

repository.ub.ac.id

**PERBANDINGAN PENDUGAAN KOMPONEN RAGAM
MENGUNAKAN METODE KUADRAT TERKECIL (MKT)
DAN METODE *RESTRICTED MAXIMUM LIKELIHOOD*
(REML) PADA RESPON PERCOBAAN RANCANGAN
BUJUR SANGKAR LATIN**

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Statistika

oleh:

Meilina Retno Hapsari

145090501111005



**PROGRAM STUDI STATISTIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2018**

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI**PERBANDINGAN PENDUGAAN KOMPONEN RAGAM
MENGUNAKAN METODE KUADRAT TERKECIL (MKT)
DAN METODE *RESTRICTED MAXIMUM LIKELIHOOD*
(REML) PADA RESPON PERCOBAAN RANCANGAN
BUJUR SANGKAR LATIN**

oleh:

**Meilina Retno Hapsari
145090501111005**

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji pada
tanggal 3 Januari 2018
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Statistika

Dosen Pembimbing

**Dr.Ir. Maria Bernadetha Theresia Mitakda
NIP. 195205211981032001**

**Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya**

**Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si, M.Si, Ph.D
NIP. 197509082000031003**

LEMBAR PERNYATAAN

Nama : Meilina Retno Hapsari
NIM : 145090501111005
Jurusan : Matematika
Penulis Skripsi Berjudul :

Perbandingan Pendugaan Komponen Ragam Menggunakan Metode Kuadrat Terkecil (MKT) dan Metode *Restricted Maximum Likelihood* (REML) pada Respon Percobaan Bujur Rancangan Bujur Sangkar Latin

Dengan ini menyatakan bahwa :

1. Isi dari Skripsi yang saya buat adalah benar-benar karya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain, selain nama-nama yang termasuk di isi dan tertulis di daftar pustaka dalam Skripsi ini.
2. Apabila di kemudian hari ternyata Skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya akan bersedia menanggung segala risiko yang akan saya terima.

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 3 Januari 2018
Yang menyatakan,

(Meilina Retno Hapsari)
NIM. 145090501111005

repository.ub.ac.id

**PERBANDINGAN PENDUGAAN KOMPONEN RAGAM
MENGUNAKAN METODE KUADRAT TERKECIL (MKT)
DAN METODE *RESTRICTED MAXIMUM LIKELIHOOD*
(REML) PADA RESPON PERCOBAAN RANCANGAN
BUJUR SANGKAR LATIN**

ABSTRAK

Keragaman perlakuan dan galat respon yang berasal dari percobaan yang dirancang, dapat diketahui dengan menduga keragaman galat yang disebut komponen ragam. Metode Kuadrat Terkecil (MKT) digunakan untuk pendugaan parameter model ANOVA yang memiliki kelemahan yaitu tidak memperbolehkan perubahan ragam perlakuan dan galat serta terdapat asumsi-asumsi yang harus dipenuhi. Selain itu, MKT menghasilkan penduga ragam negatif. Metode alternatif adalah *Restricted Maximum Likelihood* (REML) yang baik digunakan pada model linier campuran. Oleh karena itu, penulis menggunakan metode REML untuk menduga komponen ragam respon Rancangan Bujur Sangkar Latin pada model campuran. Respon penelitian adalah konsumsi pakan (Data 1), penambahan bobot badan rusa Timor (Data 2) dan panjang badan rusa Timor (Data 3). Pada tiga data, MKT menghasilkan penduga komponen ragam negatif dan diperbaiki oleh REML. Perbandingan penduga komponen ragam yang dihasilkan MKT dan REML didasarkan Efisiensi Relatif (ER). Pada Data 1, metode REML menjelaskan keragaman $\hat{\sigma}_B^2$ sebesar 60% dan $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ sebesar 141.1%. Penduga komponen ragam galat Data 1 menggunakan REML lebih efisien 41.1% dibandingkan MKT. Pada Data 2, keragaman $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ dijelaskan sebesar 515.3% dan Data 3 376.7%. Penduga komponen ragam galat REML Data 2 lebih efisien 415.3% dan Data 3 lebih efisien 233.8% dibandingkan MKT. Dapat disimpulkan bahwa metode REML lebih baik dibandingkan MKT karena $ER(\hat{\sigma}_{\varepsilon,M}^2, \hat{\sigma}_{\varepsilon,R}^2) > 100\%$.

Kata Kunci : Komponen Ragam, Bujur Sangkar Latin, MKT, REML

**COMPARISON OF ESTIMATION VARIANCE
COMPONENTS USING ORDINARY LEAST SQUARE
METHOD (OLS) AND *RESTRICTED MAXIMUM
LIKELIHOOD* METHOD (REML) ON LATIN SQUARE
DESIGN'S EXPERIMENTAL RESPONSE**

ABSTRACT

Variance of treatments and errors of responses from designed experiments, it can be known by estimating the variance of errors called variance component. The Ordinary Least Square Method (OLS) is used to estimate the parameter of the ANOVA model that has a disadvantage that does not allow the change of treatment and error and there are assumptions that must be fulfilled. An alternative method is *Restricted Maximum Likelihood* (REML) which is good for linear mixed models. Therefore, the authors use the REML method to estimate the variance components on Latin Square Design's response on mixed models. The experimental responses are feed consumption (Data 1), body weight gain of *Rusa timorensis* (Data 2) and body length of *Rusa timorensis* (Data 3). On all three of Data, OLS generates negative variance components and is corrected by REML. Comparison of the predicted range of components produced by MKT and REML based on Relative Efficiency (ER). In Data 1, REML method explain the variance component of $\hat{\sigma}_B^2$ by 60% and $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ by 141.1%. The error variance component of Data 1 uses REML is 41.1% more efficient than MKT. In Data 2, the variance component of $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ is explained by 515.3% and Data 3 376.7%. The REML error variance component of Data 2 is 415.3% more efficient and Data 3 is 233.8% more efficient compared to MKT. It can be concluded that REML method is better than MKT as $ER(\hat{\sigma}_{\varepsilon,M}^2, \hat{\sigma}_{\varepsilon,R}^2) > 100\%$.

