FUNGSI EKSTRIM DARI FUNGSI BAZILEVIC

SKRIPSI

Oleh

SITI KHUSNUL AROFAH
145090407111005

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2018

FUNGSI EKSTRIM DARI FUNGSI BAZILEVIC

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Matematika

oleh

SITI KHUSNUL AROFAH
145090407111005

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2018

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

FUNGSI EKSTRIM DARI FUNGSI BAZILEVIC

oleh
SITI KHUSNUL AROFAH
145090407111005

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji pada tanggal 28 Juni 2018 dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Matematika

Pembimbing

Prof. Dr. Marjono, M.Phil.
NIP. 196211161988031004

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si, M.Si, Ph.D.
NIP. 197509082000031003

LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	**:**	**Siti Khusnul Arofah**
NIM	**:**	**145090407111005**
Jurusan	**:**	**Matematika**
Penulis Skripsi berjudul	**:**	**Fungsi Ekstrim dari Fungsi Bazilevic**

dengan ini menyatakan bahwa:

1. **Skripsi ini adalah hasil pemikiran saya, bukan hasil menjiplak dari tulisan orang lain. Rujukan-rujukan yang tercantum pada Daftar Pustaka hanya digunakan sebagai acuan.**

2. **Apabila di kemudian hari skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala akibat hukum dari keadaan tersebut.**

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 28 Juni 2018
yang menyatakan,

Siti Khusnul Arofah
145090407111005

FUNGSI EKSTRIM DARI FUNGSI BAZILEVIC

ABSTRAK

Dalam skripsi ini dibahas mengenai definisi fungsi analitik, fungsi univalen dan fungsi Bazilevic $B_1(\alpha)$ yang terdefinisi dalam D. Kemudian dipelajari juga fungsi ekstrim sebagai hubungan untuk mengetahui bentuk koefisien $|a_n(\lambda)| \leqslant b_n(\lambda)$ dalam kasus $n = 1, 2, 3$ dari fungsi Bazilevic. Koefisien fungsi Bazilevic yang relevan adalah koefisien $a_1(\lambda)$ dan $a_2(\lambda)$.

Kata kunci: Fungsi Analitik, Fungsi Starlike dan Fungsi Bazilevic.

EXTREME FUNCTIONS OF BAZILEVIC FUNCTIONS

ABSTRACT

In this thesis we discussed about the definition of analytic functions, univalent functions and Bazilevic functions which are defined in D. We also studied about the extreme function as a relationship to know the form of coefficients $a_n(\lambda)$ and $b_n(\lambda)$ in the cases $n = 1, 2, 3$ of Bazilevic function. The relevant Bazilevic functions are the coefficients $a_1(\lambda)$ and $a_2(\lambda)$.

Keywords: Analytic function, starlike function and Bazilevic function.

KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul **FUNGSI EKSTRIM DARI FUNGSI BAZILEVIC** dengan baik dan lancar. Shalawat dan salam selalu tercurahkan kepada Rasulullah SAW sebagai suri teladan bagi penulis.

Skripsi ini tidak dapat diselesaikan dengan baik tanpa bantuan, bimbingan, dan motivasi dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada

1. Prof. Dr. Marjono, M.Phil selaku dosen pembimbing serta Pembimbing Akademik, atas segala bimbingan, motivasi, dan saran yang diberikan.

2. Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si., M.Si., Ph.D., dan Corina Karim, S.Si., M.Si., Ph.D. selaku dosen penguji, atas segala kritik dan saran yang diberikan untuk perbaikan skripsi ini.

3. Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si., M.Si., Ph.D. selaku Ketua Jurusan Matematika dan Dr. Isnani Darti, M.Si. selaku Ketua Program Studi Matematika.

4. Segenap dosen Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Brawijaya atas ilmu yang diberikan.

5. Bu Ririn, Pak Syahroni, Mas Mamat, Pak Trois, dan seluruh staff Tata Usaha Jurusan Matematika serta staff NOC atas segala bantuan yang diberikan.

6. Bapak, Ibu, adik, dan keluarga tercinta yang selalu mendoakan dan memberikan dukungan moril serta materiil.

7. Rifdah, Maulana, Annisa, Dilla, Nita, Puspa, dan M.Efendi yang memberi semangat dan mendengarkan keluh kesah dalam pengerjaan skripsi ini.

8. Teman-teman Matematika 2014 yang mendukung dan mendoakan kelancaran pengerjaan skripsi ini.

9. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Semoga Allah SWT memberikan anugerah dan barokah-Nya kepada semua pihak yang telah membantu menyelesaikan skripsi ini. Sebagai manusia yang tidak luput dari kesalahan, penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih terdapat kekurangan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran. Kritik dan saran dapat dikirim melalui email khusnularofah16@gmail.com, untuk perbaikan di masa yang akan datang.

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi berbagai pihak, serta menjadi sumber inspirasi untuk penulisan skripsi selanjutnya.

