1 \mu_2)(ya), (\mu_1 \circ_1 \mu_3)(yb)\}\}$$
$$\leq ((\mu_1 \circ_1 \mu_2) +_1 (\mu_1 \circ_1 \mu_3))(x).$$
Sehingga $(\mu_1 \circ_1 (\mu_2 +_1 \mu_3))(x) \leq ((\mu_1 \circ_1 \mu_2) +_1 (\mu_1 \circ_1 \mu_3))(x)$.

ii. $\big((\mu_1 \circ_1 \mu_1) +_1 (\mu_1 \circ_1 \mu_3)\big)(x)$
$$= \sup_{x \preccurlyeq x_1 + x_2}\{\min\{(\mu_1 \circ_1 \mu_2)(x_1), (\mu_1 \circ_1 \mu_3)(x_2)\}\}, x_1, x_2 \in S$$
$$= \sup_{x \preccurlyeq x_1 + x_2}\{\min\{\sup_{x_1 \preccurlyeq c_1 d_1}\{\min\{\mu_1(c_1), \mu_2(d_1)\}\},$$
$$\sup_{x_2 \leq c_2 d_2}\{\min\{\mu_1(c_2), \mu_3(d_2)\}\}\}\}, c_1, c_2, d_1, d_2 \in S$$
$$\leq \sup_{x \preccurlyeq x_1 + x_2 \preccurlyeq c_1 d_1 + c_2 d_2 \prec (c_1 + c_2)(d_1 + d_2)}\{\min\{\mu_1(c_1 + c_2), \sup\{\min\{\mu_2(d_1), \mu_3(d_2)\}\}\}\}$$

$\leq \sup_{x \preccurlyeq cd} \{\min\{\mu_1(c), (\mu_2 +_1 \mu_3)(d)\}\}, c, d \in S$

$= (\mu_1 \circ_1 (\mu_2 +_1 \mu_3))(x).$

Sehingga $\big((\mu_1 \circ_1 \mu_1) +_1 (\mu_1 \circ_1 \mu_3)\big)(x) \leq (\mu_1 \circ_1 (\mu_2 +_1 \mu_3))(x).$

Jadi, $\mu_1 \circ_1 (\mu_2 +_1 \mu_3) = (\mu_1 \circ_1 \mu_2) +_1 (\mu_1 \circ_1 \mu_3).$

**Contoh 3.2.19**

Berdasarkan Contoh 3.2.12, Akan ditunjukkan bahwa $\mu_1 \circ_1 (\mu_2 +_1 \mu_3) = (\mu_1 \circ_1 \mu_2) +_1 (\mu_1 \circ_1 \mu_3).$

Dimana

$\mu_1(0) = 0.9,\quad \mu_1(a) = 0.8,\quad \mu_1(b) = 0.5,\quad \mu_1(c) = 0.3,$

$\mu_2(0) = 1,\quad \mu_2(a) = 0.8,\quad \mu_2(b) = 0.7,\quad \mu_2(c) = 0.5,$

$\mu_3(0) = 0.8,\quad \mu_3(a) = 0.7,\quad \mu_3(b) = 0.5,\quad \mu_3(c) = 0.2.$

**Jawab:**

Ambil $b \in S$, diperoleh

$\big(\mu_1 \circ_1 (\mu_2 +_1 \mu_3)\big)(b) = \sup_{b \preccurlyeq y \odot z} \{\min\{\mu_1(y), (\mu_2 +_1 \mu_3)(z)\}\}$

Karena $b \preccurlyeq b$ dan $b \preccurlyeq c$, dimana

$b = 0 \oplus b = b \oplus 0 = a \oplus b = b \oplus a = b \oplus b$ dan

$c = 0 \oplus c = c \oplus 0 = a \oplus c = c \oplus a = b \oplus c = c \oplus b = c \oplus c.$

