# ANALISIS RAGAM FAKTORIAL RANCANGAN ACAK LENGKAP DENGAN PENDEKATAN MODEL LINIER UMUM

**SKRIPSI**

**oleh:**
**AHMAD SYIFA' KRISNA PRADANA**
**145090501111033**

**PROGRAM STUDI SARJANA STATISTIKA**
**JURUSAN STATISTIKA**
**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**
**UNIVERSITAS BRAWIJAYA**
**MALANG**
**2018**

# HALAMAN JUDUL

# ANALISIS RAGAM FAKTORIAL RANCANGAN ACAK LENGKAP DENGAN PENDEKATAN MODEL LINIER UMUM

## SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Statistika

oleh :

**Ahmad Syifa' Krisna Pradana**

**145090501111033**

**PROGRAM STUDI SARJANA STATISTIKA**
**JURUSAN STATISTIKA**
**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**
**UNIVERSITAS BRAWIJAYA**
**MALANG**
**2018**

# LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

## ANALISIS RAGAM FAKTORIAL RANCANGAN ACAK LENGKAP DENGAN PENDEKATAN MODEL LINIER UMUM

oleh:

**AHMAD SYIFA' KRISNA PRADANA**
**145090501111033**

**Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji pada tanggal 26 Juli 2018 dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Statistika**

**Dosen Pembimbing**

**Dr. Ir. Maria Bernadetha T.M**
**NIP. 195205211981032001**

**Mengetahui**
**Ketua Jurusan Statistika**
**Fakultas MIPA Universitas Brawijaya**

**Dr. Rahma Fitriani, S.Si, M.Sc, Ph.D**
**NIP. 197603281999032001**

# LEMBAR PERNYATAAN

**Saya yang bertanda tangan di bawah ini :**
**Nama : Ahmad Syifa' Krisna Pradana**
**NIM : 145090501111033**
**Jurusan : Statistika**
**Penulis Skripsi Berjudul :**

**Analisis Ragam Faktorial Rancangan Acak Lengkap dengan Pendekatan Model Linier Umum**

**Dengan ini menyatakan bahwa :**

1. **Isi dari skripsi yang saya buat adalah benar-benar karya saya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain, selain nama-nama yang termasuk di isi dan tertulis di daftar pustaka dalam skripsi ini.**
2. **Apabila dikemudian hari ternyata skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala risiko yang akan saya terima.**

**Demikin pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.**

**Malang, 26 Juli 2018**
**Yang menyatakan,**

**Ahmad Syifa' Krisna Pradana**
**NIM 145090501111033**

**ANALISIS RAGAM FAKTORIAL RANCANGAN ACAK LENGKAP DENGAN PENDEKATAN MODEL LINIER UMUM**


## ABSTRAK

Percobaan faktorial menggunakan lebih dari satu faktor, di mana perlakuan merupakan kombinasi dari taraf suatu faktor dengan taraf faktor lain. Selain model linier aditif, rancangan percobaan faktorial acak lengkap dapat dibentuk ke dalam model linier umum. Metode pendugaan parameter model ANOVA menggunakan Metode Kuadrat Terkecil (MKT) melalui peminimuman jumlah kuadrat sisa pada bentuk model linier umum akan menghasilkan penduga tunggal. Pada rancangan lingkungan, model bersifat tidak penuh (*not full rank model*) sehingga MKT tidak menghasilkan penduga parameter tunggal. Maka diperlukan metode agar MKT berfungsi yaitu menggunakan reparameterisasi, karena dapat menghasilkan matriks rancangan baru yang berpangkat penuh dengan cara menghilangkan baris dan kolom yang terpaut linier. Oleh karena itu penulis mengkaji penggunaan model linier umum untuk analisis ragam percobaan faktorial RAL. Respon penelitian adalah Rendemen mi instan (%). Analisis ragam menunjukkan bahwa faktor formulasi tepung terigu : MOCAF : pati jagung, proporsi penambahan CMC dan kombinasi kedua faktor menghasilkan besar pengaruh sama terhadap rendemen mie instan.



*Kata Kunci : Analisis Ragam, Faktorial RAL, model linier umum, Reparameterisasi*

# ANALYSIS OF VARIANCE ON FACTORIAL RANDOMIZED COMPLETE DESIGN BY USING GENERAL LINIER MODEL APPROACH


## ABSTRACT

Factorial experiments use more than one factor, where treatment is a combination of the level of a factor with the level of other factors. In addition to linear additive models, complete random factorial experiment designs can be formed into general linear models. The method to estimate the parameter of the ANOVA model is Ordinary Least Square Method (OLS) by minimizing the sum squares of errors in general linear model will produce a single estimator. While on the environmental design, the model is not full (not full rank model) so that OLS does not produce a single parameter estimator. So we need a method so that OLS works, that is using a reparameterization, because it can produce a new full rank matrix design by removing rows and columns linear adrift. Therefore, the authors examined the using of general linear models for analysis of variance of RAL factorial experiments. The response of the research was instant noodles rendement (%). Analysis of variance showed that the formulation factor of wheat flour: MOCAF: corn starch, proportion of CMC addition and the combination of the two factors produced the same effect of instant noodles rendement.



*Key Words : Analysis of Variance,RAL Factorial, general linear model, Reparameterization*

# KATA PENGANTAR

Puji dan Syukur ke hadirat Allah SWT atas Rahmat, Taufiq, dan Hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini, banyak pihak yang telah memberikan bimbingan, bantuan dan dukungan, untuk itu penulis menyampaikan rasa terima kasih yang sebesar-besarnya kepada :

1. Ibu Dr. Ir. Maria Bernadetha Mitakda pembimbing yang telah memberikan bimbingan, saran, arahan, nasihat dan waktu dalam menyelesaikan skripsi ini.
2. Bapak Achmad Efendi, S.Si., M.Sc., Ph.D penguji I dan ketua Program Studi Statistika Universitas Brawijaya yang telah memberikan kritik dan saran dalam menyelesaikan skripsi ini.
3. Bapak Prof. Dr. Ir. Henny Pramoedyo, MS penguji II yang telah memberikan kritik dan saran dalam menyelesaikan skripsi ini.
4. Ibu Dr. Rahma Fitriani, S.Si, M.Sc, Ph.D ketua Jurusan Statistika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Brawijaya.
5. Orang tua, adik dan Meilina yang selalu memberikan dukungan, doa, motivasi dan materi.
6. Semua pihak yang telah membantu penyelesaian skripsi ini yang tidak dapat saya sebutkan satu per satu.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini sangat jauh dari sempurna, untuk itu penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun serta bermanfaat bagi penulis. Semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi semua pihak.

Malang, Juli 2018

Penulis

# DAFTAR ISI

**DAFTAR GAMBAR**

# DAFTAR TABEL

# DAFTAR LAMPIRAN

# BAB I
# PENDAHULUAN

## 1.1 Latar Belakang

Percobaan dilakukan untuk menemukan sesuatu. Secara teoritis, percobaan diartikan sebagai tes atau penyelidikan terencana untuk mendapatkan fakta baru (Steel dan Torrie, 1991). Untuk melakukan suatu percobaan harus menggunakan metode atau prinsip-prinsip ilmiah yaitu rancangan percobaan. Rancangan percobaan menurut Mattjik dan Sumertajaya (2006) dapat dibagi berdasarkan perlakuan, lingkungan dan pengukuran.

Percobaan dalam penelitian meliputi beberapa variabel yang diamati, pada situasi ini rancangan yang digunakan adalah rancangan faktorial. Percobaan faktorial menggunakan lebih dari satu faktor, dimana perlakuan merupakan kombinasi dari taraf suatu faktor dengan taraf faktor lain (Yitnosumarto, 1990). Pada percobaan faktorial, selain dapat diketahui pengaruh tunggal faktor, dapat diketahui juga pengaruh gabungan (interaksi) dari masing-masing faktor yang diuji.

Metode pendugaan parameter model ANOVA menggunakan Metode Kuadrat Terkecil (MKT) melalui peminimuman jumlah kuadrat sisa pada bentuk model linier umum. MKT menghasilkan galat terkecil, memecah respon bersifat saling bebas, serta menghasilkan model unik. Tetapi pada rancangan lingkungan, model bersifat tidak penuh (*not full rank model*) sehingga MKT tidak menghasilkan penduga parameter tunggal, sehingga diperlukan metode agar MKT dapat berfungsi, yaitu menggunakan reparameterisasi, karena dapat menghasilkan matriks rancangan baru yang berpangkat penuh dengan cara menghilangkan baris dan kolom yang terpaut linier.

Berdasarkan alasan tersebut, maka penulis mengkaji penggunaan model linier umum untuk analisis ragam faktorial rancangan acak lengkap.

## 1.2 Rumusan Masalah

Permasalahan yang dibahas berdasarkan latar belakang penelitian adalah bagaimana penggunaan model linier umum untuk analisis ragam faktorial rancangan acak lengkap?

## 1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah mengetahui penggunaan model linier umum untuk analisis ragam faktorial rancangan acak lengkap.

