MODEL REGRESI LINIER BERGANDA MENGGUNAKAN METODE *BOOTSTRAP PAIRS*

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Statistika

oleh:
SEKAR MENTARI OKTAVIA HERINDA
145090507111004

PROGRAM STUDI SARJANA STATISTIKA
JURUSAN STATISTIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2018

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

MODEL REGRESI LINIER BERGANDA MENGGUNAKAN METODE *BOOTSTRAP PAIRS*

oleh:

SEKAR MENTARI OKTAVIA HERINDA
145090507111004

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji
pada tanggal 16 Juli 2018
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Statistika

Pembimbing,

Dr. Umu Sa`adah, M.Si.
NIP. 196807252002122001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Statistika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Rahma Fitriani, S.Si., M.Sc., Ph.D.
NIP. 197603281999032001

LEMBAR PERNYATAAN

Nama : Sekar Mentari Oktavia Herinda
NIM : 145090507111004
Jurusan : Statistika
Program Studi : Statistika
Penulis Skripsi Berjudul :

MODEL REGRESI LINIER BERGANDA MENGGUNAKAN METODE *BOOTSTRAP PAIRS*

Dengan ini menyatakan bahwa :

1. **Isi dari skripsi yang saya buat adalah benar-benar karya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain, selain nama-nama yang termasuk di isi dan tertulis di daftar pustaka dalam Skripsi ini.**
2. **Apabila dikemudian hari ternyata Skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya akan bersedia menanggung segala resiko yang akan saya terima.**

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 16 Juli 2018
Yang menyatakan,

Sekar Mentari Oktavia Herinda
NIM. 145090507111004

MODEL REGRESI LINIER BERGANDA MENGGUNAKAN METODE *BOOTSTRAP PAIRS*

ABSTRAK

Regresi linier berganda adalah analisis pendugaan atau peramalan nilai peubah respon Y berdasarkan hasil pengukuran pada beberapa peubah prediktor X_1, X_2, …, X_r. Dalam analisis regresi, metode pendugaan yang paling sering digunakan adalah Metode Kuadrat Terkecil (MKT). Asumsi-asumsi yang harus terpenuhi dalam melakukan pendugaan parameter dengan MKT agar dihasilkan penduga parameter yang baik atau bersifat BLUE (*Best Linear Unbiased Estimator*), yaitu kenormalan galat, non autokorelasi, non multikolinieritas dan homoskedastisitas. Asumsi yang tidak terpenuhi pada penelitian ini antara lain kenormalan galat, non multikolinieritas, dan homoskedastisitas. Metode yang dapat digunakan jika terdapat asumsi yang tidak terpenuhi adalah metode *bootstrap pairs* atau pasangan data karena merupakan teknik *resampling* dengan menggunakan data berpasangan antara peubah prediktor dan peubah respon secara bersamaan. Metode *bootstrap pairs* merupakan metode yang akurat untuk melakukan pendugaan parameter regresi yang tidak memenuhi asumsi kenormalan galat, non multikolinieritas dan homoskedastisitas karena tidak memerlukan asumsi khusus dalam pengerjaannya, tetapi hanya bergantung pada data yang tersedia.

Kata kunci: *Bootstrap Pairs*, Metode Kuadrat Terkecil (MKT), Regresi Linier Berganda, *Resampling*.

MULTIPLE LINEAR REGRESSION MODEL USING BOOTSTRAP PAIRS METHOD

ABSTRACT

Multiple linear regression is estimating analysis or predicting the value of a response variable Y on the basis of a set of measurements taken on several predictor variables X_1, X_2, …, X_r. In the regression analysis, the most used estimation method is the Ordinary Least Squares Method (OLS). The assumptions that must be fulfilled in estimating of parameters with OLS to produce a good parameter estimator or BLUE (Best Linear Unbiased Estimator), is the normality of error, non autocorrelation, non multicolinearity, and homoscedasticity. Unfulfilled assumptions in this study is the normality of error, non multicolinearity, and homoscedasticity. The method that can be used if the assumptions unfulfilled is the bootstrap pairs method or data pair because is a resampling technique using paired data between predictor variables and response variables simultaneously. The bootstrap pairs method is an accurate method for estimating regression parameters that do not meet assumptions the normality of error, non multicolinearity, and homoscedasticity because the bootstrap method does not require spesific assumptions in the process, but only depends on available data.

Keywords: Bootstrap Pairs, Ordinary Least Squares Method, Multiple Linear Regression, Resampling.

KATA PENGANTAR

Puji syukur kepada Tuhan yang Maha Esa sehingga penulis dapat menyusun dan menyelesaikan skripsi yang berjudul “Model Regresi Linier Berganda Menggunakan Metode *Bootstrap Pairs*”. Dalam menyelesaikan skripsi ini banyak pihak telah membantu dan memberi dukungan kepada penulis, untuk itu penulis ingin menyampaikan rasa terimakasih kepada:

1. Dr. Umu Sa`adah, M.Si selaku pembimbing skripsi yang telah memberikan bimbingan, saran, dan arahan.
2. Prof. Dr. Ir. Ni Wayan S.W, MS selaku dosen penguji I skripsi yang telah memberikan bimbingan, saran, dan arahan.
3. Darmanto, S.Si., M.Si selaku dosen penguji II skripsi yang telah memberikan bimbingan, saran, dan arahan.
4. Achmad Efendi, S.Si., M.Sc., Ph.D selaku ketua Program Studi Sarjana Statistika Universitas Brawijaya.
5. Rahma Fitriani, S.Si., M.Sc., Ph.D selaku ketua Jurusan Statistika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Brawijaya.
6. Keluarga yang selalu mendoakan dan memberikan dukungan.
7. Teman-teman Statistika 2014 Universitas Brawijaya yang senantiasa memberi dukungan.
8. Semua pihak yang telah membantu yang tidak dapat disebutkan satu persatu.

Penulis menyadari bahwa penulisan skripsi ini masih belum sempurna, untuk itu penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun serta bermanfaat bagi penulis. Semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi semua pihak.

Malang, Juli 2018

(Penulis)

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL .... **i**
LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI .... **ii**
LEMBAR PERNYATAAN .... **iii**
ABSTRAK .... **iv**
ABSTRACT .... **v**
KATA PENGANTAR .... **vi**
DAFTAR ISI .... **vii**
DAFTAR GAMBAR .... **ix**
DAFTAR TABEL .... **x**
DAFTAR LAMPIRAN .... **xi**
BAB I PENDAHULUAN **1**
1.1 Latar Belakang 1
1.2 Rumusan Masalah 3
1.3 Tujuan Penelitian 3
1.4 Manfaat Penelitian 3
1.5 Batasan Masalah 3
BAB II TINJAUAN PUSTAKA **5**
2.1 Analisis Regresi Linier Berganda 5
2.2 Uji Asumsi Klasik 6
2.2.1 Kenormalan Galat 6
2.2.2 Non Autokorelasi 7
2.2.3 Non Multikolinieritas 8
2.2.4 Homoskedastisitas 8
2.3 Metode Kuadrat Terkecil Biasa 9
2.4 Metode *Bootstrap* 11
2.5 *Bootstrap Pairs* 11
2.6 Pengujian Parameter 12
2.6.1 Uji Parsial (Uji *t*) 12
2.6.2 Uji Simultan (Uji *F*) 13
2.7 Koefisien Determinasi Terkoreksi (R^2_{adj}) 13
BAB III METODE PENELITIAN **15**
3.1 Data Penelitian 15
3.2 Metode Analisis 15
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN **21**
4.1 Hasil Uji Asumsi Klasik 21
4.1.1 Hasil Uji Kenormalan Galat 21
4.1.2 Hasil Uji Non Autokorelasi 21

4.1.3 Hasil Uji Non Multikolinieritas 21
4.1.4 Hasil Uji Homoskedastisitas 22
4.2 Hasil Pendugaan Parameter dengan MKT 22
4.3 Hasil Pendugaan Parameter dengan Metode *Bootstrap* Pairs 24
4.4 Hasil Pengujian Parameter *Bootstrap Pairs* 26
4.4.1 Hasil Uji Parsial Parameter *Bootstrap Pairs* 26
4.4.2 Hasil Uji Simultan Parameter *Bootstrap Pairs* 27
4.5 Hasil Koefisien Determinasi Terkoreksi (R^2_{adj}) untuk Pendugaan Parameter dengan Metode *Bootstrap Pairs* 28
BAB V KESIMPULAN DAN SARAN 31
5.1 Kesimpulan 31
5.2 Saran 31
DAFTAR PUSTAKA 33
LAMPIRAN 35

DAFTAR GAMBAR

Gambar 3.1 Diagram Alir Simulasi Data..17
Gambar 3.2 Diagram Alir Regresi Linier Berganda Menggunakan Metode *Bootstrap*..18

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1 Aturan Keputusan Uji *Durbin-Watson*. 8
Tabel 4.1 Hasil Pengujian Asumsi Non Multikolinieritas.............. 22
Tabel 4.2 Hasil Pendugaan Parameter Data Asli............................ 23
Tabel 4.3 Hasil Pendugaan Parameter dengan Metode Kuadrat Terkecil (MKT) 23
Tabel 4.4 Penduga Parameter dengan *Bootstrap Pairs* 24
Tabel 4.5 Salah Baku dengan *Bootstrap Pairs*............................... 25
Tabel 4.6 Nilai Bias Penduga 26
Tabel 4.7 Hasil Uji Parsial Metode *Bootstrap Pairs* 26
Tabel 4.8 Hasil Uji Simultan Metode *Bootstrap Pairs* 27
Tabel 4.9 Hasil Perhitungan R^2_{adj} 28