Keywords: Variance Component, Latin Square Design, OLS, REML

KATA PENGANTAR

Puji dan Syukur ke hadirat Allah SWT atas Rahmat, Taufiq, dan Hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi berjudul **“Perbandingan Pendugaan Komponen Ragam Menggunakan Metode Kuadrat Terkecil (MKT) dan Metode *Restricted Maximum Likelihood* (REML) pada Respon Percobaan Rancangan Bujur Sangkar Latin”**

Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat akademik dalam menempuh jenjang pendidikan Sarjana Statistika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Brawijaya Malang.

Penyelesaian skripsi ini tak lepas dari bimbingan, bantuan dan dukungan dari berbagai pihak, untuk itu penulis menyampaikan rasa terima kasih yang sebesar-besarnya kepada :

1. Dr. Ir. Maria Bernadetha Mitakda, pembimbing yang telah meluangkan waktu untuk memberikan bimbingan, bantuan, motivasi, nasihat dan arahan sehingga penulisan skripsi ini berjalan lancar.
2. Prof. Dr. Ir. Ni Wayan Surya Wardhani, MS., penguji I yang telah memberikan kritik dan saran dalam menyelesaikan skripsi ini.
3. Dr. Ir. Atiek Iriany, MS., penguji II yang telah memberikan kritik dan saran dalam menyelesaikan skripsi ini.
4. Dr. Rahma Fitriani, S.Si, M.Sc, Ph.D, ketua Program Studi Statistika Universitas Brawijaya.
5. Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si, M.Si, Ph.D, ketua Jurusan Matematika Universitas Brawijaya.
6. Orang tua, kakak, Syifa' dan Statistika 2014 yang selalu memberikan bantuan, dukungan, doa dan motivasi.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini sangat jauh dari sempurna, untuk itu penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun serta bermanfaat bagi penulis. Semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi semua pihak.

Malang, Januari 2018

Penulis

DAFTAR ISI

	Hal.
HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PENGESAHAN	ii
HALAMAN PERNYATAAN	iii
ABSTRAK.....	iv
ABSTRACT	v
KATA PENGANTAR	vi
DAFTAR ISI.....	vii
DAFTAR GAMBAR	ix
DAFTAR TABEL.....	x
DAFTAR LAMPIRAN	xi
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Tujuan Penelitian	2
1.4 Manfaat Penelitian	2
1.5 Batasan Masalah	2
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	3
2.1 Rancangan Percobaan	3
2.2 Rancangan Bujur Sangkar Latin	4
2.3 Asumsi Analisis Ragam	5
2.4 Penanganan Pelanggaran Asumsi Analisis Ragam	7
2.5 Metode Kuadrat Terkecil	8
2.6 Analisis Ragam	10
2.7 Nilai Harapan Kuadrat Tengah	11
2.8 Metode <i>Restricted Maximum Likelihood</i>	12
2.8.1 Transformasi Memisahkan Pengaruh Tetap.....	16
2.8.2 Fungsi <i>Loglikelihood</i> Pengaruh Acak.....	18
2.8.3 Fungsi <i>Loglikelihood</i> Pengaruh Acak.....	20
2.9 Perbandingan MKT dan REML	21

	Hal.
BAB III METODE PENELITIAN	25
3.1 Sumber Data.....	25
3.2 Metode Analisis	27
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN.....	29
4.1 Pengujian Asumsi Analisis Ragam	29
4.1.1 Kenormalan Galat	29
4.1.2 Kehomogenan Ragam Galat	29
4.1.3 Kebebasan Galat	30
4.1.4 Keaditifan Model	31
4.1.5 Pengujian Asumsi Analisis Ragam Data Transformasi	31
4.2 Pendugaan Komponen Ragam	32
4.2.1 Pendugaan Komponen Ragam Data 1	32
4.2.2 Pendugaan Komponen Ragam Data 2	33
4.2.3 Pendugaan Komponen Ragam Data 3	35
4.3 Pendugaan Data Hilang.....	37
BAB V PENUTUP.....	39
5.1 Kesimpulan	39
5.2 Saran.....	39
DAFTAR PUSTAKA	41
LAMPIRAN.....	43

DAFTAR GAMBAR

Hal.

Gambar 3.1. Diagram Alir Pendugaan Komponen Ragam.....28



DAFTAR TABEL

		Hal.
Tabel 2.1.	Struktur Data Rancangan Bujur Sangkar Latin	5
Tabel 2.2.	Bentuk Transformasi untuk Menangani Pelanggaran Asumsi Analisis Ragam	8
Tabel 2.3.	Analisis Ragam Respon Percobaan Bujur Sangkar Latin	11
Tabel 2.4.	Nilai Harapan Kuadrat Tengah Rancangan Bujur Sangkar Latin	11
Tabel 3.1.	Denah Percobaan Rusa Timor Diberi Tanaman Sorgum pada Empat Periode	25
Tabel 4.1.	Hasil Pengujian Kenormalan Galat	29
Tabel 4.2.	Hasil Pengujian Kehomogenan Ragam Galat	29
Tabel 4.3.	Hasil Pengujian Kebebasan Galat	30
Tabel 4.4.	Hasil Pengujian Keaditifiaan Model	31
Tabel 4.5.	Hasil Pengujian Asumsi pada Data Setelah Transformasi.....	31
Tabel 4.6.	Perubahan Nilai <i>Deviance</i> Data 1	33
Tabel 4.7.	Perubahan Nilai <i>Deviance</i> Data 2	35
Tabel 4.8.	Perubahan Nilai <i>Deviance</i> Data 3	37
Tabel 4.9.	Perbandingan Penduga Komponen Ragam	37

DAFTAR LAMPIRAN

Hal.