## 1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini agar peneliti dapat menggunakan model linier umum untuk analisis ragam faktorial rancangan acak lengkap.

## 1.5 Batasan Masalah

Batasan masalah pada penelitian ini adalah penggunaan model linier umum untuk analisis ragam faktorial rancangan acak lengkap dan tanpa analisis lanjutan.

# BAB II
# TINJAUAN PUSTAKA

## 2.1 Percobaan Faktorial

Percobaan faktorial menggunakan lebih dari satu faktor, di mana perlakuan merupakan kombinasi dari taraf suatu faktor dengan taraf faktor lain (Yitnosumarto, 1990). Terdapat beberapa keuntungan percobaan faktorial, yakni:

1. Lebih efisien
2. Informasi padat dan jelas, karena terdapat interaksi
3. Hasil percobaan dapat diterapkan dalam kondisi luas, karena terdapat kombinasi faktor.

### 2.1.1 Percobaan Faktorial Rancangan Acak Lengkap

Suatu percobaan faktorial terdiri dua faktor, A dan B masing-masing memiliki taraf sebanyak $a$ dan $b$, setiap kombinasi diulang $r$ kali, sehingga terdapat *abr* satuan percobaan. Model linier aditif untuk respon yang dihasilkan dari rancangan acak lengkap dijelaskan oleh :

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk} \begin{cases} i = 1,2,\dots,a \\ j = 1,2,\dots,b \\ k = 1,2,\dots,r \end{cases} \tag{2.1}$$

di mana:

$Y_{ijk}$ = respon ke- $i$ faktor A dan ke-$j$ faktor B pada ulangan ke-$k$

$\mu$ = nilai tengah umum

$\alpha_i$ = pengaruh taraf ke- $i$ faktor A

$\beta_j$ = pengaruh taraf ke- $j$ faktor B

$(\alpha\beta)_{ij}$ = pengaruh interaksi taraf ke-$i$ faktor A dan taraf ke-$j$ faktor B

$\varepsilon_{ijk}$ = galat percobaan taraf ke-$i$ faktor A, taraf ke-$j$ faktor B, dan ulangan ke-$k$,
dengan asumsi $\varepsilon_{ijk} \sim NIID\ (0, \sigma^2)$

$a$ = banyaknya taraf faktor A

$b$ = banyaknya taraf faktor B

$r$ = banyaknya ulangan

Tabel 2.1 dan 2.2 digunakan untuk pendugaan parameter dan analisis data yang dilandasi pada model (2.1).

Tabel 2.1. Struktur Data Percobaan Faktorial Rancangan Acak Lengkap

| i | j | k | | | | $\sum_{j=1}^{b} Y_{ijk}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | … | r | $= Y_{i..}$ |
| 1 | 1 | $Y_{111}$ | $Y_{11b}$ | … | $Y_{11r}$ | $Y_{11.}$ |
| | 2 | $Y_{121}$ | $Y_{122}$ | … | $Y_{12r}$ | $Y_{12.}$ |
| | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋱ | ⋮ | ⋮ |
| | b | $Y_{1b1}$ | $Y_{1b2}$ | … | $Y_{1br}$ | $Y_{1b.}$ |
| $Y_{1.k}$ | | $Y_{1.1}$ | $Y_{1.2}$ | | $Y_{1.r}$ | $Y_{1..}$ |
| 2 | 1 | $Y_{211}$ | $Y_{212}$ | … | $Y_{21r}$ | $Y_{21.}$ |
| | 2 | $Y_{221}$ | $Y_{222}$ | … | $Y_{22r}$ | $Y_{22.}$ |
| | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋱ | ⋮ | ⋮ |
| | b | $Y_{2b1}$ | $Y_{2b2}$ | … | $Y_{2br}$ | $Y_{2b.}$ |
| $Y_{2.k}$ | | $Y_{2.1}$ | $Y_{2.2}$ | | $Y_{2.r}$ | $Y_{2..}$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 1 | $Y_{a11}$ | $Y_{a12}$ | $\cdots$ | $Y_{a1r}$ | $Y_{a1.}$ |
| | 2 | $Y_{a21}$ | $Y_{a22}$ | $\cdots$ | $Y_{a2r}$ | $Y_{a2.}$ |
| | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| | b | $Y_{ab1}$ | $Y_{ab2}$ | $\cdots$ | $Y_{abr}$ | $Y_{ab.}$ |
| $Y_{a.k}$ | | $Y_{a.1}$ | $Y_{a.2}$ | $\cdots$ | $Y_{a.r}$ | $Y_{a..}$ |
| $\sum_{i}^{a}\sum_{j}^{b}\sum_{k}^{r} Y_{ijk}$ | | | | | | $Y_{...}$ |

Tabel 2.2. Tabel Dua Arah untuk Faktor A dan B

| i | J | | | | $\sum_{j=1}^{b} Y_{ijk} = Y_{i..}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | $\cdots$ | B | |
| 1 | $Y_{11.}$ | $Y_{12.}$ | $\cdots$ | $Y_{1b.}$ | $Y_{1..}$ |
| 2 | $Y_{21.}$ | $Y_{22.}$ | $\cdots$ | $Y_{2b.}$ | $Y_{2..}$ |
| 3 | $Y_{31.}$ | $Y_{32.}$ | $\cdots$ | $Y_{3b.}$ | $Y_{3..}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $r$ | $\vdots$ | $(br)$ |
| a | $Y_{a1.}$ | $Y_{a2.}$ | $\cdots$ | $Y_{ab.}$ | $Y_{a..}$ |
| $\sum_{i=1}^{a} Y_{ijk} = Y_{.j.}$ | $Y_{.1.}$ | $Y_{.2.}$ | $(ar)$ | $Y_{.b.}$ | $Y_{...}$ (abr) |

Tabel 2.3 menjelaskan model linier respon percobaan faktorial racangan acak lengkap.

Tabel 2.3. Model Linier Aditif Respon Percobaan Faktorial RAL

| $Y_{ijk}$ | $\mu\ \alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_a\beta_1\beta_2 \cdots \beta_b(\alpha\beta)_{11}(\alpha\beta)_{12} \cdots (\alpha\beta)_{ab}\varepsilon_{ijk}$ |
|---|---|
| $Y_{111}$ | $1\mu+1\alpha_1+0\alpha_2+\cdots+0\alpha_a+1\beta_1+0\beta_2+\cdots+0\beta_b+1(\alpha\beta)_{11}+0(\alpha\beta)_{12}+\cdots+0(\alpha\beta)_{ab}+\varepsilon_{111}$ |
| $Y_{112}$ | $1\mu+1\alpha_1+0\alpha_2+\cdots+0\alpha_a+1\beta_1+0\beta_2+\cdots+0\beta_b+1(\alpha\beta)_{11}+0(\alpha\beta)_{12}+\cdots+0(\alpha\beta)_{ab}+\varepsilon_{112}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ |
| $Y_{11r}$ | $1\mu+1\alpha_1+0\alpha_2+\cdots+0\alpha_a+1\beta_1+0\beta_2+\cdots+0\beta_b+1(\alpha\beta)_{11}+0(\alpha\beta)_{12}+\cdots+0(\alpha\beta)_{ab}+\varepsilon_{11r}$ |
| $Y_{121}$ | $1\mu+1\alpha_1+0\alpha_2+\cdots+0\alpha_a+0\beta_1+1\beta_2+\cdots+0\beta_b+0(\alpha\beta)_{11}+1(\alpha\beta)_{12}+\cdots+0(\alpha\beta)_{ab}+\varepsilon_{121}$ |
| $Y_{122}$ | $1\mu+1\alpha_1+0\alpha_2+\cdots+0\alpha_a+0\beta_1+1\beta_2+\cdots+0\beta_b+0(\alpha\beta)_{11}+1(\alpha\beta)_{12}+\cdots+0(\alpha\beta)_{ab}+\varepsilon_{122}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ |
| $Y_{12r}$ | $1\mu+1\alpha_1+0\alpha_2+\cdots+0\alpha_a+0\beta_1+1\beta_2+\cdots+0\beta_b+0(\alpha\beta)_{11}+1(\alpha\beta)_{12}+\cdots+0(\alpha\beta)_{ab}+\varepsilon_{12r}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ |
| $Y_{1br}$ | $1\mu+1\alpha_1+0\alpha_2+\cdots+0\alpha_a+0\beta_1+0\beta_2+\cdots+1\beta_b+0(\alpha\beta)_{11}+0(\alpha\beta)_{12}+\cdots+1(\alpha\beta)_{1b}+\cdots+0(\alpha\beta)_{ab}+\varepsilon_{1br}$ |
| $Y_{211}$ | $1\mu+0\alpha_1+1\alpha_2+\cdots+0\alpha_a+1\beta_1+0\beta_2+\cdots+0\beta_b+0(\alpha\beta)_{11}+0(\alpha\beta)_{12}+\cdots+1(\alpha\beta)_{21}+\cdots+0(\alpha\beta)_{ab}+\varepsilon_{211}$ |
| $Y_{212}$ | $1\mu+0\alpha_1+1\alpha_2+\cdots+0\alpha_a+1\beta_1+0\beta_2+\cdots+0\beta_b+0(\alpha\beta)_{11}+0(\alpha\beta)_{12}+\cdots+1(\alpha\beta)_{21}+\cdots+0(\alpha\beta)_{ab}+\varepsilon_{212}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ |
| $Y_{21r}$ | $1\mu+0\alpha_1+1\alpha_2+\cdots+0\alpha_a+1\beta_1+0\beta_2+\cdots+0\beta_b+0(\alpha\beta)_{11}+0(\alpha\beta)_{12}+\cdots+1(\alpha\beta)_{21}+\cdots+0(\alpha\beta)_{ab}+\varepsilon_{21r}$ |
| $Y_{221}$ | $1\mu+0\alpha_1+1\alpha_2+\cdots+0\alpha_a+0\beta_1+1\beta_2+\cdots+0\beta_b+0(\alpha\beta)_{11}+0(\alpha\beta)_{12}+\cdots+1(\alpha\beta)_{22}+\cdots+0(\alpha\beta)_{ab}+\varepsilon_{221}$ |
| $Y_{222}$ | $1\mu+0\alpha_1+1\alpha_2+\cdots+0\alpha_a+0\beta_1+1\beta_2+\cdots+0\beta_b+0(\alpha\beta)_{11}+0(\alpha\beta)_{12}+\cdots+1(\alpha\beta)_{22}+\cdots+0(\alpha\beta)_{ab}+\varepsilon_{222}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ |
| $Y_{22r}$ | $1\mu+0\alpha_1+1\alpha_2+\cdots+0\alpha_a+0\beta_1+1\beta_2+\cdots+0\beta_b+0(\alpha\beta)_{11}+0(\alpha\beta)_{12}+\cdots+1(\alpha\beta)_{22}+\cdots+0(\alpha\beta)_{ab}+\varepsilon_{22r}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ |