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1. Data Bangkitan 35
Lampiran 2. Data Hasil *Resampling Bootstrap* 100 kali 36
Lampiran 3. Data Hasil *Resampling Bootstrap* 150 kali 37
Lampiran 4. Data Hasil *Resampling Bootstrap* 200 kali 38
Lampiran 5. Data Hasil *Resampling Bootstrap* 250 kali 39
Lampiran 6. Data Hasil *Resampling Bootstrap* 300 kali 40
Lampiran 7. *Source Code* Data Bangkitan 41
Lampiran 8. *Source Code* Metode *Bootstrap Pairs* 44

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Analisis regresi merupakan metode pendugaan atau peramalan nilai peubah respon Y berdasarkan peubah prediktor X yang telah diketahui nilainya. Regresi linier berganda adalah analisis pendugaan atau peramalan nilai peubah respon Y berdasarkan hasil pengukuran pada beberapa peubah prediktor X_1, X_2, …, X_r (Walpole, 1993). Metode pendugaan yang paling sering digunakan dalam analisis regresi adalah Metode Kuadrat Terkecil (MKT) karena MKT lebih sederhana secara matematis dibandingkan metode yang lain. Asumsi-asumsi yang harus terpenuhi dalam melakukan pendugaan dengan MKT agar dihasilkan penduga parameter yang baik, yaitu bersifat BLUE (*Best Linear Unbiased Estimator*), antara lain kenormalan galat, non autokorelasi, non multikolinieritas dan homoskedastisitas, asumsi-asumsi tersebut disebut dengan asumsi klasik.

Namun, dalam melakukan analisis regresi tidak sedikit galat pada data yang digunakan tidak memenuhi asumsi klasik. Asumsi kenormalan galat didasarkan pada teori limit terpusat (*central limit theorem*) yang menyatakan bahwa distribusi jumlah dari peubah-peubah yang independen dan terdistribusi secara identik akan cenderung terdistribusi normal dengan semakin meningkatnya jumlah peubah tersebut secara tidak terbatas (Gujarati dan Porter, 2010). Apabila asumsi kenormalan galat tidak terpenuhi maka akan berdampak pada penduga parameter yang dihasilkan tidak bersifat BLUE. Multikolinieritas adalah adanya hubungan atau korelasi linier antar peubah prediktor. Efek dari multikolinieritas yaitu walaupun BLUE, penduga yang dihasilkan tidak unik karena matriks varians kovarians singular yang menyebabkan determinannya nol sehingga invers dari matriks varians kovarians tidak dapat dicari. Heteroskedastisitas dapat timbul sebagai hasil dari keberadaan pencilan. Adanya heteroskedastisitas menyebabkan penduga-penduga yang dihasilkan tidak lagi efisien sehingga tidak memiliki varians yang minimum. Oleh karena itu, dibutuhkan metode yang dapat digunakan untuk data yang tidak memenuhi asumsi kenormalan galat, non multikolinieritas dan homoskedastisitas. Metode yang dapat digunakan adalah metode *bootstrap pairs* atau pasangan data.

Metode *bootstrap* diperkenalkan oleh Efron pada tahun 1979 sebagai metode berbasis komputer untuk pendugaan *standard error* dari $\hat{\theta}$ (nilai duga bagi parameter populasi θ). Metode *bootstrap* merupakan metode simulasi berbasis data yang dapat digunakan untuk inferensia statistika. Asumsi dasar dalam melakukan pendugaan parameter dengan metode *bootstrap* yaitu melakukan penyampelan dengan pengembalian terhadap data asli (Fitri, 2014). Metode *bootstrap* adalah teknik untuk melakukan pendugaan dari penduga statistik tanpa membuat asumsi tentang distribusi data. Dengan kata lain, *bootstrap* tidak harus bertumpu pada asumsi distribusi. Selain itu, metode *bootstrap* digunakan pada data yang berukuran kecil. Pada metode *bootstrap* terdapat dua prosedur yang dapat diterapkan pada model regresi linier berganda yaitu *bootstrap pairs* dan *bootstrap residual*.

Penelitian sebelumnya yang membahas tentang metode *bootstrap* adalah Iskandar, dkk (2013) dengan judul Perbandingan Metode *Bootstrap* dan *Jackknife* Dalam Menaksir Parameter Regresi untuk Mengatasi Multikolinieritas. Pada penelitian tersebut, metode *bootstrap* merupakan metode yang paling efisien dibandingkan metode *Jackknife* karena kecilnya tingkat kesalahan yang dihasilkan serta tingkat keakuratan yang tinggi dari metode *bootstrap* dalam menduga koefisien regresi ketika terjadi multikolinieritas. Penelitian sebelumnya yang juga membahas tentang metode *bootstrap* adalah Astari, dkk (2014) dengan judul Penerapan Metode *Bootstrap Residual* Dalam Mengatasi Bias pada Penduga Parameter Analisis Regresi. Pada penelitian tersebut, bias disebabkan karena data mengandung pencilan sehingga asumsi kenormalan galat tidak terpenuhi.

Berbeda dari kedua penelitian sebelumnya, penelitian kali ini ingin diketahui pendugaan parameter regresi linier berganda menggunakan metode *bootstrap pairs* pada data yang tidak memenuhi asumsi kenormalan galat, non multikolinieritas dan homoskedastisitas. Data yang digunakan adalah data bangkitan dengan parameter yang digunakan yaitu $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ dan σ^2 yang diambil dari penelitian dengan judul "Perbandingan *Robust* Penduga LTS dan LMS Dalam Penanganan Pencilan Berpengaruh Pada Regresi Linier Berganda" (Mahendra, 2015). Metode *bootstrap* digunakan agar dalam analisis regresi linier berganda diperoleh pendugaan parameter yang terbaik atau bersifat BLUE.

1.2 Rumusan Masalah

Ditinjau dari latar belakang, permasalahan yang dirumuskan dalam penelitian ini adalah:

1. Bagaimana model regresi linier berganda menggunakan metode *bootstrap pairs*?
2. Berapa nilai *B* yang dapat menghasilkan model regresi terbaik?

1.3 Tujuan Penelitian

Ditinjau dari rumusan masalah, penelitian ini memiliki tujuan sebagai berikut:

1. Menjelaskan model regresi linier berganda menggunakan metode *bootstrap pairs*.
2. Mengetahui berapa nilai *B* yang dapat menghasilkan model regresi terbaik.

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan informasi dan menambah pengetahuan tentang pengembangan ilmu statistika khususnya metode *bootstrap pairs* dalam model regresi linier berganda.

1.5 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam penelitian ini adalah:

1. Data yang digunakan adalah data bangkitan dengan peubah respon yaitu *Y* dan peubah prediktor antara lain X_1, X_2, dan X_3.
2. Data bangkitan yang diinginkan yaitu data dengan galat tidak normal, peubah prediktor yang memiliki hubungan linier, dan memiliki ragam galat yang tidak homogen atau asumsi homoskedastisitas tidak terpenuhi.
3. Ukuran *B* yang digunakan dalam penelitian ini adalah *B*=100, *B*=150, *B*=200, *B*=250 dan *B*=300.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Analisis Regresi Linier Berganda

Regresi linier berganda adalah analisis pendugaan atau peramalan nilai peubah respon *Y* berdasarkan hasil pengukuran pada beberapa peubah prediktor X_1, X_2, …, X_r (Walpole, 1993). Contoh acak berukuran n dari populasi itu dapat dituliskan sebagai (x_{1i}, x_{2i}, …, $x_{ri}, y_i, i = 1,2, \dots, n$). Nilai y_i sekali lagi adalah nilai yang berasal dari suatu peubah acak Y_i. Diasumsikan persamaan

$$\mu_{Y|x_1,x_2,\dots,x_r} = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_r x_r, \tag{2.1}$$

sedangkan dalam hal ini $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_r$ adalah parameter yang harus diduga dari data. Persamaan regresi linier berganda dapat ditulis sebagai berikut (Draper dan Smith, 1992):

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \beta_k X_{ki} + \varepsilon_i \tag{2.2}$$

di mana:

k : banyaknya peubah prediktor
β_0 : intersep untuk *Y* ketika *X*=0
β_j : koefisien regresi peubah prediktor ke-*j*
X_{ji} : nilai ke-*i* peubah prediktor ke-*j*
Y_i : nilai ke-*i* peubah respon
ε_i : nilai ke-*i* peubah acak galat
i : 1,2,...,*n*
j : 1,2,...,*k*

Dalam lambang matriks persamaan (2.2) menjadi

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{2.3}$$

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{k1} \\ 1 & x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{k2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{kn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$$

di mana:

$\boldsymbol{Y}$: vektor respon $n \times 1$
$\boldsymbol{X}$: matriks peubah prediktor ukuran $n \times (k+1)$
$\boldsymbol{\beta}$: vektor parameter ukuran $(k+1) \times 1$
$\boldsymbol{\varepsilon}$: vektor galat ukuran $n \times 1$

2.2 Uji Asumsi Klasik

Dalam model regresi linier, penduga parameter harus memenuhi beberapa sifat-sifat statistik yang diharapkan, seperti linier, tidak bias, konsisten, dan memiliki varians minimum atau biasa disebut dengan *Best Linear Unbiased Estimator* (BLUE). Asumsi yang harus terpenuhi sebelum melakukan pendugaan parameter, antara lain:

2.2.1 Kenormalan Galat

Menurut Draper dan Smith (1992), kenormalan galat mengasumsikan bahwa setiap ε_i terdistribusi secara normal dengan

$$E(\varepsilon_i) = 0$$
$$V(\varepsilon_i) = \sigma^2$$
$$cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0, i \neq j$$

Dengan asumsi kenormalan, galat dari peubah tidak hanya tidak berkorelasi, tetapi juga terdistribusi secara sendiri-sendiri, dalam arti distribusi di antara peubah-peubah tersebut tidak saling mempengaruhi. Sehingga asumsi-asumsi tersebut dapat ditulis sebagai persamaan berikut

$$\varepsilon_i \sim NIID(0, \sigma^2) \tag{2.4}$$

di mana, NID merupakan singkatan dari terdistribusi secara normal dan independen.