Lampiran 1. Hasil Penelitian Pengaruh Pemberian Tanaman Sorgum terhadap Pertumbuhan Rusa Timor	43
Lampiran 2. Pengujian Asumsi Kenormalan Galat	44
Lampiran 3. Pengujian Asumsi Kehomogenan Ragam Galat	45
Lampiran 4. Pengujian Asumsi Kebebasan Galat	46
Lampiran 5. Data 2 Setelah Transformasi Akar	47
Lampiran 6. Pengujian Asumsi Data 2 Setelah Transformasi	48
Lampiran 7. Analisis Ragam Konsumsi Pakan dan Sorghum	49
Lampiran 8. Hasil Pendugaan REML Konsumsi Pakan dan Sorgum (Ragam Sama)	50
Lampiran 9. Hasil Pendugaan REML Konsumsi Pakan dan Sorgum (Ragam Berubah).....	51
Lampiran 10. Analisis Ragam Pertambahan Bobot Badan.....	52
Lampiran 11. Hasil Pendugaan REML Pertambahan Bobot Badan (Ragam Sama).....	53
Lampiran 12. Hasil Pendugaan REML Pertambahan Bobot Badan (Ragam Sama).....	54
Lampiran 13. Hasil Pendugaan REML Pertambahan Bobot Badan (Ragam Berubah)	55
Lampiran 14. Analisis Ragam Pertambahan Panjang Badan.....	56
Lampiran 15. Hasil Pendugaan REML Pertambahan Panjang Badan (Ragam Sama).....	57
Lampiran 16. Hasil Pendugaan REML Pertambahan Panjang Badan (Ragam Berubah)	58

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Percobaan adalah tindakan berulang-ulang dengan hasil yang tidak pasti dilakukan untuk mendapatkan fakta baru, memperkuat atau menolak suatu pendapat. Untuk melakukan suatu percobaan harus menggunakan metode atau prinsip-prinsip ilmiah yaitu rancangan percobaan. Rancangan percobaan adalah suatu prosedur untuk mengumpulkan atau memperoleh data dalam penelitian (Harjosuwono dkk, 2011). Menurut Steel dan Torrie (1991), rancangan percobaan merupakan seperangkat aturan atau prosedur untuk menerapkan perlakuan ke dalam satuan percobaan. Rancangan percobaan menurut Mattjik dan Sumertajaya (2006) dapat dibagi berdasarkan perlakuan, lingkungan dan pengukuran. Salah satu rancangan percobaan menurut lingkungan adalah Rancangan Bujur Sangkar Latin. Yitnosumarto (1993) menjelaskan bahwa Rancangan Bujur Sangkar Latin adalah suatu rancangan percobaan dengan gradien dua arah yaitu arah menurut baris dan lajur. Rancangan ini banyak digunakan di bidang pertanian, peternakan, industri, pendidikan dan kedokteran.

Teknik Statistika yang dikenal dengan analisis ragam (ANOVA) dikembangkan oleh R.A. Fisher merupakan alat pokok penelitian untuk memudahkan analisis dan interpretasi data hasil percobaan. ANOVA bertujuan untuk menguraikan keragaman total data menjadi komponen-komponen untuk mengukur berbagai sumber keragaman (Walpole, 1995). Metode pendugaan parameter model ANOVA secara umum menggunakan Metode Kuadrat Terkecil (MKT). Metode ini memiliki kelemahan yaitu terdapat asumsi kenormalan galat, kebebasan galat dan kehomogenan ragam yang harus dipenuhi (O'Neill, 2010). Selain itu, pendugaan parameter menggunakan MKT menghasilkan penduga ragam negatif (Searle dkk, 2006).

Metode alternatif selain MKT adalah *Restricted Maximum Likelihood* (REML) yang diperkenalkan oleh W.A.Thompson pada tahun 1962. Pada REML, *likelihood* dibagi menjadi dua bagian yaitu pengaruh tetap dan acak. Metode ini memaksimalkan setiap bagian secara terpisah. REML dapat diterapkan pada model dengan ragam berubah dan tidak menghasilkan penduga ragam negatif. Selain itu,

repository.ub.ac.id

pendugaan komponen ragam dengan REML dapat dilakukan meskipun data tidak memenuhi asumsi analisis ragam. Hal ini menjadi kelebihan REML dibandingkan dengan MKT (O'Neill, 2010). Berdasarkan alasan ini, maka penulis menggunakan metode REML untuk menduga komponen ragam pada respon Rancangan Bujur Sangkar Latin pada model campuran.

1.2 Rumusan Masalah

Permasalahan yang dibahas berdasarkan latar belakang penelitian yaitu:

1. Bagaimana pendugaan parameter komponen ragam pada respon percobaan Rancangan Bujur Sangkar Latin dengan MKT dan REML?
2. Bagaimana perbandingan hasil analisis MKT dan REML?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah membandingkan hasil pendugaan komponen ragam pada respon percobaan Rancangan Bujur Sangkar Latin menggunakan MKT dan REML.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat penelitian ini agar peneliti dapat menduga komponen ragam pada respon percobaan Rancangan Bujur Sangkar Latin dengan metode REML dan menjadikan REML sebagai metode alternatif pada respon percobaan Rancangan Bujur Sangkar Latin.

1.5 Batasan Masalah

Batasan masalah pada penelitian ini adalah:

1. Menduga komponen ragam pada respon percobaan Rancangan Bujur Sangkar Latin.
2. Metode pendugaan parameter menggunakan MKT dan REML.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

1.1 Rancangan Percobaan

Percobaan adalah penyelidikan yang direncanakan untuk memperoleh fakta baru dan dilakukan untuk mendukung atau menyangkal hasil percobaan yang telah dilakukan oleh peneliti lain (Sugiarto, 1994). Dalam ilmu perancangan percobaan, yang akan dibahas adalah percobaan komparatif, yaitu percobaan yang dilakukan untuk membandingkan dua perlakuan atau lebih.

Rancangan percobaan merupakan seperangkat aturan atau prosedur untuk menerapkan perlakuan ke dalam satuan percobaan (Steel dan Torrie, 1991). Menurut Mattjik dan Sumertajaya (2006), perancangan percobaan adalah suatu uji atau sederetan uji menggunakan statistika deskripsi maupun inferensia yang bertujuan untuk mengubah peubah input menjadi suatu output yang merupakan respon dari percobaan.

