

**ANALISIS DINAMIK MODEL EPIDEMI SEIS  
DENGAN DAMPAK MEDIA**

**SKRIPSI**

oleh  
**NUNGKY HENDARTI**  
**145090401111028**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS BRAWIJAYA  
MALANG  
2018**



**ANALISIS DINAMIK MODEL EPIDEMI SEIS  
DENGAN DAMPAK MEDIA**

**SKRIPSI**

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar  
Sarjana Matematika

oleh

**NUNGKY HENDARTI**

**145090401111028**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS BRAWIJAYA  
MALANG  
2018**



**LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI****ANALISIS DINAMIK MODEL EPIDEMI *SEIS*  
DENGAN DAMPAK MEDIA**

oleh  
**NUNGKY HENDARTI**  
**145090401111028**

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji pada tanggal 24 Agustus 2018 dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Matematika

**Pembimbing**

**Nur Shofianah, S.Si, M.Si, Ph.D.**  
**NIP. 198411242009122006**

**Mengetahui,**  
**Ketua Jurusan Matematika**  
**Fakultas MIPA Universitas Brawijaya**

**Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si, M.Si, Ph.D.**  
**NIP. 197509082000031003**



## LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Nungky Hendarti  
NIM : 145090401111028  
Jurusan : Matematika  
Penulis Skripsi berjudul : Analisis Dinamik Model Epidemii  
*SEIS* dengan Dampak Media

dengan ini menyatakan bahwa:

1. Skripsi ini adalah hasil pemikiran saya, bukan hasil menjiplak dari tulisan orang lain. Rujukan-rujukan yang tercantum pada daftar pustaka hanya digunakan sebagai acuan.
2. Apabila di kemudian hari skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala akibat hukum dari keadaan tersebut.

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 24 Agustus 2018  
yang menyatakan,

Nungky Hendarti  
145090401111028





## ANALISIS DINAMIK MODEL EPIDEMI *SEIS* DENGAN DAMPAK MEDIA

### ABSTRAK

Pada skripsi ini, dibahas analisis dinamik model epidemi *SEIS* dengan dampak media. Pada model ini, populasi dibagi menjadi tiga subpopulasi, yaitu subpopulasi rentan ( $S$ ), subpopulasi terpapar ( $E$ ), dan subpopulasi terinfeksi ( $I$ ). Selain itu, terdapat kompartemen ( $M$ ) yang merepresentasikan jumlah pesan yang diberikan media tentang penyakit epidemi. Pada model diasumsikan individu yang terinfeksi dapat kembali menjadi individu rentan. Analisis dinamik yang dilakukan pada model meliputi penentuan titik kesetimbangan dan syarat eksistensinya, penentuan angka reproduksi dasar  $R_0$  dengan menggunakan matriks generasi selanjutnya serta analisis kestabilan. Berdasarkan hasil analisis diperoleh dua titik kesetimbangan model, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemi. Titik kesetimbangan bebas penyakit selalu eksis sedangkan titik kesetimbangan endemi eksis dengan syarat tertentu. Titik kesetimbangan bebas penyakit bersifat stabil asimtotik lokal dan global ketika  $R_0 < 1$ . Jenis kestabilan titik kesetimbangan endemi bergantung pada nilai  $R_0$ ,  $R_p$ , dan  $R_{01}$ . Simulasi numerik dilakukan untuk mendukung hasil analisis dinamik yang diperoleh.

**Kata kunci:** model epidemi *SEIS*, angka reproduksi dasar, fungsi Lyapunov, dampak media.



## DYNAMICAL ANALYSIS OF *SEIS* EPIDEMIC MODEL WITH THE IMPACT OF MEDIA

### ABSTRACT

This final project discussed about dynamical analysis of *SEIS* epidemic model with the impact of media. In this model, the population is divided into three subpopulations, there are susceptible subpopulation ( $S$ ), exposed subpopulation ( $E$ ), and infected subpopulation ( $I$ ). Beside that, there is compartment ( $M$ ) that represents number of messages that the media gives about epidemic diseases ( $M$ ). This model assumes that the infected individual can return to a susceptible individual. The dynamical analysis includes the determination of equilibrium points and existence conditions, determination of basic reproduction number  $R_0$  using next generation matrix and stability analysis. Based on the analysis results, two equilibrium points were obtained, namely the disease-free equilibrium point and endemic equilibrium point. The disease-free equilibrium point always exists while the endemic equilibrium point exists under certain conditions. The disease-free equilibrium point is a lokal and global asymptotically stable at  $R_0 < 1$ . The stability type of an endemic equilibrium point depends on the value of  $R_0$ ,  $R_p$ , and  $R_{01}$ . Numerical simulations were performed to support the result of the obtained dynamical analysis.

**Keywords:** *SEIS* epidemic model, basic reproduction number, Lyapunov function, impact of media.



## KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul **ANALISIS DINAMIK MODEL EPIDEMI SEIS DENGAN DAMPAK MEDIA** dengan baik dan lancar. Shalawat dan salam selalu tercurahkan kepada Rasulullah SAW sebagai suri teladan bagi penulis.

Skripsi ini tidak dapat diselesaikan dengan baik tanpa bantuan, bimbingan, dan motivasi dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada

1. Nur Shofianah, S.Si., M.Si., Ph.D. selaku dosen pembimbing sekaligus dosen penasihat akademik, atas segala bimbingan, motivasi, dan saran yang diberikan,
2. Indah Yanti, S.Si, M.Si. dan Dr. Isnani Darti, S.Si, M.Si. selaku dosen penguji, atas segala kritik dan saran yang diberikan untuk perbaikan skripsi ini,
3. Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si., M.Si., Ph.D. selaku Ketua Jurusan Matematika, Dr. Isnani Darti, M.Si. selaku Ketua Program Studi Matematika, Pak Syahroni serta seluruh staff Tata Usaha Jurusan Matematika atas segala bantuan yang diberikan,
4. Ayah (Sugiharto), ibu (Henik Misharida), adik (Silvia Hendarti) dan keluarga tercinta yang selalu mendoakan dan memberikan dukungan moril serta materil,
5. Dian Kartika Amandani, Fitri Dian Fatmala, dan Anne Puji Pangesti atas segala waktu dan kesabaran yang telah diberikan,
6. Miftahul Firdaus, Dinda Ayu Retno Nuraini, Rizqiyatul Ula, dan Noraniza Bahrotul Ilmi atas segala bantuan yang telah diberikan dalam proses pengerjaan skripsi ini,
7. teman-teman Matematika 2014 yang mendukung dan mendoakan kelancaran pengerjaan skripsi ini,
8. dan semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Semoga Allah SWT memberikan anugerah dan barokah-Nya kepada semua pihak yang telah membantu menyelesaikan skripsi ini. Sebagai manusia yang tidak luput dari kesalahan, penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih terdapat kekurangan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran. Kritik dan saran dapat dikirim melalui email [nungkyhend@gmail.com](mailto:nungkyhend@gmail.com), untuk perbaikan di masa yang akan datang. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi berbagai pihak, serta menjadi sumber inspirasi untuk penulisan skripsi selanjutnya.

Malang, 24 Agustus 2018

Penulis



## DAFTAR ISI

	Halaman
<b>JUDUL</b> . . . . .	i
<b>LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI</b> . . . . .	iii
<b>LEMBAR PERNYATAAN</b> . . . . .	v
<b>ABSTRAK</b> . . . . .	vii
<b>ABSTRACT</b> . . . . .	ix
<b>KATA PENGANTAR</b> . . . . .	xi
<b>DAFTAR ISI</b> . . . . .	xii
<b>DAFTAR GAMBAR</b> . . . . .	xv
<b>DAFTAR TABEL</b> . . . . .	xvii
<b>DAFTAR LAMPIRAN</b> . . . . .	xix
<b>BAB I PENDAHULUAN</b> . . . . .	1
1.1 Latar Belakang . . . . .	1
1.2 Rumusan Masalah . . . . .	2
1.3 Tujuan . . . . .	2
1.4 Batasan Masalah . . . . .	3
<b>BAB II DASAR TEORI</b> . . . . .	5
2.1 Persamaan Diferensial . . . . .	5
2.2 Sistem Dinamik . . . . .	6
2.2.1 Sistem otonomus . . . . .	6
2.2.2 Sistem otonomus linear . . . . .	8
2.2.3 Sistem otonomus nonlinear . . . . .	9
2.2.4 Analisis kestabilan global . . . . .	10
2.3 Kriteria Kestabilan Routh-Hurwitz . . . . .	11
2.4 Jenis Kestabilan Lokal . . . . .	12
2.5 Angka Reproduksi Dasar . . . . .	13
2.6 Matriks Generasi Selanjutnya . . . . .	14
2.7 Sifat Akar Persamaan Suku Banyak . . . . .	16
<b>BAB III PEMBAHASAN</b> . . . . .	19
3.1 Konstruksi Model . . . . .	19
3.1.1 Laju perubahan subpopulasi rentan ( $S$ ) . . . . .	20
3.1.2 Laju perubahan subpopulasi terpapar ( $E$ ) . . . . .	21
3.1.3 Laju perubahan subpopulasi terinfeksi ( $I$ ) . . . . .	21
3.1.4 Laju pesan media terkait penyakit epidemi ( $M$ ) . . . . .	22
3.2 Titik Kesetimbangan Model . . . . .	23
3.2.1 Titik kesetimbangan bebas penyakit . . . . .	23

3.2.2	Angka reproduksi dasar . . . . .	25
3.2.3	Eksistensi titik kesetimbangan endemi . . . . .	27
3.3	Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan . . . . .	31
3.3.1	Analisis kestabilan lokal $P_0$ . . . . .	32
3.3.2	Analisis kestabilan global $P_0$ . . . . .	33
3.3.3	Analisis kestabilan lokal $P_i^*$ . . . . .	34
3.4	Simulasi Numerik . . . . .	37
3.4.1	Simulasi I untuk $R_0 < 1$ . . . . .	38
3.4.2	Simulasi II untuk $R_0 > \max(1, R_{01})$ . . . . .	38
3.4.3	Simulasi III untuk $R_p < R_0 < \min(1, R_{01})$ . . . . .	41
<b>BAB IV</b>	<b>KESIMPULAN DAN SARAN</b> . . . . .	<b>43</b>
4.1	Kesimpulan . . . . .	43
4.2	Saran . . . . .	43
<b>DAFTAR PUSTAKA</b>	. . . . .	<b>45</b>





## DAFTAR GAMBAR

Gambar 3.1	Diagram kompartemen . . . . .	19
Gambar 3.2	Grafik solusi untuk $R_0 < 1$ . . . . .	38
Gambar 3.3	Grafik solusi untuk $R_0 > \max(1, R_{01})$ . . . . .	40
Gambar 3.4	Grafik solusi untuk $R_p < R_0 < \min(1, R_{01})$ . . . . .	41





## DAFTAR TABEL

Tabel 2.1	Jenis kestabilan titik kesetimbangan sistem (2.11) . . . . .	13
Tabel 3.1	Nilai parameter untuk simulasi I . . . . .	37





## DAFTAR LAMPIRAN

<b>Lampiran 1. Perhitungan akar karakteristik <math>\lambda_3</math> dan <math>\lambda_4</math> . . .</b>	<b>47</b>
<b>Lampiran 2. Perhitungan <math>R_0, R_{01}</math> dan <math>R_p</math> . . . . .</b>	<b>48</b>
<b>Lampiran 3. Persamaan karakteristik <math>G(\lambda)</math> . . . . .</b>	<b>53</b>





# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Saat ini, media memiliki peran penting dalam kehidupan sehari-hari. Media merupakan sumber pesan yang memberikan informasi, baik berupa tulisan maupun siaran dalam lingkungan masyarakat. Pada bidang kesehatan, seringkali media berpengaruh dalam proses penyebaran dan pencegahan suatu wabah penyakit. Cui, dkk. (2008) menunjukkan bahwa media juga memainkan peran penting dalam penyebaran dan pengendalian penyakit epidemi karena orang biasanya mengungkapkan pengalaman mereka tentang penyakit melalui media. Beberapa faktor menyebabkan berkembangnya suatu penyakit epidemi, yaitu liputan media, kepadatan penduduk, dan gaya hidup masyarakat. Faktor-faktor tersebut dapat mempengaruhi tingkat kejadian infeksi secara langsung atau tidak langsung.

Menurut Huo, dkk. (2018), liputan media tentang penyakit epidemi mendorong masyarakat untuk melakukan tindakan pencegahan, seperti mengenakan masker, menghindari tempat-tempat umum saat sakit, sering mencuci tangan, dan lain-lain. Seiring bertambahnya jumlah orang yang terinfeksi, media memberi lebih banyak informasi tentang penyakit epidemi dan dapat mengurangi kemungkinan kontak dengan orang-orang yang terinfeksi. Oleh karena itu, organisasi kesehatan masyarakat juga menganjurkan penggunaan media bagi pengendalian dan pencegahan penyakit epidemi. Salah satu contoh penyakit epidemi yang berbahaya dan mendapat perhatian dari beberapa pihak adalah SARS. Menurut Wilson, dkk. (2004), telah disebar 261 artikel, meliputi 43 artikel tentang penyakit kanker, 12 artikel tentang diabetes, 10 artikel tentang penyakit jantung, dan sisanya terkait penyebaran SARS di Selandia Baru pada bulan Maret sampai Juli 2003.