Jika $y \odot z = a$ maka

$$y \odot z = a \odot a = a \odot b = b \odot a = a \odot c = c \odot a.$$

Jika $y \odot z = b$ maka $y \odot z = b \odot b = b \odot c = c \odot b.$

Jika $y \odot z = c$ maka $y \odot z = c \odot c.$

Sehingga, didapat $y = z = \{b, c\}.$

Ambil $y = b$ dan $z = c$, diperoleh

$\big(\mu_1 \circ_1 (\mu_2 +_1 \mu_3)\big)(b)$

$= \sup_{b \preccurlyeq b \odot c} \{\min\{\mu_1(b), (\mu_2 +_1 \mu_3)(c)\}\}$

$= \sup_{b \preccurlyeq b \odot c} \left\{\min\left\{\mu_1(b), \mathit{sup}_{c \preccurlyeq m \oplus n} \{\mathit{min}\{\mu_2(m), \mu_3(n)\}\}\right\}\right\}, m, n \in S$

$= \sup_{b \preccurlyeq b \odot c} \left\{\min\left\{0.5, \mathit{sup}_{c \preccurlyeq a \oplus b} \{0.2, 0.5, 0.2, 0.5, 0.2, 0.5, 0.2\}\right\}\right\}$

$= \sup_{b \preccurlyeq b \odot c} \{\min\{0.5, 0.5\}\} = 0.5,$

$(\mu_1 \circ_1 \mu_2) +_1 (\mu_1 \circ_1 \mu_3)(b)$

$$= \sup_{b \preccurlyeq a \oplus b} \{\min\{(\mu_1 \circ_1 \mu_2)(a), (\mu_1 \circ_1 \mu_3)(b)\}\}$$

$$= \sup_{b \preccurlyeq a \oplus b} \{\min\{ \sup_{a \preccurlyeq k \odot l} \{\min\{\mu_1(k), \mu_2(l)\}\}, \sup_{b \preccurlyeq m \odot n} \{\min\{\mu_1(m), \mu_3(n)\}\}\}\}$$

$$= \sup_{b \preccurlyeq a \oplus b} \{\min\{ \sup_{a \preccurlyeq k \odot l} \{0.8, 0.7, 0.5, 0.5, 0.3\}, \sup_{b \preccurlyeq m \odot n} \{0.5, 0.2, 0.3\}\}\}$$

$$= \sup_{b \preccurlyeq a \oplus b} \{\min\{0.8, 0.5\}\} = 0.5.$$

Dengan cara yang sama, untuk setiap $x \in S$ dapat ditunjukkan bahwa $\mu_1 \circ_1 (\mu_2 +_1 \mu_3)(x) = (\mu_1 \circ_1 \mu_2) +_1 (\mu_1 \circ_1 \mu_3)(x)$.

**Teorema 3.2.20**

Jika $\mu_1$ dan $\mu_2$ adalah ideal *fuzzy* dari semiring terurut $S$ maka $\mu_1 +_1 \mu_2$ adalah ideal *fuzzy* dari semiring terurut $S$.

**Bukti:**

Diketahui bahwa $\mu_1$ dan $\mu_2$ adalah ideal *fuzzy* dari semiring terurut $S$. Ambil sembarang $x, y, c, d \in S$. Didapat

1. $(\mu_1 +_1 \mu_2)(x + y)$

   $$= \sup_{x+y \preccurlyeq c+d} \{\min\{\mu_1(c), \mu_2(d)\}\}$$

   $$\geq \sup_{x+y \preccurlyeq (a_1+b_1)+(a_2+b_2)=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)} \{\min\{\mu_1(a_1 + a_2), \mu_2(b_1 + b_2)\}\}, a_1, a_2, b_1, b_2 \in S$$

   $$\geq \sup \{\min\{\mu_1(a_1), \mu_1(a_2), \mu_2(b_1), \mu_2(b_2)\}\}$$

   $$= \min\{ \sup_{x \preccurlyeq a_1+b_1} \{\min\{\mu_1(a_1), \mu_2(b_1)\}\}, \sup_{y \preccurlyeq a_2+b_2} \{\min\{\mu_1(a_2), \mu_2(b_2)\}\}\}$$

   $$= \min\{(\mu_1 +_1 \mu_2)(x), (\mu_1 +_1 \mu_2)(y)\}.$$

   Sehingga

   $(\mu_1 +_1 \mu_2)(x + y) \geq \min\{(\mu_1 +_1 \mu_2)(x), (\mu_1 +_1 \mu_2)(y)\}$.