Menurut Yitnosumarto (1993), terdapat tiga unsur utama di dalam perancangan percobaan, yaitu:

1. Ulangan

Apabila sesuatu perlakuan terjadi lebih dari satu kali dalam suatu percobaan, maka terdapat ulangan pada perlakuan tersebut. Tujuan dari ulangan untuk mengestimasi galat percobaan.

2. Pengacakan

Pengacakan adalah suatu cara di bidang statistika untuk menghindari subjektivitas. Oleh karena penempatan perlakuan ke dalam satuan-satuan percobaan dilakukan secara acak, maka keragaman baik dalam perlakuan maupun antar perlakuan dianggap bersifat alami.

3. Pengendalian lokal

Pengendalian lokal adalah suatu tindakan mengumpulkan satuan percobaan yang relatif homogen menjadi satu kelompok sehingga diperoleh beberapa kelompok satuan percobaan. Setiap kelompok harus menempatkan semua perlakuan dan ulangan pada kelompok lain. Pengendalian lokal dimaksudkan untuk memperkecil galat percobaan.

1.2 Rancangan Bujur Sangkar Latin

Rancangan Bujur Sangkar Latin merupakan rancangan percobaan yang dapat mengendalikan dua arah sumber variabilitas dari satuan percobaan. Yitnosumarto (1993) menjelaskan bahwa Rancangan Bujur Sangkar Latin adalah suatu rancangan percobaan dengan gradien dua arah yaitu arah menurut baris dan lajur. Baris dan lajur tersebut merupakan pembuatan dari proses randomisasi.

Pada Rancangan Bujur Sangkar Latin, banyak perlakuan sama dengan banyak ulangan sehingga setiap baris dan lajur akan mengandung semua perlakuan. Secara umum suatu Bujur Sangkar Latin memiliki rxr satuan satuan percobaan yang mengandung r faktor baris dan r faktor lajur. Setiap rxr tersebut mengandung huruf sebanyak r perlakuan dan setiap huruf terjadi sekali pada baris dan sekali pada lajur. Beberapa contoh denah bujur sangkar latin yaitu sebagai berikut

RBSL 3 x 3

A	B	C
B	C	A
C	A	B

RBSL 4 x 4

A	B	C	D
B	C	D	A
C	D	A	B
D	A	B	C

Model linier aditif respon yang berasal dari penelitian yang dirancang dengan RBSL yaitu:

$$Y_{ij(k)} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \rho_{(k)} + \varepsilon_{ij(k)} \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, r \\ j = 1, 2, \dots, r \\ k = 1, 2, \dots, r \end{matrix} \quad (2.1)$$

di mana:

$Y_{ij(k)}$ = respon pada baris ke- i , lajur ke- j untuk perlakuan ke- k

μ = nilai tengah umum

α_i = pengaruh baris ke- i

β_j = pengaruh lajur ke- j

$\rho_{(k)}$ = pengaruh perlakuan ke- k

$\varepsilon_{ij(k)}$ = galat percobaan baris ke- i lajur ke- j perlakuan ke- k

Struktur data respon percobaan Rancangan Bujur Sangkar Latin disajikan pada Tabel 2.1.

Tabel 2.1. Struktur Data Rancangan Bujur Sangkar Latin

Baris (i)	Lajur (j)					$\sum_{j=1}^r Y_{ij(k)}$ $= Y_{i.(k)}$	$\frac{\sum_{j=1}^r Y_{ij(k)}}{r}$ $= \bar{Y}_{i.(.)}$
	1	2	3	...	r		
1	$Y_{11(k)}$	$Y_{12(k)}$	$Y_{13(k)}$...	$Y_{1r(k)}$	$Y_{1.(k)}$	$\bar{Y}_{1.(.)}$
2	$Y_{21(k)}$	$Y_{22(k)}$	$Y_{23(k)}$...	$Y_{2r(k)}$	$Y_{2.(k)}$	$\bar{Y}_{2.(.)}$
3	$Y_{31(k)}$	$Y_{32(k)}$	$Y_{33(k)}$...	$Y_{3r(k)}$	$Y_{3.(k)}$	$\bar{Y}_{3.(.)}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		
r	$Y_{r1(k)}$	$Y_{r2(k)}$	$Y_{r3(k)}$...	$Y_{rr(k)}$	$Y_{r.(k)}$	$\bar{Y}_{r.(.)}$
$\sum_{i=1}^r Y_{ij(k)}$ $= Y_{.j(k)}$	$Y_{.1(k)}$	$Y_{.2(k)}$	$Y_{.3(k)}$...	$Y_{.r(k)}$	$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r Y_{ij(k)}$ $= Y_{..(k)}$	
$\frac{\sum_{j=1}^r Y_{ij(k)}}{r}$ $= \bar{Y}_{.j(.)}$	$\bar{Y}_{.1(.)}$	$\bar{Y}_{.2(.)}$	$\bar{Y}_{.3(.)}$...	$\bar{Y}_{.r(.)}$		$\frac{\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r Y_{ij(k)}}{r^2}$ $= \bar{Y}_{..(.)}$
Perlakuan	1	2	3	...	r	$\sum_{k=1}^r Y_{ij(k)}$	$\frac{\sum_{k=1}^r Y_{ij(k)}}{r}$ $= \bar{Y}_{..(k)}$
	$Y_{..(1)}$	$Y_{..(2)}$	$Y_{..(3)}$...	$Y_{..(r)}$	$= Y_{ij(.)}$	

1.3 Asumsi Analisis Ragam

Analisis ragam (ANOVA) yang dikembangkan oleh R.A. Fisher merupakan alat pokok penelitian untuk memudahkan analisis dan interpretasi data hasil percobaan. Analisis ragam bertujuan untuk menguraikan keragaman total data menjadi komponen-komponen untuk mengukur berbagai sumber keragaman (Walpole, 1995). Sumber keragaman ini sebagai perbandingan untuk mengetahui sumber mana yang menyebabkan terjadinya keragaman. Metode pendugaan parameter model ANOVA adalah Metode Kuadrat Terkecil di mana terdapat asumsi-asumsi yang harus dipenuhi.