Banyak peneliti yang telah mempelajari model matematika berbeda untuk menggambarkan peran media dalam penyebaran dan kontrol penyakit epidemi. Sun, dkk. (2011) membahas tentang liputan media dapat mengurangi penyebaran penyakit epidemi dan memperpendek durasi wabah penyakit. Pawelek, dkk. (2014)

membahas tentang *twitter* dapat menjadi indikator yang baik selama musim influenza. Namun, mereka mengabaikan dampak negatif *twitter*. Selanjutnya Liu, dkk. (2016) membahas tentang dampak media dalam mengontrol penyakit dengan tingkat transmisi Piecewise yang hanya memiliki efek ketika jumlah individu yang terinfeksi melebihi tingkat tertentu. Selain itu, Huo, dkk. (2018) melakukan pengembangan model epidemi *SEIS* yang lebih realistis dengan dampak media, dengan mengasumsikan bahwa orang yang terinfeksi mengalami kekebalan sementara dan mempertimbangkan efek alami serta tingkat kematian terkait penyakit.

Pada skripsi ini dikaji kembali artikel Huo, dkk. (2018). Analisis dinamik yang dilakukan pada model meliputi penentuan titik kesetimbangan, angka reproduksi dasar, analisis kestabilan titik kesetimbangan. Selanjutnya dilakukan simulasi numerik menggunakan *software* Matlab untuk mendukung hasil perhitungan analitik.

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, beberapa pokok masalah yang dibahas dalam skripsi ini adalah sebagai berikut.

1. Bagaimana konstruksi model *SEIS* dengan dampak media?
2. Bagaimana titik kesetimbangan dan syarat eksistensi titik kesetimbangan model?
3. Bagaimana kestabilan titik kesetimbangan model?
4. Bagaimana hasil simulasi numerik model epidemi *SEIS*?

## 1.3 Tujuan

Tujuan penulisan skripsi ini adalah sebagai berikut.

1. Menjelaskan konstruksi model *SEIS* dengan dampak media.
2. Menentukan titik kesetimbangan dan syarat eksistensi titik kesetimbangan model.
3. Menentukan kestabilan titik kesetimbangan model.
4. Menginterpretasikan hasil simulasi numerik untuk mendukung hasil perhitungan analitik.



## 1.4 Batasan Masalah

Pesan media yang dimaksud dalam skripsi ini adalah informasi positif terkait penyakit epidemi sedemikian sehingga membuat pembaca/pendengar melakukan tindakan pencegahan penyakit tersebut.





## BAB II

### DASAR TEORI

Dalam penulisan skripsi ini dibahas analisis dinamik model epidemi *SEIS* dengan dampak media. Sistem dinamik, kriteria Routh-Hurwitz, angka reproduksi dasar dan matriks generasi selanjutnya merupakan beberapa teori yang digunakan untuk membantu memahami materi dalam penulisan skripsi ini.

#### 2.1 Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat satu atau lebih turunan dari fungsi yang tidak diketahui. Berdasarkan banyaknya variabel bebas yang dimiliki, persamaan diferensial dibagi menjadi dua, yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial. Persamaan diferensial biasa adalah persamaan yang memuat satu variabel bebas sedangkan persamaan diferensial parsial adalah persamaan yang memuat lebih dari satu variabel bebas.

Orde adalah tingkat turunan tertinggi yang muncul dalam persamaan diferensial. Secara umum, persamaan diferensial biasa orde  $n$  dapat ditulis sebagai

$$F(t, x(t), x'(t), x''(t), \dots, x^{(n)}(t)) = 0, \quad (2.1)$$

dengan  $t$  adalah variabel bebas,  $x(t)$  adalah fungsi yang tidak diketahui hanya bergantung pada variabel bebas  $t$  dan  $x^{(m)}(t)$  adalah turunan ke- $m$  fungsi  $x(t)$  terhadap variabel bebas  $t$ ,  $m = 1, 2, \dots, n$ . Persamaan diferensial biasa orde  $n$  (2.1) disebut linear jika memenuhi bentuk umum

$$a_0(t)x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_n(t)x = g(t), \quad (2.2)$$

dengan  $a_0(t) \neq 0$ . Jika  $g(t) = 0$  maka disebut persamaan diferensial biasa linear homogen, tetapi jika  $g(t) \neq 0$  maka disebut persamaan diferensial biasa linear nonhomogen. Persamaan diferensial biasa nonlinear adalah persamaan diferensial biasa yang tidak berbentuk seperti persamaan (2.2) atau dengan kata lain, variabel tak bebas atau derajat dari turunannya lebih dari satu atau memuat perkalian antara variabel tak bebas dengan turunannya.

Sistem persamaan diferensial biasa orde satu berdimensi  $n$  adalah sistem yang terdiri dari  $n$  persamaan dengan  $n$  fungsi yang tidak diketahui. Secara umum, sistem persamaan diferensial biasa orde satu berdimensi  $n$  dapat ditulis

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= G_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \frac{dx_2}{dt} &= G_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= G_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n)\end{aligned}$$

(Finizio dan Ladas, 1982).

## 2.2 Sistem Dinamik

Sistem dinamik adalah suatu sistem yang dapat diketahui kondisinya di masa yang akan datang jika diberikan suatu kondisi pada masa sekarang atau di masa yang telah lalu. Sistem dinamik dibedakan menjadi dua, yaitu sistem dinamik diskret dengan bentuk umum

$$\vec{x}_{t+1} = \vec{f}(\vec{x}_t), \quad t \in \mathbb{Z} \text{ atau } \mathbb{N}, \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n,$$

dan sistem dinamik kontinu dengan bentuk umum

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}, t), \quad \text{dengan } t \in \mathbb{R}, \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n$$

(Alligood, dkk., 2000).

### 2.2.1 Sistem otonomus

Sistem otonomus adalah suatu sistem persamaan diferensial orde satu yang berbentuk

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n \tag{2.3}$$

dengan fungsi  $\vec{f}(\vec{x})$  adalah fungsi kontinu tidak bergantung terhadap variabel bebas  $t$  secara eksplisit

(Boyce dan Diprima, 2012).

**Definisi 2.2.1** (Titik kesetimbangan)

Perhatikan sistem otonomus (2.3). Titik  $\vec{x}^*$  yang memenuhi  $\vec{f}(\vec{x}^*) = 0$  disebut titik kritis sistem (2.3). Titik kritis  $\vec{x}^*$  merupakan solusi sistem (2.3) yang bernilai konstan, karena  $\frac{d\vec{f}}{dt} = 0$ . Keadaan yang menyebabkan  $\frac{d\vec{f}}{dt} = 0$  disebut keadaan setimbang, sehingga titik kritis disebut juga sebagai titik kesetimbangan

(Boyce dan Diprima, 2012).

**Definisi 2.2.2** (Kestabilan titik kesetimbangan)

Perhatikan sistem otonomus (2.3). Titik kesetimbangan  $\vec{x}^*$  dikatakan

1. **stabil**, jika  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  sedemikian sehingga untuk setiap solusi  $\vec{x} = \vec{x}(t)$  dari sistem (2.3) pada saat  $t = 0$  yang memenuhi

$$\|\vec{x}(0) - \vec{x}^*\| < \delta,$$

maka memenuhi

$$\|\vec{x}(t) - \vec{x}^*\| < \varepsilon, \forall t > 0,$$

2. **stabil asimtotik**, jika stabil dan  $\exists \delta_0, 0 < \delta_0$  sedemikian sehingga jika terdapat solusi  $\vec{x} = \vec{x}(t)$ , dengan nilai awal yang memenuhi

$$\|\vec{x}(0) - \vec{x}^*\| < \delta_0,$$

maka berlaku

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{x}(t) = \vec{x}^*,$$

3. **tidak stabil**, apabila tidak memenuhi kriteria pertama

(Boyce dan Diprima, 2012).

### 2.2.2 Sistem otonomus linear

Secara umum sistem otonomus linear dinyatakan dalam bentuk

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n\end{aligned}\tag{2.4}$$

Persamaan (2.4) dapat dinyatakan sebagai  $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$ , dengan  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  dan  $A$  adalah matriks koefisien sistem persamaan (2.4) yaitu

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, a_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Jika  $\det(A) \neq 0$ , maka  $\vec{x}^* = 0$  adalah satu-satunya titik kesetimbangan (2.4).

**Teorema 2.1** (Kestabilan titik kesetimbangan sistem otonomus linear)

Misalkan  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  adalah nilai eigen matriks  $A$ . Titik kesetimbangan sistem (2.4), bersifat

1. **stabil asimtotik**, jika semua nilai eigen memiliki bagian real negatif.
2. **stabil**, jika semua nilai eigen memiliki bagian real tak positif.
3. **tidak stabil**, jika sedikitnya terdapat satu nilai eigen yang memiliki bagian real positif

(Finizio dan Ladas, 1982).

### 2.2.3 Sistem otonomus nonlinear

Misal sistem (2.3) adalah sistem otonomus nonlinear dan fungsi  $f_i$  memiliki turunan parsial yang kontinu di titik  $\vec{x}^*$ . Deret Taylor fungsi  $f_i$  di sekitar titik  $\vec{x}^*$  adalah

$$f_i(\vec{x}) = f_i(\vec{x}^*) + \frac{\partial f_i(\vec{x}^*)}{\partial x_1}(x_1 - x_1^*) + \frac{\partial f_i(\vec{x}^*)}{\partial x_2}(x_2 - x_2^*) + \dots + \frac{\partial f_i(\vec{x}^*)}{\partial x_n}(x_n - x_n^*) + \eta_i(\vec{x}), \quad (2.5)$$

dengan  $\eta_i(\vec{x})$  adalah suku sisa,  $i = 1, \dots, n$ . Hampiran orde satu terhadap  $f_i$  menghasilkan suku sisa yang memenuhi sifat

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^*} \frac{\eta_i(\vec{x})}{\|\vec{w}\|} = 0,$$

dengan  $\vec{w} = (x_1 - x_1^*, x_2 - x_2^*, \dots, x_n - x_n^*)^T$ . Dengan menerapkan  $\frac{dx_1}{dt} = \frac{d(x_1 - x_1^*)}{dt}$ ,  $\frac{dx_2}{dt} = \frac{d(x_2 - x_2^*)}{dt}$ ,  $\dots$ ,  $\frac{dx_n}{dt} = \frac{d(x_n - x_n^*)}{dt}$  terhadap sistem (2.3), diperoleh matriks

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 - x_1^* \\ x_2 - x_2^* \\ \vdots \\ x_n - x_n^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 - x_1^* \\ x_2 - x_2^* \\ \vdots \\ x_n - x_n^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1(\vec{x}) \\ \eta_2(\vec{x}) \\ \vdots \\ \eta_n(\vec{x}) \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Persamaan (2.6) dapat ditulis sebagai

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = J\vec{w} + \vec{\eta} \quad (2.7)$$

dengan matriks  $J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$  disebut

matriks Jacobi.

Nilai  $\vec{w}$  sangat kecil untuk  $\vec{x}$  yang berada cukup dekat dengan  $\vec{x}^*$ , sehingga  $\|\vec{\eta}\| \ll \|\vec{w}\|$ . Oleh karena itu,  $\vec{\eta}$  dapat diabaikan dan sistem nonlinear (2.7) dapat dihampiri oleh sistem linear

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = J\vec{w} \quad (2.8)$$

Jika  $x_1 = x_1^*, x_2 = x_2^*, \dots, x_n = x_n^*$ , maka  $\vec{w}^* = \vec{0}$ , sehingga sistem linear (2.8) memiliki titik kesetimbangan  $\vec{w}^* = \vec{0}$

(Boyce dan Diprima, 2012).

**Teorema 2.2** (Kestabilan titik kesetimbangan sistem otonomus nonlinear)

Titik kesetimbangan sistem otonomus nonlinear (2.3) bersifat

1. **stabil asimtotik**, jika titik kesetimbangan sistem hasil linearisasi (2.8) stabil asimtotik.
2. **tak stabil**, jika titik kesetimbangan sistem hasil linearisasi (2.8) tak stabil

(Finizio dan Ladas, 1982).

## 2.2.4 Analisis kestabilan global

**Definisi 2.2.4** (Fungsi Lyapunov lemah)

Misalkan  $\vec{x}^*$  adalah suatu titik kesetimbangan sistem persamaan (2.3). Suatu fungsi  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  disebut fungsi Lyapunov lemah untuk  $\vec{x}^*$  jika terdapat suatu persekitaran  $W \subseteq \mathbb{R}^n$  dari  $\vec{x}^*$  sehingga kondisi berikut terpenuhi.