2. Diasumsikan $\mu_1$ dan $\mu_2$ adalah ideal kanan *fuzzy* sehingga didapat

   $(\mu_1 +_1 \mu_2)(xy)$

   $$= \sup_{xy \preccurlyeq c+d} \{\min\{\mu_1(c), \mu_2(d)\}\}$$

   $$\geq \sup_{xy \preccurlyeq (x_1+x_2)y} \{\min\{\mu_1(x_1 y), \mu_2(x_2 y)\}\}, x_1, x_2 \in S$$

$\geq \sup\limits_{x \preccurlyeq x_1+x_2} \{\min\{\mu_1(x_1), \mu_2(x_2)\}\}$
$= (\mu_1 +_1 \mu_2)(x).$
Sehingga $(\mu_1 +_1 \mu_2)(xy) \geq (\mu_1 +_1 \mu_2)(x)$.

Dengan cara yang sama, diasumsikan $\mu_1$ dan $\mu_2$ adalah ideal kiri *fuzzy*, sehingga dapat ditunjukkan bahwa
$(\mu_1 +_1 \mu_2)(xy) \geq (\mu_1 +_1 \mu_2)(y)$.

3. Jika $x \leq y$ maka $\mu_1(x) \geq \mu_1(y)$ dan $\mu_2(x) \geq \mu_2(y)$. Sehingga
$(\mu_1 +_1 \mu_2)(x)$
$= \sup\limits_{x \preccurlyeq x_1+x_2} \{\min\{\mu_1(x_1), \mu_2(x_2)\}\}, x_1, x_2 \in S$
$\geq \sup\limits_{x \preccurlyeq y \preccurlyeq y_1+y_2} \{\min\{\mu_1(y_1), \mu_2(y_2)\}\}, y_1, y_2 \in S$
$= \sup\limits_{y \preccurlyeq y_1+y_2} \{\min\{\mu_1(y_1), \mu_2(y_2)\}\}$
$= (\mu_1 +_1 \mu_2)(y).$
Sehingga $(\mu_1 +_1 \mu_2)(x) \geq (\mu_1 +_1 \mu_2)(y)$.

Jadi, terbukti bahwa $\mu_1 +_1 \mu_2$ adalah ideal *fuzzy* dari $S$.

**Teorema 3.2.21**
Jika $\mu_1$ dan $\mu_2$ adalah ideal *fuzzy* dari semiring terurut $S$ maka $\mu_1 \circ_1 \mu_2$ adalah ideal *fuzzy* dari semiring terurut $S$.

**Bukti:**
Diketahui bahwa $\mu_1$ dan $\mu_2$ merupakan ideal *fuzzy* dari semiring terurut $S$. Ambil sembarang $x, y, c, d \in S$. Didapat

1. $(\mu_1 \circ_1 \mu_2)(x + y)$
$= \sup\limits_{x+y \preccurlyeq cd} \{\min\{\mu_1(c), \mu_2(d)\}\}$
$\geq \sup\limits_{x+y \preccurlyeq c_1d_1+c_2d_2 \prec (c_1+c_2)(d_1+d_2)} \{\min\{\mu_1(c_1 + c_2), \mu_2(d_1 + d_2)\}\}, c_1, c_2, d_1, d_2 \in S$
$\geq \sup \{\min\{\mu_1(c_1), \mu_1(c_2), \mu_2(d_1), \mu_2(d_2)\}\}$
$\geq \min\{\sup\limits_{x \preccurlyeq c_1d_1} \{\min\{\mu_1(c_1), \mu_2(d_1)\}\}, \sup\limits_{y \preccurlyeq c_2d_2} \{\min\{\mu_1(c_2), \mu_2(d_2)\}\}\}$
$= \min\{(\mu_1 \circ_1 \mu_2)(x), (\mu_1 \circ_1 \mu_2)(y)\}.$
Sehingga
$(\mu_1 \circ_1 \mu_2)(x + y) \geq \min\{(\mu_1 \circ_1 \mu_2)(x), (\mu_1 \circ_1 \mu_2)(y)\}$.