Tabel 2.3. Model Linier Aditif Respon Percobaan Faktorial RAL (Lanjutan)

| $Y_{ijk}$ | $\mu\ \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_a \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_b (\alpha\beta)_{11} (\alpha\beta)_{12} \cdots (\alpha\beta)_{ab} \varepsilon_{ijk}$ |
|---|---|
| $Y_{2br}$ | $1\mu+0\alpha_1+1\alpha_2+\cdots+0\alpha_a+0\beta_1+0\beta_2+\cdots+1\beta_b+0(\alpha\beta)_{11}+0(\alpha\beta)_{12}+\cdots+1(\alpha\beta)_{2b}+\cdots+0(\alpha\beta)_{ab}+\varepsilon_{2br}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ |
| $Y_{abr}$ | $1\mu+0\alpha_1+0\alpha_2+\cdots+1\alpha_a+0\beta_1+0\beta_2+\cdots+1\beta_b+0(\alpha\beta)_{11}+0(\alpha\beta)_{12}+\cdots+1(\alpha\beta)_{ab}+\varepsilon_{abr}$ |

Model linier aditif pada Tabel 2.3 dapat ditulis sebagai berikut (Kutner. dkk, 2005)

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{2.2}$$

di mana:

$\boldsymbol{Y}$ = vektor respons (*abr* x 1)

$\boldsymbol{X}$ = matriks rancangan ( *abr* x (1+*a*+*b*+*ab*) )

$\boldsymbol{\beta}$ = vektor parameter ( (1+*a*+*b*+*ab*) x 1 )

$\boldsymbol{\varepsilon}$ = vektor galat (*abr* x 1) di mana $\boldsymbol{\varepsilon} \sim NIID(\mathbf{0},\ \boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{2}}\boldsymbol{I}_{abr})$

$$E(\boldsymbol{\varepsilon}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad\qquad V(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

dengan demikian:

$$E(\boldsymbol{Y}) \quad = E(\boldsymbol{X\beta}) + E(\boldsymbol{\varepsilon})$$

$$\boldsymbol{Y} \qquad = \boldsymbol{X\hat{\beta}} \tag{2.3}$$

$$\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} Y_{111} \\ \vdots \\ Y_{11r} \\ \vdots \\ \vdots \\ Y_{1b1} \\ \vdots \\ Y_{1br} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ Y_{ab1} \\ \vdots \\ Y_{abr} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\beta} = \left[\begin{array}{c} \mu \\ \hline \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_a \\ \hline \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_b \\ \hline (\alpha\beta)_{11} \\ \vdots \\ (\alpha\beta)_{1b} \\ \vdots \\ (\alpha\beta)_{a1} \\ \vdots \\ (\alpha\beta)_{ab} \end{array}\right] \qquad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{111} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{11r} \\ \vdots \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{1b1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{1br} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{ab1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{abr} \end{bmatrix}$$

$$
\boldsymbol{X} = \left[\begin{array}{c|ccc|ccc|ccccccc}
1 & 1 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
1 & 1 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1
\end{array}\right]
$$

## 2.2 Pendugaan Parameter

Model (2.1) mengandung empat parameter $(\mu, \alpha_i, \beta_j, (\alpha\beta)_{ij})$ yang harus diduga menggunakan MKT dengan meminimumkan jumlah kuadrat galat. Untuk menyederhanaan model (2.1) dengan melambangkan $Y_{ijk} = Y$ ; $\mu = \tau_0$ ; $a_i = \beta_i r_i$ ; $\beta_j = \delta_j t_j$ ; $(\alpha\beta)_{ij} = y_m x_m$ ; $\varepsilon_{ij} = \varepsilon$ , di mana $i$= 1,…,$a$ ; $q$= 1,…,$b$ ; $m$= 1,…,$c$ ; $a$ = banyaknya taraf faktor A ; $b$ = banyaknya taraf faktor B ; $c$ = banyaknya kombinasi perlakuan taraf faktor A dan B

$$
\begin{array}{ll}
Y = \tau_0 & \text{(Konstanta)} \\
\quad + \beta_1 r_1 + \cdots + \beta_a r_a & \text{(Faktor A)} \\
\quad + \delta_1 t_1 + \cdots + \delta_b t_b & \text{(Faktor B)} \\
\quad + y_1 x_1 + \cdots + y_c x_c & \text{(Interaksi Faktor A dan B)} \\
\quad + \varepsilon & \text{(Galat)}
\end{array} \tag{2.4}
$$

Untuk mempermudah analisis pendugaan parameter, model (2.3) dapat ditulis dalam bentuk model linier umum:

$$Y_l = \beta_0 + \beta_1 x_{l1} + \beta_2 x_{l2} + \cdots + \beta_m x_{nm} + \varepsilon_l \tag{2.5}$$

di mana

$l = 1, 2, \ldots, n$

$p$ = 1,2, …, $m$

$m$ = banyak prediktor ($a$+$b$+$ab$+1)

$n$ = banyaknya satuan percobaan

$$X_{lp} = \begin{cases} 1, jika\ respon\ berasal\ dari\ \ perlakuan\ ke - l \\ 0, lainnya \end{cases}$$

Apabila dinyatakan dalam bentuk matriks, model (2.5) menjadi:

$$\underset{\boldsymbol{Y}_{(nx1)}}{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}} = \underset{\boldsymbol{X}_{(nx(m+1))}}{\begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1u} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2u} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{v1} & x_{v2} & \dots & x_{vu} \end{bmatrix}} + \underset{\boldsymbol{\beta}_{((m+1)x1)}}{\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix}} + \underset{\boldsymbol{\varepsilon}_{(nx1)}}{\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}}$$

Ingat kembali model (2.3), lakukan pendugaan parameter $\boldsymbol{\beta}$ yang meminimumkan jumlah kuadrat galat

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon} &= (\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X\beta})'(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X\beta}) \\ &= \boldsymbol{Y'Y} - \boldsymbol{Y'X\beta} - \boldsymbol{\beta'X'Y} + \boldsymbol{\beta'X'X\beta} \\ &= \boldsymbol{Y'Y} - \boldsymbol{2\beta'X'Y} + \boldsymbol{\beta'X'X\beta} \end{aligned}$$

$\boldsymbol{Y'X\beta}$ merupakan matriks berukuran 1x1 atau suatu skalar yang jika diputar $(\boldsymbol{Y'X\beta})' = \boldsymbol{\beta'X'Y}$. Berdasarkan model (2.5) jumlah kuadrat galat dapat ditulis menjadi

$$\sum \varepsilon_l^2 = \sum (Y_l - \beta_0 + \beta_1 x_{l1} + \beta_2 x_{l2} + \cdots + \beta_m x_{nm})^2$$

dan diselesaikan dengan menurunkan $\sum \varepsilon_l^2$ terhadap setiap parameter kemudian disamakan dengan nol (Sembiring, 1995).