1.  $L(\vec{x}^*) = 0$  dan  $L(\vec{x}) > 0, \forall \vec{x} \neq \vec{x}^* \in W$ ,
2.  $L'(\vec{x}) \leq 0, \forall \vec{x} \in W$

**Definisi 2.2.5** (Fungsi Lyapunov kuat)

Fungsi  $L$  disebut fungsi Lyapunov kuat untuk  $\vec{x}^*$  jika terdapat suatu persekitaran  $W$  pada  $\vec{x}^*$  yang memenuhi kondisi berikut.

1.  $L(\vec{x}^*) = 0$  dan  $L(\vec{x}) > 0, \forall \vec{x} \neq \vec{x}^* \in W$ ,
2.  $L'(\vec{x}) < 0, \forall \vec{x} \neq \vec{x}^*, \vec{x} \in W$



**Teorema 2.3** (Kestabilan global dengan fungsi Lyapunov)

Misalkan  $\vec{x}^*$  adalah suatu titik kesetimbangan sistem persamaan (2.3). Titik kesetimbangan  $\vec{x}^*$  bersifat:

1. stabil global, jika terdapat suatu fungsi Lyapunov lemah untuk  $\vec{x}^*$ ,
2. stabil asimtotik global, jika terdapat suatu fungsi Lyapunov kuat untuk  $\vec{x}^*$

(Alligood, dkk., 2000).

**2.3 Kriteria Kestabilan Routh-Hurwitz**

Sistem linear berdimensi  $n$  (2.4) memiliki persamaan karakteristik yang secara umum berbentuk

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0, \quad (2.9)$$

dengan  $a_n \neq 0$  dan koefisien  $a_i, i = 0, 1, \dots, n$  adalah bilangan real. Akar-akar persamaan karakteristik matriks  $A$  pada sistem (2.4) diperoleh dengan menyelesaikan persamaan karakteristik yang diperoleh dari  $|A - \lambda I| = 0$ . Titik kesetimbangan sistem otonomus linear bersifat stabil asimtotik jika akar-akar persamaan karakteristiknya memiliki bagian real negatif. Dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz pada Teorema (2.4), dapat diperiksa apakah akar-akar persamaan karakteristik memiliki bagian real negatif, tanpa menentukan nilai karakteristiknya.

**Teorema 2.4** (Kriteria Routh-Hurwitz)

Akar persamaan karakteristik (2.9) memiliki bagian real negatif jika dan hanya jika

$$D_1 = a_1 > 0,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} > 0, D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ 1 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0, \dots,$$

$$D_k = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & a_{2k-1} \\ 1 & a_2 & a_4 & \cdots & a_{2k-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & a_{2k-3} \\ 0 & 1 & a_2 & \cdots & a_{2k-4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_k \end{vmatrix} > 0, k = 1, \dots, n.$$

Sebagai contoh persamaan karakteristik dengan  $n = 3$  yaitu

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0, \quad (2.10)$$

memiliki nilai eigen yang semuanya memiliki bagian real negatif jika dan hanya jika  $a_1 > 0$ ,  $a_3 > 0$  dan  $a_1a_2 - a_3 > 0$ .

(Murray, 2002).

Untuk persamaan karakteristik dengan  $n = 4$  yaitu  $P(\lambda) = \lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0$ , memiliki nilai eigen yang semuanya memiliki bagian real negatif jika dan hanya jika

1.  $D_1 = a_1 > 0$ ,

2.  $D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} = a_1a_2 - a_3 > 0$ ,

3.  $D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ 1 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ 1 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}$ ,

$$D_3 = a_3(a_1a_2 - a_3) - (a_1)^2a_4 > 0,$$

4.  $D_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 \\ 1 & a_2 & a_4 & a_6 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & 1 & a_2 & a_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ 1 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & a_4 \end{vmatrix}$ ,

$$D_4 = a_4(a_3(a_1a_2 - a_3) - (a_1)^2a_4) > 0, \text{ sehingga } a_4 > 0.$$

## 2.4 Jenis Kestabilan Lokal

Diberikan sistem linear sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_{11}x + a_{12}y \\ \frac{dy}{dt} &= a_{21}x + a_{22}y \end{aligned} \quad (2.11)$$

dengan  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{21}$  dan  $a_{22}$  adalah konstanta. Misalkan  $r_1$  dan  $r_2$  merupakan nilai eigen dari sistem (2.11). Jenis kestabilan titik kesetimbangan sistem (2.11) dinyatakan pada Tabel (2.1).

Tabel 2.1: Jenis kestabilan titik kesetimbangan sistem (2.11)

Nilai eigen	Jenis Titik	Kestabilan $\bar{x}^*$
$r_{1,2} > 0$	node	tidak stabil
$r_{1,2} < 0$	node	stabil asimtotik
$r_2 < 0 < r_1$	sadel	tidak stabil
$r_1 = r_2 > 0$	node	tidak stabil
$r_1 = r_2 < 0$	node	stabil asimtotik
$r_{1,2} = \lambda \pm i\mu$ $\lambda > 0$	spiral	tidak stabil
$\lambda < 0$	spiral	stabil asimtotik
$r_1 = i\mu, r_2 = -i\mu$	center	stabil

Pada dasarnya, kasus-kasus yang terjadi dalam sistem orde tinggi ialah kombinasi dari sistem dua dimensi.

(Boyce dan Diprima, 2012).

## 2.5 Angka Reproduksi Dasar

Pada model epidemi penyebaran penyakit, angka reproduksi dasar digunakan sebagai penentu untuk mengetahui apakah dalam suatu populasi terjadi suatu penyebaran penyakit atau tidak. Angka reproduksi dasar ( $R_0$ ) menyatakan rata-rata banyaknya individu yang terinfeksi akibat satu individu yang telah terinfeksi sebelumnya.

Penyebaran penyakit terjadi jika  $R_0 > 1$  karena rata-rata satu individu terinfeksi menyebabkan lebih dari satu individu baru terinfeksi. Jika  $R_0 < 1$  maka penyebaran penyakit tidak terjadi karena rata-rata satu individu terinfeksi menyebabkan kurang dari satu individu terinfeksi, dengan kata lain individu tersebut belum tentu dapat menginfeksi individu lainnya.

Kestabilan titik kesetimbangan dapat dianalisis menggunakan angka reproduksi dasar ( $R_0$ ). Titik kesetimbangan bebas penyakit

akan bersifat stabil asimtotik jika  $R_0 < 1$ , sedangkan titik kesetimbangan endemik akan bersifat stabil asimtotik jika  $R_0 > 1$

(Brauer, 2004).

## 2.6 Matriks Generasi Selanjutnya

Metode matriks generasi selanjutnya adalah suatu metode yang digunakan untuk menentukan bilangan reproduksi dasar ( $R_0$ ). Pada metode ini, model kompartemen penyebaran penyakit dibagi menjadi dua kelompok kompartemen, yaitu kelompok kompartemen terinfeksi dan kelompok kompartemen tidak terinfeksi. Suatu kompartemen disebut kompartemen terinfeksi jika terdapat individu-individu terinfeksi. Misalkan terdapat  $1, \dots, m, m + 1, \dots, n$  kompartemen dengan kompartemen pertama hingga  $m$  terdiri dari individu terinfeksi dan kompartemen  $m + 1$  hingga  $n$  terdiri dari individu tidak terinfeksi. Model kompartemen terinfeksi dapat ditulis sebagai

$$x'_i = F_i - V_i, \text{ dengan } i = 1, 2, \dots, m.$$

dengan  $x_i$  menyatakan jumlah individu pada setiap kompartemen  $i$ .  $F_i$  adalah komponen pembentuk matriks  $F$  yang menyatakan infeksi baru yang masuk pada kompartemen ke  $i$ . Infeksi baru hanya dapat diperoleh dari populasi individu rentan dan  $F_i$  tidak boleh bernilai negatif.  $V_i$  adalah komponen pembentuk matriks  $V$  yang menyatakan transfer keluar atau masuk dari kompartemen satu ke kompartemen lainnya. Transfer infeksi dapat terjadi apabila terdapat proses penularan penyakit dari satu kompartemen ke kompartemen lainnya. Jika  $V_i$  menyatakan transfer keluar dari kompartemen ke  $i$  maka  $V_i$  bernilai positif. Jika  $V_i$  menyatakan transfer masuk pada suatu kompartemen ke  $i$  maka  $V_i$  bernilai negatif.

Didefinisikan  $DF$  dan  $DV$  adalah matriks  $m \times m$  sebagai berikut

$$DF = \left( \frac{\partial F_i(E_0)}{\partial x_j} \right) \text{ dan } DV = \left( \frac{\partial V_i(E_0)}{\partial x_j} \right), \text{ dengan } i, j = 1, \dots, m,$$

dengan  $E_0$  merupakan titik kesetimbangan bebas penyakit,  $F$  non negatif dan  $V$  matriks non singular. Matriks generasi selanjutnya didefinisikan sebagai

$$K = (DF)(DV)^{-1}$$

dan bilangan reproduksi dasar dapat diperoleh dari

$$R_0 = \rho(K),$$

dengan  $\rho(K)$  adalah *spectral radius* matriks  $K$ , yaitu modulus nilai eigen terbesar dari matriks  $K$

(Brauer dan Chavez, 2010).

**Contoh 2.1** Diberikan model matematika penyebaran penyakit sebagai berikut

$$\begin{aligned} S' &= -\beta S(I + \varepsilon E), \\ E' &= \beta S(I + \varepsilon E) - kE, \\ I' &= kE - \alpha I, \\ R' &= \alpha I. \end{aligned} \tag{2.12}$$

dengan  $S$ ,  $E$ ,  $I$ , dan  $R$  masing-masing menyatakan jumlah individu rentan, individu terpapar, terinfeksi, dan sembuh. Titik kesetimbangan bebas penyakit dari persamaan (2.12) adalah  $E^0 = (1, 0, 0)$ . Matriks generasi selanjutnya diperoleh dari kompartemen terinfeksi yaitu, kompartemen  $E$  dan kompartemen  $I$ . Berdasarkan matriks  $F$  dan  $V$  dapat dibentuk menjadi matriks Jacobi di titik kesetimbangan  $E^0 = (1, 0, 0)$ , yaitu

$$DF = \begin{bmatrix} \varepsilon\beta S & \beta S \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ dengan } F = \begin{bmatrix} \beta S(I + \varepsilon E) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$DV = \begin{bmatrix} k & 0 \\ -k & \alpha \end{bmatrix}, \text{ dengan } V = \begin{bmatrix} kE \\ -kE + \alpha I \end{bmatrix}$$

Invers dari matriks  $DV$  adalah

$$\begin{aligned} (DV)^{-1} &= \frac{1}{k\alpha} \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ k & k \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{k} & 0 \\ \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\alpha} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Matriks generasi selanjutnya didefinisikan sebagai berikut

$$\begin{aligned} K &= (DF)(DV)^{-1}, \\ &= \begin{bmatrix} \varepsilon\beta & \beta \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{k} & 0 \\ \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\alpha} \end{bmatrix}, \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon\beta}{k} + \frac{\beta}{\alpha} & \frac{\beta}{\alpha} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Nilai eigen dari  $K$  adalah

$$|K - \lambda I| = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\varepsilon\beta}{k} + \frac{\beta}{\alpha} - \lambda & \frac{\beta}{\alpha} \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$-\lambda \left( \frac{\varepsilon\beta}{k} + \frac{\beta}{\alpha} - \lambda \right) = 0,$$

sehingga diperoleh  $\lambda_1 = 0$  atau  $\lambda_2 = \frac{\varepsilon\beta}{k} + \frac{\beta}{\alpha}$ . Angka reproduksi dasar ( $R_0$ ) diperoleh dari nilai eigen terbesar dari matriks generasi selanjutnya ( $K$ ), yaitu  $R_0 = \rho K$

$$R_0 = \rho\{K\}$$

$$R_0 = \rho \left\{ 0, \frac{\varepsilon\beta}{k} + \frac{\beta}{\alpha} \right\}$$

$$R_0 = \max \left\{ 0, \frac{\varepsilon\beta}{k} + \frac{\beta}{\alpha} \right\}$$

$$R_0 = \frac{\varepsilon\beta}{k} + \frac{\beta}{\alpha}$$

(Brauer dan Chavez, 2010).