2. Diasumsikan $\mu_1$ dan $\mu_2$ adalah ideal kanan *fuzzy* sehingga didapat
   $(\mu_1 \circ_1 \mu_2)(xy)$
   $= \sup_{xy \preccurlyeq cd} \{\min\{\mu_1(c), \mu_2(d)\}\}$
   $\geq \sup_{xy \preccurlyeq (x_1 x_2) y} \{\min\{\mu_1(x_1), \mu_2(x_2 y)\}\}, x_1, x_2 \in S$
   $\geq \sup_{x \preccurlyeq x_1 x_2} \{\min\{\mu_1(x_1), \mu_2(x_2)\}\}$
   $= (\mu_1 \circ_1 \mu_2)(x)$.
   Sehingga $(\mu_1 \circ_1 \mu_2)(xy) \geq (\mu_1 \circ_1 \mu_2)(x)$.

   Dengan cara yang sama, diasumsikan $\mu_1$ dan $\mu_2$ adalah ideal kiri *fuzzy* sehingga dapat ditunjukkan bahwa
   $(\mu_1 \circ_1 \mu_2)(xy) \geq (\mu_1 \circ_1 \mu_2)(y)$.

3. Jika $x \leq y$ maka $\mu_1(x) \geq \mu_1(y)$ dan $\mu_2(x) \geq \mu_2(y)$. Sehingga
   $(\mu_1 \circ_1 \mu_2)(x)$
   $= \sup_{x \preccurlyeq x_1 x_2} \{\min\{\mu_1(x_1), \mu_2(x_2)\}\}, x_1, x_2 \in S$
   $\geq \sup_{x \preccurlyeq y \preccurlyeq y_1 y_2} \{\min\{\mu_1(y_1), \mu_2(y_2)\}\}, y_1, y_2 \in S$
   $= \sup_{y \preccurlyeq y_1 y_2} \{\min\{\mu_1(y_1), \mu_2(y_2)\}\}$
   $= (\mu_1 \circ_1 \mu_2)(y)$.
   Sehingga $(\mu_1 \circ_1 \mu_2)(x) \geq (\mu_1 \circ_1 \mu_2)(y)$.

Jadi, terbukti bahwa $\mu_1 \circ_1 \mu_2$ adalah ideal *fuzzy* dari $S$.

**Teorema 3.2.22**
Misalkan $S$ merupakan semiring terurut. Himpunan semua ideal *fuzzy* dari $S$ yang dinotasikan dengan $FI(S)$ adalah semiring *zerosumfree* dengan tak hingga elemen $\mathbf{1}$ dibawah operasi penjumlahan dan komposisi antara ideal *fuzzy* dari $S$ dimana $\mathbf{1} \in FI(S), \mathbf{1}(x) = 1, \forall x \in S$.

**Bukti:**
Jelas, $\phi$ yang merupakan fungsi karakteristik dari $S$ adalah elemen dari $FI(S)$. Sehingga $FI(S)$ bukan himpunan kosong.

a) Misalkan $\mu_1, \mu_2, \mu_3$ merupakan ideal *fuzzy* dari $S$. Maka berlaku
   i. Terhadap operasi $+_1$.

- Sifat Tertutup.
  Jelas berdasarkan Teorema 3.2.20 terbukti bahwa untuk $\mu_1, \mu_2 \in FI(S), \mu_1 +_1 \mu_2 \in FI(S)$.