$$\frac{\vartheta \varepsilon_l^2}{\vartheta \beta_0} = -2 \sum (Y_l - \beta_0 + \beta_1 x_{l1} + \beta_2 x_{l2} + \cdots + \beta_m x_{lm}) = 0$$

$$\frac{\vartheta \varepsilon_l^2}{\vartheta \beta_1} = -2 \sum (Y_l - \beta_0 + \beta_1 x_{l1} + \beta_2 x_{l2} + \cdots + \beta_m x_{lm}) x_{l1} = 0$$

$$\frac{\vartheta \varepsilon_l^2}{\vartheta \beta_2} = -2 \sum (Y_l - \beta_0 + \beta_1 x_{l1} + \beta_2 x_{l2} + \cdots + \beta_m x_{lm}) x_{l2} = 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{\vartheta \varepsilon_l^2}{\vartheta \beta_m} = -2 \sum (Y_l - \beta_0 + \beta_1 x_{l1} + \beta_2 x_{l2} + \cdots + \beta_m x_{lm}) x_{lm} = 0$$

didapatkan model normal berikut:

$$\sum_{l=1}^{n} y_l = v\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum_{l=1}^{n} x_{l1} + \hat{\beta}_2 \sum_{l=1}^{n} x_{l2} + \cdots + \hat{\beta}_m \sum_{l=1}^{n} x_{lm}$$

$$\sum_{l=1}^{n} y_l x_{l1} = \hat{\beta}_0 \sum_{l=1}^{n} x_{l1} + \hat{\beta}_1 \sum_{l=1}^{n} x_{l_1}^2 + \hat{\beta}_2 \sum_{l=1}^{n} x_{l2} x_{l1} + \cdots + \hat{\beta}_m \sum_{l=1}^{v} x_{lm} x_{l1}$$

$$\sum_{l=1}^{n} y_l x_{l2} = \hat{\beta}_0 \sum_{l=1}^{n} x_{l2} + \hat{\beta}_1 \sum_{l=1}^{n} x_{l1} x_{l2} + \hat{\beta}_2 \sum_{l=1}^{n} x_{l_2}^2 + \cdots + \hat{\beta}_m \sum_{l=1}^{n} x_{lm} x_{l2}$$

$$\vdots$$

$$\sum_{l=1}^{n} y_l x_{lm} = \hat{\beta}_0 \sum_{l=1}^{n} x_{lm} + \hat{\beta}_1 \sum_{l=1}^{n} x_{l1} x_{lm} + \hat{\beta}_2 \sum_{l=1}^{n} x_{l2} x_{lm} + \cdots + \hat{\beta}_m \sum_{l=1}^{n} x_{l_m}^2 \tag{2.6}$$

Model normal (2.6) dapat ditulis dalam bentuk matriks

$$\boldsymbol{X'X\widehat{\beta}} = \boldsymbol{X'Y}$$
$$\boldsymbol{\widehat{\beta}} = (\boldsymbol{X'X})^{-1}\boldsymbol{X'Y} \tag{2.7}$$

Matriks $\boldsymbol{X'Y}_{(\boldsymbol{abr+1})\boldsymbol{x1}}$ , $\boldsymbol{X'X}_{(\boldsymbol{a+b+ab+1})\boldsymbol{x}(\boldsymbol{a+b+ab+1})}$ dan $\boldsymbol{\widehat{\beta}}$

$$\boldsymbol{X'X} = \begin{bmatrix}
abr & br & \cdots & br & ar & \cdots & ar & r & \cdots & r & \cdots & \cdots & r & \cdots & r \\
br & br & \cdots & 0 & r & \cdots & r & r & \cdots & r & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
br & 0 & \cdots & br & r & \cdots & r & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & r & \cdots & r \\
ar & r & \cdots & r & ar & \cdots & 0 & r & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & r & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
ar & r & \cdots & r & 0 & \cdots & ar & 0 & \cdots & r & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & r \\
r & r & \cdots & 0 & r & \cdots & 0 & r & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
r & r & \cdots & 0 & 0 & \cdots & r & 0 & \cdots & r & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
r & 0 & \cdots & r & r & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & r & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
r & 0 & \cdots & r & 0 & \cdots & r & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & r
\end{bmatrix} \tag{2.8}$$

$$\mathbf{X'Y} = \begin{bmatrix} Y\ldots \\ Y1.. \\ \vdots \\ Ya.. \\ Y.1. \\ \vdots \\ Y.b. \\ Y11. \\ \vdots \\ Y1b. \\ \vdots \\ \vdots \\ Ya1. \\ \vdots \\ Yab. \end{bmatrix} \boldsymbol{\hat{\beta}} = \begin{bmatrix} \hat{\mu} \\ \hat{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_a \\ \hat{\beta}_1 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_b \\ (\widehat{\alpha\beta})_{11} \\ \vdots \\ (\widehat{\alpha\beta})_{1b} \\ \vdots \\ (\widehat{\alpha\beta})_{a1} \\ \vdots \\ (\widehat{\alpha\beta})_{ab} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Y}\ldots \\ \bar{Y}_{1..} - \bar{Y}\ldots \\ \vdots \\ \bar{Y}_{a..} - \bar{Y}\ldots \\ \bar{Y}_{.1.} - \bar{Y}\ldots \\ \vdots \\ \bar{Y}_{.b.} - \bar{Y}\ldots \\ \bar{Y}_{11.} - \bar{Y}_{1..} - \bar{Y}_{.1.} + \bar{Y}\ldots \\ \vdots \\ \bar{Y}_{1b.} - \bar{Y}_{1..} - \bar{Y}_{.b.} + \bar{Y}\ldots \\ \vdots \\ \bar{Y}_{a1.} - \bar{Y}_{a..} - \bar{Y}_{.1.} + \bar{Y}\ldots \\ \vdots \\ \bar{Y}_{ab.} - \bar{Y}_{a..} - \bar{Y}_{.b.} + \bar{Y}\ldots \end{bmatrix}$$

Terlihat bahwa baris dan kolom matriks $\boldsymbol{X'X}$ terpaut linier, sehingga matriks $\boldsymbol{X'X}$ bersifat singular. Kondisi ini dapat diatasi menggunakan reparameterisasi.

## 2.3 Reparameterisasi

Reparameterisasi merupakan metode pendekatan terhadap model berpangkat tidak penuh. Metode ini mendefinisikan ulang parameter model dengan cara menggabungkan beberapa parameter menjadi satu sehingga matriks rancangan baru yang terbentuk berpangkat penuh (Myers dan Milton, 1991). Reparameterisasi akan menyebabkan kebebasan linier antar baris atau kolom serta ordo matriks $\mathbf{X'X}$ lebih kecil dibanding sebelum reparameterisasi.

Ingat kembali model (2.1), matriks $\mathbf{X'X}$ pada 2.11 berpangkat tidak penuh. Agar berpangkat penuh, model direparameterisasi dengan mendefenisikan ulang parameter, seperti pada Tabel 2.4.

Tabel 2.4. Model Reparameterisasi setiap Parameter Faktorial Rancangan Acak Lengkap

| Parameter | Reparameterisasi | Model baru |
|---|---|---|
| $\mu$ | $\alpha_p = \mu + \alpha_i$ | $Y_{ijk} = \alpha_p + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$ |
| $\alpha$ | $\mu_i = \mu + \alpha_i$ | $Y_{ijk} = \mu_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$ |
| $\beta$ | $\mu_j = \mu + \beta_j$ | $Y_{ijk} = \mu_j + \alpha_i + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$ |
| $\alpha\beta$ | $\mu_q = \mu + (\alpha\beta)_{ij}$ | $Y_{ijk} = \mu_q + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ijk}$ |

Reparameterisasi dilakukan dengan cara membuang baris dan kolom yang terpaut linier pada matriks $\mathbf{X'X}$ (2.11), yang merupakan jumlah dari a,b,ab baris atau kolom, sehingga dihasilkan matriks $\mathbf{X'X}$ (2.12) dengan baris dan kolom saling bebas linier.

$$\mathbf{X'X} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|cccccccc}
br & \cdots & 0 & r & \cdots & r & r & \cdots & r & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & br & r & \cdots & r & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & r & \cdots & r \\
\hline
r & \cdots & r & ar & \cdots & 0 & r & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & r & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
r & \cdots & r & 0 & \cdots & ar & 0 & \cdots & r & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & r \\
\hline
r & \cdots & 0 & r & \cdots & 0 & r & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
r & \cdots & 0 & 0 & \cdots & r & 0 & \cdots & r & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & r & r & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & r & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & r & 0 & \cdots & r & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & r
\end{array}\right] \quad (2.9)$$