## 2.7 Sifat Akar Persamaan Suku Banyak

- a. Untuk suku banyak berderajat dua :  $ax^2 + bx + c = 0$

Jika  $x_1$  dan  $x_2$  adalah akar-akar persamaan kuadrat  $ax^2 + bx + c = 0$ , maka:

1.  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$
2.  $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

- b. Untuk suku banyak berderajat tiga :  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

Jika  $x_1, x_2,$  dan  $x_3$  adalah akar-akar persamaan kuadrat  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ , maka:

1.  $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$
2.  $x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_3 = \frac{c}{a}$
3.  $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{d}{a}$

- c. Untuk suku banyak berderajat empat :

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

Jika  $x_1, x_2, x_3,$  dan  $x_4$  adalah akar-akar persamaan kuadrat  $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ , maka:

1.  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{b}{a}$
2.  $x_1.x_2.x_3 + x_2.x_3.x_4 + x_3.x_4.x_1 + x_4.x_1.x_2 = \frac{c}{a}$
3.  $x_1.x_2 + x_1.x_3 + x_1.x_4 + x_2.x_3 + x_2.x_4 + x_3.x_4 = -\frac{d}{a}$
4.  $x_1.x_2.x_3.x_4 = \frac{e}{a}$

(Soedyarto dan Maryanto, 2008).







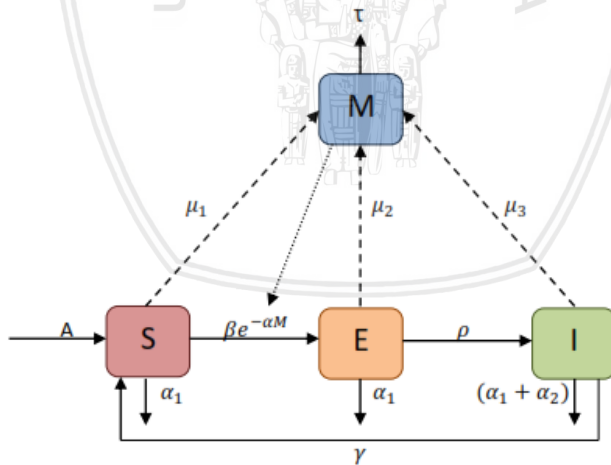
### BAB III PEMBAHASAN

#### 3.1 Konstruksi Model

Model yang dibahas pada skripsi ini adalah model epidemi *SEIS* dengan dampak media. Populasi dibagi menjadi empat subpopulasi, yaitu subpopulasi rentan (*S*), subpopulasi terpapar tetapi tidak dapat menularkan infeksi ke individu lain (*E*), subpopulasi terinfeksi dan dapat menularkan penyakit ke individu lain (*I*) serta pesan media terkait penyakit epidemi (*M*). Pada model ini, diasumsikan individu yang terinfeksi dapat kembali menjadi individu rentan. Total penduduk dalam populasi persatuan waktu dapat dinyatakan sebagai.

$$N = S + E + I. \tag{3.1}$$

Arus perpindahan individu dari subpopulasi-subpopulasi secara skematis disajikan pada Gambar (3.1)



Gambar 3.1: Diagram kompartemen

dengan

- $A$  : laju kelahiran alami,  
 $\beta$  : laju penularan dari individu rentan menjadi individu terpapar,  
 $\alpha$  : keefektifan pesan terkait penyakit epidemi yang dapat mempengaruhi laju penularan,  
 $\gamma$  : laju perubahan dari individu terinfeksi menjadi individu rentan,  
 $\rho$  : laju penularan dari individu terpapar menjadi individu terinfeksi,  
 $\mu_i$  : laju pengiriman pesan tentang penyakit epidemi oleh individu rentan, terpapar, dan terinfeksi selama musim penyakit berlangsung, masing-masing dengan  $i = 1, 2, 3$ ,  
 $\tau$  : laju pesan tentang penyakit epidemi telah kadaluwarsa,  
 $\alpha_1$  : laju kematian alami,  
 $\alpha_2$  : laju kematian akibat penyakit.

Berdasarkan model kompartemen pada Gambar (3.1) dapat dijelaskan laju perubahan subpopulasi rentan, subpopulasi terpapar, subpopulasi terinfeksi dan pesan media terkait penyakit epidemi sebagai berikut.

### 3.1.1 Laju perubahan subpopulasi rentan ( $S$ )

Kelahiran mengakibatkan jumlah individu pada subpopulasi rentan bertambah dengan laju sebesar  $A$ . Setiap individu pada subpopulasi rentan memiliki kemungkinan yang sama untuk melakukan interaksi dengan individu pada subpopulasi terinfeksi. Interaksi tersebut dapat mengakibatkan kebiasaan individu rentan mengalami perubahan sehingga menjadi individu terinfeksi dengan laju sebesar  $\beta$ . Selain melalui interaksi secara langsung, kebiasaan individu juga dapat dipengaruhi oleh informasi/pesan tentang penyakit yang diperoleh dari media. Jika  $\alpha$  menyatakan keefektifan pesan terkait penyakit epidemi yang dapat mempengaruhi laju penularan, maka laju perubahan subpopulasi rentan berkurang sebesar  $\beta SIe^{-\alpha M}$ .

Kebiasaan individu rentan mengalami perubahan sehingga

menjadi individu terinfeksi dengan laju  $\gamma$ . Laju perubahan subpopulasi rentan bertambah sebesar  $\gamma I$ . Kematian alami dinyatakan dalam parameter  $\alpha_1$ . Laju perubahan subpopulasi rentan berkurang sebesar  $\alpha_1 S$ .

Dengan demikian, laju perubahan subpopulasi rentan dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{dS}{dt} = A + \gamma I - \beta SI e^{-\alpha M} - \alpha_1 S. \quad (3.2)$$

### 3.1.2 Laju perubahan subpopulasi terpapar ( $E$ )

Penularan antara individu yang rentan dan individu yang terinfeksi karena perubahan perilaku setelah memperoleh pesan tentang penyakit epidemi bertambah dengan laju sebesar  $\beta SI e^{-\alpha M}$  ( $\beta$  berkurang dengan faktor  $e^{-\alpha M}$ ).

Kebiasaan individu terpapar mengalami perubahan menjadi individu terinfeksi dengan laju  $\rho$ . Laju perubahan subpopulasi terpapar berkurang dengan laju sebesar  $\rho E$ . Kematian alami dinyatakan dalam parameter  $\alpha_1$ . Laju perubahan subpopulasi terpapar berkurang sebesar  $\alpha_1 E$ .

Dengan demikian, laju perubahan subpopulasi terpapar dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{dE}{dt} = \beta SI e^{-\alpha M} - \rho E - \alpha_1 E. \quad (3.3)$$

### 3.1.3 Laju perubahan subpopulasi terinfeksi ( $I$ )

Jumlah individu pada subpopulasi terinfeksi bertambah dengan laju sebesar  $\rho E$ . Individu terinfeksi mengalami perubahan menjadi individu rentan dengan laju  $\gamma$ . Laju perubahan subpopulasi terinfeksi berkurang dengan laju sebesar  $\gamma I$ .

Penyebab kematian pada subpopulasi terinfeksi adalah kematian alami dan kematian akibat penyakit epidemi. Jumlah individu pada subpopulasi terinfeksi berkurang dengan laju sebesar  $\alpha_1$  karena kematian alami dan berkurang dengan laju sebesar  $\alpha_2$  karena penyakit

epidemi.

Dengan demikian, laju perubahan subpopulasi terinfeksi dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{dI}{dt} = \rho E - \gamma I - (\alpha_1 + \alpha_2)I. \quad (3.4)$$

### 3.1.4 Laju pesan media terkait penyakit epidemi ( $M$ )

Setiap individu pada setiap subpopulasi  $S$ ,  $I$ , dan  $E$  memiliki kesempatan yang sama untuk memberi informasi positif tentang penyakit epidemi melalui media. Laju pengiriman pesan tentang penyakit epidemi oleh individu rentan, terpapar, dan terinfeksi selama musim penyakit berlangsung masing-masing sebesar  $\mu_i$ , dengan  $i = 1, 2, 3$ .

Pesan media yang dimaksud adalah informasi positif terkait penyakit epidemi sedemikian sehingga membuat pembaca/pendengar melakukan tindakan pencegahan penyakit epidemi. Diantara informasi positif tentang penyakit epidemi di media terdapat informasi yang telah kadaluwarsa dengan laju  $\tau$ . Laju informasi positif tentang penyakit epidemi kadaluwarsa berkurang dengan laju sebesar  $\tau M$ .

Dengan demikian, laju pesan media terkait penyakit epidemi dinyatakan sebagai

$$\frac{dM}{dt} = \mu_1 S + \mu_2 E + \mu_3 I - \tau M. \quad (3.5)$$

Berdasarkan uraian tersebut, diperoleh model  $SEIS$  dengan dampak media dalam bentuk sistem persamaan diferensial nonlinear sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dt} &= A + \gamma I - \beta S I e^{-\alpha M} - \alpha_1 S, \\
 \frac{dE}{dt} &= \beta S I e^{-\alpha M} - \rho E - \alpha_1 E, \\
 \frac{dI}{dt} &= \rho E - \gamma I - (\alpha_1 + \alpha_2) I, \\
 \frac{dM}{dt} &= \mu_1 S + \mu_2 E + \mu_3 I - \tau M,
 \end{aligned}
 \tag{3.6}$$

### 3.2 Titik Keseimbangan Model

#### 3.2.1 Titik keseimbangan bebas penyakit

Titik keseimbangan sistem (3.6) diperoleh ketika

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dE}{dt} = \frac{dI}{dt} = \frac{dM}{dt} = 0,$$

sehingga diperoleh

$$A + \gamma I - \beta S I e^{-\alpha M} - \alpha_1 S = 0,
 \tag{3.7a}$$

$$\beta S I e^{-\alpha M} - \rho E - \alpha_1 E = 0,
 \tag{3.7b}$$

$$\rho E - \gamma I - (\alpha_1 + \alpha_2) I = 0,
 \tag{3.7c}$$

$$\mu_1 S + \mu_2 E + \mu_3 I - \tau M = 0.
 \tag{3.7d}$$

Dari persamaan (3.7d) diperoleh

$$M = \frac{\mu_1 S + \mu_2 E + \mu_3 I}{\tau},$$

misalkan  $X = \mu_1 S + \mu_2 E + \mu_3 I$ , maka

$$M = \frac{X}{\tau}.
 \tag{3.8}$$

Dari persamaan (3.7b) diperoleh

$$I = \frac{(\rho + \alpha_1) E}{\beta S e^{-\alpha M}},$$

misalkan  $Y = \frac{\rho + \alpha_1}{\beta S e^{-\alpha M}}$ , maka

$$I = YE. \quad (3.9)$$

Substitusikan persamaan (3.8) dan (3.9) ke persamaan (3.7a), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} A + \gamma I - \beta S I e^{-\alpha M} - \alpha_1 S &= 0, \\ A + \gamma Y E - \beta S Y E e^{-\alpha M} - \alpha_1 S &= 0, \\ A + (\gamma Y - \beta S Y e^{-\alpha \frac{X}{\tau}}) E &= \alpha_1 S. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Dari persamaan (3.10) diperoleh

$$S = \frac{A + (\gamma Y - \beta S Y e^{-\alpha \frac{X}{\tau}}) E}{\alpha_1},$$

misalkan  $H = ((\gamma Y - \beta S Y e^{-\alpha \frac{X}{\tau}}) E)$ , maka

$$S = \frac{A + H}{\alpha_1}, \quad (3.11)$$

Dari persamaan (3.7c) diperoleh

$$E = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + \gamma) I}{\rho},$$

misalkan  $Z = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \gamma}{\rho}$ , maka

$$E = ZI. \quad (3.12)$$

Substitusikan persamaan (3.12) ke persamaan (3.7c), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \rho E - \gamma I - (\alpha_1 + \alpha_2) I &= 0, \\ \rho Z I - \gamma I - (\alpha_1 + \alpha_2) I &= 0, \\ I(\rho Z - \gamma - (\alpha_1 + \alpha_2)) &= 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Dari persamaan (3.13) diperoleh dua kemungkinan, yaitu  $I = 0$  atau  $I \neq 0$ . Jika  $I = 0$  maka dari persamaan (3.12) diperoleh  $E = 0$ . Jika  $I = E = 0$  maka dari persamaan (3.11) diperoleh  $S = \frac{A}{\alpha_1}$ . Jika

$I = E = 0$  maka dari persamaan (3.8) diperoleh  $M = \frac{\mu_1 A}{\alpha_1 \tau}$ . Diperoleh titik kesetimbangan  $P_0 = (S_0, E_0, I_0, M_0) = (\frac{A}{\alpha_1}, 0, 0, \frac{\mu_1 A}{\alpha_1 \tau})$ , yang disebut titik kesetimbangan bebas penyakit, karena tidak terdapat infeksi penyakit pada populasi.

### 3.2.2 Angka reproduksi dasar

Angka reproduksi dasar diperoleh dengan menggunakan metode matriks generasi selanjutnya. Komponen pembentuk matriks  $F$  dan  $V$  terdiri dari kelompok populasi individu terinfeksi yaitu subpopulasi terpapar ( $E$ ) dan subpopulasi terinfeksi ( $I$ ). Parameter  $F_i$  menyatakan laju munculnya infeksi baru yang masuk pada masing-masing kompartemen ke  $i$  dan harus bernilai positif. Parameter  $V_i$  menunjukkan laju transfer keluar atau masuk dari kompartemen satu ke kompartemen lainnya.