Malang, Juni 2018

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR SIMBOL

z	:	Variabel bilangan kompleks
x	:	Bagian real bilangan kompleks
y	:	Bagian imajiner bilangan kompleks
U	:	Fungsi bernilai real dari variabel x dan y
V	:	Fungsi bernilai real dari variabel x dan y
i	:	$\sqrt{-1}$
$\|z\|$	:	Modulus z
$\mathbb{C}$	:	Himpunan semua bilangan kompleks
$\mathbb{N}$	:	Himpunan semua bilangan asli
D	:	Domain $\{z : \|z\| < 1\}$
B	:	Fungsi Bazilevic
$\subset$	:	Himpunan bagian
$\in$	:	Elemen atau anggota
$\forall$	:	Untuk setiap
S	:	Kelas fungsi $(f(z))$ fungsi univalen di D
$B_1(\alpha)$	:	Bazilevic order alpha
$S(\alpha)$	:	Starlike order alpha
R_e	:	Real
$f(z)$	:	Nilai fungsi dari z
$f'(z)$	:	Turunan dari fungsi $f(z)$
$\frac{1}{\lambda}$	:	Pangkat dari fungsi ekstrim
$a_n(\lambda)$	:	Koefisien a ke-n dari fungsi ekstrim
$b_n(\lambda)$	:	Koefisien b ke-n dari fungsi ekstrim
$p(z)$	:	Polinomial fungsi kompleks
$:=$	:	Definisi
$\square$	:	Akhir dari pembuktian

DAFTAR LAMPIRAN

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Fungsi dalam matematika merupakan Fungsi dalam matematika merupakan suatu relasi yang menghubungkan setiap anggota x dalam suatu himpunan yang disebut daerah asal (Domain) dengan suatu nilai tunggal $f(x)$ dari suatu himpunan kedua yang disebut daerah kawan (Kodomain). Kajian tentang fungsi terus berkembang seiring dengan banyaknya penelitian yang dilakukan oleh para matematikawan Camille Jordan (1881) adalah salah satu matematikawan yang mengembangkan kajian tentang fungsi. Misalnya fungsi kompleks, fungsi analitik, dan fungsi univalen.

Dalam fungsi univalen yang dibahas adalah subkelas dari kelas B yang disebut fungsi Bazilevic. Berawal pada tahun 1985, Branges membuktikan bahwa $|a_n(\lambda)| \leqslant k_n(\lambda)$ jika $\lambda \leqslant 1$. Pada tahun 1986, Hayman dan Hummel menunjukkan bahwa $|a_n(\lambda)| \leqslant k_n(\lambda)$ jika $\lambda > 1$.

Pada tahun 1968, Klein memperkenalkan kelas $S(\alpha)$ sebagai fungsi starlike yang terdefinisi pada $D = \{z : |z| < 1\}$ yaitu $f(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ $(z \in D)$ yang berhubungan dengan $|a_n(\lambda)| \leqslant b_n(\lambda)$ jika $n \geq 1$ dan $\lambda > 0$.

Pada tahun 2015, Marjono dan Thomas melalui paper yang berjudul *A Note on the Powers of Bazilevic Functions* memperkenalkan kelas $B_1(\alpha)$ dari fungsi Bazilevic yang terdefinisi di $D = \{z : |z| < 1\}$ yaitu $R_e\left(\frac{z^{1-\alpha} f'(z)}{f(z)^{1-\alpha}}\right) > 0$, dimana $(\alpha \geq 0)$ serta mengestimasi koefisien $|a_n(\lambda)|$ dan $b_n(\lambda)$ dengan kasus $n = 1, 2, 3$.

Masih sedikitnya kajian tentang fungsi Bazilevic untuk diangkat menjadi topik skripsi membuat penulis tertarik mengkaji ulang mengenai fungsi Bazilevic yang akan mengetahui $a_n(\lambda) \leqslant b_n(\lambda)$ dengan kasus $n = 1, 2, 3$. Skripsi ini mengulas kembali artikel tersebut dengan judul **Fungsi Ekstrim dari Fungsi Bazilevic**, dengan pembuktian lemma dan teorema yang lengkap.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, rumusan masalah dalam penulisan skripsi ini adalah bagaimana mengetahui bentuk koefisien $a_n(\lambda)$ dan $b_n(\lambda)$.

1.3 Tujuan

Tujuan dari skripsi ini adalah untuk memperoleh koefisien $a_n(\lambda)$ dan $b_n(\lambda)$ dari fungsi Bazilevic, dengan kasus $n = 1, 2, 3$.

BAB II
DASAR TEORI

Pada bab ini diberikan beberapa teori yang menjadi acuan pada bab selanjutnya. Teori-teori tersebut meliputi fungsi analitik, fungsi univalen, dan fungsi Bazilevic.

2.1 Fungsi Kompleks

Jika diberikan fungsi bernilai kompleks dari variabel kompleks $f(z)$, maka dapat dinyatakan sebagai $f(z) = U(x,y) + iV(x,y)$ dengan U dan V fungsi bernilai real dari variabel real x dan y. Fungsi $U(x,y)$ dan $V(x,y)$ berturut-turut dinamakan bagian real dan bagian imajiner dari fungsi $f(z)$.

Definisi 2.1.1. Fungsi kompleks f merupakan fungsi yang mengawankan setiap z anggota dari S himpunan bilangan kompleks dengan $w = f(z)$, dimana S sebagai domain dan z sebagai variabel kompleks.

Contoh 2.1.2. Beberapa contoh fungsi kompleks adalah $f(z) = \frac{1}{z}$, $g(z) = z^2 + 1$, dan $h(z) = iz$.

2.1.1 Persamaan Cauchy Rieman

Persamaan Cauchy Rieman merupakan persamaan yang penting pada analisis kompleks karena persamaan ini digunakan untuk menguji keanalitikan suatu fungsi kompleks $f(z) = U(x,y) + iV(x,y)$.

Definisi 2.1.1.1. Fungsi f dikatakan analitik pada D jika dan hanya jika turunan parsial pertama dari U dan V memenuhi persamaan Cauchy Riemann, yaitu

$$U_x = V_y \quad \text{dan} \quad U_y = -V_x$$

dengan

$$U_x = \frac{\partial U}{\partial x} \quad ; \quad V_y = \frac{\partial V}{\partial y} \quad ; \quad U_y = \frac{\partial U}{\partial y} \quad ; \quad V_x = -\frac{\partial U}{\partial x}.$$

Sehingga U dan V memenuhi persamaan Cauchy Rieman.