- Sifat Asosiatif.
  Ambil $x, y, z, a, b, m \in S$.
  $(\mu_1 +_1 (\mu_2 +_1 \mu_3))(x)$
  $= \sup\limits_{x \preccurlyeq y+z} \{\min\{\mu_1(y), (\mu_2 +_1 \mu_3)(z)\}\}$
  $= \sup\limits_{x \preccurlyeq y+z} \left\{\min\left\{\mu_1(y), \sup\limits_{z \preccurlyeq a+b} \{\min\{\mu_2(a), \mu_3(b)\}\}\right\}\right\}$
  $= \sup\limits_{x \preccurlyeq y+(a+b)} \{\min\{\mu_1(y), \sup\{min\{\mu_2(a), \mu_3(b)\}\}\}\},$
  dengan sifat asosiatif, yaitu $y + (a + b) = (y + a) + b$ diperoleh
  $= \sup\limits_{x \preccurlyeq (y+a)+b} \{\min\{\sup\{\min\{\mu_1(y), \mu_2(a)\}\}, \mu_3(b)\}\}$
  $= \sup\limits_{x \preccurlyeq m+b} \left\{\min\left\{\sup\limits_{m \preccurlyeq y+a} \{\min\{\mu_1(y), \mu_2(a)\}\}, \mu_3(b)\right\}\right\}$
  $= \sup\limits_{x \preccurlyeq m+b} \{\min\{(\mu_1 + \mu_2)(m), \mu_3(b)\}\}$
  $= ((\mu_1 +_1 \mu_2) +_1 \mu_3)(x)$.

- Elemen identitas berupa $\phi$.
  Jelas $\phi +_1 \mu_1 = \mu_1 +_1 \phi = \mu_1$, untuk $\phi, \mu_1 \in FI(S)$.

- Sifat komutatif terhadap $+_1$.
  Ambil $x, y, x \in S$.
  $(\mu_1 +_1 \mu_2)(x) = \sup\limits_{x \preccurlyeq y+z} \{\min\{\mu_1(y), \mu_2(z)\}\}$
  $= \sup\limits_{x \preccurlyeq z+y} \{\min\{\mu_1(z), \mu_2(y)\}\}$ (sifat komutatif)
  $= (\mu_2 +_1 \mu_1)(x)$.

Jadi, terbukti bahwa $(FI(S), +_1)$ adalah semigrup komutatif.

ii. Terhadap operasi $\circ_1$.
- Sifat Tertutup.

Jelas berdasarkan Teorema 3.2.21 terbukti bahwa untuk $\mu_1, \mu_2 \in FI(S), \mu_1 \circ_1 \mu_2 \in FI(S)$.

- Sifat Asosiatif.
  Dengan cara yang sama sebagaimana sifat asosiatif terhadap $+_1$, untuk $x \in S$ diperoleh
  $(\mu_1 \circ_1 (\mu_2 \circ_1 \mu_3))(x) = ((\mu_1 \circ_1 \mu_2) \circ_1 \mu_3)(x)$.

Jadi, terbukti bahwa $(FI(s), \circ_1)$ adalah semigrup.

iii. Sifat distributif
Dengan Proposisi 3.2.18 terbukti bahwa
$\mu_1 \circ_1 (\mu_2 +_1 \mu_3) = (\mu_1 \circ_1 \mu_2) +_1 (\mu_1 \circ_1 \mu_3)$, dan
$(\mu_2 +_1 \mu_3) \circ_1 \mu_1 = (\mu_2 \circ_1 \mu_1) +_1 (\mu_3 \circ_1 \mu_1)$.