Perhatikan sistem (3.6), diperoleh matriks  $F$  dan  $V$ . Matriks  $F$  didefinisikan

$$F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta S I e^{-\alpha M} \\ 0 \end{bmatrix},$$

dengan turunan matriks  $F$  adalah

$$DF = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{dE} & \frac{df_1}{dI} \\ \frac{df_2}{dE} & \frac{df_2}{dI} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \beta S I e^{-\alpha M} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

diperoleh  $DF$  pada titik kesetimbangan  $P_0 = (\frac{A}{\alpha_1}, 0, 0, \frac{\mu_1 A}{\alpha_1 \tau})$ , yaitu

$$DF(P_0) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\beta A e^{-\alpha \frac{\mu_1 A}{\alpha_1 \tau}}}{\alpha_1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

Didefinisikan matriks  $V$

$$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho E + \alpha_1 E \\ \gamma I + (\alpha_1 + \alpha_2) I - \rho E \end{bmatrix},$$

dengan turunan matriks  $V$  adalah

$$DV = \begin{bmatrix} \frac{dv_1}{dE} & \frac{dv_1}{dI} \\ \frac{dv_2}{dE} & \frac{dv_2}{dI} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho + \alpha_1 & 0 \\ -\rho & \gamma + (\alpha_1 + \alpha_2) \end{bmatrix},$$

diperoleh  $DV$  pada titik kesetimbangan  $P_0 = (\frac{A}{\alpha_1}, 0, 0, \frac{\mu_1 A}{\alpha_1 \tau})$ , yaitu

$$DV(P_0) = \begin{bmatrix} \rho + \alpha_1 & 0 \\ -\rho & \gamma + (\alpha_1 + \alpha_2) \end{bmatrix}.$$

Invers dari matriks  $DV(P_0)$  adalah

$$DV(P_0)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho + \alpha_1} & 0 \\ \frac{\rho}{(\alpha_1 + \rho)(\alpha_1 + \alpha_2 + \gamma)} & \frac{1}{\gamma + (\alpha_1 + \alpha_2)} \end{bmatrix}.$$

Berdasarkan definisi matriks generasi selanjutnya, diperoleh

$$K = (DF(P_0))(DV(P_0))^{-1},$$

$$K = \begin{bmatrix} \frac{\rho \beta A e^{-\alpha \frac{\mu_1 A}{\alpha_1 \tau}}}{\alpha_1 (\alpha_1 + \rho) (\alpha_1 + \alpha_2 + \gamma)} & \frac{\beta A e^{-\alpha \frac{\mu_1 A}{\alpha_1 \tau}}}{\alpha_1 (\alpha_1 + \alpha_2 + \gamma)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

dengan nilai eigen matriks  $K$  adalah

$$\lambda_1 = 0 \text{ dan } \lambda_2 = \frac{\beta \rho A e^{-\frac{\alpha \mu_1 A}{\alpha_1 \tau}}}{\alpha_1 (\alpha_1 + \rho) (\alpha_1 + \alpha_2 + \gamma)}$$

Angka reproduksi dasar adalah jari-jari spektral atau nilai eigen terbesar dari matriks  $K$ , yaitu

$$\begin{aligned} R_0 &= \rho(K), \\ &= \max(\lambda_1, \lambda_2), \\ &= \max\left(0, \frac{\beta \rho A e^{-\frac{\alpha \mu_1 A}{\alpha_1 \tau}}}{\alpha_1 (\alpha_1 + \rho) (\alpha_1 + \alpha_2 + \gamma)}\right), \\ R_0 &= \frac{\beta \rho A e^{-\frac{\alpha \mu_1 A}{\alpha_1 \tau}}}{\alpha_1 (\alpha_1 + \rho) (\alpha_1 + \alpha_2 + \gamma)}. \end{aligned}$$



### 3.2.3 Eksistensi titik kesetimbangan endemi

Misal  $P^* = (S^*, E^*, I^*, M^*)$  adalah solusi dari persamaan (3.7a)-(3.7d), maka

$$A + \gamma I^* - \beta S^* I^* e^{-\alpha M^*} - \alpha_1 S^* = 0, \quad (3.14a)$$

$$\beta S^* I^* e^{-\alpha M^*} - \rho E^* - \alpha_1 E^* = 0, \quad (3.14b)$$

$$\rho E^* - \gamma I^* - (\alpha_1 + \alpha_2) I^* = 0, \quad (3.14c)$$

$$\mu_1 S^* + \mu_2 E^* + \mu_3 I^* - \tau M^* = 0. \quad (3.14d)$$

Apabila  $I^* \neq 0$ , dari persamaan (3.14c) diperoleh

$$E^* = \frac{(\gamma + \alpha_1 + \alpha_2) I^*}{\rho}, \quad (3.15)$$

Persamaan (3.14b) dapat ditulis

$$\begin{aligned} \beta S^* I^* e^{-\alpha M^*} - \rho E^* - \alpha_1 E^* &= 0, \\ \beta S^* I^* e^{-\alpha M^*} &= \rho E^* + \alpha_1 E^*, \\ \beta S^* I^* e^{-\alpha M^*} &= E^* (\rho + \alpha_1). \end{aligned}$$

Persamaan (3.14a) dapat ditulis

$$\begin{aligned} A + \gamma I^* - \beta S^* I^* e^{-\alpha M^*} - \alpha_1 S^* &= 0, \\ \beta S^* I^* e^{-\alpha M^*} &= A + \gamma I^* - \alpha_1 S^*. \end{aligned}$$

Persamaan (3.14a) disamakan dengan persamaan (3.14b), lalu substitusikan persamaan (3.15) menjadi

$$\begin{aligned} A + \gamma I^* - \alpha_1 S^* &= E^* (\rho + \alpha_1), \\ \alpha_1 S^* &= A + \gamma I^* - \frac{(\rho + \alpha_1)(\gamma + \alpha_1 + \alpha_2) I^*}{\rho}, \\ S^* &= \frac{A + \gamma I^* - \frac{(\rho + \alpha_1)(\gamma + \alpha_1 + \alpha_2) I^*}{\rho}}{\alpha_1}, \\ S^* &= \frac{A}{\alpha_1} + \frac{\gamma I^*}{\alpha_1} - \frac{(\rho + \alpha_1)(\gamma + \alpha_1 + \alpha_2) I^*}{\alpha_1 \rho}. \end{aligned}$$

$$S^* = \frac{A}{\alpha_1} + \left( \frac{\gamma}{\alpha_1} - \frac{(\rho + \alpha_1)(\gamma + \alpha_1 + \alpha_2)}{\alpha_1 \rho} \right) I^*. \quad (3.16)$$

Substitusikan persamaan (3.15) dan (3.16) ke persamaan (3.14d), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
 0 &= \mu_1 S^* + \mu_2 E^* + \mu_3 I^* - \tau M^*, \\
 \tau M^* &= \mu_1 S^* + \mu_2 E^* + \mu_3 I^*, \\
 M^* &= \frac{\mu_1 S^* + \mu_2 E^* + \mu_3 I^*}{\tau}, \\
 &= \frac{\mu_1 \left( \frac{A}{\alpha_1} + \left( \frac{\gamma}{\alpha_1} - \frac{(\alpha_1 + \rho)(\alpha_1 + \alpha_2 + \gamma)}{\alpha_1 \rho} \right) I^* \right)}{\tau} \\
 &\quad + \frac{\mu_2 \left( \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \gamma}{\rho} I^* \right) + \mu_3 I^*}{\tau}, \\
 &= \frac{\mu_1 A}{\alpha_1 \tau} + I^* \left[ \frac{\mu_1 \gamma}{\alpha_1 \tau} - \frac{\mu_1 (\alpha_1 + \rho)(\alpha_1 + \alpha_2 + \gamma)}{\alpha_1 \rho \tau} \right. \\
 &\quad \left. + \mu_2 \left( \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \gamma}{\rho \tau} \right) + \frac{\mu_3}{\tau} \right], \\
 M^* &= \frac{\mu_1 A}{\alpha_1 \tau} + \frac{I^*}{\alpha_1 \rho \tau} (\rho \mu_1 \gamma - \mu_1 (\alpha_1 + \rho)(\alpha_1 + \alpha_2 + \gamma) + \\
 &\quad \alpha_1 \mu_2 (\alpha_1 + \alpha_2 + \gamma) + \alpha_1 \rho \mu_3). \tag{3.17}
 \end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh titik kesetimbangan endemi  $P^* = (S^*, E^*, I^*, M^*)$  ketika  $I^* \neq 0$ ,

$$S^* = \frac{A}{\alpha_1} + \left( \frac{\gamma}{\alpha_1} - \frac{(\rho + \alpha_1)(\alpha_1 + \alpha_2 + \gamma)}{\alpha_1 \rho} \right) I^*, \tag{3.18}$$

$$E^* = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + \gamma) I^*}{\rho}, \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned}
 M^* &= \frac{\mu_1 A}{\alpha_1 \tau} + \frac{I^*}{\alpha_1 \rho \tau} (\rho \mu_1 \gamma - \mu_1 (\alpha_1 + \rho)(\alpha_1 + \alpha_2 + \gamma) + \\
 &\quad \alpha_1 \mu_2 (\alpha_1 + \alpha_2 + \gamma) + \alpha_1 \rho \mu_3). \tag{3.20}
 \end{aligned}$$

Eksistensi titik kesetimbangan endemi  $P^*$  dinyatakan dalam Teorema 3.1.

**Teorema 3.1**

1. Jika  $R_0 > \max(1, R_{01})$ , maka terdapat satu titik kesetimbangan endemi positif yaitu  $P_1^*$ .
2. Jika  $R_p = R_0 < \min(1, R_{01})$ , maka terdapat satu titik kesetimbangan endemi positif yaitu  $P_2^*$ .
3. Jika  $R_p < R_0 < \min(1, R_{01})$ , maka terdapat dua titik kesetimbangan endemi positif yang berbeda yaitu  $P_3^*$  dan  $P_4^*$ ,

dengan  $P_i^* = (S_i^*, E_i^*, I_i^*, M_i^*)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  memenuhi persamaan (3.18)-(3.20) dan didefinisikan

$$R_{01} = \frac{A\rho\Theta}{(\alpha_1 + \rho)(\alpha_1 + \alpha_2 + \gamma) - \rho\gamma},$$

$$R_p = R_{01}e^{1-R_{01}},$$

$$\Theta = \frac{-\alpha}{\alpha_1\rho\tau}(\mu_1\rho\gamma - \mu_1(\alpha_1 + \rho)(\alpha_1 + \alpha_2 + \gamma) + \alpha_1\mu_2(\alpha_1 + \alpha_2 + \gamma) + \alpha_1\mu_3\rho).$$

**Bukti**

Perhitungan detail  $R_{01}$ ,  $R_p$  dapat dilihat pada Lampiran 2. Substitusikan persamaan (3.18)-(3.20) ke persamaan (3.14a)-(3.14d), sehingga didapatkan

$$\left(1 - \left(\frac{(\alpha_1 + \rho)(\alpha_1 + \alpha_2 + \gamma)}{A\rho} - \frac{\gamma}{A}\right)I^*\right)R_0 = e^{-\Theta I^*}. \quad (3.21)$$

Jika  $\Theta = 0$ , maka diperoleh  $I = \frac{A\rho}{(\alpha_1 + \rho)(\alpha_1 + \alpha_2 + \gamma) - \rho\gamma} \left(1 - \frac{1}{R_0}\right) > 0$ , dengan  $R_0 > 1$ . Perhitungan detail nilai  $I$  dapat dilihat pada Lampiran 2. Jika  $\Theta \neq 0$ , maka persamaan (3.21) dapat ditulis sebagai berikut

$$R_0 - \frac{R_0}{R_{01}}\Theta I^* - e^{-\Theta I^*}.$$

Notasikan

$$H(I) = R_0 - \frac{R_0}{R_{01}}\Theta I - e^{-\Theta I}, \quad (3.22)$$

maka

$$\begin{aligned}
 H(0) &= R_0 - 1, \\
 H(\infty) &= -\infty, \\
 H'(I) &= -\frac{R_0}{R_{01}}\Theta + \Theta e^{-\Theta I} \\
 &= \Theta \left( e^{-\Theta I} - \frac{R_0}{R_{01}} \right), \\
 H'(0) &= -\frac{R_0}{R_{01}}\Theta + \Theta \\
 &= \Theta \left( 1 - \frac{R_0}{R_{01}} \right), \\
 H''(I) &= -\Theta^2 e^{-\Theta I}.
 \end{aligned}$$

1. Ketika  $R_0 > 1$ , maka diperoleh  $H(0) = R_0 - 1 > 0$  dan  $H(\infty) = -\infty$ . Bila  $H'(I) < 0$ , maka terdapat  $I > 0$  dengan  $H(I) = 0$ .  $H'(I) < 0$ , jika dan hanya jika  $R_0 < R_{01}$  dan  $\Theta > 0$  atau  $R_0 > R_{01}$  dan  $\Theta < 0$ . Jika  $R_0 > R_{01}$ , maka  $H'(0) > 0$ . Jadi, jika  $R_0 > R_{01}$  dan  $R_0 > 1$ , maka terdapat satu akar positif untuk  $H(I)$ , yaitu  $I_1^*$ . Dengan kata lain, jika  $R_0 > \max(1, R_{01})$ , maka terdapat  $I_1^*$  yang memenuhi (3.21). Terbukti terdapat titik kesetimbangan  $P_1^*$ , jika  $R_0 > \max(1, R_{01})$ .
2. Ketika  $R_0 < 1$ , maka diperoleh  $H(0) < 0$  dan  $H(\infty) < 0$ . Untuk  $\Theta > 0$ , diperoleh

$$\begin{aligned}
 e^{-\Theta I_2} &= \frac{R_0}{R_{01}}, \\
 \Theta I_2 &= \ln \frac{R_{01}}{R_0}, \\
 I_2 &= \frac{1}{\Theta} \ln \frac{R_{01}}{R_0}
 \end{aligned}$$

$I_2 > 0$ , jika  $\Theta > 0$  dan  $R_0 < R_{01}$ .