Menurut Mattjik dan Sumertajaya (2006), asumsi-asumsi yang melandasi analisis ragam adalah:

a. Pengaruh perlakuan dan lingkungan bersifat aditif

Percobaan Rancangan Bujur Sangkar Latin memiliki model linier aditif yaitu: $Y_{ij(k)} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \rho_{(k)} + \varepsilon_{ij(k)}$

$Y_{ij(k)}$ harus bersifat aditif di mana $Y_{ij(k)}$ merupakan penjumlahan dari $\mu, \alpha_i, \beta_j, \rho_{(k)}$ dan $\varepsilon_{ij(k)}$. Jika model tidak bersifat aditif maka perlu dilakukan transformasi. Uji formal untuk menguji keaditifan model adalah uji Tukey menggunakan pendekatan sebaran F.

$$\text{Statistik uji F} = \frac{JK(\text{non aditif})}{JK(\text{galat})/db(\text{galat})}$$

di mana:

$$Q = \sum (\bar{Y}_{i.(.)} - \bar{Y}_{..(.)}) (\bar{Y}_{.j(.)} - \bar{Y}_{..(.)}) (\bar{Y}_{..(k)} - \bar{Y}_{..(.)}) Y_{ij(k)}$$

$$JK(\text{non aditif}) = \frac{Q^2}{r \sum (\bar{Y}_{i.(.)} - \bar{Y}_{..(.)})^2 \sum (\bar{Y}_{.j(.)} - \bar{Y}_{..(.)})^2 \sum (\bar{Y}_{..(k)} - \bar{Y}_{..(.)})^2}$$

H_0 diterima jika statistik uji F lebih kecil daripada $F_{\alpha,(1,dbgalat)}$ maka model bersifat aditif.

b. Galat percobaan memiliki ragam yang homogen

Uji formal untuk pengujian kehomogenan ragam galat adalah uji Bartlett. Hipotesis yang melandasi uji Bartlett:

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_r^2$$

H_1 : Paling sedikit satu ragam tidak sama

Uji Bartlett menggunakan pendekatan sebaran khi-kuadrat dengan $(r-1)$ derajat bebas.

$$\text{Statistik uji } \chi^2 = 2.3026 [(\sum_i (r_1 - 1)) \log(s^2) - \sum_i (r_1 - 1) \log(s_i^2)]$$

di mana:

$$s_i^2 = \frac{\sum_i (Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})^2}{r_1 - 1}$$

$$s^2 = \frac{\sum_i (n_1 - 1) s_i^2}{N - 1}$$

$$FK = 1 + \left[\frac{1}{3(t-1)} \right] \left[\sum_i \frac{1}{r_1 - 1} - \frac{1}{\sum r_1 - 1} \right]$$

H_0 diterima jika statistik uji $\chi^2 < \chi_{\alpha, r-1}^2$ maka asumsi kehomogenan ragam galat dapat dipenuhi.

c. Galat percobaan saling bebas

Untuk melihat keacakan galat percobaan dibuat plot antara penduga galat percobaan ($\varepsilon_{ij(k)}$) dengan penduga respon ($Y_{ij(k)}$). Jika plot tidak membentuk suatu pola tertentu maka dapat dikatakan bahwa galat percobaan saling bebas.

d. Galat percobaan menyebar normal

Kenormalan galat dapat menggunakan uji formal yakni Uji *Saphiro Wilk*. Hipotesis yang melandasi uji *Saphiro Wilk*:

H_0 : Galat berdistribusi normal

H_1 : Galat tidak berdistribusi normal

Uji *Saphiro Wilk* menggunakan pendekatan sebaran normal.

Statistik uji $W = \frac{1}{D} [\sum_{i=1}^k a_i (X_{n-i+1} - X_i)]^2 \sim Z$

di mana:

$$D = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

H_0 diterima jika statistik uji $W < Z_\alpha$ maka asumsi kenormalan galat dapat dipenuhi.

1.4 Penanganan Pelanggaran Asumsi Analisis Ragam

Menurut Yitnosumarto (1993), diperlukan satu cara untuk menangani pelanggaran asumsi analisis ragam yaitu transformasi. Tujuan dari transformasi adalah untuk mengubah skala pengukuran data asli menjadi bentuk lain sehingga data dapat memenuhi asumsi-asumsi yang mendasari analisis ragam. Ada dua hal yang perlu diperhatikan:

1. Apakah sebaran hipotetik data diketahui.

2. Apakah ada hubungan tertentu antara μ dengan σ .

Simpangan baku peubah X proporsional terhadap derajat nilai tengah X , μ_X dalam bentuk $\sigma_X \propto \mu_X^\alpha$.

Terdapat beberapa jenis transformasi yang sering digunakan untuk keadaan tertentu yaitu sebagai berikut:

1. Transformasi logaritma ($\log Y$)

Transformasi ini digunakan apabila terdapat sifat multiplikatif pada data atau apabila simpangan baku sebanding dengan rata-rata tiap perlakuan. Menurut Steel dan Torrie (1991), transformasi ini digunakan pada bilangan-bilangan positif, akan tetapi tidak dapat

digunakan secara langsung pada nilai nol dan nilai-nilai pengamatan yang kurang dari 10. Transformasi logaritma untuk nilai yang kecil adalah $\log(Y+1)$.

2. Transformasi Akar Kuadrat (\sqrt{Y})

Transformasi akar kuadrat digunakan jika simpangan baku dari tiap perlakuan sebanding dengan akar dari rata-ratanya dan data berupa bilangan bulat positif. Transformasi ini sering digunakan agar ragam galat menjadi homogen. Jika terdapat nilai nol maka transformasi $\sqrt{Y + 0.5}$.

3. Transformasi Kebalikan ($1/Y$)

Transformasi ini digunakan apabila simpangan baku sebanding dengan pangkat dua rata-rata tiap perlakuan.