Jadi, terbukti bahwa $(FI(S), +_1, \circ_1)$ adalah semiring.

b) Jelas $\mathbf{1} \subseteq \mathbf{1} +_1 \mu$ untuk $\mu \in FI(S)$.
$(\mathbf{1} +_1 \mu)(x) = \sup_{x \preccurlyeq yz} \{\min\{\mathbf{1}(y), \mu(z)\}\} \leq \mathbf{1}(x)$
untuk semua $x, y, z \in S$.
Karena $\mathbf{1} +_1 \mu \subseteq \mathbf{1}$ maka $\mathbf{1} +_1 \mu = \mathbf{1}$ untuk semua $\mu \in FI(S)$.
Jadi, $\mathbf{1}$ adalah elemen tak hingga dari $FI(S)$.

c) Misalkan $\mu_1 +_1 \mu_2 = \phi$ untuk $\mu_1, \mu_2 \in FI(S)$.
Maka $\mu_1 \subseteq \mu_1 +_1 \mu_2 = \phi \subseteq \mu_1$ dan juga $\mu_1 = \phi$.
Dengan cara yang sama, bisa ditunjukkan bahwa $\mu_2 = \phi$.

Jadi, terbukti bahwa semiring $FI(S)$ adalah *zerosumfree*.

**Contoh 3.2.23**
Berdasarkan Contoh 2.4.10, diketahui bahwa $(S, \otimes, \odot, \preccurlyeq)$ adalah semiring terurut. Didefinisikan himpunan semua ideal *fuzzy* $FI(S)$ dari $S$, yaitu
$FI(S) = \{\emptyset,\ \mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3,\ \ldots,\ \mu_n,\ \mathbf{1}\}$,
dimana $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \ldots = \mu_n = \mathbf{1},\ n$ elemen bilangan asli.
Akan ditunjukkan bahwa $(FI(S), +_1, \circ_1)$ adalah semiring *zerosumfree*.

**Jawab:**

1. $(FI(S), +_1)$ adalah monoid komutatif.
   a) $(FI(S), +_1)$ memenuhi sifat tertutup.
   Ambil sembarang $\mu_1, \mu_2 \in FI(S)$. Didapat
   $\mu_1 +_1 \mu_2 = \mathbf{1} \in FI(S)$.

   b) $(FI(S), +_1)$ memenuhi sifat asosiatif, yaitu
   $$\mu_1 +_1 (\mu_2 +_1 \mu_3) = \mathbf{1} = (\mu_1 +_1 \mu_2) +_1 \mu_3,$$
   untuk setiap $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in FI(S)$.

   c) $(FI(S), +_1)$ memiliki elemen identitas, yaitu $\phi$.
   Jelas $\mu_1 +_1 \phi = \phi +_1 \mu_1 = \mu_1$, untuk setiap $\mu_1 \in FI(S)$.

   d) $(FI(S), +_1)$ memenuhi sifat komutatif, yaitu
   $$\mu_1 +_1 \mu_2 = \mathbf{1} = \mu_2 +_1 \mu_1,$$
   untuk setiap $\mu_1, \mu_2 \in FI(S)$.

   Karena sifat (a), (b), (c), dan (d) terpenuhi, maka terbukti bahwa $(FI(S), +_1)$ adalah monoid komutatif.

2. $(FI(S), \circ_1)$ merupakan semigrup.
   a) $(FI(S), \circ_1)$ memenuhi sifat tertutup.
   Ambil sembarang $\mu_1, \mu_2 \in FI(S)$. Didapat
   $\mu_1 \circ_1 \mu_2 = \mathbf{1} \in FI(S)$.

   b) $(FI(S), \circ_1)$ mmenuhi sifat asosiatif, yaitu
   $$\mu_1 \circ_1 (\mu_2 \circ_1 \mu_3) = \mathbf{1} = (\mu_1 \circ_1 \mu_2) \circ_1 \mu_3,$$
   untuk setiap $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in FI(S)$.

   Karena sifat (a) dan (b) terpenuhi, maka terbukti bahwa $(FI(S), \circ_1)$ merupakan semigrup.