Substitusi  $I_2$  ke  $H(I) = 0$ , diperoleh

$$H(I_2) = R_0 + \frac{R_0}{R_{01}} \ln \left( \frac{R_0}{R_{01}} \right) - \frac{R_0}{R_{01}}.$$

Nilai  $H(I_2)$  mempunyai 2 kondisi, yaitu  $H(I_2) < 0$  dan  $H(I_2) = 0$ . Jika  $H(I_2) = 0$ , maka  $H(I)$  memotong sumbu  $I$  di satu titik yaitu  $I_2^*$ .

$$\begin{aligned}
 H(I_2) &= 0, \\
 R_0 + \frac{R_0}{R_{01}} \left( \ln \frac{R_0}{R_{01}} - 1 \right) &= 0, \\
 R_0 \left( 1 + \frac{\left( \ln \frac{R_0}{R_{01}} - 1 \right)}{R_{01}} \right) &= 0.
 \end{aligned}$$

Karena  $R_0 \neq 0$ , maka

$$\begin{aligned}
 R_0 \left( 1 + \frac{\left( \ln \frac{R_0}{R_{01}} - 1 \right)}{R_{01}} \right) &= 0, \\
 \ln \frac{R_0}{R_{01}} - 1 &= -R_{01}, \\
 \ln \frac{R_0}{R_{01}} &= -R_{01} + 1, \\
 \frac{R_0}{R_{01}} &= e^{1-R_{01}}, \\
 R_0 &= R_{01} e^{1-R_{01}} = R_p,
 \end{aligned}$$

Artinya terdapat  $I_2^*$  jika  $R_0 = R_p$ ,  $R_0 < 1$  dan  $R_0 < R_{01}$ . Jadi, terdapat titik kesetimbangan  $P_2^*$  jika  $R_p = R_0 < \min(1, R_{01})$ .

- Berdasarkan pembuktian 2, jika  $H(I_2) > 0$  maka  $H(I)$  memotong sumbu  $I$  di dua titik, yaitu  $I_3$  dan  $I_4$  dengan  $I_3 < I_2 < I_4$ . Artinya terdapat  $I_3$  dan  $I_4$  jika  $R_p < R_0$ ,  $R_0 < 1$  dan  $R_0 < R_{01}$ . Jadi, terdapat titik kesetimbangan  $P_3^*$  dan  $P_4^*$  jika  $R_p < R_0 < \min(1, R_{01})$ .

### 3.3 Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan

Kestabilan lokal titik kesetimbangan didapatkan melalui proses linearisasi pada sistem (3.6). Pada proses linearisasi tersebut,

diperoleh matriks Jacobi sebagai berikut

$$J = \begin{bmatrix} -\alpha_1 - \beta I e^{-\alpha M} & 0 & -\beta S e^{-\alpha M} + \gamma & \alpha \beta S I e^{-\alpha M} \\ \beta I e^{-\alpha M} & -(\rho + \alpha_1) & \beta S e^{-\alpha M} & -\alpha \beta S I e^{-\alpha M} \\ 0 & \rho & -(\alpha_1 + \alpha_2 + \gamma) & 0 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & -\tau \end{bmatrix}.$$

### 3.3.1 Analisis kestabilan lokal $P_0$

Matriks Jacobi di titik  $P_0(S_0, E_0, I_0, M_0) = (\frac{A}{\alpha_1}, 0, 0, \frac{\mu_1 A}{\alpha_1 \tau})$  adalah

$$J(P_0) = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & 0 & -\frac{\beta A}{\alpha_1} e^{-\frac{\alpha \mu_1 A}{\alpha_1 \tau}} + \gamma & 0 \\ 0 & -(\rho + \alpha_1) & \frac{\beta A}{\alpha_1} e^{-\frac{\alpha \mu_1 A}{\alpha_1 \tau}} & 0 \\ 0 & \rho & -(\alpha_1 + \alpha_2 + \gamma) & 0 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & -\tau \end{bmatrix},$$

$$|\lambda I - J(P_0)| =$$

$$\begin{vmatrix} \lambda + \alpha_1 & 0 & \frac{\beta A e^{-\frac{\alpha \mu_1 A}{\alpha_1 \tau}}}{\alpha_1} - \gamma & 0 \\ 0 & \lambda + (\alpha_1 + \rho) & -\frac{\beta A e^{-\frac{\alpha \mu_1 A}{\alpha_1 \tau}}}{\alpha_1} & 0 \\ 0 & -\rho & \lambda + (\alpha_1 + \alpha_2 + \gamma) & 0 \\ -\mu_1 & \mu_2 & -\mu_3 & \lambda + \tau \end{vmatrix},$$

selanjutnya persamaan karakteristik matriks  $J(P_0)$ , yaitu

$$(\lambda + \alpha_1)(\lambda + \tau)((\lambda + (\alpha_1 + \rho))(\lambda + \alpha_1 + \alpha_2 + \gamma)) - \frac{\rho \beta A}{\alpha_1} e^{-\frac{\alpha \mu_1 A}{\alpha_1 \tau}} = 0. \quad (3.23)$$

Diperoleh akar-akar karakteristik dari sistem (3.23), yaitu

$$\lambda_1 = -\alpha_1,$$

$$\lambda_2 = -\tau,$$

kemudian seperti diuraikan pada Lampiran 1, dua akar karakteristik lainnya diperoleh,

$$\lambda^2 + \lambda(2\alpha_1 + \alpha_2 + \gamma + \rho) + (\alpha_1 + \rho)(\alpha_1 + \alpha_2 + \gamma)(1 - R_0) = 0, \quad (3.24)$$

dengan

$$\begin{aligned}\lambda_3 + \lambda_4 &= -(2\alpha_1 + \alpha_2 + \gamma + \rho) < 0, \\ \lambda_3\lambda_4 &= (\alpha_1 + \rho)(\alpha_1 + \alpha_2 + \gamma)(1 - R_0).\end{aligned}$$

Ketika  $R_0 < 1$  mengakibatkan  $P_0$  bersifat stabil asimtotik lokal karena semua akar bernilai real negatif. Dengan demikian, titik kesetimbangan bebas penyakit  $P_0$  bersifat stabil asimtotik lokal jika  $R_0 < 1$ .

### 3.3.2 Analisis kestabilan global $P_0$

Didefinisikan fungsi Lyapunov

$$V(S, E, I, M) = e^{-\frac{\alpha\mu_1 A}{\alpha_1\tau}} \rho E(t) + (\alpha_1 + \rho)I(t)$$

Untuk mengetahui apakah fungsi tersebut adalah fungsi Lyapunov lemah atau kuat untuk  $P_0$  maka disubstitusikan titik kesetimbangan bebas penyakit  $P_0 = (\frac{A}{\alpha_1}, 0, 0, \frac{\mu_1 A}{\alpha_1\tau})$  ke fungsi tersebut diperoleh

$$\begin{aligned}V(P_0) &= V(S_0, 0, 0, M_0) \\ &= e^{-\frac{\alpha\mu_1 A}{\alpha_1\tau}} \rho E(t) + (\alpha_1 + \rho)I(t) \\ &= 0\end{aligned}$$

dan

$$V(S, E, I, M) = e^{-\frac{\alpha\mu_1 A}{\alpha_1\tau}} \rho E(t) + (\alpha_1 + \rho)I(t) > 0.$$

Jelas bahwa  $V(S, E, I, M)$  memenuhi kondisi 1 pada Definisi 2.2.5 dan Definisi 2.2.4. Selanjutnya akan diperiksa apakah  $V'(S, E, I, M) \leq 0$  atau  $V'(S, E, I, M) < 0$ .

$$\begin{aligned}V'(S, E, I, M) &= e^{-\frac{\alpha\mu_1 A}{\alpha_1\tau}} \rho \frac{dE(t)}{dt} + (\alpha_1 + \rho) \frac{dI(t)}{dt}, \\ &= e^{-\frac{\alpha\mu_1 A}{\alpha_1\tau}} \rho (\beta S I e^{-\alpha M} - \rho E - \alpha_1 E) + \\ &\quad (\alpha_1 + \rho)(\rho E - \gamma I - (\alpha_1 + \alpha_2)I),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= e^{-\frac{\alpha\mu_1 A}{\alpha_1\tau}} \rho\beta SIe^{-\alpha M} - e^{-\frac{\alpha\mu_1 A}{\alpha_1\tau}} \rho^2 E - e^{-\frac{\alpha\mu_1 A}{\alpha_1\tau}} \rho\alpha_1 E \\
 &+ \alpha_1 \rho E - \alpha_1 \gamma I - \alpha_1^2 I - \alpha_1 \alpha_2 I + \rho^2 E - \rho \gamma I \\
 &- \rho \alpha_1 I - \rho \alpha_2 I, \\
 &\leq \frac{A}{\alpha_1} e^{-\frac{\alpha\mu_1 A}{\alpha_1\tau}} \rho\beta Ie^{-\alpha M} - e^{-\frac{\alpha\mu_1 A}{\alpha_1\tau}} \rho^2 E - e^{-\frac{\alpha\mu_1 A}{\alpha_1\tau}} \rho\alpha_1 E \\
 &+ \alpha_1 \rho E - \alpha_1 \gamma I - \alpha_1^2 I - \alpha_1 \alpha_2 I + \rho^2 E - \rho \gamma I - \\
 &\quad \rho \alpha_1 I - \rho \alpha_2 I, \\
 &\leq \frac{A}{\alpha_1} e^{-\frac{\alpha\mu_1 A}{\alpha_1\tau}} \rho\beta I - e^{-\frac{\alpha\mu_1 A}{\alpha_1\tau}} \rho^2 E - e^{-\frac{\alpha\mu_1 A}{\alpha_1\tau}} \rho\alpha_1 E \\
 &+ \alpha_1 \rho E - \alpha_1 \gamma I - \alpha_1^2 I - \alpha_1 \alpha_2 I + \rho^2 E - \rho \gamma I - \\
 &\quad \rho \alpha_1 I - \rho \alpha_2 I, \\
 &\leq \frac{A}{\alpha_1} e^{-\frac{\alpha\mu_1 A}{\alpha_1\tau}} \rho\beta I - \alpha_1 \gamma I - \alpha_1^2 I - \alpha_1 \alpha_2 I - \rho \gamma I \\
 &- \rho \alpha_1 I - \rho \alpha_2 I, \\
 &= \frac{A}{\alpha_1} e^{-\frac{\alpha\mu_1 A}{\alpha_1\tau}} \rho\beta I - (\alpha_1 + \rho)(\alpha_1 + \alpha_2 + \gamma)I, \\
 &= I \left( \frac{\rho\beta A e^{-\frac{\alpha\mu_1 A}{\alpha_1\tau}} \rho\beta I}{\alpha_1(\alpha_1 + \rho)(\alpha_1 + \alpha_2 + \gamma)} - 1 \right) (\alpha_1 + \rho)(\alpha_1 \\
 &+ \alpha_2 + \gamma), \\
 &= (\alpha_1 + \rho)(\alpha_1 + \alpha_2 + \gamma)I(R_0 - 1).
 \end{aligned}$$

Untuk  $R_0 < 1$ , maka  $V'(S, E, I, M) < 0$ . Dengan demikian,  $V(S, E, I, M)$  fungsi Lyapunov kuat untuk  $P_0$  sehingga titik kesetimbangan bebas penyakit  $P_0$  bersifat stabil asimtotik global jika  $R_0 < 1$ .