Secara ringkas, transformasi untuk menangani pelanggaran asumsi analisis ragam dapat dilihat pada Tabel 2.2

Tabel 2.2. Bentuk Transformasi untuk Menangani Pelanggaran Asumsi Analisis Ragam

Bentuk Ketergantungan	Bentuk Transformasi
$\sigma_X \propto \mu_X^2$	$\frac{1}{X}$ atau kebalikan X
$\sigma_X \propto \mu_X^{3/2}$	$\frac{1}{\sqrt{X}}$ atau kebalikan akar pangkat dua
$\sigma_X \propto \mu_X$	$\text{Log}(X)$ atau $\log(X+1)$
$\sigma_X \propto \mu_X^{1/2}$	\sqrt{X} atau $\sqrt{(X + \frac{1}{2})}$
σ_X tetap	Tanpa transformasi

(Box, Hunter dan Hunter, 1978)

1.5 Metode Kuadrat Terkecil

Pendugaan parameter model Bujur Sangkar Latin dilakukan menggunakan Metode Kuadrat Terkecil.

$$Y_{ij(k)} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \rho_{(k)} + \varepsilon_{ij(k)}$$

$$\varepsilon_{ij(k)} = Y_{ij(k)} - \mu - \alpha_i - \beta_j - \rho_{(k)}$$

Berdasarkan asumsi $E(\varepsilon_{ij(k)}) = 0$

$$E(Y_{ij(k)}) = E[\mu + \alpha_i + \beta_j + \rho_{(k)} + \varepsilon_{ij(k)}]$$

$$E(Y_{ij(k)}) = E[\mu + \alpha_i + \beta_j + \rho_{(k)}] + E[\varepsilon_{ij(k)}]$$

$$\hat{Y}_{ij(k)} = E[\mu + \alpha_i + \beta_j + \rho_{(k)}] + 0$$

$$\hat{Y}_{ij(k)} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \rho_{(k)}$$

$$\varepsilon_{ij(k)} = Y_{ij(k)} - \hat{Y}_{ij(k)}$$

$$\varepsilon_{ij(k)} = Y_{ij(k)} - [\mu + \alpha_i + \beta_j + \rho_{(k)}]$$

Kriteria pendugaan yang tepat yaitu dengan meminimumkan jumlah kuadrat galat:

$$L = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \varepsilon^2_{ij(k)}$$

$$L = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r [Y_{ij(k)} - (\mu + \alpha_i + \beta_j + \rho_{(k)})]^2 \quad (2.2)$$

Fungsi kuadrat akan bernilai minimum jika turunan parsial terhadap parameter disamakan dengan nol. Hasil turunan parsial L pada persamaan (2.2) terhadap μ, α_i, β_j dan $\rho_{(k)}$ menghasilkan persamaan normal berikut.

$$r^2 \mu + r \sum_{i=1}^r \alpha_i + r \sum_{i=1}^r \beta_i + r \sum_{k=1}^r \rho_{(k)} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r Y_{ij(k)}$$

$$r \hat{\mu} + r \hat{\alpha}_i + \sum_{j=1}^r \hat{\beta}_j + \sum_{k=1}^r \hat{\rho}_{(k)} = \sum_{j=1}^r Y_{ij(k)}$$

$$r \hat{\mu} + \sum_{i=1}^r \hat{\alpha}_i + r \hat{\beta}_j + \sum_{k=1}^r \hat{\rho}_{(k)} = \sum_{i=1}^r Y_{ij(k)}$$

$$r \hat{\mu} + \sum_{i=1}^r \hat{\alpha}_i + \sum_{j=1}^r \hat{\beta}_j + r \hat{\rho}_{(k)} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r Y_{ij(k)}$$

Dengan menggunakan batasan bahwa:

$$\sum_{i=1}^r \hat{\alpha}_i = \sum_{j=1}^r \hat{\beta}_j = \sum_{k=1}^r \hat{\rho}_{(k)} = 0$$

Diperoleh penduga-penduga:

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r Y_{ij(k)}}{r^2} = \bar{Y}_{..(.)} \quad (2.3)$$

$$\hat{\alpha}_i = \frac{\sum_{j=1}^r Y_{ij(k)}}{r} - \hat{\mu} = \bar{Y}_{i.(.)} - \bar{Y}_{..(.)} \quad (2.4)$$

$$\hat{\beta}_j = \frac{\sum_{i=1}^r Y_{ij(k)}}{r} - \hat{\mu} = \bar{Y}_{.j(.)} - \bar{Y}_{..(.)} \quad (2.5)$$

$$\hat{\rho}(k) = \frac{\sum_{k=1}^r Y_{ij(k)}}{r} - \hat{\mu} = \bar{Y}_{..(k)} - \bar{Y}_{..(.)} \quad (2.6)$$

1.6 Analisis Ragam

Pada persamaan (2.1), parameter μ, α_i, β_j dan $\rho(k)$ diganti dengan penduga-penduga menghasilkan:

$$Y_{ij(k)} = \hat{\mu} + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j + \hat{\rho}(k) + \hat{\epsilon}_{ij(k)} \quad (2.7)$$

Substitusikan persamaan (2.3), (2.4), (2.5) dan (2.6) pada persamaan (2.7).

$$\begin{aligned} Y_{ij(k)} &= \bar{Y}_{..(.)} + (\bar{Y}_{i.(.)} - \bar{Y}_{..(.)}) + (\bar{Y}_{.j(.)} - \bar{Y}_{..(.)}) + (\bar{Y}_{..(k)} - \bar{Y}_{..(.)}) \\ &\quad + (Y_{ij(k)} - \bar{Y}_{i.(.)} - \bar{Y}_{.j(.)} - \bar{Y}_{..(k)} + 2\bar{Y}_{..(.)}) \\ Y_{ij(k)} - \bar{Y}_{..(.)} &= (\bar{Y}_{i.(.)} - \bar{Y}_{..(.)}) + (\bar{Y}_{.j(.)} - \bar{Y}_{..(.)}) + (\bar{Y}_{..(k)} - \bar{Y}_{..(.)}) + \\ &\quad (Y_{ij(k)} - \bar{Y}_{i.(.)} - \bar{Y}_{.j(.)} - \bar{Y}_{..(k)} + 2\bar{Y}_{..(.)}) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Dengan mengkuadratkan ruas kiri dan ruas kanan dari persamaan (2.8), kemudian dijumlahkan menurut i, j atau k diperoleh persamaan berikut

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r (Y_{ij(k)} - \bar{Y}_{..(.)})^2 &= r \sum_{i=1}^r (\bar{Y}_{i.(.)} - \bar{Y}_{..(.)})^2 + r \sum_{j=1}^r (\bar{Y}_{.j(.)} - \bar{Y}_{..(.)})^2 \\ &\quad + r \sum_{k=1}^r (\bar{Y}_{..(k)} - \bar{Y}_{..(.)})^2 + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r (Y_{ij(k)} - \bar{Y}_{i.(.)} - \bar{Y}_{.j(.)} - \bar{Y}_{..(k)} + 2\bar{Y}_{..(.)})^2 \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$JK_{\text{total}} = JK_{\text{baris}} + JK_{\text{lajur}} + JK_{\text{perlakuan}} + JK_{\text{galat}}$$

Jumlah kuadrat pada persamaan (2.9) dan Kuadrat Tengah disajikan secara rinci pada Tabel 2.3 berikut.