Dengan penggunaan statistik teori limit terpusat (*central limit theorem*) dapat diketahui bagaimana sejumlah besar peubah acak yang independen dan terdistribusi secara identik. Distribusi jumlah dari peubah-peubah yang independen dan terdistribusi secara identik ini akan cenderung terdistribusi normal, dengan semakin meningkatnya jumlah peubah tersebut secara tidak terbatas (Gujarati dan Porter, 2010).

Pengujian asumsi kenormalan galat dilakukan dengan uji *Jarque-Bera* (*JB*) dengan hipotesis sebagai berikut:

H_0 : galat menyebar normal vs

H_1 : galat tidak menyebar normal

Jika H_0 benar, maka statistik uji *JB*:

$$JB = \frac{n}{6}\left[S^2 + \frac{(K-3)^2}{4}\right] \tag{2.5}$$

di mana,

n : ukuran sampel

S : kemencengan

K : peruncingan

Untuk peubah yang didistribusikan secara normal, kemencengannya nol dan peruncingannya adalah 3. Berdasarkan asumsi normalitas, statistik *JB* pada persamaan (2.5) mengikuti distribusi *chi-square* dengan d.k. (banyaknya peubah) secara asimtotis. Secara simbolis,

$$JB_{asy} \sim \chi^2_{(d.k)}$$

Aturan pengambilan keputusan:

- Jika nilai *chi-square* yang dihitung dari persamaan (2.5) lebih besar daripada nilai *chi-square* kritis pada tingkat signifikansi $\alpha = 0.05$, maka tolak hipotesis nol yang menyatakan distribusi normal.
- Tolak H_0 jika $JB >$ titik kritis *Jarque-Bera*, sehingga dapat disimpulkan bahwa galat tidak menyebar normal *p-value* $< \alpha = 0.05$.

Kriteria dengan α:

- Terima H_0 jika *p-value* $> \alpha = 0.05$, sehingga dapat disimpulkan bahwa galat menyebar normal.
- Tolak H_0 jika *p-value* $< \alpha = 0.05$, sehingga dapat disimpulkan bahwa galat tidak menyebar normal.

2.2.2 Non Autokorelasi

Pada model regresi, galat ε_i dianggap prediktor satu sama lain. Apabila galat ε_i berkorelasi satu sama lain maka disebut berautokorelasi. Hipotesis untuk uji non autokorelasi adalah:

H_0 : galat tidak berkorelasi vs

H_1 : galat berkorelasi

Uji yang paling sering dipakai untuk mendeteksi autokorelasi adalah statistik *Durbin-Watson*, yang dapat ditulis dengan rumus:

$$d = \frac{\sum_{i=2}^{n}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{i=2}^{n} e_t^2} \tag{2.6}$$

di mana:

d : statistika *Durbin-Watson*

e_t : nilai galat pada waktu ke-*t*

e_{t-1} : nilai galat pada waktu ke-(*t*-1)

Menurut Gujarati (2006), aturan keputusan statistik *Durbin-Watson* antara lain:

Tabel 2.1 Aturan Keputusan Uji *Durbin-Watson*.

Kriteria	Keputusan	Kesimpulan
$0 < d < d_L$	Tolak H_0	Ada autokorelasi positif
$d_L \le d \le d_U$	Tidak ada keputusan	Tidak dapat diputuskan terdapat atau tidak terdapat autokorelasi
$4 - d_L < d < 4$	Tolak H_0	Ada autokorelasi negatif
$4 - d_U \le d \le 4 - d_L$	Tidak ada keputusan	Tidak dapat diputuskan terdapat atau tidak terdapat autokorelasi
$d_U < d < 4 - d_U$	Terima H_0	Tidak ada autokorelasi positif atau negatif

2.2.3 Non Multikolinieritas

Asumsi non multikolinieritas yaitu tidak adanya hubungan linier di antara peubah-peubah prediktor *X* dalam model regresi linier berganda. Hipotesis untuk uji non multikolinieritas adalah:

H_0 : tidak terdapat hubungan linier antar peubah prediktor vs

H_1 : terdapat hubungan linier antar peubah prediktor

Salah satu cara untuk mendeteksi multikolinieritas yaitu dengan melihat *Variance Inflating Factor* (VIF), yang ditulis dengan rumus sebagai berikut (Gujarati dan Porter, 2010):

$$\text{VIF} = \frac{1}{(1-R^2)} \tag{2.7}$$

di mana, R^2 merupakan koefisien determinasi.

Jika nilai VIF $\le$ 10 maka terima H_0 atau tidak terjadi multikolinieritas.

2.2.4 Homoskedastisitas

Asumsi homoskedastisitas bertujuan untuk melihat apakah galat memiliki varians yang sama. Adanya heteroskedastisitas tidak merusak sifat tak bias penduga-penduga OLS, tetapi penduga-penduga itu tidak lagi efisien. Secara simbolis, dapat dituliskan sebagai berikut:

$$E\left(\varepsilon_i^2\right) = \sigma^2 \qquad i = 1,2,\dots,n. \tag{2.8}$$

Salah satu uji untuk mendeteksi adanya heteroskedastisitas yaitu dengan menggunakan uji *Breusch Pagan*. Misal terdapat model regresi tiga peubah berikut ini:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \beta_k X_{ki} + \varepsilon_i \tag{2.9}$$

Asumsikan bahwa *error variance* σ_i^2 dideskripsikan sebagai berikut:

$$\sigma_i^2 = \alpha_1 + \alpha_2 Z_{2i} + \cdots + \alpha_m Z_{mi} \quad (2.10)$$

artinya, σ_i^2 merupakan fungsi linier dari Z. Jika $\alpha_2 = \alpha_3 = \cdots = \alpha_m = 0$, $\sigma_i^2 = \alpha_1$, di mana merupakan konstanta. Untuk menguji apakah σ_i^2 homoskedastik, dapat menguji hipotesis sebagai berikut:

H_0 : $\alpha_2 = \alpha_3 = \cdots = \alpha_m = 0$ (ragam galat homogen) vs

H_1 : paling tidak terdapat satu α_i yang tidak sama dengan nol (ragam galat tidak homogen)

Berikut adalah prosedur uji *Breusch Pagan* (Gujarati dan Porter, 2010):

1. Duga persamaan (2.9) dengan MKT dan dapatkan galat $\hat{\varepsilon}_1, \hat{\varepsilon}_2, \ldots, \hat{\varepsilon}_n$.
2. Dapatkan $\tilde{\sigma}^2 = \sum \hat{\varepsilon}_i^2 / n$.
3. Ciptakan peubah p_i yang didefinisikan sebagai berikut:
   $$p_i = \hat{\varepsilon}_i^2 / \tilde{\sigma}^2$$
   di mana masing-masing residual dikuadratkan dan dibagi dengan $\tilde{\sigma}^2$.
4. Regresikan p_i terhadap Z sebagai
   $$p_i = \alpha_1 + \alpha_2 Z_{2i} + \cdots + \alpha_m Z_{mi} + v_i \quad (2.11)$$
   di mana v_i adalah residual (faktor kesalahan) pada regresi ini.
5. Dapatkan penjelasan atas jumlah kuadrat (ESS) dari persamaan (2.11) dan definisikan
   $$\Theta = \frac{1}{2}(\text{ESS}) \quad (2.12)$$
   Asumsikan bahwa ε_i berdistribusi normal, jika terdapat homoskedastisitas dan jika ukuran sampel n meningkat sampai tidak terhingga, maka
   $$\Theta \sim \chi^2_{m-1} \quad (2.13)$$
   Artinya, Θ mengikuti distribusi *chi-square* dengan df$(m-1)$. Jika nilai $\Theta\ (=\chi^2)$ melebihi nilai χ^2 kritis pada tingkat signifikansi yang dipilih, maka dapat menolak hipotesis nol.