### 3.3.3 Analisis kestabilan lokal $P_i^*$

Matriks Jacobi di titik  $P_i^* (i = 1, 2, 3, 4)$  adalah

$$J(P_i^*) = \begin{bmatrix} -\alpha_1 - \Phi I_i^* & 0 & -\Phi S_i^* + \gamma & \alpha \Phi S_i^* I_i^* \\ \Phi I_i^* & -(\rho + \alpha_1) & \Phi S_i^* & -\alpha \Phi S_i^* I_i^* \\ 0 & \rho & -(\alpha_1 + \alpha_2 + \gamma) & 0 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & -\tau \end{bmatrix},$$

dengan

$$\Phi = \beta e^{-\alpha M_i^*}.$$



Persamaan karakteristik matriks Jacobi  $J(P_i^*)$  sebagaimana dijabarkan pada Lampiran 3.

$$G(\lambda) = \lambda^4 + a_1(I_i^*)\lambda^3 + a_2(I_i^*)\lambda^2 + a_3(I_i^*)\lambda + a_4(I_i^*) = 0, \quad (3.25)$$

dengan

$$a_1(I_i^*) = 3\alpha_1 + \rho + \gamma + \alpha_2 + \tau + \Phi I_i^*, \quad (3.26)$$

$$a_2(I_i^*) = (3\alpha_1 + \rho + \gamma + \alpha_2 + \Phi I_i^*)\tau + (2\alpha_1 + \alpha_2 + \rho + \gamma)(\Phi I_i^* + \alpha_1) - \left(\frac{A\Theta}{R_{01}} + \gamma\right)\alpha I_i^*(\mu_1 - \mu_2), \quad (3.27)$$

$$a_3(I_i^*) = (2\alpha_1 + \alpha_2 + \rho + \gamma)(\alpha_1\tau + \Phi I_i^*) + \Phi I_i^*(\alpha_1 + \rho)(\alpha_1 + \alpha_2 + \gamma) - \left(\frac{A\Theta}{R_{01}} + \gamma\right)\alpha I_i^*((2\alpha_1 + \alpha_2 + \gamma)(\mu_1 - \mu_2) + \rho(\mu_1 - \mu_3)), \quad (3.28)$$

$$a_4(I_i^*) = \tau(\alpha_1 + \rho)(\alpha_1 + \alpha_2 + \gamma)((\alpha_1 + \Phi I_i^*) - \alpha_1(1 + \Theta I_i^*)). \quad (3.29)$$

Perhitungan detail untuk mendapatkan koefisien  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ , dan  $a_4$  dapat dilihat pada Lampiran 3. Kestabilan titik kesetimbangan endemi  $P_i^*$  dinyatakan dalam Teorema 3.2.

### **Teorema 3.2**

1. Titik kesetimbangan  $P_1^*$  eksis ketika  $R_0 > \max(1, R_{01})$  dan  $P_1^*$  stabil asimtotik lokal ketika  $a_1(I_1^*) > 0$ ,  $a_1(I_1^*)a_2(I_1^*) - a_3(I_1^*) > 0$ ,  $a_3(I_1^*)(a_1(I_1^*)a_2(I_1^*) - a_3(I_1^*)) - (a_1(I_1^*))^2 a_4(I_1^*) > 0$  serta  $a_4(I_1^*) > 0$ .
2. Titik kesetimbangan endemi  $P_2^*$  merupakan titik sadel, ketika  $R_p = R_0 < \min(1, R_{01})$ .
3. Titik kesetimbangan endemi  $P_3^*$  merupakan titik sadel tak stabil.
4. Titik kesetimbangan endemi  $P_4^*$  merupakan titik node stabil.

### **Bukti**

1. Titik kesetimbangan  $P_1^*$  memenuhi kriteria Routh-Hurwitz yaitu  $a_1(I_1^*) > 0$ ,  $a_1(I_1^*)a_2(I_1^*) - a_3(I_1^*) > 0$ ,  $a_3(I_1^*)(a_1(I_1^*)a_2(I_1^*) - a_3(I_1^*)) - (a_1(I_1^*))^2 a_4(I_1^*) > 0$ , serta  $a_4(I_1^*) > 0$ .

2. Menurut Teorema 3.1, diperoleh  $I_2^* = \frac{1}{\Theta} \ln \frac{R_{01}}{R_0}$  dan  $\Phi I_2^* = \alpha_1 \Theta I_2^*$ . Dari persamaan (3.25), didapatkan

$$a_1(I_2^*) = 3\alpha_1 + \rho + \gamma + \alpha_2 + \tau + \Phi I_2^* > 0,$$

Substitusikan  $\Phi I_2^* = \alpha_1 \Theta I_2^*$  ke persamaan (3.29) didapatkan

$$a_4(I_2^*) = \tau \alpha_1 (\alpha_1 + \rho) (\alpha_1 + \alpha_2 + \gamma) ((1 + \Theta I_2^*) - (1 + \Theta I_2^*)) = 0,$$

Dari persamaan (3.28) didapatkan

$$\begin{aligned} a_3(I_2^*) &< (2\alpha_1 + \alpha_2 + \rho + \gamma)(\alpha_1 \tau + \Phi I_2^*) + \Phi I_2^* (\alpha_1 + \rho)(\alpha_1 \\ &+ \alpha_2 + \gamma) - \left( \frac{A\Theta}{R_{01}} + \gamma \right) \alpha I_2^* ((2\alpha_1 + \alpha_2 + \gamma)(\mu_1 - \mu_2) \\ &+ \rho(\mu_1 - \mu_3)) = 0, \end{aligned}$$

Misalkan  $\Psi_j(I_2^*) (j = 1, 2, 3, 4)$  solusi dari persamaan (3.25) untuk  $i = 2$ , maka diperoleh

$$\begin{aligned} \Psi_1(I_2^*) + \Psi_2(I_2^*) + \Psi_3(I_2^*) + \Psi_4(I_2^*) &= -a_1(I_2^*) < 0, \\ \Psi_1(I_2^*)\Psi_2(I_2^*) + \Psi_1(I_2^*)\Psi_3(I_2^*) + \Psi_1(I_2^*)\Psi_4(I_2^*) + \\ \Psi_2(I_2^*)\Psi_3(I_2^*) + \Psi_2(I_2^*)\Psi_4(I_2^*) + \Psi_3(I_2^*)\Psi_4(I_2^*) &= a_3(I_2^*) < 0, \end{aligned}$$

dan

$$\Psi_1(I_2^*)\Psi_2(I_2^*)\Psi_3(I_2^*)\Psi_4(I_2^*) = a_4(I_2^*) < 0.$$

Artinya, terdapat nilai eigen positif, negatif dan nol sehingga titik kesetimbangan endemi  $P_2^*$  merupakan titik sadel.

3. Menurut Teorema 3.1, diperoleh  $I_3^* < I_2^* = \frac{1}{\Theta} \ln \frac{R_{01}}{R_0}$  dan  $\Phi I_3^* < \alpha_1 \Theta I_2^*$ . Dari persamaan (3.26) diperoleh

$$a_1(I_3^*) = 3\alpha_1 + \rho + \gamma + \alpha_2 + \tau + \Phi I_3^* > 0,$$

Substitusikan  $\Phi I_3^* < \alpha_1 \Theta I_2^*$  ke persamaan (3.29) didapatkan

$$a_4(I_3^*) < \tau \alpha_1 (\alpha_1 + \rho) (\alpha_1 + \alpha_2 + \gamma) ((1 + \Theta I_3^*) - (1 + \Theta I_3^*)) = 0,$$

Misalkan  $\Psi_j(I_3^*) (j = 1, 2, 3, 4)$  solusi dari persamaan (3.25) untuk  $i = 3$ , maka diperoleh

$$\begin{aligned} \Psi_1(I_3^*) + \Psi_2(I_3^*) + \Psi_3(I_3^*) + \Psi_4(I_3^*) &= -a_1(I_3^*) < 0, \text{ dan} \\ \Psi_1(I_3^*)\Psi_2(I_3^*)\Psi_3(I_3^*)\Psi_4(I_3^*) &= a_4(I_3^*) < 0, \end{aligned}$$

Artinya, terdapat nilai eigen positif dan negatif pada persamaan (3.25) untuk  $i = 3$  sehingga titik kesetimbangan endemi  $P_3^*$  merupakan titik sadel tak stabil.

4. Menurut Teorema 3.1, diperoleh  $I_4^* > I_2^* = \frac{1}{\Theta} \ln \frac{R_{01}}{R_0}$  dan  $\Phi I_4^* > \alpha_1 \Theta I_2^*$ . Dari persamaan (3.26) diperoleh

$$a_1(I_4^*) = 3\alpha_1 + \rho + \gamma + \alpha_2 + \tau + \Phi I_4^* > 0,$$

dan dari persamaan (3.29) diperoleh

$$a_4(I_4^*) > \tau \alpha_1 (\alpha_1 + \rho) (\alpha_1 + \alpha_2 + \gamma) ((1 + \Theta I_4^*) - (1 + \Theta I_4^*)) = 0,$$

Misalkan  $\Psi_j(I_4^*) (j = 1, 2, 3, 4)$  solusi dari persamaan (3.25) untuk  $i = 4$  yang memenuhi  $Re(\Psi_1(I_4^*)) \leq Re(\Psi_2(I_4^*)) \leq Re(\Psi_3(I_4^*)) \leq Re(\Psi_4(I_4^*))$ , di mana  $Re$  adalah bilangan real. Sehingga diperoleh

$$\Psi_1(I_4^*) + \Psi_2(I_4^*) + \Psi_3(I_4^*) + \Psi_4(I_4^*) = -a_1(I_4^*) < 0, \quad (3.30)$$

dan

$$\Psi_1(I_4^*)\Psi_2(I_4^*)\Psi_3(I_4^*)\Psi_4(I_4^*) = a_4(I_4^*) > 0, \quad (3.31)$$

jadi,  $\Psi_j(I_4^*) < 0 (j = 1, 2, 3, 4)$ . Misalkan  $Re(\Psi_1(I_4^*)) \leq Re(\Psi_2(I_4^*)) < 0 < Re(\Psi_3(I_4^*)) \leq Re(\Psi_4(I_4^*))$ , maka kontradiksi dengan persamaan (3.30). Dengan demikian, titik kesetimbangan endemi  $P_4^*$  merupakan titik node stabil.

### 3.4 Simulasi Numerik

Simulasi dilakukan dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde 4 pada *software* MATLAB 2010.

Tabel 3.1: Nilai parameter untuk simulasi I

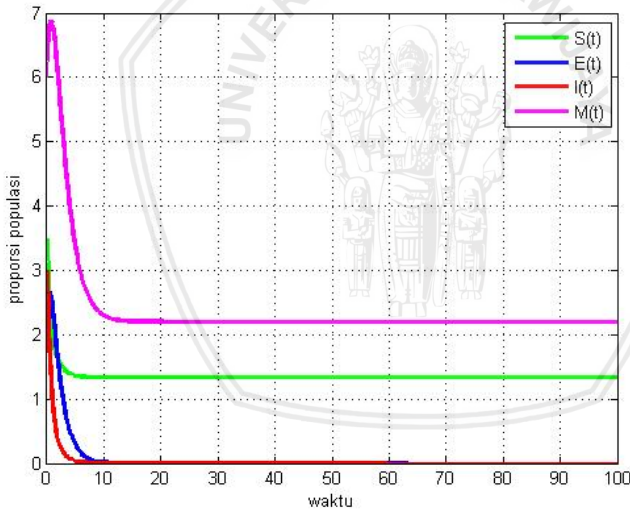
Parameter	Nilai
A	0.8
$\alpha$	0.08
$\alpha_1$	0.6
$\alpha_2$	0.02
$\beta$	0.8
$\mu_1$	0.99
$\mu_2$	0.4
$\mu_3$	0.8
$\tau$	0.6
$\rho$	0.09
$\gamma$	0.7

### 3.4.1 Simulasi I untuk $R_0 < 1$

Dengan menggunakan nilai parameter pada Tabel 3.1 diperoleh  $R_0 = 0.0884 < 1$  sehingga terdapat satu titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit  $P_0 = (\frac{A}{\alpha_1}, 0, 0, \frac{\mu_1 A}{\alpha_1 \tau}) = (1.3333, 0, 0, 2.2)$ .

Gambar 3.2 menunjukkan bahwa grafik solusi  $S(t)$ ,  $E(t)$ ,  $I(t)$  dan  $M(t)$  dengan nilai awal  $(3.5, 2, 3, 6)$  menuju titik kesetimbangan  $P_0$ . Jumlah populasi individu rentan dan jumlah pesan terkait penyakit epidemi mengalami penurunan. Untuk jumlah populasi individu terpapar dan jumlah populasi individu terinfeksi mengalami penurunan menuju nol.

Hasil simulasi numerik mendukung hasil analisis bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit stabil asimtotik lokal jika  $R_0 < 1$ . Artinya, tidak terdapat penyebaran penyakit pada populasi tersebut.