Contoh 2.1.1.2. Misalkan $z = x + iy$ maka $f(z) = z^2$ adalah memenuhi persamaan Cauchy Rieman, karena

$$\frac{\partial(x^2 - y^2)}{\partial x} = 2x = \frac{\partial(2xy)}{\partial y} \quad \text{dan} \quad \frac{\partial(2xy)}{\partial x} = 2y = \frac{-\partial(x^2 - y^2)}{\partial y}.$$

2.2 Fungsi Analitik

Pada sub bab ini dibahas mengenai fungsi kompleks yang terkait dengan eksistensi turunan, yaitu fungsi analitik.

Definisi 2.2.1. Misalkan R adalah sebuah domain di dalam $\mathbb{C}$. Fungsi $f(z)$ dinyatakan sebagai fungsi analitik dalam R jika turunannya yaitu $f'(z)$ terdefinisi disemua titik z dari suatu daerah R.

(Martono, 1964)

Contoh 2.2.2. $f(z) = z^4 + z^2 + 5$ dengan domain $R = \{z : |z| \leqslant 2\}$ adalah suatu fungsi analitik karena $f'(z) = 4z^3 + 2z$ terdefinisi untuk setiap $z \in R$.

Contoh 2.2.3. $g(z) = ln(z - 5)$ dengan domain $R = \{z : |z| \leqslant 6\}$ bukan merupakan suatu fungsi analitik karena $g'(z) = \dfrac{1}{z-5}$ tidak terdefinisi untuk $z = 5$.

Lemma 2.2.4. Jika $p \in P$, kelas fungsi analitik di dalam $D = \{z : |z| < 1\}$ dengan bagian real yang positif, diberikan sebagai

$$p(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + p_3 z^3 + ... \quad (z \in D)$$

maka $|p_n| \leqslant 2$ untuk $n \geq 1$

(Marjono dan Thomas, 2015)

Untuk membuktikan Lemma 2.2.4 diperlukan Formula Herglotz sebagaimana berikut ini.

Formula Herglots

Setiap $\varphi(z) \in P$ dapat diubah sebagai suatu integral Poisson-Stiltjes sebagaimana berikut ini

$$\varphi = \int_0^{2\phi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\mu(t),$$

dengan $d\mu \geq 0$ dan $\int_0^{2\phi} d\mu(t) = 1$.

(Duren, 1983)

Bukti:
Pandang persamaan berikut ini.

$$\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-i(nt)} z^n. \tag{2.1}$$

berdasarkan persamaan (2.1), fungsi $p(z)$ dapat diubah sebagai suatu integral Poisson-Stiltjes dengan koefisien sebagai berikut.

$$p_n = 2\int_0^{2\phi} e^{i(nt)} d\mu(t) \qquad n = 1, 2, 3, ... \tag{2.2}$$

Jadi berdasarkan persamaan (2.2) dan karena $\int_0^{2\phi} d\mu(t) = 1$ sehingga diperoleh $|p_n| \leqslant 2$.

2.3 Fungsi Univalen

Berikut konsep dasar fungsi univalen

Definisi 2.3.1. Misalkan R adalah sebuah domain di dalam $\mathbb{C}$. Fungsi $f(z)$ analitik di dalam domain R disebut univalen jika dan hanya jika memenuhi kondisi $f(z_1) \neq f(z_2), \forall z_1, z_2 \in D$ dengan $z_1 \neq z_2$.

(Pommerenke, 1975)

2.4 Fungsi Starlike

Misalkan $S(\beta)$ adalah kelas dari fungsi starlike yang terdefinisi pada $D = \{z : |z| < 1\}$ yaitu $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ untuk $f \in S(\beta)$.

Definisi 2.4.1. (Starlike order β). Fungsi f analitik di D dengan $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ dan $0 < \beta \leqslant 1$ jika

$$R_e\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \beta \tag{2.3}$$

untuk $z \in D$, maka f dikatakan Starlike order β dan dinotasikan dengan $S(\beta)$.

(Marjono dan Thomas, 2001)

2.5 Fungsi Bazilevic

Berikut didefinisikan fungsi Bazilevic

Definisi 2.5.1. Misalkan f adalah analitik dalam $D = \{z : |z| < 1\}$ dan diberikan $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$. Fungsi $f(z)$ dinyatakan sebagai fungsi Bazilevic dalam D jika $\alpha \geq 0$ maka berlaku

$$R_e\left(\frac{zf'(z)}{f(z)^{1-\alpha} z^{\alpha}}\right) > 0, \tag{2.4}$$

dimana $f \in B_1(\alpha)$ adalah subset dari fungsi Bazilevic atau dinotasikan $B_1(\alpha) \subset S$.

(Marjono dan Thomas, 2015)

Lemma 2.5.1. Jika $M(z)$ dan $N(z)$ analitik di D, maka $M(0) = N(0)$, $N(z)$ memetakan D ke setiap wilayah Starlike dan $R_e\left(\frac{M'(z)}{N'(z)}\right) > 0$ di D, maka $R_e\left(\frac{M(z)}{N(z)}\right) > 0$ di D

(Ram Singh, 1973).

Bukti

Fungsi f analitik di D dengan $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ dan $0 \leqslant \alpha < 1$ jika

$$R_e\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \alpha$$

Karena $M(z)$ dan $N(z)$ analitik di D dengan $f(z) = \frac{M(z)}{N(z)}$, maka

$$R_e\left[z\frac{M'(z)/N'(z)}{M(z)/N(z)}\right] > 0$$

karena

$$R_e\left(\frac{M'(z)}{N'(z)}\right) > 0$$

maka

$$R_e\left(\frac{M(z)}{N(z)}\right) > 0$$

2.6 Fungsi Multinomial

Pada sub bab sebelumnya membahas mengenai berbagai macam jenis fungsi kompleks yaitu fungsi analitik dan fungsi univalen, maka pada sub bab ini akan membahas mengenai fungsi multinomial.