2.3 Metode Kuadrat Terkecil Biasa

Metode Kuadrat Terkecil Biasa atau *Ordinary Least Square* (OLS) adalah salah satu metode yang paling umum digunakan dalam analisis regresi yang bertujuan untuk meminimumkan galat ε_i sehingga nilai penduganya mendekati nilai yang sesungguhnya (Astari dkk, 2014). Menurut Gujarati (2006), penduga OLS dikatakan penduga terbaik, linier, dan tidak bias (*Best Linear Unbiased Estimator*), jika memiliki sifat-sifat sebagai berikut:

1. Bersifat linier, di mana merupakan fungsi linier dari sebuah peubah acak, seperti peubah respon *Y* dalam sebuah model regresi.
2. Bersifat tidak bias, di mana nilai rata-rata atau nilai ekspektasinya $E(\hat{\beta}_2)$ sama dengan nilai sebenarnya β_2.
3. Memiliki varians minimum dari semua kelompok penduga-penduga yang linier dan tidak bias, sebuah penduga tidak bias dengan varians terkecil dikenal sebagai penduga yang efisien (*efficient estimator*).

Persamaan untuk MKT adalah sebagai berikut (Sembiring, 1995):

$$J = \sum \varepsilon_i^2 = \sum (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_{i1} - \beta_2 x_{i2} - \cdots - \beta_k x_{ik})^2 \qquad (2.14)$$

Turunkan J secara parsial terhadap $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ dan disamakan dengan nol. Sehingga menjadi:

$$\frac{\partial J}{\partial \beta_0} = -2 \sum (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_{i1} - \beta_2 x_{i2} - \cdots - \beta_k x_{ik}) = 0$$
$$\frac{\partial J}{\partial \beta_1} = -2 \sum (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_{i1} - \beta_2 x_{i2} - \cdots - \beta_k x_{ik}) x_{i1} = 0$$
$$\frac{\partial J}{\partial \beta_2} = -2 \sum (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_{i1} - \beta_2 x_{i2} - \cdots - \beta_k x_{ik}) x_{i2} = 0$$
$$\begin{array}{cc} . & . \\ . & . \\ . & . \end{array}$$
$$\frac{\partial J}{\partial \beta_k} = -2 \sum (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_{i1} - \beta_2 x_{i2} - \cdots - \beta_k x_{ik}) x_{ik} = 0 \qquad (2.15)$$

Setelah disusun kembali dan ganti semua parameter dengan penduganya, sistem persamaan ini dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned}
\sum y_i &= n\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum x_{i1} + \hat{\beta}_2 \sum x_{i2} + \cdots + \hat{\beta}_k \sum x_{ik} \\
\sum y_i x_{i1} &= \hat{\beta}_0 \sum x_{i1} + \hat{\beta}_1 \sum x_{i1}^2 + \hat{\beta}_2 \sum x_{i2} x_{i1} + \cdots + \\
&\quad \hat{\beta}_k \sum x_{ik} x_{i1} \\
\sum y_i x_{i2} &= \hat{\beta}_0 \sum x_{i2} + \hat{\beta}_1 \sum x_{i1} x_{i2} + \hat{\beta}_2 \sum x_{i2}^2 + \cdots + \\
&\quad \hat{\beta}_k \sum x_{ik} x_{i2} \\
&\begin{array}{ccccc} . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \end{array} \\
\sum y_i x_{ik} &= \hat{\beta}_0 \sum x_{ik} + \hat{\beta}_1 \sum x_{i1} x_{ik} + \hat{\beta}_2 \sum x_{i2} x_{ik} + \cdots + \\
&\quad \hat{\beta}_k \sum x_{ik}^2 \qquad (2.16)
\end{aligned}$$

Persamaan (2.16) disebut persamaan normal. Jika ditulis dalam lambang matriks maka bentuknya menjadi

$$(\boldsymbol{X'X})\boldsymbol{b} = \boldsymbol{X'Y} \qquad (2.17)$$

bila,

$$\boldsymbol{X}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_{11} & x_{21} & \dots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{1k} & x_{2k} & \dots & x_{nk} \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{Y}' = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, dan $\boldsymbol{b}' = (b_0, b_1, b_2, \dots, b_k)$.
Sehingga, permasaan normal menjadi

$$\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y} \quad (2.18)$$

2.4 Metode *Bootstrap*

Metode *bootstrap* diperkenalkan oleh Efron pada tahun 1979 sebagai metode berbasis komputer untuk pendugaan *standard error* dari $\hat{\theta}$ (nilai duga bagi parameter populasi θ). Menurut Efron dan Tibshirani (1993), metode *bootstrap* adalah metode simulasi berbasis data yang dapat digunakan untuk inferensia statistika. Menurut Fitri (2014), prinsip metode *bootstrap* yaitu melakukan pengambilan data sampel dari data populasi dengan mengambil sebanyak *m* sampel yang berasal dari *n* populasi. Setelah diperoleh sampel yang dianggap cukup mewakili populasi, dilakukan proses *resampling* atau penyampelan *bootstrap* dengan teknik pengembalian.

2.5 *Bootstrap Pairs*

Metode *bootstrap pairs* merupakan teknik *resampling* dengan menggunakan data berpasangan antara peubah prediktor dan peubah respon secara bersamaan (Fitri, 2014). Menurut Bastian dan Sulistianingsih (2015), pada metode *bootstrap pairs* data peubah prediktor dan peubah respon hasil proses *resampling* dianggap sebagai sampel *bootstrap*, yang selanjutnya diduga dengan menggunakan MKT untuk memperoleh penduga parameter regresi. Prosedur *bootstrap pairs* untuk pendugaan parameter regresi adalah sebagai berikut:

1. Ambil sampel *bootstrap* berukuran *n* dari data berpasangan (Y_i, X_i) dengan $i = 1,2, \dots, n$ secara acak dengan peluang $1/n$. Data yang diperoleh merupakan data asli yang berasal dari populasi.
2. Hitung pendugaan parameter regresi untuk sampel *bootstrap* menggunakan MKT (Sahinler dan Topuz, 2017):
$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}^* = (\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{X}^*)^{-1}\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{Y}^* \quad (2.19)$$
3. Ulangi langkah-langkah sebelumnya sebanyak *B* kali, di mana $b = 1,2, \dots, B$.

4. Pendekatan pendugaan *bootstrap* untuk parameter regresi adalah *mean* dari distribusi $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*1}, \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*2}, \dots, \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*B}$ yaitu (Sahinler dan Topuz, 2017):
$$\overline{\widehat{\boldsymbol{\beta}}}^{*} = \sum_{b=1}^{B} \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*b} \frac{1}{B} \tag{2.20}$$
Sehingga, diperoleh matriks sebagai berikut:
$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*b} = (\hat{\beta}_0^{*b}, \hat{\beta}_1^{*b}, \hat{\beta}_2^{*b}, \dots, \hat{\beta}_k^{*b})$$
5. Persamaan regresi *bootstrap* adalah (Sahinler dan Topuz, 2017):
$$\hat{Y} = X\hat{\beta}^{*b} + \varepsilon \tag{2.21}$$
di mana, $\hat{\beta}^{*b}$ merupakan penduga tidak bias dari β.

2.6 Pengujian Parameter

Menurut Gujarati dan Porter (2010), pengujian parameter merupakan sebuah prosedur di mana hasil sampel digunakan untuk membuktikan kebenaran atau kesalahan dari hipotesis nol. Pengujian parameter digunakan untuk mengetahui apakah peubah prediktor memberikan pengaruh nyata terhadap peubah respon baik secara parsial maupun simultan.

2.6.1 Uji Parsial (Uji *t*)

Uji parsial digunakan untuk mengetahui apakah peubah prediktor memberikan pengaruh terhadap peubah respon secara parsial atau individu. Hipotesis untuk uji parsial adalah sebagai berikut:

H_0 : $\beta_j = 0$ (peubah prediktor ke-*j* tidak memberikan pengaruh terhadap peubah respon) vs

H_1 : $\beta_j \neq 0$ (peubah prediktor ke-*j* memberikan pengaruh terhadap peubah respon)

Uji parsial dilakukan dengan menggunakan uji *t*, dengan rumus sebagai berikut:
$$t = \frac{\overline{\hat{\beta}}_j^{*}}{se(\overline{\hat{\beta}}_j^{*})} \tag{2.22}$$

Kriteria pengambilan keputusan adalah:

Jika $|t| \leq t_{n-k-1}^{\alpha/2}$, maka terima H_0.

Jika $|t| > t_{n-k-1}^{\alpha/2}$, maka tolak H_0.

atau,

p-value $\geq \alpha$, maka terima H_0.

p-value $< \alpha$, maka tolak H_0.

2.6.2 Uji Simultan (Uji *F*)

Uji simultan digunakan untuk mengetahui apakah semua peubah prediktor memberikan pengaruh terhadap peubah respon secara simultan atau bersama-sama. Hipotesis untuk uji simultan adalah sebagai berikut:

H_0 : $\beta_1 = \cdots = \beta_k = 0, j = 1,2, \ldots, k$ (semua peubah prediktor tidak memberikan pengaruh terhadap peubah respon)

H_1 : paling tidak terdapat satu *j* di mana $\beta_j \neq 0, j = 1,2, \ldots, k$

Uji simultan dilakukan dengan menggunakan uji *F*, dengan rumus sebagai berikut:

$$F = \frac{Rata-rata\ Kuadrat\ Regresi}{Rata-rata\ Kuadrat\ Sisa} = \frac{\sum(\hat{Y}_i^* - \bar{Y}^*)^2/df_{regresi}}{\sum(Y_i^* - \hat{Y}_i^*)^2/df_{sisa}} \quad (2.23)$$

di mana,

$df_{regresi}$: k

df_{sisa} : $n - k$ - 1

k : banyaknya peubah prediktor.