Gambar 3.2: Grafik solusi untuk  $R_0 < 1$

### 3.4.2 Simulasi II untuk $R_0 > \max(1, R_{01})$

Simulasi numerik dengan nilai parameter seperti pada Tabel 3.1 dengan perubahan pada nilai  $\alpha = 0.091$ ,  $\alpha_1 = 0.2$ ,  $\mu_1 = 0.2$ ,  $\mu_2 = 0.8$ ,  $\rho = 0.09$ , dan  $\gamma = 0.006$  diperoleh nilai  $R_0 = 8.3609$  dan

$R_{01} = 0.0881$  sehingga terdapat dua titik kesetimbangan yaitu  $P_0 = (\frac{A}{\alpha_1}, 0, 0, \frac{\mu_1 A}{\alpha_1 \tau}) = (4, 0, 0, 1.33)$  dan  $P_1^* = (S_1^*, E_1^*, I_1^*, M_1^*) = (0.442, 1.207, 2.137, 4.607)$ . Namun pada kasus ini, titik kesetimbangan  $P_0$  bersifat tidak stabil. Sesuai hasil analisis, didapatkan bahwa titik kesetimbangan  $P_1^*$  eksis jika  $R_0 > \max(1, R_{01})$ .

Dengan menggunakan parameter pada Tabel 3.2, diperoleh koefisien  $a_1(I_1^*)$ ,  $a_2(I_1^*)$ ,  $a_3(I_1^*)$ , dan  $a_4(I_1^*)$  sebagai berikut.

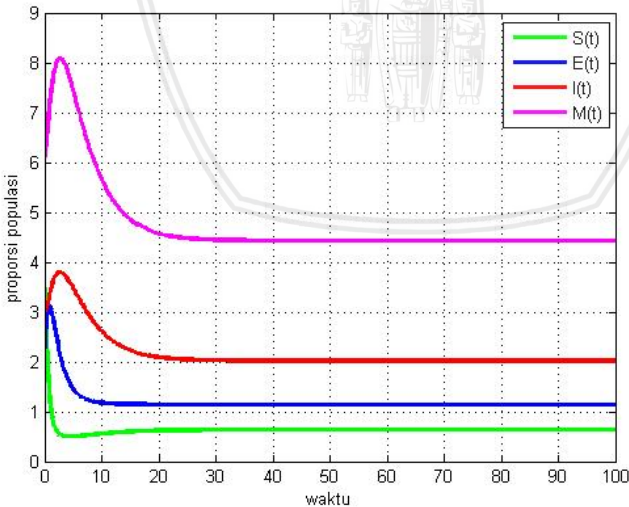
$$\begin{aligned}
 a_1(I_1^*) &= 3\alpha_1 + \rho + \gamma + \alpha_2 + \tau + \Phi I_1^*, \\
 &= 3(0.2) + 0.4 + 0.006 + 0.02 + 0.6 + 0.581, \\
 &= 2.207, \\
 a_2(I_1^*) &= (3\alpha_1 + \rho + \gamma + \alpha_2 + \Phi I_1^*)\tau + (2\alpha_1 + \alpha_2 \\
 &\quad + \rho + \gamma)(\Phi I_1^* + \alpha_1) - \left(\frac{A\Theta}{R_{01}} + \gamma\right)\alpha I_1^*(\mu_1 - \mu_2), \\
 &= (3(0.2) + 0.4 + 0.006 + 0.02 + 0.581)0.6 + (2(0.2) \\
 &\quad + 0.02 + 0.4 + 0.006)(0.581 + 0.2) \\
 &\quad - \left(\frac{0.8(0.036)}{0.0881} + 0.006\right)0.091(1)(0.2 - 0.8), \\
 &= 1.764, \\
 a_3(I_1^*) &= (2\alpha_1 + \alpha_2 + \rho + \gamma)(\alpha_1 \tau + \Phi I_1^*) + \Phi I_1^*(\alpha_1 \\
 &\quad + \rho)(\alpha_1 + \alpha_2 + \gamma) - \left(\frac{A\Theta}{R_{01}} + \gamma\right)\alpha I_1^*((2\alpha_1 + \alpha_2 \\
 &\quad + \gamma)(\mu_1 - \mu_2) + \rho(\mu_1 - \mu_3)), \\
 &= (2(0.2) + 0.02 + 0.4 + 0.006)(0.2(0.6) + 0.581) \\
 &\quad + 0.581(0.2 + 0.4)(0.2 + 0.02 + 0.006) \\
 &\quad - \left(\frac{0.8(0.036)}{0.0881} + 0.006\right)0.091(1)((2(0.2) + 0.2 \\
 &\quad + 0.006)(0.2 - 0.8) + 0.4(0.2 - 0.8)), \\
 &= 0.902, \\
 a_4(I_1^*) &= \tau(\alpha_1 + \rho)(\alpha_1 + \alpha_2 + \gamma)((\alpha_1 + \Phi I_1^*) - \alpha_1(1 + \Theta I_1^*)),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 0.6(0.2 + 0.4)(0.2 + 0.02 + 0.006)((0.2 + 0.581(1)) \\
 &- 0.2(1 + 0.036(1)), \\
 &= 0.36.
 \end{aligned}$$

Titik kesetimbangan  $P_1^*$  stabil asimtotik karena memenuhi

$$\begin{aligned}
 a_1 &> 0, \\
 a_1 a_2 - a_3 &= 2.991 > 0, \\
 a_3(a_1 a_2 - a_3) - (a_1)^2 a_4 &= 0.945 > 0, \\
 a_4 &> 0.
 \end{aligned}$$

Pada Gambar 3.3 dengan menggunakan nilai awal yang sama dengan Simulasi I menunjukkan bahwa grafik solusi  $S(t)$ ,  $E(t)$ ,  $I(t)$ , dan  $M(t)$  menuju titik kesetimbangan  $P_1^*$ . Jumlah populasi individu terinfeksi dan jumlah pesan terkait penyakit epidemi mengalami kenaikan lalu mengalami penurunan hingga stabil. Untuk jumlah populasi individu terpapar dan jumlah populasi individu rentan mengalami penurunan hingga stabil.



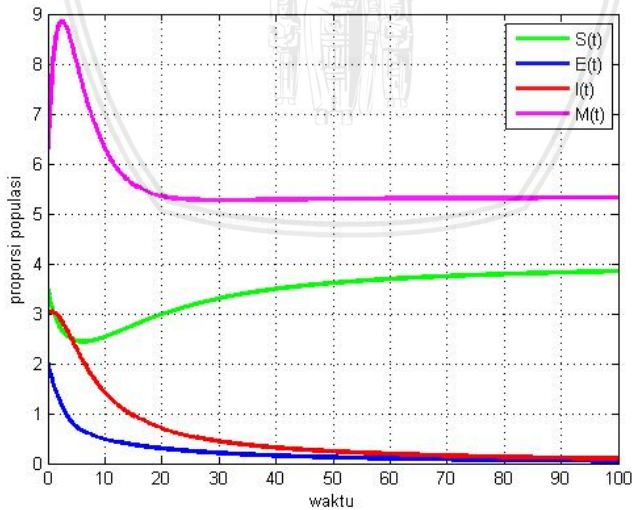
Gambar 3.3: Grafik solusi untuk  $R_0 > \max(1, R_{01})$

Berdasarkan Gambar 3.3 dapat dilihat bahwa hasil simulasi numerik mendukung hasil analisis bahwa ketika  $R_0 > \max(1, R_{01})$  maka titik kesetimbangan endemi  $P_1^*$  bersifat stabil asimtotik lokal. Artinya, dapat dikatakan pada populasi tersebut sedang terjadi wabah penyakit atau endemi.

### 3.4.3 Simulasi III untuk $R_p < R_0 < \min(1, R_{01})$

Pada simulasi ini digunakan nilai parameter seperti pada Tabel 3.1 dengan perubahan nilai  $\beta$  dan  $\mu_1$  yaitu  $\beta = 0.13$  dan  $\mu_1 = 0.8$  sehingga diperoleh  $R_0 = 0.944$ ,  $R_p = 0.836$  dan  $R_{01} = 1.721$ . Didapatkan 2 kemungkinan titik kesetimbangan endemi yaitu titik kesetimbangan  $P_3^* = (S_3^*, E_3^*, I_3^*, M_3^*) = (1.360, 0.896, 1.585, 5.122)$  dan  $P_4^* = (S_4^*, E_4^*, I_4^*, M_4^*) = (3.660, 0.115, 0.204, 5.306)$ . Namun pada kasus ini, titik kesetimbangan  $P_3^*$  tak stabil.

Dapat dilihat pada Gambar 3.4 bahwa dengan menggunakan nilai awal  $(3.5, 2, 3, 6)$ , subpopulasi  $S(t)$ ,  $E(t)$ ,  $I(t)$  dan  $M(t)$  menuju titik kesetimbangan  $P_4^*$ . Jumlah populasi individu terinfeksi dan jumlah populasi individu terpapar mengalami penurunan hingga stabil. Sedangkan untuk jumlah populasi individu rentan mengalami



Gambar 3.4: Grafik solusi untuk  $R_p < R_0 < \min(1, R_{01})$

penurunan lalu kenaikan hingga stabil, serta jumlah pesan terkait penyakit epidemi mengalami kenaikan lalu mengalami penurunan hingga stabil.

Dengan demikian, hasil simulasi numerik sesuai dengan hasil analisis yaitu ketika  $R_p < R_0 < \min(1, R_{01})$  terdapat 2 titik kesetimbangan endemi yaitu  $P_3^*$  dan  $P_4^*$ , di mana  $P_3^*$  tidak stabil dan  $P_4^*$  stabil.





## BAB IV

### KESIMPULAN DAN SARAN

#### 4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan skripsi ini, dapat diperoleh kesimpulan sebagai berikut

1. Model epidemi *SEIS* berbentuk sistem persamaan diferensial nonlinear yang terdiri dari empat kompartemen, yaitu rentan (*S*), terpapar (*E*), terinfeksi (*I*), dan pesan media terkait epidemi (*M*).
2. Model epidemi *SEIS* dengan dampak media memiliki dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit  $P_0$  dan titik kesetimbangan endemi  $P_i^*$ . Terdapat 4 kemungkinan untuk titik kesetimbangan endemi. Syarat eksistensi titik kesetimbangan endemi dinyatakan pada Teorema 3.1.
3. Pada model epidemi *SEIS* analisis kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit bersifat stabil asimtotik lokal dan global ketika  $R_0 < 1$ . Kestabilan titik kesetimbangan endemi dinyatakan pada Teorema 3.2.
4. Simulasi numerik yang dilakukan menunjukkan hasil yang sesuai dengan hasil analisis.

#### 4.2 Saran

Pada skripsi ini, hanya dibahas analisis dinamik model epidemi *SEIS* dengan dampak media. Untuk penelitian selanjutnya, dapat dilakukan analisis terkait kemungkinan terjadinya bifurkasi.



**DAFTAR PUSTAKA**

- Alligood, K. T., T. D. Sauer, dan J. A. Yorke. 2000. *CHAOS: An Introduction to Dynamical System*. Springer-Verlag. New York.
- Boyce, W. E. dan R. C. DiPrima. 2012. *Elementary Differential Equation*. Tenth Edition. John Wiley and Sons, Inc. United State of America.
- Brauer, F. 2004. Backward Bifurcation in Simple Vaccination Model. *Journal of Mathematical Analysis and Application*. Hal. 418:431
- Brauer, F., dan C. C. Chavez. 2010. *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*. Springer. New York.
- Cui, J., Y. Sun, dan H. Zhu. 2008. The Impact of Media on the Control of Infectious Diseases. *Differential Equations*. Volume 20. Hal 31-35.
- Finizio, N. dan G. Ladas. 1982. *An Introduction to Differential Equation*. Wadsworth Publishing Company Belmont. California.
- Huo, H. F., P. Yang, dan H. Xiang. 2018. Stability and Bifurcation for an SEIS Epidemic Model with the Impact of Media. *Physica A*. Volume 490. Hal 702-720.
- Liu, M., Y. Chang, dan L. Zuo. 2016. Modelling the Impact of Media in Controlling the Diseases with a Piecewish Transmission Rate. *Discrete Dynamics in Nature and Society*. Volume 2016. Hal 1-6.
- Murray, J. D. 2002. *Mathematical Biology: I. An Introduction*. Third Edition. Spinger-Verlag. New York.
- Pawelek, P. A., A. O. Hirsch, dan L. Rong. 2014. Modeling the Impact of Twitter on Influenza Epidemics. *Biosci*. Volume 281. Hal 24-35.

- Soedyarto, N. dan Maryanto. 2008. *Matematika 2 untuk SMA atau MA Kelas XI Program IPA*. Pusat Perbukuan Departemen Pendidikan Nasional. Jakarta.
- Sun, C., W. Yang, J. Arino, dan K. Khan. 2011. Effect of Media-Induced Social Distancing on Disease Transmission in a Two Patch Setting. *Biosci*. Volume 230. Hal 87-95.
- Wilson, N., G. Thomson., dan O. Mansoor. 2004. Print Media Response to SARS in New Zealand. *Emerg.Infect.Disease*. Volume 10. Hal 1461-1464.