Definisi 2.6.1. Fungsi multinomial adalah suatu fungsi yang mengawankan dari himpunan A^k yaitu suatu himpunan berdimensi k ke dalam himpunan B dengan $A, B \subseteq \mathbb{C}$ atau suatu fungsi dengan k variabel yang independen, dimana $k \in \mathbb{N}$.

Contoh 2.6.2. Fungsi multinomial dengan peubah suatu bilangan kompleks
$f(z_1, z_2, z_3) = 2z_1 + 4z_2 + z_3^2$, $f(z_1, z_2) = (5 + 6i)z_1 + 0.5z_2$ dan $f(z_1) = \frac{8}{z_1}$ dengan $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$

Teorema 2.6.3. Hasil dari perpangkatan suatu fungsi multinomial untuk setiap $k, n \in \mathbb{N}$ berlaku persamaan sebagai berikut:

$$(x_1 + x_2 + ... + x_k)^n = \sum_{n_1+n_2+...+n_k=n} \binom{n}{n_1, n_2, ..., n_k} x_1^{n_1} x_2^{n_2} ... x_k^{n_k}$$

(Wagner, 2014).

Bukti

Misalkan $n = 1$, diperoleh persamaan sebagai berikut

$$x_1 + x_2 + ... + x_k = \binom{1}{1, 0, ..., 0} x_1 + \binom{1}{0, 1, ..., 0} x_2 + ... + \binom{1}{0, 0, ..., 1} x_k.$$

Langkah induksi

Misalkan untuk $n = l$, berlaku

$$(x_1 + x_2 + ... + x_k)^l = \sum_{n_1+n_2+...+n_k=l} \binom{l}{n_1, n_2, ..., n_k} x_1^{n_1} x_2^{n_2} ... x_k^{n_k}. \tag{2.5}$$

Akan dibuktikan untuk $n = l + 1$ berlaku

$$(x_1 + x_2 + ... + x_k)^{l+1} = \sum_{n_1+n_2+...+n_k=l+1} \binom{l+1}{n_1, n_2, ..., n_k} x_1^{n_1} x_2^{n_2} ... x_k^{n_k}.$$

Sehingga persamaan (2.5) dapat diuraikan sebagai berikut

$$\begin{aligned}
(x_1 + x_2 + ... + x_k)^{l+1} &= \left(\sum_{n_1+n_1+...+n_k=l} \binom{l}{n_1, n_2, ..., n_k} x_1^{n_1} x_2^{n_2} ... x_k^{n_k} \right) \\
&\quad (x_1 + x_2 + ... + x_k) \\
&= \left(\sum_{n_1+n_1+...+n_k=l} \binom{l}{n_1, n_2, ..., n_k} x_1^{n_1+1} x_2^{n_2} ... x_k^{n_k} \right) \\
&\quad + \left(\sum_{n_1+n_1+...+n_k=l} \binom{l}{n_1, n_2, ..., n_k} x_1^{n_1} x_2^{n_2+1} ... x_k^{n_k} \right) \\
&\quad + ... \left(\sum_{n_1+n_1+...+n_k=l} \binom{l}{n_1, n_2, ..., n_k} x_1^{n_1} x_2^{n_2} ... x_k^{n_k+1} \right) \\
&= \left(x_1^{l+1} + l x_1^l x_2 + ... + \binom{l}{n_1, n_2, ..., n_k} x_1^{n_1+1} x_2^{n_2} ... x_k^{n_k} \right) + \\
&\quad \left(x_1^l x_2 + l x_1^{l-1} x_2^2 + ... + \binom{l}{n_1, n_2, ..., n_k} n_1 x_2^{n_2+1} ... x_k^{n_k} \right) \\
&\quad \left(x_1^l x_2 + l x_1^{l-1} x_k + ... + \binom{l}{n_1, n_2, ..., n_k} n_1 x_2^{n_2} ... x_k^{n_{k+1}} \right)
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Setelah itu, misalkan $n_i + 1 = d_i, \forall i \in 1, 2, 3, ..., k$ pada persamaan (2.6). Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
&= x_1^{l+1} + x_2^{l+1} + ... + x_k^{l+1} + (l+1) x_1^l x_2 + ... + (l+1) x_1^l x_k + ... \\
&\quad + \left(\binom{l}{d_1 - 1, d_2, ..., d_k} + \binom{l}{d_1, d_2 - 1, ..., d_k} + ... + \binom{l}{d_1, d_2, ..., d_k - 1} \right) \\
&\quad x_1^{d_1} x_2^{d_2} ... x_k^{d_k} \\
&= \binom{l+1}{l+1, 0, ..., 0} + \binom{l+1}{0, l+1, ..., 0} x_2^{l+1} + ... + \binom{l+1}{d_1, d_2, ..., d_k} x_1^{d_1} x_2^{d_2} ... x_k^{d_k} \\
&= \sum_{d_1+d_2+...+d_k=l+1} \binom{l+1}{d_1, d_2, ..., d_k} x_1^{d_1} x_2^{d_2} ... x_k^{d_k}
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Berdasarkan persamaan (2.7) dengan memisalkan kembali $d_i = n_i, \forall 1, 2, 3, ..., k$. Jadi, terbukti bahwa