## 2.4 Analisis Ragam

Pada model (2.1) parameter $\mu, \alpha_i, \beta_j$ dan $(\alpha\beta)_{ij}$ diganti dengan penduga-penduga menghasilkan:

$$Y_{ijk} = \hat{\mu} + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j + \widehat{(\alpha\beta)}_{ij} + \hat{\varepsilon}_{ijk}$$

$$Y_{ijk} = \bar{Y}_{...} + (\bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{...}) + (\bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{...}) + (\bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{.j.} + \bar{Y}_{...}) + \hat{\varepsilon}_{ijk}$$

$$Y_{ijk} - \bar{Y}_{...} = (\bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{...}) + (\bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{...}) + (\bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{.j.} + \bar{Y}_{...}) + \hat{\varepsilon}_{ijk} \quad (2.10)$$

dengan mengkuadratkan ruas kiri dan kanan persamaan (2.10), kemudian dijumlahkan menurut i,j,k menghasilkan:

$$\sum_{i,j,k=1}^{a,b,r}(Y_{ijk} - \bar{Y}_{...})^2 = br\sum_{i=1}^{a}(\bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{...})^2 + ar\sum_{j=1}^{b}\left(\bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{...}\right)^2 + r\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left(\bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{.j.} + \bar{Y}_{...}\right)^2 + \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r}\hat{\varepsilon}^2{}_{ijk} \qquad (2.11)$$

$$JK_{total} = JK_A + JK_B + JK_{AB} + JK_{galat}$$

atau dalam bentuk matriks

$$(\boldsymbol{Y'Y}) - \frac{(\boldsymbol{J'Y})^2}{\boldsymbol{abr}} = \left((\boldsymbol{Y'X})\boldsymbol{\beta_\alpha} - \frac{(\boldsymbol{J'Y})^2}{\boldsymbol{abr}}\right) - \left((\boldsymbol{Y'X})\boldsymbol{\beta_\beta} - \frac{(\boldsymbol{J'Y})^2}{\boldsymbol{abr}}\right) - \left((\boldsymbol{Y'X})\boldsymbol{\beta_{\alpha\beta}} - \frac{(\boldsymbol{J'Y})^2}{\boldsymbol{abr}}\right) - \text{JK}_{Galat}$$

$$JK_{total} = JK_{Hipotesis(A)} + JK_{Hipotesis(B)} + JK_{Hipotesis(AB)} + JK_{galat}$$

$$JK_{total} = JK_{Regresi\ Model\ penuh} + JK_{galat}$$

Pengujian hipotesis terhadap parameter penyusun model (2.11)

1. $H_{0(1)}$ : $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_a = 0$ ; $\alpha_i = 0$
   $H_{1(1)}$ : paling tidak terdapat satu $i$ di mana $\alpha_i \neq 0$
2. $H_{0(2)}$ : $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_b = 0$ ; $\beta_j = 0$
   $H_{1(2)}$ : paling tidak terdapat satu $j$ di mana $\beta_j \neq 0$
3. $H_{0(3)}$ : $(\alpha\beta)_{11} = (\alpha\beta)_{12} = \cdots = (\alpha\beta)_{ab} = 0$ ; $(\alpha\beta)_{ij} = 0$
   $H_{1(3)}$ : paling tidak terdapat satu $ij$ di mana $(\alpha\beta)_{ij} \neq 0$

Jika $H_0$ benar, statistik uji = $\frac{KT_P}{KT_G} \sim F_{(db\ galat)(db\ SK)}$

Jumlah kuadrat pada persamaan (2.14) disajikan secara rinci pada Tabel 2.5.

Tabel 2.5. Analisis Ragam Respon Percobaan Faktorial Rancangan Acak Lengkap

| SK | Db | JK |
|---|---|---|
| Regresi Model Penuh | ab | $JK_{Model\ Penuh}$ |
| Model Hipotesis ($\alpha$) | (a-1) | $JK_{Hipotesis\ (A)}$ |
| Model Hipotesis ($\beta$) | (b-1) | $JK_{Hipotesis\ (B)}$ |
| Model Hipotesis ($\alpha\beta$) | (a-1)(b-1) | $JK_{Hipotesi\ (AB)}$ |
| Galat | ab(r-1) | $JK_{Total} - JK_{Model\ penuh}$ |
| Total | abr | $JK_{Total}$ |

## 2.5 Asumsi Analisis Ragam

Asumsi yang harus dipenuhi oleh analisis ragam faktorial rancangan acak lengkap yaitu pengaruh perlakuan dan lingkungan bersifat aditif serta galat percobaan menyebar normal, homogen dan independen.

1. Pengaruh perlakuan dan lingkungan bersifat aditif

Pelanggaran terhadap asumsi aditivitas pengaruh akan menghilangkan informasi tentang pengaruh perlakuan. Non-aditivitas cenderung menyebabkan ragam bersifat heterogen yang disebabkan oleh keberadaan pencilan, sehingga secara grafis pemetaan $\varepsilon_{ijk}$ terhadap $\hat{Y}_{ijk}$ dapat digunakan untuk memeriksa asumsi aditivitas pengaruh (Yitnosumarto, 1990). Pengujian keaditifan model juga dapat dilakukan menggunakan uji Tukey berlandaskan hipotesis

$H_0$: $\omega = 0$ $\quad$ $H_1$: $\omega \neq 0$

di mana

$$\hat{\omega} = \text{penduga statistik non aditivitas} = \frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} y_{ij}(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..})(\bar{y}_{.j}-\bar{y}_{..})}{\sum_{i=1}^{t}(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..})^2\sum_{j=1}^{n}(\bar{y}_{.j}-\bar{y}_{..})^2}$$

$$JK_{\text{Non aditivitas (NAT)}} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} y_{ij}(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..})(\bar{y}_{.j}-\bar{y}_{..})\right)^2}{\sum_{i=1}^{t}(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..})^2\sum_{j=1}^{n}(\bar{y}_{.j}-\bar{y}_{..})^2}$$

$$\text{statistik uji} = \frac{\frac{JK_{NAT}}{db\ NAT}}{\frac{JK_G}{db\ galat}} = \frac{KT_{NAT}}{KT_G} \sim F_{\text{db NAT, db galat}}$$

Pengujian dilakukan dengan membandingkan statistik uji terhadap $F_{\alpha(db\ NAT, db\ galat)}$. Bila $H_0$ benar maka statistik uji menyebar secara $F$ dengan derajat bebas 1 dan $ab(r-1)$.

2. Galat percobaan memiliki ragam homogen

Pengujian kehomogenan ragam galat dilakukan dengan uji Barlett, berlandaskan hipotesis:

1. $H_{0(1)}$: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \cdots = \sigma_a^2 = \sigma$ ; $\sigma_i^2 = \sigma^2$; $i = 1, 2, \ldots, a$
   $H_{1(1)}$: paling tidak terdapat satu $i$ di mana $\sigma_i^2 \neq \sigma^2$
2. $H_{0(2)}$: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \cdots = \sigma_b^2 = \sigma$ ; $\sigma_j^2 = \sigma^2$; $j = 1, 2, \ldots, b$
   $H_{1(2)}$: paling tidak terdapat satu $j$ di mana $\sigma_j^2 \neq \sigma^2$
3. $H_{0(3)}$: $\sigma_{11}^2 = \sigma_{12}^2 = \cdots = \sigma_{ab}^2 = \sigma$ ; $\sigma_k^2 = \sigma^2$; $k = 1, 2, \ldots, ab$
   $H_{1(3)}$: paling tidak terdapat satu $ij$ di mana $\sigma_{ij}^2 \neq \sigma^2$

Jika $H_0$ benar, statistik uji :

Untuk faktor A, $\dfrac{\left[(N-a)\ln\left(S^2\right) - \sum_i (a_i - 1)\ln\left(S_i^2\right)\right]}{1 + \left[\frac{1}{3(a-1)}\right]\left[\sum_i \frac{1}{a_i - 1} - \frac{1}{N-a}\right]} \sim \chi^2_{\alpha,(a-1)}$

Untuk faktor B, $\dfrac{\left[(N-b)\ln\left(S^2\right) - \sum_j (b_j - 1)\ln\left(S_j^2\right)\right]}{1 + \left[\frac{1}{3(b-1)}\right]\left[\sum_j \frac{1}{b_j - 1} - \frac{1}{N-b}\right]} \sim \chi^2_{\alpha,(b-1)}$

Untuk kombinasi faktor A dan B,

$\dfrac{\left[(N-ab)\ln\left(S^2\right) - \sum_k ((ab)_k - 1)\ln\left(S_k^2\right)\right]}{1 + \left[\frac{1}{3(ab-1)}\right]\left[\sum_k \frac{1}{(ab)_k - 1} - \frac{1}{N-ab}\right]} \sim \chi^2_{\alpha,(ab-1)}$

di mana:

$S_i^2 = \dfrac{\sum_i (Y_{ijk} - \bar{Y}_{i..})^2}{a_i - 1}$ ; $S_j^2 = \dfrac{\sum_j (Y_{ijk} - \bar{Y}_{.j.})^2}{b_j - 1}$ ; $S_k^2 = \dfrac{\sum_k (Y_{ijk} - \bar{Y}_{..k})^2}{(ab)_k - 1}$

$S^2 = \dfrac{\sum_i (a_i - 1) S_i^2}{N-a}$ ; N = banyak satuan percobaan

$H_0$ diterima jika statistik uji $\leq \chi^2_{\alpha,(a-1)}$, asumsi ragam homogen terpenuhi

3. Galat percobaan menyebar normal

Kenormalan galat menggunakan Uji *Saphiro Wilk* berlandaskan hipotesis:

$H_0$ : $\varepsilon_{ijk} \sim N(\mu, \sigma^2)$ dengan $\mu = 0$

$H_1$ : $\varepsilon_{ijk} \sim N(\mu, \sigma^2)$ dengan $\mu \neq 0$

Uji *Saphiro Wilk* menggunakan pendekatan sebaran normal.