3. Operasi $+_1$ dan $\circ_1$ pad $FI(S)$ bersifat distributif.
   Jelas berlaku
   $\mu_1 \circ_1 (\mu_2 +_1 \mu_3) = \mathbf{1} = (\mu_1 \circ_1 \mu_2) +_1 (\mu_1 \circ_1 \mu_3)$, dan
   $(\mu_2 +_1 \mu_3) \circ_1 \mu_1 = \mathbf{1} = (\mu_2 \circ_1 \mu_1) +_1 (\mu_3 \circ_1 \mu_1)$,
   untuk setiap $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in FI(S)$.
   Sehingga terbukti bahwa $(FI(S), +_1, \circ_1)$ merupakan semiring.

4. Jika $\mu_1 +_1 \mu_2 = \phi$ maka diperoleh
   $\mu_1 = \mu_2 = \phi$, untuk $\mu_1, \mu_2 \in FI(S)$.

Jadi, terbukti bahwa semiring $FI(S)$ adalah *zerosumfree*.

# BAB IV
# PENUTUP

## 4.1 Kesimpulan

Berdasarkan uraian dalam pembahasan skripsi ini, maka dapat diberikan beberapa kesimpulan sebagai berikut.

1. Hasil operasi penjumlahan, komposisi, irisan, dan gabungan serta hasil kali kartesius antara ideal kanan (kiri) *fuzzy* dari $S$ juga merupakan ideal kanan (kiri) *fuzzy* dari $S$.
2. Himpunan semua ideal *fuzzy* dari $S$ atau $FI(S)$ membentuk semiring *zerosumfree* dengan tak hingga elemen **1** dibawah operasi penjumlahan dan komposisi.

## 4.2 Saran

Pada skripsi ini tidak dibahas mengenai ideal interior *fuzzy* dalam semiring terurut. Oleh karena itu, untuk penelitian lebih lanjut dapat diselidiki bagaimana sifat-sifat dari ideal interior *fuzzy* dalam semiring terurut.

# DAFTAR PUSTAKA


Battacharya, P.B., S.K., Jain, dan S.R., Nagpaul, 1986, *Basic Abstract Algebra*, Cambridge University Press, New York.

Chaudary, J.N., B., Davvaz, dan K.J., Ingale, 2014, Substractive Extension of Ideals in Semirings, *Sarajevo journal of mathematics*, Vol. 10, Halaman: 13-20.

Gan, A.P, dan Y.L., Jiang, 2011, On Ordered Ideals in Ordered Semirings, *Journal of Mathematical Research & Exposition,* No. 6, Halaman: 989-996.

Hidayat, N., 2017, *Cara Mudah Memahami Struktur Aljabar*, Universitas Brawijaya Press (UB Press), Malang.

Kandasamy, W.B.V., 2002, *Smarandache Semirings, Semifields, and Semivector Spaces,* American Research Press, USA.

Kandasamy, W.B.V., 2003, *Smarandache Fuzzy Algebra,* American Research Press, USA.

Kehayopulu, N., dan M., Tsingelis, 2007, Fuzzy Ideals in Ordered Semigoups, *Quasigroups and Related Systems*, Vol. 15, Halaman: 185-195.

Lee, K.H., 2005, *First Course on Fuzzy Theory and Applications,* Advanced Institute of Science and Technology, KAIST, Republic of South Korea.

Mandal, D., 2014, Fuzzy Ideals and Fuzzy Interior Ideals in Ordered Semirings, *Fuzzy Information and Engineering,* No. 6, Halaman: 101-114.

Muslikh, M., 2012, *Analisis Real,* Universitas Brawijaya Press (UB Press), Malang.

Satyanarayana, M., 1987, Structure of Ordered Semirings, *Semigroup Forum,* Vol. 36, Halaman: 179-188.

Simovici, D.A., dan C., Djeraba, 2008, *Mathematical Tools for Data Mining Set Theory, Partial Orders, Combinatorics,* Springer-Verlag, London.

Whitelaw, T., 1995, *Introduction To Abstract Algebra*, Third Edition, Blackie Academic & Profesional, London.

Zadeh, L.A., 1965, Fuzzy Sets, *Departement of Electrical Engineering and Electrical Laboratory*, University California.