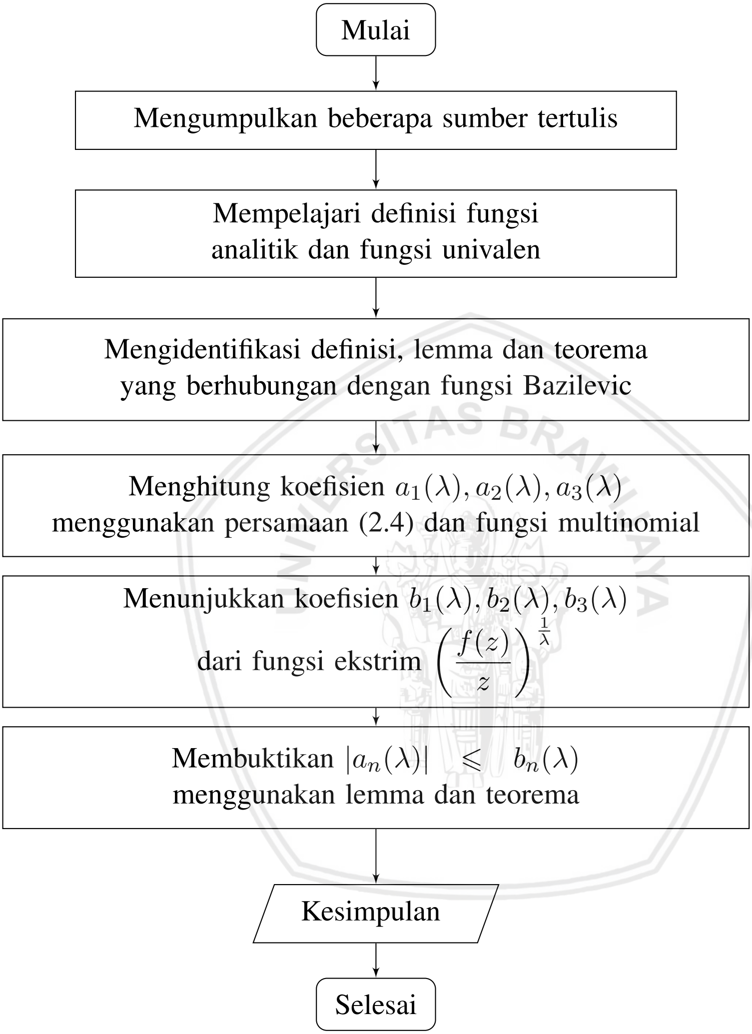
$$\left(x_1 + x_2 + ... + x_k\right)^{l+1} = \sum_{n_1+n_2+...+n_k=l+1} \binom{l+1}{n_1 + n_2 + ... + n_k}.$$

BAB III
METODE PENELITIAN

Langkah-langkah untuk mencapai tujuan penulisan skripsi ini adalah sebagai berikut:

1. Mengumpulkan beberapa sumber tertulis.
2. Mempelajari fungsi analitik dan fungsi univalen.
   Penulis mempelajari definisi fungsi analitik dan fungsi univalen beserta memberikan contohya.
3. Mempelajari fungsi Bazilevic.
   Pada langkah ini penulis mempelajari beberapa definisi fungsi Bazilevic.
4. Mengidentifikasi definisi, Lemma dan Teorema.
   Pada langkah ini, penulis mengidentifikasikan lemma dari fungsi Bazilevic beserta pembuktian.
5. Menghitung koefisien $a_1(\lambda), a_2(\lambda), a_3(\lambda)$.
   Untuk mencari koefisien $a_1(\lambda), a_2(\lambda), a_3(\lambda)$ menggunakan persamaan (2.4) dengan menggunakan fungsi Multinomial.
6. Menunjukkan koefisien $b_1(\lambda), b_2(\lambda), b_3(\lambda)$ dari fungsi ekstrim $\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\frac{1}{\lambda}}$.
   Dari fungsi ekstrim diketahui koefisien yang relevan yaitu $b_1(\lambda), b_2(\lambda, 1), b_2(\lambda, 2), b_3(\lambda, 1)$ dan $b_3(\lambda, 2)$.
7. Membuktikan masalah $|a_n(\lambda)| \leqslant b_n(\lambda)$.
   untuk membuktikan masalah $|a_n(\lambda)| \leqslant b_n(\lambda)$, dalam kasus $n = 1, 2, 3$ dilakukan Menggunakan lemma dan teorema.

Uraian metode penelitian dalam skripsi ini dapat digambarkan dengan diagram alir *flowchart* sebagai berikut.



Gambar 3.1: Diagram Alir

BAB IV
HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibahas tentang sub kelas dari kelas fungsi Bazilevic yaitu $B_1(\alpha)$. Kemudian menggunakan dasar teori pada bab sebelumnya, akan diperoleh nilai koefisien $a_1(\lambda), a_2(\lambda), a_3(\lambda)$ dan mengetahui $b_1(\lambda), b_2(\lambda), b_3(\lambda)$ dari fungsi ekstrim serta membuktikan $|a_n(\lambda)| \leqslant b_n(\lambda)$ dalam kasus $n = 1, 2, 3$ menggunakan lemma dan teorema.

4.1 Fungsi Ekstrim

Pada sub bab ini akan dibahas mengenai definisi dari fungsi ekstrim. Kemudian akan dibentuk suatu persamaan sebagai dasar dari proses mencari nilai koefisien.

Definisi 4.1.1. Diberikan S adalah kelas analitik dari fungsi univalen f, yang terdefinisi dalam $D = \{z : |z| < 1\}$ dan dikatakan ekstrim jika $\lambda > 0$ sebagai berikut:

$$\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\frac{1}{\lambda}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\lambda) z^n. \tag{4.1}$$

(Marjono dan Thomas, 2015)

4.2 Membentuk Persamaan Fungsi Ekstrim

Sebelumnya sudah dijelaskan mengenai definisi fungsi ekstrim. Kemudian pada sub bab ini dijelaskan mengenai persamaan fungsi ekstrim yang telah dimanipulasi untuk mendapatkan perhitungan nilai koefisien.