Jika $H_0$ benar, statistik uji $T_3 = \frac{\left[\sum_{i=1}^{a} a_i x_{(i)}\right]^2}{\sum_{i=1}^{a}(X_i - \bar{X})^2} \sim Z$

$H_0$ diterima jika statistik uji $T_3 \leq Z_\alpha$ , asumsi kenormalan galat dipenuhi.

# BAB III
# METODE PENELITIAN

## 3.1 Sumber Data

Data sekunder bersumber pada Wahdini (2014) : “Uji Karakteristik Mie Instan Berbahan Dasar Tepung Terigu dengan Subtitusi MOCAF dan Pati Jagung” disajikan pada Lampiran 1, menggunakan Rancangan Acak Lengkap (RAL) pola Faktorial. Respon penelitian adalah Rendemen (%).

Perlakuan diulang sebanyak 3 kali, di mana formulasi tepung terigu, MOCAF, dan pati jagung menjadi 3 taraf faktor A. Proporsi penambahan CMC menjadi 2 taraf Faktor B. Dua faktor menghasilkan kombinasi perlakuan dapat dilihat pada Tabel 3.1.

Tabel 3.1. Kombinasi perlakuan Faktor A dan B

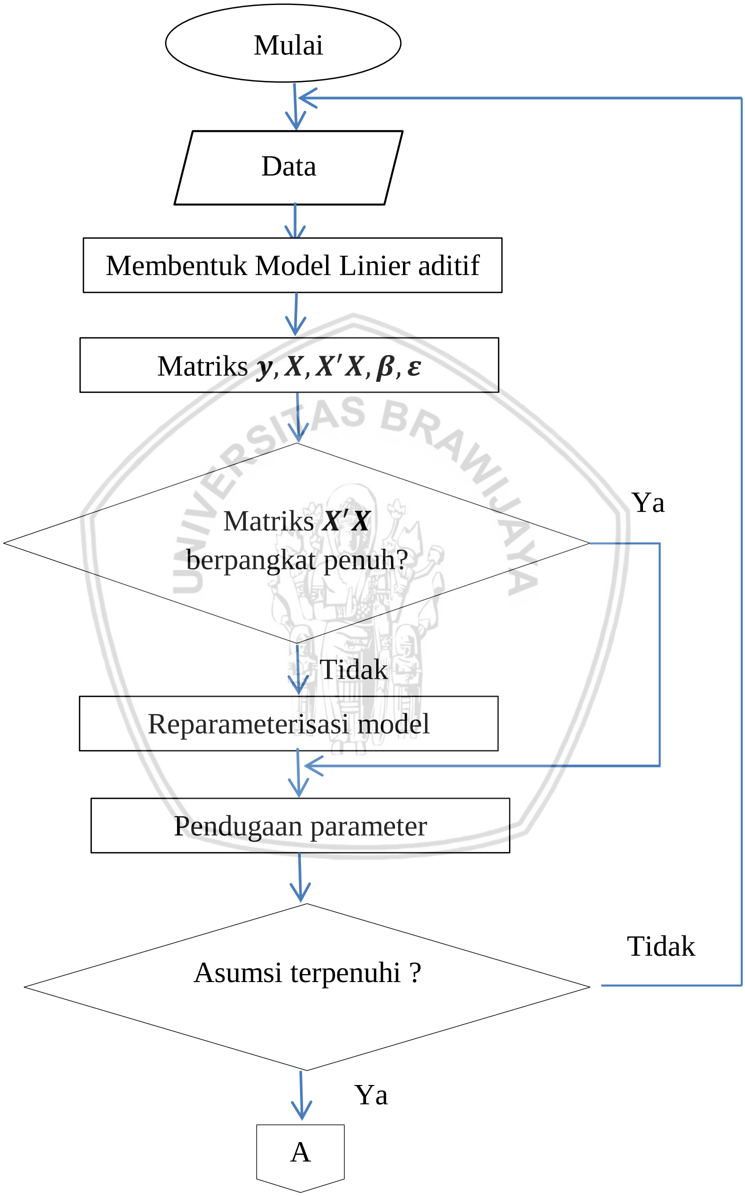
| Formulasi tepung terigu : MOCAF : Pati jagung (A) | Proporsi penambahan CMC (B) | |
|---|---|---|
| | $b_1$ (1%) | $b_2$ (1.5%) |
| $a_1$ (45 : 52.5 : 52.5) gram | $a_1b_1$ | $a_1b_2$ |
| $a_2$ (45 : 60 : 45) gram | $a_2b_1$ | $a_2b_2$ |
| $a_3$ (45 : 67 : 37.5) gram | $a_3b_1$ | $a_3b_2$ |

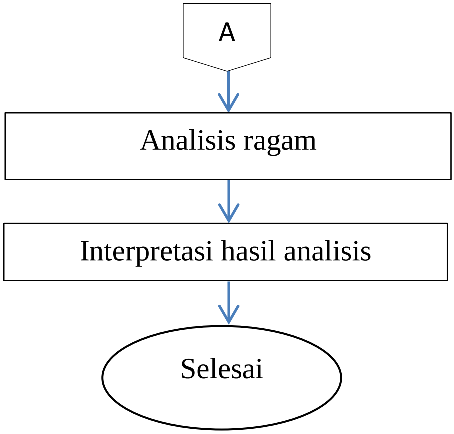
## 3.2 Metode Analisis

Prosedur analisis yang diterapkan pada data adalah:

1. Membentuk model linier aditif (2.1) untuk data.
2. Membuat matriks $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\varepsilon}$ untuk menyusun model linier umum.
3. Membentuk matriks $\boldsymbol{X'X}$ dan $\boldsymbol{X'Y}$.
4. Memeriksa apakah matriks $\boldsymbol{X'X}$ bersifat tidak singular dan berpangkat penuh.
5. Reparameterisasi matriks $\boldsymbol{X'X}$.
6. Menguji asumsi analisis ragam.
7. Menghitung jumlah kuadrat setiap sumber keragaman.
8. Menyusun tabel analisis ragam.
9. Menguji pengaruh setiap parameter dengan uji F.

## 3.3 Diagram Alir






Gambar 3.1 Diagram Alir Metode Analisis

# BAB IV
# HASIL DAN PEMBAHASAN

## 4.1 Model Linier Aditif

Penerapan persamaan (2.1) untuk data respon rendemen adalah:

$$57.853 = 1\mu + 1\alpha_1 + 0\alpha_2 + 0\alpha_3 + 1\beta_1 + 0\beta_2 + 1(\alpha\beta)_{11} + 0(\alpha\beta)_{12} + 0(\alpha\beta)_{21} + 0(\alpha\beta)_{22} + 0(\alpha\beta)_{31} + 0(\alpha\beta)_{32} + 1\varepsilon_{111}$$

$$67.326 = 1\mu + 1\alpha_1 + 0\alpha_2 + 0\alpha_3 + 1\beta_1 + 0\beta_2 + 1(\alpha\beta)_{11} + 0(\alpha\beta)_{12} + 0(\alpha\beta)_{21} + 0(\alpha\beta)_{22} + 0(\alpha\beta)_{31} + 0(\alpha\beta)_{32} + 1\varepsilon_{112}$$

$$66.737 = 1\mu + 1\alpha_1 + 0\alpha_2 + 0\alpha_3 + 1\beta_1 + 0\beta_2 + 1(\alpha\beta)_{11} + 0(\alpha\beta)_{12} + 0(\alpha\beta)_{21} + 0(\alpha\beta)_{22} + 0(\alpha\beta)_{31} + 0(\alpha\beta)_{32} + 1\varepsilon_{113}$$

$$75.047 = 1\mu + 1\alpha_1 + 0\alpha_2 + 0\alpha_3 + 0\beta_1 + 1\beta_2 + 0(\alpha\beta)_{11} + 1(\alpha\beta)_{12} + 0(\alpha\beta)_{21} + 0(\alpha\beta)_{22} + 0(\alpha\beta)_{31} + 0(\alpha\beta)_{32} + 1\varepsilon_{121}$$

$$74.292 = 1\mu + 1\alpha_1 + 0\alpha_2 + 0\alpha_3 + 0\beta_1 + 1\beta_2 + 0(\alpha\beta)_{11} + 1(\alpha\beta)_{12} + 0(\alpha\beta)_{21} + 0(\alpha\beta)_{22} + 0(\alpha\beta)_{31} + 0(\alpha\beta)_{32} + 1\varepsilon_{122}$$

$$70.808 = 1\mu + 1\alpha_1 + 0\alpha_2 + 0\alpha_3 + 0\beta_1 + 1\beta_2 + 0(\alpha\beta)_{11} + 1(\alpha\beta)_{12} + 0(\alpha\beta)_{21} + 0(\alpha\beta)_{22} + 0(\alpha\beta)_{31} + 0(\alpha\beta)_{32} + 1\varepsilon_{123}$$

$$57.389 = 1\mu + 0\alpha_1 + 1\alpha_2 + 0\alpha_3 + 1\beta_1 + 0\beta_2 + 0(\alpha\beta)_{11} + 0(\alpha\beta)_{12} + 1(\alpha\beta)_{21} + 0(\alpha\beta)_{22} + 0(\alpha\beta)_{31} + 0(\alpha\beta)_{32} + 1\varepsilon_{211}$$