Kriteria pengambilan keputusan adalah:

Jika $|F| \leq F_{k,n-k-1}^{\alpha/2}$, maka terima H_0.

Jika $|F| > F_{k,n-k-1}^{\alpha/2}$, maka tolak H_0.

atau,

p-value $\geq \alpha$, maka terima H_0.

p-value $< \alpha$, maka tolak H_0.

2.7 Koefisien Determinasi Terkoreksi (R^2_{adj})

Koefisien determinasi terkoreksi (R^2_{adj}) merupakan sebuah ukuran yang paling sering digunakan untuk mengukur *goodness of fit* dari persamaan regresi. Nilai dari R^2_{adj} mempunyai interval antara nol sampai satu ($0 \leq \mathrm{R}^2_{adj} \leq 1$). Semakin dekat R^2_{adj} dengan satu makan semakin baik kecocokan data dengan model, dan sebaliknya, semakin dekat R^2_{adj} dengan nol maka semakin jelek kecocokan data dengan model (Sembiring, 1995). Persamaan untuk R^2_{adj} adalah sebagai berikut:

$$\mathrm{R}^2_{adj} = 1 - \frac{\mathrm{KTG}}{\mathrm{KTT}} \quad (2.24)$$

di mana,

KTG : $\frac{\sum(Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n-k-1}$

KTT : $\frac{\sum(Y_i - \bar{Y})^2}{n-1}$

BAB III
METODE PENELITIAN

3.1 Data Penelitian

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data bangkitan sesuai dengan model regresi linier berganda dengan peubah respon yaitu *Y* dan peubah prediktor antara lain X_1, X_2, dan X_3. Data yang dibangkitkan yaitu data dengan galat tidak normal, peubah prediktor yang memiliki hubungan linier dan ragam galat tidak homogen. Data dengan galat tidak normal dibangkitkan dengan memberi pencilan terhadap peubah X_2 sebesar 10% dari total ukuran sampel, sedangkan multikolinieritas dibangkitkan dari korelasi antara peubah X_1 dan X_3. Heteroskedastisitas timbul sebagai hasil dari keberadaan pencilan. Parameter yang digunakan yaitu $\beta_0 = 0.44311$, $\beta_1 = 1.10054$, $\beta_2 = 1.81173$, $\beta_3 = -1.04753$ dan $\sigma^2 = 4.01$ yang diambil dari penelitian dengan judul "Perbandingan *Robust* Penduga LTS dan LMS Dalam Penanganan Pencilan Berpengaruh Pada Regresi Linier Berganda" (Mahendra, 2015). Pada penelitian ini ingin dilakukan pendugaan parameter regresi linier berganda dengan menggunakan *bootstrap pairs* terhadap data yang bangkitan. Ukuran sampel yang digunakan sebesar 30. *Resampling* dilakukan dengan *B*=100, *B*=150, *B*=200, *B*=250 dan *B*=300. Pemilihan ukuran *B* didasarkan pada beberapa penelitian sebelumnya di mana ukuran *B* yang digunakan berkisar antara 100 sampai dengan 1000. Analisis data yang digunakan yaitu software *R*. Adapun data bangkitan yang digunakan dalam penelitian ini (disajikan pada lampiran 1) dihasilkan dari *R coding* (disajikan pada lampiran 7) yang bersumber dari penelitian Permatasari (2016).

3.2 Metode Analisis

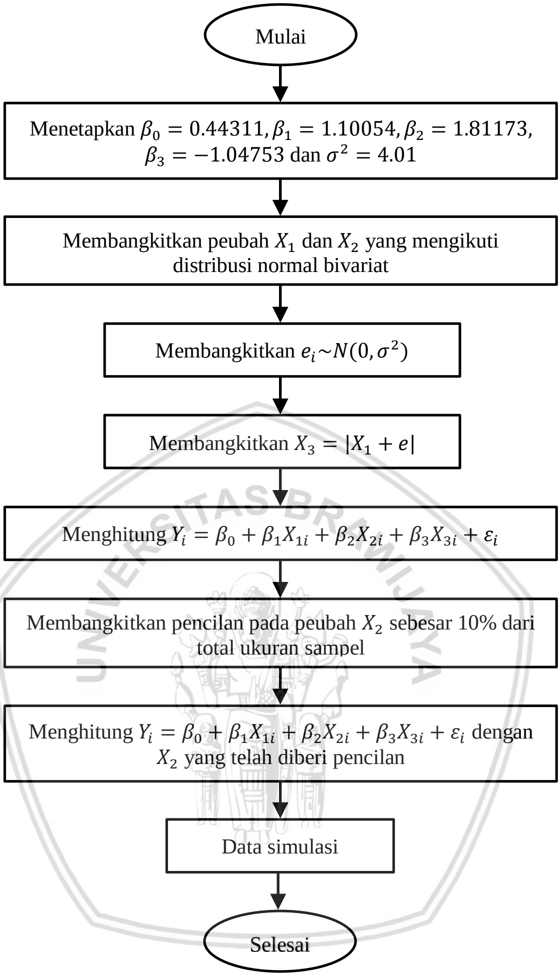
Metode analisis dalam penelitian ini dengan melakukan pendugaan parameter menggunakan metode *bootstrap pairs* pada data hasil simulasi. Langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Melakukan simulasi data yang akan digunakan dalam penelitian ini, dengan langkah-langkah sebagai berikut:
   a. Menetapkan sampel yang digunakan yaitu $n = 30$.
   b. Menetapkan $\beta_0 = 0.44311$, $\beta_1 = 1.10054$, $\beta_2 = 1.81173$, $\beta_3 = -1.04753$ dan $\sigma^2 = 4.01$ yang diambil dari penelitian sebelumnya.

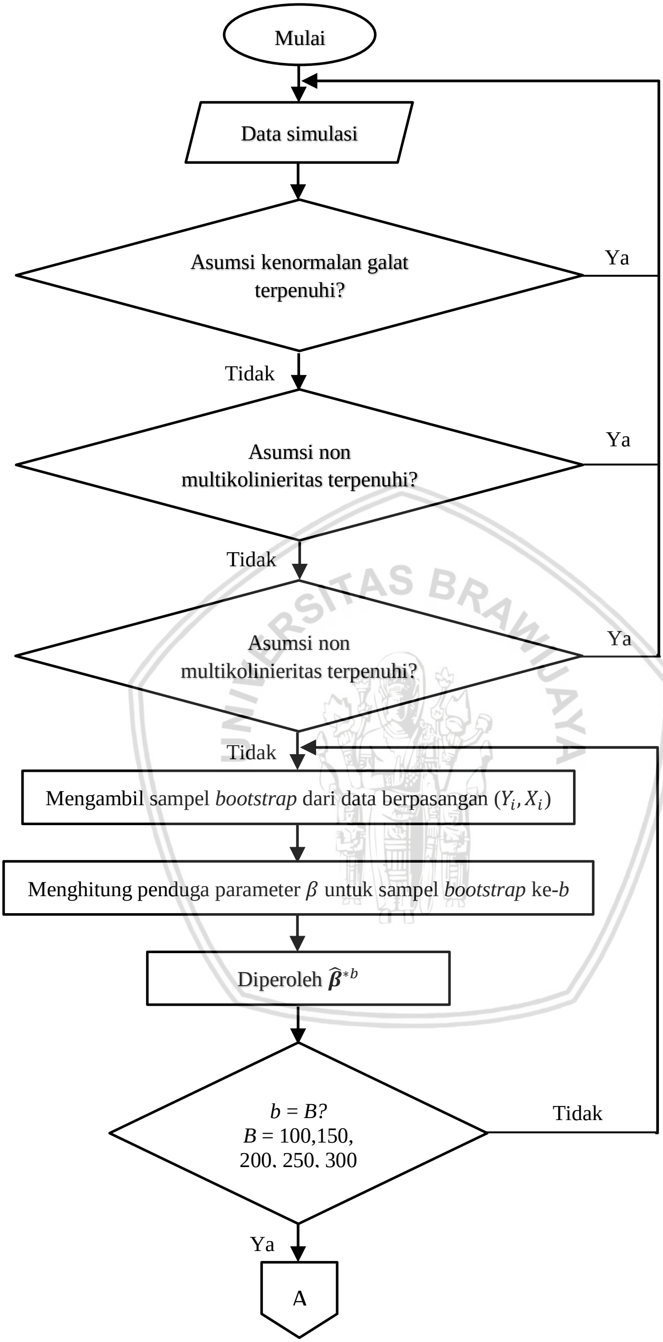
c. Membangkitkan peubah X_1 dan X_2 yang mengikuti distribusi normal bivariat dengan $\mu_1 = 41.58585$, $\mu_2 = 14.80350$, $var(X_1) = 129.7882$, $var(X_2) = 13.27723$, dan $cov(X_1, X_2) = -10.98843$.
d. Membangkitkan sisaan yaitu $e_i \sim N(0, \sigma^2)$.
e. Membangkitkan $X_3 = |X_1 + e|$.
f. Menghitung peubah respon Y_i, di mana $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \beta_k X_{ki} + \varepsilon_i$.
g. Membangkitkan pencilan pada peubah X_2 sebesar 10% dari total ukuran sampel dengan memberi pencilan sebesar 6σ.
h. Menghitung peubah respon Y_i, di mana $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \beta_k X_{ki} + \varepsilon_i$ dengan X_2 yang telah diberi pencilan.