Berdasarkan definisi 2.5.1, diperoleh suatu persamaan sebagai berikut

$$R_e\left(\frac{zf'(z)}{f(z)^{1-\alpha} z^{\alpha}}\right) = p(z), \tag{4.2}$$

Misalnya $p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n$ diperoleh persamaan

$$zf'(z) = f(z)^{1-\alpha} z^{\alpha} p(z) \tag{4.3}$$

Untuk $f(z)$ diperoleh dari persamaan (4.1) yaitu

$$\begin{aligned}\frac{f(z)}{z} &= \left(1+\sum_{n=1}^{\infty} a_n(\lambda) z^n\right)^{\lambda}\\ f(z) &= z\left(1+\sum_{n=1}^{\infty} a_n(\lambda) z^n\right)^{\lambda}.\end{aligned}$$

Selanjutnya persamaan (4.3) dituliskan sebagai berikut

$$p(z) = \left(\frac{z}{f(z)}\right)^{(1-\alpha)} f'(z), \tag{4.4}$$

Untuk $\left(\frac{z}{f(z)}\right)^{(1-\alpha)}$ diperoleh dari persamaan (4.1) yaitu

$$\left(\frac{z}{f(z)}\right) = \frac{1}{(1+\sum_{n=1}^{\infty} a_n(\lambda) z^n)^{\lambda}} \tag{4.5}$$

Kemudian persamaan (4.5) disubtitusikan ke dalam persamaan (4.4), diperoleh

$$\begin{aligned}p(z) &= \left(\frac{1}{(1+\sum_{n=1}^{\infty} a_n(\lambda) z^n)^{\lambda}}\right)^{(1-\alpha)} f'(z)\\ p(z) &= \frac{1}{(1+\sum_{n=1}^{\infty} a_n(\lambda) z^n)^{\lambda(1-\alpha)}} f'(z)\\ p(z) &= \frac{f'(z)}{(1+\sum_{n=1}^{\infty} a_n(\lambda) z^n)^{\lambda(1-\alpha)}},\end{aligned} \tag{4.6}$$

dengan $p(z)$ adalah polinomial fungsi kompleks dalam D.

4.3 Membuktikan Masalah $|a_n(\lambda)| \leqslant b_n(\lambda)$

Dalam skripsi ini dibuktikan bahwa $|a_n(\lambda)| \leqslant b_n(\lambda)$ dalam kasus $n = 1, 2, 3$ dari fungsi Bazilevic, dimana $b_n(\lambda)$ adalah fungsi ekstrim yang relevan dari $\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\frac{1}{\lambda}}$. Selanjutnya menunjukkan pangkat dalam fungsi ekstrim.

Pilih koefisien yang relevan $b_1(\lambda), b_2(\lambda,1), b_2(\lambda,2), b_3(\lambda,1)$ dan $b_3(\lambda,2)$ pada fungsi ekstrim untuk $\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\frac{1}{\lambda}}$ adalah sebagai berikut

$$
\begin{aligned}
b_1(\lambda) &:= \frac{2}{(1+\alpha)\lambda} \quad \text{jika} \quad \alpha \geq 0, \\
b_2(\lambda,1) &:= \frac{2(2+\alpha+\lambda)}{(1+\alpha)^2(2+\alpha)\lambda^2} \quad \text{jika} \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1, \\
b_2(\lambda,2) &:= \frac{2}{(2+\alpha)\lambda} \quad \text{jika} \quad \alpha \geq 1, \\
b_3(\lambda,1) &:= \frac{2}{(3+\alpha)\lambda} + \frac{4(2+3\lambda) - 2\alpha^2\lambda^2 - \alpha^3\lambda^2 - \alpha(-1+3\lambda^2)}{3(1+\alpha)^3(2+\alpha)\lambda^3} \\
&\qquad \text{jika} \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1, \\
b_3(\lambda,2) &:= \frac{2}{(3+\alpha)\lambda} \quad \text{jika} \quad \alpha \geq 1.
\end{aligned} \tag{4.7}
$$

Untuk membuktikan $|a_n(\lambda)| \leqslant b_n(\lambda)$ menggunakan lemma dan teorema sebagai berikut

Lemma 4.2.1

Jika $p \in P$ dan $p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n$, maka $|p_n| \leqslant 2$ untuk $n \geq 1$, dan

$$|p_2 - \frac{1}{2}p_1^2| \leqslant 2 - \frac{|p_1|^2}{2}. \tag{4.8}$$

Dari persamaan (4.5) dengan menyamakan koefisien yang bersesuaian (lihat Lampiran 1, Lampiran 2, dan Lampiran 3) diperoleh ketaksamaan koefisien sebagai berikut

$$
\begin{aligned}
a_1(\lambda) &= \frac{p_1}{(1+\alpha)\lambda}, \\
a_2(\lambda) &= \frac{p_2}{(2+\alpha)\lambda} + \frac{(1-\alpha\lambda)p_1^2}{2(1+\alpha)^2\lambda^2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_3(\lambda) &= \frac{p_3}{(3+\alpha)\lambda} + \frac{3+\alpha+2\lambda+(-2-3\alpha-\alpha^2)\lambda p_1 p_2}{(1+\alpha)(2+\alpha)(3+\alpha)\lambda^2} \\
&\quad + \frac{(6+\alpha^2+9\lambda+2\lambda^2+2(1+\alpha)^3(2+\alpha)\lambda^2}{6(1+\alpha)^3(2+\alpha)(3+\alpha)\lambda^3} \\
&\quad \frac{-3(1+\alpha)^2\lambda(3+\alpha+2\lambda)+\alpha(5+3\lambda-2\lambda^2))p_1^3}{6(1+\alpha)^3(2+\alpha)(3+\alpha)\lambda^3}.
\end{aligned} \tag{4.9}
$$