$66.695 = 1\mu + 0\alpha_1 + 1\alpha_2 + 0\alpha_3 + 1\beta_1 + 0\beta_2 + 0(\alpha\beta)_{11} + 0(\alpha\beta)_{12} + 1(\alpha\beta)_{21} + 0(\alpha\beta)_{22} + 0(\alpha\beta)_{31} + 0(\alpha\beta)_{32} + 1\varepsilon_{212}$

$68.211 = 1\mu + 0\alpha_1 + 1\alpha_2 + 0\alpha_3 + 1\beta_1 + 0\beta_2 + 0(\alpha\beta)_{11} + 0(\alpha\beta)_{12} + 1(\alpha\beta)_{21} + 0(\alpha\beta)_{22} + 0(\alpha\beta)_{31} + 0(\alpha\beta)_{32} + 1\varepsilon_{213}$

$73.368 = 1\mu + 0\alpha_1 + 1\alpha_2 + 0\alpha_3 + 0\beta_1 + 1\beta_2 + 0(\alpha\beta)_{11} + 0(\alpha\beta)_{12} + 0(\alpha\beta)_{21} + 1(\alpha\beta)_{22} + 0(\alpha\beta)_{31} + 0(\alpha\beta)_{32} + 1\varepsilon_{221}$

$69.801 = 1\mu + 0\alpha_1 + 1\alpha_2 + 0\alpha_3 + 0\beta_1 + 1\beta_2 + 0(\alpha\beta)_{11} + 0(\alpha\beta)_{12} + 0(\alpha\beta)_{21} + 1(\alpha\beta)_{22} + 0(\alpha\beta)_{31} + 0(\alpha\beta)_{32} + 1\varepsilon_{222}$

$67.954 = 1\mu + 0\alpha_1 + 1\alpha_2 + 0\alpha_3 + 0\beta_1 + 1\beta_2 + 0(\alpha\beta)_{11} + 0(\alpha\beta)_{12} + 0(\alpha\beta)_{21} + 1(\alpha\beta)_{22} + 0(\alpha\beta)_{31} + 0(\alpha\beta)_{32} + 1\varepsilon_{223}$

$60.800 = 1\mu + 0\alpha_1 + 0\alpha_2 + 1\alpha_3 + 1\beta_1 + 0\beta_2 + 0(\alpha\beta)_{11} + 0(\alpha\beta)_{12} + 0(\alpha\beta)_{21} + 0(\alpha\beta)_{22} + 1(\alpha\beta)_{31} + 0(\alpha\beta)_{32} + 1\varepsilon_{311}$

$63.789 = 1\mu + 0\alpha_1 + 0\alpha_2 + 1\alpha_3 + 1\beta_1 + 0\beta_2 + 1(\alpha\beta)_{11} + 0(\alpha\beta)_{12} + 0(\alpha\beta)_{21} + 0(\alpha\beta)_{22} + 1(\alpha\beta)_{31} + 0(\alpha\beta)_{32} + 1\varepsilon_{312}$

$65.895 = 1\mu + 0\alpha_1 + 0\alpha_2 + 1\alpha_3 + 1\beta_1 + 0\beta_2 + 1(\alpha\beta)_{11} + 0(\alpha\beta)_{12} + 0(\alpha\beta)_{21} + 0(\alpha\beta)_{22} + 1(\alpha\beta)_{31} + 0(\alpha\beta)_{32} + 1\varepsilon_{313}$

$70.850 = 1\mu + 0\alpha_1 + 0\alpha_2 + 1\alpha_3 + 0\beta_1 + 1\beta_2 + 0(\alpha\beta)_{11} + 0(\alpha\beta)_{12} + 0(\alpha\beta)_{21} + 0(\alpha\beta)_{22} + 0(\alpha\beta)_{31} + 1(\alpha\beta)_{32} + 1\varepsilon_{321}$

$67.114 = 1\mu + 0\alpha_1 + 0\alpha_2 + 1\alpha_3 + 0\beta_1 + 1\beta_2 + 0(\alpha\beta)_{11} + 0(\alpha\beta)_{12} + 0(\alpha\beta)_{21} + 0(\alpha\beta)_{22} + 0(\alpha\beta)_{31} + 1(\alpha\beta)_{32} + 1\varepsilon_{322}$

$68.709 = 1\mu + 0\alpha_1 + 0\alpha_2 + 1\alpha_3 + 0\beta_1 + 1\beta_2 + 0(\alpha\beta)_{11} + 0(\alpha\beta)_{12} + 0(\alpha\beta)_{21} + 0(\alpha\beta)_{22} + 0(\alpha\beta)_{31} + 1(\alpha\beta)_{32} + 1\varepsilon_{323}$

(4.1)

Matriks penyusun model $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ untuk himpunan persamaan (4.1) adalah:

$$\boldsymbol{Y}_{(18x1)} = \begin{bmatrix} 57.853 \\ 67.326 \\ 66.737 \\ 75.047 \\ 74.292 \\ 70.808 \\ 57.389 \\ 66.695 \\ 68.211 \\ 73.368 \\ 69.801 \\ 67.954 \\ 60.8 \\ 63.789 \\ 65.895 \\ 70.85 \\ 67.114 \\ 68.709 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\beta}_{(12x1)} = \begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ (\alpha\beta)_{11} \\ (\alpha\beta)_{12} \\ (\alpha\beta)_{21} \\ (\alpha\beta)_{22} \\ (\alpha\beta)_{31} \\ (\alpha\beta)_{32} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{(18x1)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{111} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{112} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{113} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{121} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{122} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{123} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{211} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{212} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{213} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{221} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{222} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{223} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{311} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{312} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{313} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{321} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{322} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{323} \end{bmatrix}$$

$$
\boldsymbol{X}_{(18x12)} = \left[\begin{array}{c|ccc|cc|cccccc}
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
$$

## 4.2 Pemeriksaan Pangkat Matriks

Matriks $\boldsymbol{X'X}$ yang terbentuk adalah

$$
\boldsymbol{X'X}_{(12x12)} = \left[\begin{array}{c|ccc|cc|cccccc}
18 & 6 & 6 & 6 & 9 & 9 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\
\hline
6 & 6 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
6 & 0 & 6 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \\
6 & 0 & 0 & 6 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\
\hline
9 & 3 & 3 & 3 & 9 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\
9 & 3 & 3 & 3 & 0 & 9 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 3 \\
\hline
3 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\
3 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\
3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3
\end{array}\right]
$$

kolom pertama terpaut linier dengan 3 kolom menerangkan faktor A, 2 kolom menerangkan faktor B dan 6 kolom menerangkan faktor interaksi A dan B . Oleh karena itu, $|\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}| = 0$, menyebabkan matriks $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$ berpangkat tidak penuh dan tidak memiliki kebalikan.

### 4.3 Reparameterisasi

Masalah keterpautan linier diatasi melalui reparameterisasi dengan cara membuang baris dan kolom penyebab keterpautan linier sehingga didapatkan matriks $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$ dengan baris dan kolom saling bebas linier. Hasil reparameterisasi pada matriks $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$ adalah

$$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}_{(12x12)} = \begin{bmatrix} 18 & 6 & 6 & 6 & 9 & 9 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 6 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 9 & 3 & 3 & 3 & 9 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 9 & 3 & 3 & 3 & 0 & 9 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}_{(11x11)} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 9 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 & 9 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Reparameterisasi menyebabkan kebebasan linier antar baris atau kolom serta ordo matriks $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$ lebih kecil dibanding sebelum reparameterisasi, sehingga matriks $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$ bersifat tidak singular dan berpangkat penuh karena $|\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}| \neq 0$. Oleh karena itu, matriks $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$ memiliki kebalikan dan $\boldsymbol{\beta}$ dapat diduga.