2. Melakukan pendugaan parameter menggunakan metode kuadrat terkecil (MKT) seperti persamaan yang telah ada pada subbab 2.3.
3. Melakukan pendugaan parameter menggunakan *bootstrap pairs*.
   a. Mengambil sampel bootstrap berukuran *n*=30 dari data berpasangan (Y_i, X_i) dengan $i = 1,2,\ldots,30$ secara acak dengan peluang $1/30$.
   b. Menghitung pendugaan parameter regresi untuk sampel *bootstrap pairs* menggunakan MKT seperti persamaan yang telah ada pada subbab 2.5.
   c. Ulangi langkah-langkah sebelumnya sebanyak *B*=100, *B*=150, *B*=200, *B*=250 dan *B*=300 kali.
   d. Pendekatan pendugaan *bootstrap pairs* untuk parameter regresi seperti persamaan yang telah ada pada subbab 2.5.
   e. Persamaan regresi *bootstrap pairs* seperti persamaan yang telah ada pada subbab 2.5.
4. Melakukan pengujian parameter pada hasil pendugaan parameter dengan metode *bootstrap pairs* seperti persamaan yang telah ada pada subbab 2.6.
5. Menghitung koefisien determinasi terkoreksi (R^2_{adj}) dari hasil pendugaan parameter dengan metode *bootstrap pairs* seperti persamaan yang telah ada pada subbab 2.7.

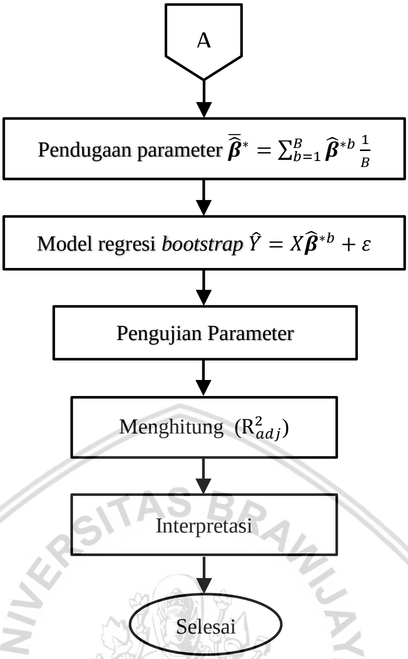
Untuk mencapai tujuan penelitian, berikut disajikan diagram alir pendugaan parameter regresi menggunakan metode *bootstrap pairs*.



Gambar 3.1 Diagram Alir Simulasi Data



Gambar 3.2 Diagram Alir Regresi Linier Berganda Menggunakan Metode *Bootstrap*


A
Pendugaan parameter $\overline{\widehat{\boldsymbol{\beta}}}^{*} = \sum_{b=1}^{B} \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*b} \frac{1}{B}$
Model regresi *bootstrap* $\hat{Y} = X\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*b} + \varepsilon$
Pengujian Parameter
Menghitung (R^2_{adj})
Interpretasi
Selesai

BAB IV
HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Hasil Uji Asumsi Klasik

Data simulasi yang telah diperoleh dengan cara membangkitkan data, kemudian dilakukan uji asumsi klasik. Pada pengujian asumsi ini, asumsi yang tidak terpenuhi yaitu kenormalan galat, non multikolinieritas dan homoskedastisitas. Berikut ini merupakan hasil dari pengujian asumsi klasik.

4.1.1 Hasil Uji Kenormalan Galat

Pengujian asumsi kenormalan galat dilakukan menggunakan uji *Jarque Bera* dengan hipotesis sebagai berikut:

H_0 : galat menyebar normal vs

H_1 : galat tidak menyebar normal

Berdasarkan hasil *output* diperoleh *p-value* sebesar 0.000 kurang dari $\alpha = 0.05$, maka tolak H_0 sehingga dapat disimpulkan bahwa galat tidak menyebar normal atau asumsi kenormalan galat tidak terpenuhi.

4.1.2 Hasil Uji Non Autokorelasi

Pengujian asumsi non autokorelasi dilakukan menggunakan uji *Durbin-Watson* dengan hipotesis sebagai berikut:

H_0 : galat tidak berkorelasi vs

H_1 : galat berkorelasi

Berikut ini merupakan hasil pengujian asumsi non autokorelasi:

Statistik DW	= 2.1885	d_U	= 1.6498
d_L	= 1.2138	$4 - d_U$	= 2.3502
$4 - d_L$	= 2.7862	*p-value*	= 0.7042

Setelah nilai *Durbin-Watson* diperoleh dari *output*, kemudian dilakukan perhitungan menggunakan tabel dengan nilai k=3 dan n=30 sehingga didapatkan nilai d_L dan d_U seperti pada tabel diatas. Berdasarkan *output* yang dihasilkan, diperoleh nilai *Durbin-Watson* = 2.1885 ($d_U < 2.1885 < 4 - d_U$) berada di daerah yang menyatakan terima H_0, sehingga dapat disimpulkan bahwa galat tidak berkorelasi atau asumsi non autokorelasi terpenuhi.

4.1.3 Hasil Uji Non Multikolinieritas

Pengujian asumsi non multikolinieritas dilakukan menggunakan uji VIF dengan hipotesis sebagai berikut:

H_0 : tidak terdapat hubungan linier antar peubah prediktor vs
H_1 : terdapat hubungan linier antar peubah prediktor
Berikut ini adalah Tabel 4.1 yang merupakan hasil pengujian asumsi non multikolinieritas.

Tabel 4.1 Hasil Pengujian Asumsi Non Multikolinieritas

Peubah Prediktor	**VIF**
X_1	47.3283
X_2	1.0808
X_3	47.2912

Berdasarkan Tabel 4.1 dapat dilihat bahwa nilai VIF untuk peubah X_1 dan X_3 lebih dari 10, sehingga dapat disimpulkan bahwa terdapat hubungan linier antar peubah prediktor atau dapat dikatakan asumsi non multikolinieritas tidak terpenuhi.

4.1.4 Hasil Uji Homoskedastisitas

Pengujian asumsi homoskedastisitas dilakukan menggunakan uji *Breusch Pagan* dengan hipotesis sebagai berikut:
H_0 : $\alpha_2 = \alpha_3 = \cdots = \alpha_m = 0$ (ragam galat homogen) vs
H_1 : paling tidak terdapat satu α_i yang tidak sama dengan nol (ragam galat tidak homogen)

Berdasarkan hasil *output* diperoleh statistik BP sebesar 8.7401 dan *p-value* sebesar 0.03295 kurang dari $\alpha = 0.05$, maka tolak H_0 sehingga dapat disimpulkan bahwa ragam galat tidak homogen atau asumsi homoskedastisitas tidak terpenuhi.

4.2 Hasil Pendugaan Parameter dengan MKT

Setelah dilakukan uji asumsi klasik maka langkah selanjutnya adalah melakukan pendugaan parameter dengan Metode Kuadrat Terkecil (MKT). Berikut ini adalah Tabel 4.2 yang merupakan hasil pendugaan parameter dengan Metode Kuadrat Terkecil.

Tabel 4.2 Hasil Pendugaan Parameter Data Asli

Parameter	Nilai Penduga	Salah Baku	Statistik Uji *t*	*p-value*
β_0	0.44311	3.0664	0.145	0.8869
β_1	1.10054	0.0438	25.136	0.0000
β_2	1.81173	0.3270	5.541	0.0000
β_3	-1.04753	0.2771	-3.781	0.0016

Tabel 4.3 Hasil Pendugaan Parameter dengan Metode Kuadrat Terkecil (MKT)

Parameter	Nilai Penduga	Salah Baku	Statistik Uji *t*	*p-value*
β_0	30.9666	15.3031	2.024	0.0534
β_1	-1.0439	1.4646	-0.713	0.4824
β_2	1.2303	0.6776	1.816	0.0810
β_3	0.6521	1.4152	0.461	0.6488

Berdasarkan Tabel 4.3 dapat dilihat bahwa nilai penduga parameter yang dihasilkan dengan MKT tidak mendekati atau nilainya jauh berbeda dengan nilai penduga parameter pada data asli yang digunakan dalam melakukan simulasi data yang disajikan pada Tabel 4.2. Dapat dilihat bahwa penduga parameter yang dihasilkan dengan MKT memiliki nilai yang tidak searah dengan penduga parameter yang dihasilkan pada data asli di mana, β_1^* yang dihasilkan dengan MKT bernilai negatif sedangkan yang dihasilkan pada data asli bernilai positif, dan β_3^* yang dihasilkan dengan MKT bernilai positif sedangkan yang dihasilkan pada data asli bernilai negatif. Model regresi linier berganda yang terbentuk sebagai berikut:

$$\mathrm{Y} = 30.9666 - 1.0439X_1 + 1.2303X_2 + 0.6521X_3$$

Berdasarkan model yang terbentuk, dapat diketahui bahwa setiap peningkatan satu satuan X_1 maka akan menurunkan Y sebesar 1.0439 satuan dengan X_2 dan X_3 dianggap konstan, setiap peningkatan satu satuan X_2 maka akan meningkatkan Y sebesar 1.2303 satuan dengan X_1 dan X_3 dianggap konstan, dan setiap peningkatan satu satuan X_3 maka akan meningkatkan Y sebesar 0.6521 satuan dengan X_1 dan X_2 dianggap konstan.