Untuk koefisien dengan $n = 1$ diberikan teorema sebagai berikut

Teorema 4.3.1 ($|a_1(\lambda)| \leqslant b_1(\lambda)$)**.** Diberikan $f \in B_1(\alpha)$, jika $b_1(\lambda) = \dfrac{2}{(1+\alpha)\lambda}$ dan $a_1(\lambda) = \dfrac{p_1}{(1+\alpha)\lambda}$, maka

$$
\begin{aligned}
|a_1(\lambda)| &\leqslant b_1(\lambda), \quad \alpha > 0 \quad \text{dan} \quad \lambda > 0 \\
|a_1(\lambda)| &\leqslant \frac{2}{(1+\alpha)\lambda}.
\end{aligned} \tag{4.10}
$$

Bukti. Untuk membuktikan $|a_1(\lambda)| \leqslant b_1(\lambda)$, $p \in P$ diperoleh $|p_n| \leqslant 2$ dengan $n \geq 1$. Sehingga dengan menyamakan koefisien yang bersesuaian dari persamaan (4.9) diperoleh

$$
a_1(\lambda) = \frac{p_1}{(1+\alpha)\lambda}. \tag{4.11}
$$

Misalkan $\alpha > 0$ dan $\lambda > 0$, maka persamaan (4.11) dengan memilih $p_1 = 2$, diperoleh

$$
|a_1(\lambda)| \leqslant \frac{2}{(1+\alpha)\lambda} \tag{4.12}
$$

Sehingga terbukti bahwa $|a_1(\lambda)| \leqslant b_1(\lambda)$ adalah benar ketika $\alpha > 0$ dan $\lambda > 0$. $\square$

Untuk koefisien $n = 2$ diberikan teorema sebagai berikut

Teorema 4.3.2.

Diberikan $f \in B_1(\alpha)$, dengan $b_2(\lambda, 1) = \dfrac{2(2+\alpha+\lambda)}{(1+\alpha)^2(2+\alpha)\lambda^2}$ dan

$a_2(\lambda) = \dfrac{p_2}{(2+\alpha)\lambda} + \dfrac{(1-\alpha\lambda)p_1^2}{2(1+\alpha)^2\lambda^2}$, sedemikian sehingga

$$
\begin{aligned}
|a_2(\lambda)| &\leqslant b_2(\lambda, 1), \quad 0 < \alpha \leqslant 1 \quad \text{dan} \quad 0 < \lambda < 1 \\
|a_2(\lambda)| &\leqslant \frac{2(2+\alpha+\lambda)}{(1+\alpha)^2(2+\alpha)\lambda^2}.
\end{aligned} \tag{4.13}
$$

Bukti. Untuk membuktikan $|a_2(\lambda)| \leqslant b_2(\lambda, 1)$ untuk $p \in P$. Dengan memilih $p_2 = 2$ dan menyamakan koefisien yang bersesuaian dari persamaan (4.9) diperoleh

$$\begin{aligned}
a_2(\lambda) &= \frac{p_2}{(2+\alpha)\lambda} + \frac{(1-\alpha\lambda)p_1^2}{2(1+\alpha)^2\lambda^2} \\
|a_2(\lambda)| &= \left|\frac{p_2}{(2+\alpha)\lambda} + \frac{(1-\alpha\lambda)p_1^2}{2(1+\alpha)^2\lambda^2}\right| \\
&= \frac{1}{(2+\alpha)\lambda}\left|p_2 + \frac{(1-\alpha\lambda)(2+\alpha)}{2(1+\alpha)^2\lambda}p_1^2\right| \\
&= \frac{1}{(2+\alpha)\lambda}\left|p_2 - \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{((2+\alpha+\lambda)}{2(1+\alpha)^2\lambda}p_1^2\right| \\
&\leqslant \frac{1}{(2+\alpha)\lambda}\left(2 - \frac{1}{2}|p_1|^2 + \frac{(2+\alpha+\lambda)}{2(1+\alpha)^2\lambda}|p_1|^2\right) := \phi(|p_1|, \alpha, \lambda)
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Sehingga diperlukan memaksimalkan $\phi(|p_1|, \alpha, \lambda)$ dengan batas $[0, 2]$ untuk $\alpha > 0$ dan $\lambda > 0$ serta mengabaikan $\lambda = 1$.

Perhitungan dari $|p_1|^2$ dalam $\phi(|p_1|, \alpha, \lambda)$ sebagai berikut

(a) Jika $0 < \alpha \leqslant 1$ dan $0 < \lambda < 1$, maka maksimumnya adalah $\dfrac{2(2+\alpha+\lambda)}{(1+\alpha)^2(2+\alpha)\lambda^2}$.

(b) Jika $0 < \alpha \leqslant 1$ dan $\lambda > 1$, maka maksimumnya adalah $\dfrac{2(2+\alpha+\lambda)}{(1+\alpha)^2(2+\alpha)\lambda^2}$, dengan syarat $\alpha\lambda < 1$.