## 4.4 Pendugaan Parameter

Pendugaan parameter menggunakan Metode Kuadrat Terkecil (MKT), penduga disusun dalam bentuk matriks menjadi $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y}$, di mana :

$$(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}_{(11x11)} = \begin{bmatrix} 0.167 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.167 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.167 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.111 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.111 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.333 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.333 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.333 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.333 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.333 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.333 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y}_{(11x1)} = \begin{bmatrix} 412.063 \\ 403.418 \\ 397.157 \\ 574.695 \\ 637.943 \\ 191.916 \\ 220.147 \\ 192.295 \\ 211.123 \\ 190.484 \\ 20.673 \end{bmatrix}$$

Hasil pendugaan parameter disajikan pada Tabel 4.1

Tabel 4.1. Hasil pendugaan parameter

| Parameter | penduga | $\hat{\beta} - \mu$ | |
|---|---|---|---|
| $\mu$ | 67.368 | 0 | |
| $\alpha_1$ | 68.677 | 1.308 | 0 |
| $\alpha_2$ | 67.236 | -0.132 | |
| $\alpha_3$ | 66.192 | -1.175 | |
| $\beta_1$ | 63.855 | -3.513 | 0 |
| $\beta_2$ | 70.882 | 3.513 | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $(\alpha\beta)_{11}$ | 63.972 | -3.396 | 0 |
| $(\alpha\beta)_{12}$ | 73.382 | 6.013 | |
| $(\alpha\beta)_{21}$ | 64.098 | -3.270 | |
| $(\alpha\beta)_{22}$ | 70.374 | 3.005 | |
| $(\alpha\beta)_{31}$ | 63.494 | -3.874 | |
| $(\alpha\beta)_{32}$ | 68.891 | 1.522 | |

## 4.5 Pengujian Asumsi Analisis Ragam

### 4.5.1 Kenormalan Galat

Kenormalan galat diuji dengan uji *Shapiro Wilk* berlandaskan hipotesis:

$H_0$ : $\varepsilon_{ijk} \sim N(\mu, \sigma^2)$ dengan $\mu = 0$

$H_1$ : $\varepsilon_{ijk} \sim N(\mu, \sigma^2)$ dengan $\mu \neq 0$

Hasil pengujian kenormalan galat disajikan pada Lampiran 2. Berdasarkan hasil analisis, nilai-p lebih dari 0.05 maka $H_0$ diterima dan dapat disimpulkan bahwa galat percobaan menyebar normal.

### 4.5.2 Kehomogenan Ragam Galat

Kehomogenan ragam galat diuji dengan uji *Bartlett* berlandaskan hipotesis:

1. $H_{0(1)}$: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \cdots = \sigma_a^2 = \sigma$ ; $\sigma_i^2 = \sigma^2$; $i = 1, 2, \ldots, a$
   $H_{1(1)}$: paling tidak terdapat satu *i* di mana $\sigma_i^2 \neq \sigma^2$
2. $H_{0(2)}$: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \cdots = \sigma_b^2 = \sigma$ ; $\sigma_j^2 = \sigma^2$; $j = 1, 2, \ldots, b$
   $H_{1(2)}$: paling tidak terdapat satu *j* di mana $\sigma_j^2 \neq \sigma^2$
3. $H_{0(3)}$: $\sigma_{11}^2 = \sigma_{12}^2 = \cdots = \sigma_{ab}^2 = \sigma$ ; $\sigma_k^2 = \sigma^2$; $k = 1, 2, \ldots, ab$
   $H_{1(3)}$: paling tidak terdapat satu *ij* di mana $\sigma_{ij}^2 \neq \sigma^2$

Hasil pengujian kehomogenan ragam galat disajikan pada Tabel 4.2.

Tabel 4.2. Hasil Pengujian Kehomogenan Ragam Galat

| Faktor | Statistik uji $\chi^2$*Bartlett* | Nilai-p |
|---|---|---|
| A | 2.09 | 0.35 |
| B | 3.43 | 0.06 |
| AB | 3.55 | 0.62 |

Nilai-p Faktor A, B dan AB lebih dari 0.05 maka $H_0$ diterima, jadi asumsi kehomogenan ragam galat dapat dipenuhi.

### 4.5.3 Keaditifan Model

Keaditifan model diuji dengan uji *Tukey* berlandaskan hipotesis:

$H_0 : \omega = 0$

$H_1 : \omega \neq 0$

Hasil pengujian keaditifan model disajikan pada Tabel 4.3.

Tabel 4.3. Hasil Pengujian Keaditifan Model

| SK | Db | JK | KT | SU F | $F_{0.05(1,11)}$ | Nilai-p |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Perlakuan | 5 | 254.27 | 50.85 | | | |
| NAT | 1 | 38.13 | 38.13 | 3.16 | 5.59 | 0.10 |
| Galat | 11 | 132.39 | 12.03 | | | |
| Total | 18 | 424.79 | | | | |

Nilai-p NAT lebih dari 0.05 maka $H_0$ diterima dan dapat disimpulkan bahwa model semua data bersifat aditif.

## 4.5 Analisis Ragam

Analisis ragam disusun dalam Tabel 4.4 kemudian diuji pengaruh perlakuan berlandaskan hipotesis:

1. $H_{0(1)} : \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_a = 0\,;\ \alpha_i = 0$
   $H_{1(1)}$ : paling tidak terdapat satu $i$ di mana $\alpha_i \neq 0$
2. $H_{0(2)} : \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_b = 0\,;\ \beta_j = 0$
   $H_{1(2)}$ : paling tidak terdapat satu $j$ di mana $\beta_j \neq 0$
3. $H_{0(3)} : (\alpha\beta)_{11} = (\alpha\beta)_{12} = \cdots = (\alpha\beta)_{ab} = 0\,;\ (\alpha\beta)_{ij} = 0$
   $H_{1(3)}$ : paling tidak terdapat satu $ij$ di mana $(\alpha\beta)_{ij} \neq 0$

Tabel 4.4. Analisis Ragam Respon Percobaan Faktorial Rancangan Acak Lengkap

| Sumber Keragaman | db | JK | KT | Statistik Uji | $F_{0.05(\text{db SK, db galat})}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Nilai Tengah | 1 | 816.33 | | | |
| Regresi Model Penuh | 5 | 254.22 | 42.37 | 2.98 | 2.99 |
| Model Hipotesis ($\alpha$) | 2 | 18.67 | 9.33 | 0.65 | 3.88 |
| Model Hipotesis ($\beta$) | 1 | 222.23 | 222.23 | 0.06 | 4.74 |
| Model Hipotesis ($\alpha\beta$) | 2 | 13.35 | 6.67 | 0.46 | 3.88 |
| Galat | 12 | 170.52 | 14.21 | | |
| Total | 18 | 424.75 | | | |

Tabel 4.4 menunjukkan bahwa :

1. Statistik uji Model Hipotesis < $F_{0.05(2,\ 12)}$, dengan demikian diputuskan untuk menerima $H_0$, bahwa formulasi tepung terigu : MOCAF : pati jagung menghasilkan rendemen mie instan sama besar.
2. Statistik uji Model Hipotesis < $F_{0.05(1,\ 12)}$, dengan demikian diputuskan untuk menerima $H_0$, bahwa proporsi penambahan CMC (%) menghasilkan rendemen mie instan sama besar.
3. Statistik uji Model Hipotesis < $F_{0.05(2,\ 12)}$, dengan demikian diputuskan untuk menerima $H_0$, bahwa kombinasi formulasi tepung terigu : MOCAF : pati jagung dengan proporsi penambahan CMC (%) menghasilkan rendemen mie instan sama besar.

# BAB V
# PENUTUP

## 5.1 Kesimpulan

Penggunaan model linier umum pada analisis ragam faktorial RAL menghasilkan kesingularan matriks rancangan yang menyebabkan pangkat matriks tidak penuh (< 12), sehingga penduga parameter tidak dapat ditentukan. Masalah ini diatasi dengan reparameterisasi yang menghasilkan matriks berordo 11 dan berpangkat penuh.

Pada data rendemen, hasil analisis ragam menunjukkan bahwa faktor formulasi tepung terigu : MOCAF : pati jagung, proporsi penambahan CMC dan kombinasi kedua faktor menghasilkan pengaruh yang tidak jauh berbeda atau sama besar terhadap rendemen mie instan.

## 5.2 Saran

Disarankan kepada peneliti lain untuk memperlebar jarak taraf pada faktor agar terlihat pengaruh terhadap Rendemen. Serta melakukan analisis ragam dengan model linier umum pada rancangan perlakuan lain.

## DAFTAR PUSTAKA


Kutner, M.H., Nachtsheim, C.J., Neter, J. dan Li, W., 2005, *Applied Linier Statistical Model*, Mc. Graw-Hill, New York.

Mattjik, A. dan Sumertajaya, I. 2006. *Perancangan Percobaan dengan Aplikasi SAS dan Minitab*. IPB Press. Bogor.

Myers, R.H. dan J.S. Milton. 1991. *A First Course in the Theory of Linear Statistical Models*. Cengage Learning, Inc. Boston.

Sembiring, R.K. 1995. *Analisis Regresi*. Institut Teknologi Bandung. Bandung.

Steel, R.G.D. & Torrie, J.H. 1991. *Prinsip dan Prosedur Statistika Suatu Pendekatan Biometrik* (Terjemahan: Bambang Sumantri). Gramedia. Jakarta.

Wahdini, A.I. 2014. *Uji Karakteristik Mi Instan Berbahan Dasar Tepung Terigu dengan Subtitusi MOCAF dan Pati Jagung*.Fakultas Teknologi Pertanian, Universitas Brawijaya. Skripsi .

Yitnosumarto, S. 1990. *Percobaan:Perancangan, Analisis dan Interpretasinya*. PT. Gramedia Pustaka Utama. Jakarta.