Tabel 2.3. Analisis Ragam Respon Percobaan Bujur Sangkar Latin

SK	db	JK	KT
Baris	$(r-1)$	$JK_B = r \sum_{i=1}^r (\bar{Y}_{i.(\cdot)} - \bar{Y}_{..(\cdot)})^2$	$KT_B = JK_B / (r-1)$
Lajur	$(r-1)$	$JK_L = r \sum_{j=1}^r (\bar{Y}_{.j(\cdot)} - \bar{Y}_{..(\cdot)})^2$	$KT_L = JK_L / (r-1)$
Perlakuan	$(r-1)$	$JK_P = r \sum_{k=1}^r (\bar{Y}_{..(k)} - \bar{Y}_{..(\cdot)})^2$	$KT_P = JK_P / (r-1)$
Galat	$(r-1)(r-2)$	$JK_G = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r (Y_{ij(k)} - \bar{Y}_{i.(\cdot)} - \bar{Y}_{.j(\cdot)} - \bar{Y}_{..(k)} + 2 \bar{Y}_{..(\cdot)})^2$	$KT_G = \frac{JK_P}{(r-1)(r-2)}$
Total	$(r^2 - 1)$	$JKT = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r (Y_{ij(k)} - \bar{Y}_{..(\cdot)})^2$	

(Yitnosumarto, 1993)

1.7 Nilai Harapan Kuadrat Tengah [E(KT)]

Menurut Yitnosumarto (1993), penentuan nilai harapan kuadrat tengah sangat penting dalam mempelajari komponen ragam. Besarnya nilai harapan kuadrat tengah tergantung pada jenis model tetap, acak atau campuran. Jenis model ditentukan berdasarkan jenis rancangan percobaan, misal model campuran Rancangan Bujur Sangkar Latin. Nilai harapan kuadrat tengah model campuran untuk respon percobaan Rancangan Bujur Sangkar Latin disajikan pada tabel berikut.

Tabel 2.4. Nilai Harapan Kuadrat Tengah Rancangan Bujur Sangkar Latin

Sumber Keragaman	Derajat Bebas (db)	E(KT)
Baris (acak)	$r-1$	$\sigma_\varepsilon^2 + r \sigma_B^2$
Lajur (acak)	$r-1$	$\sigma_\varepsilon^2 + r \sigma_L^2$
Perlakuan (tetap)	$r-1$	$\sigma_\varepsilon^2 + \frac{r}{(r-1)} \sum_{k=1}^r (\rho_{(k)} - \bar{\rho}_{(k)})^2$
Galat	$(r-1)(r-2)$	σ_ε^2

(Yitnosumarto, 1993)

di mana:

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = KT_{galat}$$

$$\hat{\sigma}_B^2 = \frac{KT_{Baris} - \hat{\sigma}_\varepsilon^2}{r}$$

$$\hat{\sigma}_L^2 = \frac{KT_{Lajur} - \hat{\sigma}_\varepsilon^2}{r}$$

1.8 Metode *Restricted Maximum Likelihood* (REML)

REML berasal dari kata *Restricted* atau *Residual* maupun *Reduced Maximum Likelihood* sebagai metode alternatif pendugaan parameter pada analisis ragam. O'Neill (2010) menjelaskan bahwa ide pendugaan parameter menggunakan REML adalah membagi kemungkinan menjadi dua komponen. Komponen pertama adalah kemungkinan satu atau lebih statistik yang mengandung semua parameter tetap seperti μ (dan mungkin juga parameter ragam σ^2). Komponen kedua adalah kemungkinan *residual likelihood* dan hanya mengandung parameter ragam σ^2 dengan pengaruh acak. Kemudian REML memaksimalkan setiap komponen secara terpisah.

REML dikembangkan untuk menduga parameter ragam dalam Model Campuran Linier (LMM) yang mengandung pengaruh tetap dan pengaruh acak. Persamaan (2.1) dapat dinyatakan dalam model campuran linier:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\tau} + \mathbf{Z}\mathbf{u} + \mathbf{e} \quad (2.10)$$

di mana:

\mathbf{y} = vektor respon baris ke- i lajur ke- j perlakuan ke- k berukuran $r^2 \times 1$

$\boldsymbol{\tau}$ = vektor pengaruh tetap, berdimensi $(r+1) \times 1$

\mathbf{X} = matriks rancangan berukuran $r^2 \times (r+1)$ hasil penempatan r^2 satuan percobaan pada $(r+1)$ pengaruh tetap

\mathbf{u} = vektor pengaruh acak berukuran $2r \times 1$

\mathbf{Z} = matriks rancangan berukuran $r^2 \times 2r$, hasil penempatan r^2 satuan percobaan pada $2r$ pengaruh acak

\mathbf{e} = vektor galat berukuran $r^2 \times 1$

Diasumsikan bahwa pengaruh acak menyebar normal, $\mathbf{u} \sim N(\mathbf{0}, \sigma_H^2 \mathbf{G})$ dan bebas terhadap galat yang juga menyebar normal, $\mathbf{e} \sim N(\mathbf{0}, \sigma_H^2 \mathbf{R})$.