Sehingga terbukti bahwa $|a_2(\lambda)| \leqslant b_2(\lambda, 1)$ adalah benar. □

Teorema 4.3.2. Diberikan $f \in B_1(\alpha)$, jika $a_2(\lambda) = \dfrac{p_2}{(2+\alpha)\lambda} + \dfrac{(1-\alpha\lambda)p_1^2}{2(1+\alpha)^2\lambda^2}$ dan $b_2(\lambda, 2) = \dfrac{2}{(2+\alpha)\lambda}$, maka

$$\begin{aligned}
&|a_2(\lambda)| \leqslant b_2(\lambda, 2), \quad \alpha \geq 1 \quad \text{dan} \quad 0 < \lambda < 1 \\
&|a_2(\lambda)| \leqslant \frac{2}{(2+\alpha)\lambda}
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Bukti. Untuk membuktikan $|a_2(\lambda)| \leqslant b_2(\lambda, 2)$, seperti pada Teorema 4.3.2 diperoleh persamaan (4.14). Sehingga diperlukan untuk memaksimalkan $\phi(|p_1|, \alpha, \lambda)$ sebagai berikut

(a) Jika $\alpha \geq 1$ dan $0 < \lambda < 1$, maka maksimumnya adalah $\dfrac{2}{(2+\alpha)\lambda}$, dengan syarat $\alpha\lambda > 1$.

(b) Jika $\alpha \geq 1$ dan $\lambda > 1$, maka maksimumnya adalah $\dfrac{2}{(2+\alpha)\lambda}$.

Jadi terbukti bahwa $|a_2(\lambda)| \leqslant b_2(\lambda, 2)$ adalah benar. □

Setelah memilih $p_1 = p_2 = 2$ dapat diperoleh ketaksamaan $|a_1(\lambda)|$ dan $|a_2(\lambda)|$ dalam persamaan (4.9), bahwa ketaksamaan (4.9) adalah relevan. Sehingga diperoleh $|a_3(\lambda)| \leqslant b_3(\lambda, 1)$ dari persamaan (4.9) dan (4.7). Penyebut dari $a_3(\lambda)$ pada persamaan (4.9) adalah semua positif, sehingga diperlukan untuk memisalkan nilai p_1, p_2 dan p_3 dalam ketaksamaan $|a_3(\lambda)|$ dari persamaan (4.9) dengan langkah-langkah sebagai berikut

Langkah 1

Dengan menggunakan ketaksamaan $|a_3(\lambda)|$ dari persamaan (4.9) dan $b_3(\lambda, 1)$ dari persamaan (4.7), dengan $|p_n| \leqslant 2$, selanjutnya ditunjukkan bahwa

$$\begin{aligned}
|a_3(\lambda)| &> b_3(\lambda, 1) \\
|a_3(\lambda)| &> \frac{2}{(3+\alpha)\lambda} + \frac{4(2+3\lambda-2\alpha^2\lambda^2-\alpha^3\lambda^2-\alpha(-1+3\lambda^2))}{3(1+\alpha)^3(2+\alpha)\lambda^3} \\
&\quad \text{ketika} \quad \alpha\lambda < 1.
\end{aligned}$$

Karena ketaksamaan $|a_3(\lambda)| > b_3(\lambda, 1)$, ambil $p_1 = p_3 = 2$ dan $p_2 = 0$ maka diperoleh $|a_3(\lambda)| > b_3(\lambda, 1)$ ketika $\alpha\lambda < 1$.

Langkah 2

Dengan memperhatikan penyebut dari $a_3(\lambda)$ pada persamaan (4.9) bahwa penyebut $a_3(\lambda)$ adalah semua positif dan menggunakan $b_3(\lambda, 1)$ dari persamaan (4.7), sehingga $|a_3(\lambda)| > b_3(\lambda, 1)$ ketika $\alpha\lambda < 1$ dan memilih $p_1 = p_2 = p_3 = 2$, maka diperoleh juga bahwa $|a_3(\lambda)| > b_3(\lambda, 1)$ ketika $\alpha\lambda > 1$.

Dari dua langkah tersebut dapat disimpulkan bahwa ketaksamaan $|a_3(\lambda)|$ tidak relevan, karena $|a_3(\lambda)| > b_3(\lambda, 1)$.

BAB V
KESIMPULAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan dari hasil dan pembahasan skripsi ini, dapat disimpulkan bahwa

1. Cara meengetahui koefisien $a_1(\lambda), a_2(\lambda)$ dan $a_3(\lambda)$ adalah dengan dasar definisi fungsi Bazilevic dan fungsi ekstrim. Fungsi tersebut diubah ke dalam bentuk $p \in P$, dan selanjutnya disamakan koefisien yang bersesuaian.

2. Hasil dari ketaksamaan koefisien $|a_1(\lambda)|$ dan $|a_2(\lambda)|$ pada fungsi Bazilevic menghasilkan ketaksamaan yang relevan yaitu ketaksamaan $|a_1(\lambda)| \leqslant b_1(\lambda)$, $|a_2(\lambda)| \leqslant b_2(\lambda, 1)$, dan $|a_2(\lambda)| \leqslant b_2(\lambda, 2)$. Sedangkan $|a_3(\lambda)| > b_3(\lambda)$ tidak relevan.

BAB V
KESIMPULAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan dari hasil dan pembahasan skripsi ini, dapat disimpulkan bahwa

1. Cara meengetahui koefisien $a_1(\lambda), a_2(\lambda)$ dan $a_3(\lambda)$ adalah dengan dasar definisi fungsi Bazilevic dan fungsi ekstrim. Fungsi tersebut diubah ke dalam bentuk $p \in P$, dan selanjutnya disamakan koefisien yang bersesuaian.

2. Hasil dari ketaksamaan koefisien $|a_1(\lambda)|$ dan $|a_2(\lambda)|$ pada fungsi Bazilevic menghasilkan ketaksamaan yang relevan yaitu ketaksamaan $|a_1(\lambda)| \leqslant b_1(\lambda)$, $|a_2(\lambda)| \leqslant b_2(\lambda, 1)$, dan $|a_2(\lambda)| \leqslant b_2(\lambda, 2)$. Sedangkan $|a_3(\lambda)| > b_3(\lambda)$ tidak relevan.