4.3 Hasil Pendugaan Parameter dengan Metode *Bootstrap Pairs*

Pada uji asumsi klasik, terdapat tiga asumsi yang tidak terpenuhi yaitu kenormalan galat, non multikolinieritas dan homoskedastisitas sehingga metode kuadrat terkecil tidak layak digunakan untuk melakukan pendugaan parameter. Oleh karena itu, dibutuhkan metode *bootstrap pairs* untuk melakukan pendugaan parameter dalam penelitian ini.

Berikut ini adalah Tabel 4.4 yang merupakan hasil pendugaan parameter menggunakan metode *bootstrap pairs* dengan *resampling* sebanyak 100, 150, 200, 250 dan 300 kali.

Tabel 4.4 Penduga Parameter dengan *Bootstrap Pairs*

Parameter	**Nilai Peduga**				
	***B* = 100**	***B* = 150**	***B* = 200**	***B* = 250**	***B* = 300**
β_0^*	2.0935	1.7362	1.8907	1.9037	1.8780
β_1^*	0.9147	0.8662	0.9216	0.9117	0.9149
β_2^*	1.6497	1.6671	1.6635	1.6611	1.6615
β_3^*	-0.8490	-0.7971	-0.8551	-0.8444	-0.8479

Berdasarkan Tabel 4.4 dapat dilihat bahwa hasil penduga parameter metode *bootstrap pairs* mendekati atau nilainya tidak jauh berbeda dengan hasil penduga parameter data asli (pada Tabel 4.2) yang digunakan dalam melakukan simulasi data dibandingkan hasil penduga parameter dengan MKT. Dapat dilihat bahwa penduga parameter yang dihasilkan memiliki nilai yang searah yaitu β_0^* bernilai positif, β_1^* bernilai positif, β_2^* bernilai positif dan β_3^* bernilai negatif sama dengan penduga parameter yang dihasilkan dari data asli. Hal ini dapat menunjukkan bahwa metode *bootstrap pairs* merupakan metode yang akurat untuk melakukan pendugaan parameter regresi yang tidak memenuhi asumsi kenormalan galat, non multikolinieritas dan homoskedastisitas karena metode *bootstrap* tidak memerlukan asumsi khusus dalam pengerjaannya, tetapi hanya bergantung pada data yang tersedia.

Dari Tabel 4.4 diperoleh model regresi linier berganda yang terbentuk dari kelima *resampling bootstrap* sebagai berikut:

Model untuk *B*=100:

$$\mathrm{Y} = 2.0935 + 0.9147X_1 + 1.6497X_2 - 0.8490X_3$$

Model untuk *B*=150:

$$\mathrm{Y} = 1.7362 + 0.8662X_1 + 1.6671X_2 - 0.7971X_3$$

Model untuk *B*=200:

$$Y = 1.8907 + 0.9216X_1 + 1.6635X_2 - 0.8551X_3$$

Model untuk *B*=250:

$$Y = 1.9037 + 0.9117X_1 + 1.6611X_2 - 0.8444X_3$$

Model untuk *B*=300:

$$Y = 1.8780 + 0.9149X_1 + 1.6615X_2 - 0.8479X_3$$

Setelah diperoleh penduga parameter *bootstrap pairs* selanjutnya dihitung nilai salah baku. Salah baku yang dihasilkan dari analisis disajikan pada Tabel 4.5.

Tabel 4.5 Salah Baku dengan *Bootstrap Pairs*

Parameter	**Salah Baku**				
	***B* = 100**	***B* = 150**	***B* = 200**	***B* = 250**	***B* = 300**
β_0^*	0.1566	0.1353	0.1109	0.1072	0.0913
β_1^*	0.0137	0.0210	0.0113	0.0115	0.0097
β_2^*	0.0069	0.0071	0.0051	0.0049	0.0042
β_3^*	0.0133	0.0205	0.0111	0.0112	0.0094

Kriteria pendugaan parameter yang baik mempunyai nilai salah baku yang semakin kecil. Pada Tabel 4.5 dapat dilihat bahwa nilai salah baku penduga parameter regresi linier berganda dengan metode *bootstrap pairs* memiliki nilai yang semakin kecil seiring bertambahnya ukuran *B* (*resampling*). Pada Tabel 4.5 dapat dilihat bahwa pendugaan parameter dengan *B*=300 memiliki nilai salah baku terkecil untuk setiap nilai penduga parameternya dibandingkan pada sampel dengan *B*=100, *B*=150, *B*=200 dan *B*=250. Karena metode *resampling bootstrap* merupakan simulasi maka hasil pendugaan dapat berubah-ubah jika diulang. Hasil pendugaan dengan metode *resampling bootstrap* akan cenderung lebih baik dan stabil jika dilakukan dengan nilai *B* yang semakin besar.

Untuk melihat sifat ketidakbiasan dari metode *bootstrap pairs* maka perlu dibuktikan bahwa penduga bagi parameter regresi dengan metode *bootstrap pairs* memiliki nilai yang sama dengan parameter regresinya. Berikut ini merupakan hasil dari nilai bias penduga yang disajikan pada Tabel 4.6.

Tabel 4.6 Nilai Bias Penduga

Parameter	Bias Penduga				
	***B* = 100**	***B* = 150**	***B* = 200**	***B* = 250**	***B* = 300**
β_0^*	1.6504	1.2931	1.4476	1.4606	1.4349
β_1^*	-0.1858	-0.2343	-0.1789	-0.1889	-0.1857
β_2^*	-0.1619	-0.1447	-0.1482	-0.1506	-0.1502
β_3^*	0.1985	0.2505	0.1924	0.2031	0.1995

Ketepatan dari nilai penduga parameter regresi terhadap parameternya diukur dengan melihat bias bagi masing-masing penduga parameter regresi. Dari hasil analisis yang disajikan pada Tabel 4.6 dapat dilihat bahwa pada masing-masing *B* menghasilkan penduga bias yang hampir sama. Hal ini menunjukkan bahwa kelima ukuran *B* yang digunakan sama-sama baik dalam menduga parameter regresi.

4.4 Hasil Pengujian Parameter *Bootstrap Pairs*

4.4.1 Hasil Uji Parsial Parameter *Bootstrap Pairs*

Uji parsial dilakukan dengan membandingkan nilai statistik uji *t* seperti pada persamaan (2.22) dengan nilai $t_{\alpha/2,n-k-1}$ dengan *k*=3 dan *n* pada masing-masing *B* berturut-turut yaitu 100, 150, 200, 250 dan 300 atau dilakukan dengan cara membandingkan *p-value* dengan $\alpha = 0.05$. Berikut ini adalah Tabel 4.7 yang merupakan hasil uji parsial dengan menggunakan uji *t*.

Tabel 4.7 Hasil Uji Parsial Metode *Bootstrap Pairs*

B	**Parameter**	**Statistik Uji *t***	$t_{\alpha/2,n-k-1}$	**Keputusan**
100	β_0^*	13.3706	1.9849	Tolak H_0
	β_1^*	66.7528		
	β_2^*	237.4386		
	β_3^*	-63.8292		
150	β_0^*	12.8359	1.9763	Tolak H_0
	β_1^*	41.1721		
	β_2^*	235.4937		
	β_3^*	-38.8193		

B	Parameter	Statistik Uji t	$t_{\alpha/2,n-k-1}$	Keputusan
200	β_0^*	17.0500	1.9721	Tolak H_0
	β_1^*	81.5958		
	β_2^*	326.4504		
	β_3^*	-76.7016		
250	β_0^*	17.7528	1.9697	Tolak H_0
	β_1^*	79.5166		
	β_2^*	340.5940		
	β_3^*	-75.0865		
300	β_0^*	20.5668	1.9680	Tolak H_0
	β_1^*	94.2540		
	β_2^*	394.4648		
	β_3^*	-89.3357		

Dari Tabel 4.7 dapat diketahui bahwa nilai statistik uji t untuk masing-masing peubah prediktor yaitu X_1, X_2 dan X_3 pada setiap B menghasilkan nilai lebih dari $t_{\alpha/2,n-k-1}$. Dapat disimpulkan bahwa masing-masing peubah prediktor yaitu X_1, X_2 dan X_3 pada setiap B memberikan pengaruh yang signifikan terhadap peubah respon Y. Hal ini menunjukkan bahwa kelima model yang dihasilkan dengan metode *bootstrap pairs* baik untuk digunakan karena semua peubah prediktor secara parsial memberikan pengaruh yang signifikan terhadap peubah respon.

4.4.2 Hasil Uji Simultan Parameter *Bootstrap Pairs*

Uji simultan dilakukan dengan menggunakan uji F seperti pada persamaan (2.23) atau dilakukan dengan cara membandingkan *p-value* dengan $\alpha = 0.05$. Berikut ini adalah Tabel 4.8 merupakan hasil uji simultan yang disajikan dalam bentuk tabel ANOVA.

Tabel 4.8 Hasil Uji Simultan Metode *Bootstrap Pairs*

B	SK	db	JK	KT	F_{Hitung}	$F_{k,n-k-1}^{\alpha/2}$	Keputusan
100	Regresi	3	124.22	41.41	624.41	3.26	Tolak H_0
	Galat	96	6.37	0.07			
	Total	99	130.59	1.32			
150	Regresi	3	224.45	74.82	512.53	3.21	Tolak H_0
	Galat	146	21.31	0.15			
	Total	149	245.76	1.65			

B	SK	db	JK	KT	F_{Hitung}	$F_{k,n-k-1}^{\alpha/2}$	Keputusan
200	Regresi	3	322.16	107.39	1573.31	3.18	Tolak H_0
	Galat	196	13.38	0.07			
	Total	199	335.54	1.69			
250	Regresi	3	349.62	116.54	1410.21	3.17	Tolak H_0
	Galat	246	20.33	0.08			
	Total	249	369.95	1.49			
300	Regresi	3	410.01	136.67	1690.29	3.16	Tolak H_0
	Galat	296	23.93	0.08			
	Total	299	433.95	1.45			

Berdasarkan Tabel 4.8, nilai statistik uji F yang dihasilkan pada masing-masing B lebih dari $F_{k,n-k-1}^{\alpha/2}$ maka kelima model tersebut memiliki keputusan yang sama yaitu tolak H_0. Sehingga dapat disimpulkan bahwa peubah prediktor yaitu X_1, X_2 dan X_3 pada setiap B secara bersama-sama memberikan pengaruh yang signifikan terhadap peubah respon Y. Hal ini menunjukkan bahwa kelima model yang dihasilkan dengan metode *bootstrap pairs* baik untuk digunakan karena semua peubah prediktornya memberikan pengaruh yang signifikan secara simultan terhadap peubah respon.

4.5 Hasil Koefisien Determinasi Terkoreksi (R^2_{adj}) untuk Pendugaan Parameter dengan Metode *Bootstrap Pairs*

Untuk mengukur *goodness of fit* dari persamaan regresi digunakan koefisien determinasi terkoreksi (R^2_{adj}). Tabel 4.9 merupakan hasil perhitungan koefisien determinasi terkoreksi (R^2_{adj}) yang dapat dihitung seperti pada persamaan (2.24):

Tabel 4.9 Hasil Perhitungan R^2_{adj}

B	R^2_{adj}
100	94.97%
150	91.14%
200	95.95%
250	94.44%
300	94.43%

Berdasarkan hasil perhitungan pada Tabel 4.9, dapat dilihat bahwa pada B=100 nilai R^2_{adj} sebesar 94.97% atau mendekati satu, artinya sebesar 94.97% dari seluruh variasi total peubah respon *Y* dapat dijelaskan oleh peubah prediktor X_1, X_2 dan X_3, dan masih ada sebesar 5.53% lagi dari variasi peubah respon *Y* yang tidak dapat dijelaskan oleh model yang digunakan. Pada *B*=150 nilai R^2_{adj} sebesar 91.14% atau mendekati satu, artinya sebesar 91.14% dari seluruh variasi total peubah respon *Y* dapat dijelaskan oleh peubah prediktor X_1, X_2 dan X_3, dan masih ada sebesar 8.86% lagi dari variasi peubah respon *Y* yang tidak dapat dijelaskan oleh model yang digunakan. Pada *B*=200 nilai R^2_{adj} sebesar 95.95% atau mendekati satu, artinya sebesar 95.95% dari seluruh variasi total peubah respon *Y* dapat dijelaskan oleh peubah prediktor X_1, X_2 dan X_3, dan masih ada sebesar 4.05% lagi dari variasi peubah respon *Y* yang tidak dapat dijelaskan oleh model yang digunakan. Pada *B*=250 nilai R^2_{adj} sebesar 94.44% atau mendekati satu, artinya sebesar 94.44% dari seluruh variasi total peubah respon *Y* dapat dijelaskan oleh peubah prediktor X_1, X_2 dan X_3, dan masih ada sebesar 5.56% lagi dari variasi peubah respon *Y* yang tidak dapat dijelaskan oleh model yang digunakan. *B*=300 nilai R^2_{adj} sebesar 94.43% atau mendekati satu, artinya sebesar 94.43% dari seluruh variasi total peubah respon *Y* dapat dijelaskan oleh peubah prediktor X_1, X_2 dan X_3, dan masih ada sebesar 5.57% lagi dari variasi peubah respon *Y* yang tidak dapat dijelaskan oleh model yang digunakan.

Karena nilai R^2_{adj} yang dihasilkan dari kelima *B* yang menunjukkan nilai yang sangat besar atau mendekati satu, maka dapat disimpulkan bahwa kelima model yang dihasilkan sangat baik. Semakin besar nilai koefisien determinasi terkoreksi (R^2_{adj}) menunjukkan bahwa model yang terbentuk semakin baik. Dengan demikian model yang paling baik untuk menduga parameter regresi terhadap peubah respon adalah model yang terbentuk dengan *B*=200, karena nilai R^2_{adj} yang diperoleh menghasilkan nilai paling besar dari kelima model yang terbentuk.

BAB V
KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil analisis yang telah dilakukan dalam penelitian ini, diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Model regresi linier berganda menggunakan metode *bootstrap pairs* merupakan model yang akurat untuk melakukan pendugaan parameter regresi yang tidak memenuhi asumsi kenormalan galat, non multikolinieritas dan homoskedastisitas, karena menghasilkan penduga parameter yang nilainya mendekati dan mempunyai tanda yang sama dengan hasil penduga parameter pada data asli sebelum dibangkitkan dengan memberi pencilan, memiliki korelasi antar peubah dan memiliki ragam galat yang tidak homogen. Selain itu, nilai salah baku yang dihasilkan metode *bootstrap pairs* lebih kecil dibandingkan hasil dari MKT.
2. Model regresi yang paling baik untuk menduga parameter regresi yaitu model regresi dengan B=200, di mana R^2_{adj} yang diperoleh mendekati satu.

5.2 Saran

Pada penelitian ini, hanya menggunakan data bangkitan yang memiliki ukuran sampel sebesar 30, untuk penelitian selanjutnya dapat mencoba menggunakan data dengan berbagai ukuran sampel agar dapat diketahui perbedaan hasil yang diperoleh apabila ukuran data yang digunakan berbeda.

DAFTAR PUSTAKA

Astari, N.M.M., Suciptawati, N.L.P., dan Sukarsa, I.K.G. 2014. Penerapan Metode *Bootstrap Residual* Dalam Mengatasi Bias Pada Penduga Parameter Analisis Regresi. *E-Jurnal Matematika*. vol. 3(4). hal. 130-137.

Bastian, dan Sulistianingsih, E. 2015. Metode *Bootstrap Residual* Dalam Pendugaan Parameter Regresi Dengan Multikolinieritas. *Buletin Ilmiah Mat.Stat. dan Terapannya (Bimaster)*. vol. 4. no. 3. hal. 159-162.

Drapper, N.R., dan Smith H. 1992. *Analisis Regresi Terapan. Edisi Kedua*. John Wiley and sons, Inc:New York.

Efron, B., dan Tibshirani, R.J. 1993. *An Introduction to the Bootstrap*. Chapman and Hall: New York.

Fitri, D.A. 2014. Pendugaan Parameter Model Regresi Linier Berganda Dengan Teknik Bootstrap. *Jurnal Matematika UNAND*. vol. 3. no. 3. hal. 41-49.

Gujarati, D.N. 2006. *Dasar-Dasar Ekonometrika*. Edisi ketiga. Alih bahasa Julius A.M, S.E. dan Yelvi Andri, S.E. Penerbit Erlangga: Jakarta.

____________, dan Porter, D.C. 2010. *Dasar-Dasar Ekonometrika*. Edisi kelima. Alih bahasa Eugenia Mardanugraha, Sita Wardhani, dan Carlos Mangunsong. Salemba Empat: Jakarta.

Iskandar, R., Mara, M.N., dan Satyahadewi, N. 2013. Perbandingan Metode *Bootstrap* dan *Jackknife* Dalam Menaksir Parameter Regresi Untuk Mengatasi Multikolinieritas. *Buletin Ilmiah Mat. Stat. dan Terapannya*. vol. 2. no. 2. hal. 137-146.

Mahendra, A.S. 2015. *Perbandingan Robust Penduga LTS dan LMS Dalam Penanganan Pencilan Berpengaruh Pada Regresi Linier Berganda*. Malang: FMIPA, Universitas Brawijaya.

Permatasri, M. 2016. *Perbandingan Metode PCA dan ROBPCA Untuk Penanganan Data Yang Mengandung Berbagai Kombinasi*

Derajat Multikolinieritas dan Persentase Pencilan. Malang: FMIPA, Universitas Brawijaya.

Sahinler, S. dan Topuz, D. 2007. Bootstrap and Jackknife Resampling Algorithms for Estimation of Regression Parameters. *Journal of Applied Quantitative Methods*. vol. 2. no. 2. hal. 188-199.

Sembiring, R.K. 1995. *Analisis Regresi*. Edisi kedua. Penerbit ITB: Bandung.

Walpole, R.E. 1993. *Pengantar Statistika*. Edisi ketiga. Alih bahasa Ir. Bambang Sumantri. PT Gramedia: Jakarta.