$$\mathbf{t}_{(r+1) \times 1} = \begin{pmatrix} \mu \\ \rho_{(1)} \\ \rho_{(2)} \\ \vdots \\ \rho_{(r)} \end{pmatrix} \quad \mathbf{u}_{(2r \times 1)} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_r \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_r \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_{r^2 \times 1} = \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{12} \\ \vdots \\ e_{rr} \end{pmatrix}$$

Misal $r=3$ dengan denah perlakuan

A	B	C
B	C	A
C	A	B

, maka:

matriks rancangan hasil penempatan r^2 satuan percobaan pada $(r+1)$ pengaruh tetap berbentuk:

$$\mathbf{X}_{r^2 \times (r+1)} = \begin{matrix} & \mu & \rho_{(1)} & \rho_{(2)} & \rho_{(3)} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

dan matriks rancangan hasil penempatan r^2 satuan percobaan pada $2r$ pengaruh acak berbentuk:

$$\mathbf{Z}_{r^2 \times 2r} = \begin{matrix} & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\mathbf{G} = E(\mathbf{u} \mathbf{u}^T)$$

$$\mathbf{G}_{2r \times 2r} = E \left(\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_r \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_r \end{pmatrix} (\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_r \quad \beta_1 \quad \beta_2 \quad \cdots \quad \beta_r) \right)$$

$$= \left(\begin{array}{cccc|cccc} \sigma_B^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_B^2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_B^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & \sigma_L^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \sigma_L^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \sigma_L^2 \end{array} \right)$$

$$\mathbf{G} = \text{Diag}(\sigma_B^2 \mathbf{I}_r \mid \sigma_L^2 \mathbf{I}_r)$$

Pada ragam konstan:

$$\sigma_H^2 \mathbf{R} = \begin{pmatrix} \sigma_\varepsilon^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_\varepsilon^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_\varepsilon^2 \end{pmatrix} = \sigma_\varepsilon^2 \mathbf{I}_{r^2}$$

Dengan perubahan ragam:

$$\sigma_H^2 \mathbf{R}_{(r^2 \times r^2)} = \begin{pmatrix} \sigma_{\varepsilon_1}^2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_{\varepsilon_1}^2 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{\varepsilon_1}^2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & \sigma_{\varepsilon_2}^2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \sigma_{\varepsilon_2}^2 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \sigma_{\varepsilon_2}^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & & & \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \sigma_{\varepsilon_{r^2}}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \sigma_{\varepsilon_{r^2}}^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \sigma_{\varepsilon_{r^2}}^2 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_H^2 \mathbf{R} = \begin{pmatrix} \sigma_{\varepsilon_1}^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \mathbf{0}_{r \times r} & \dots & \mathbf{0}_{r \times r} \\ \mathbf{0}_{r \times r} & \sigma_{\varepsilon_2}^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \dots & \mathbf{0}_{r \times r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_{r \times r} & \mathbf{0}_{r \times r} & \dots & \sigma_{\varepsilon_{r^2}}^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_H^2 \mathbf{R} = \text{Diag}(\sigma_{\varepsilon_1}^2 \mathbf{I}_r \mid \sigma_{\varepsilon_2}^2 \mathbf{I}_r \mid \dots \mid \sigma_{\varepsilon_{r^2}}^2 \mathbf{I}_r)$$

$E(\mathbf{u})=0$ dan $E(\mathbf{e})=0$ maka

$$E(\mathbf{y}) = \mathbf{X} \boldsymbol{\tau} \quad (2.11)$$

dan matriks ragam peragam:

$$\begin{aligned} \text{var}(\mathbf{y}) &= E(\mathbf{y} - E(\mathbf{y}))(\mathbf{y} - E(\mathbf{y}))^T \\ &= E(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\tau})(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\tau})^T \\ &= E(\mathbf{Z}\mathbf{u} + \mathbf{e})(\mathbf{u}^T \mathbf{Z}^T + \mathbf{e}^T) \\ &= E(\mathbf{Z}\mathbf{u}\mathbf{u}^T \mathbf{Z}^T) + E(\mathbf{Z}\mathbf{u}\mathbf{e}^T) + E(\mathbf{e}\mathbf{u}^T \mathbf{Z}^T) + E(\mathbf{e}\mathbf{e}^T) \\ &= \mathbf{Z}E(\mathbf{u}\mathbf{u}^T)\mathbf{Z}^T + \mathbf{Z}E(\mathbf{u}\mathbf{e}^T) + E(\mathbf{e}\mathbf{u}^T)\mathbf{Z}^T + E(\mathbf{e}\mathbf{e}^T) \\ &= \mathbf{Z}\mathbf{G}\mathbf{Z}^T + \mathbf{Z}(\mathbf{0}) + (\mathbf{0})\mathbf{Z}^T + \mathbf{R} \\ &= \sigma_H^2 \mathbf{Z}\mathbf{G}\mathbf{Z}^T + \sigma_H^2 \mathbf{R} \\ &= \sigma_H^2 (\mathbf{Z}\mathbf{G}\mathbf{Z}^T + \mathbf{R}) \\ &= \sigma_H^2 \mathbf{H} \end{aligned} \quad (2.12)$$

di mana:

$$\mathbf{H} = \mathbf{R} + \mathbf{Z}\mathbf{G}\mathbf{Z}^T$$

σ_H^2 = faktor skala yang membolehkan struktur matriks ragam-peragam \mathbf{R} dan \mathbf{G} dinyatakan sebagai ragam atau model korelasi dalam beberapa keadaan sehingga vektor data $\mathbf{y} \sim N(\mathbf{X}\boldsymbol{\tau}, \sigma_H^2 \mathbf{H})$

(O'Neill dan Mitakda, 2015)

1.8.1 Transformasi untuk Memisahkan Pengaruh Tetap

Metode REML digunakan untuk memisahkan pengaruh tetap dengan mentransformasi vektor \mathbf{y} menjadi peubah baru yaitu \mathbf{y}^* yang terdiri dari \mathbf{y}_1 dan \mathbf{y}_2 . Elemen-elemen \mathbf{y}_1 mengandung informasi tentang pengaruh tetap sedangkan elemen \mathbf{y}_2 akan hanya mengandung parameter yang terdapat dalam matriks ragam-peragam $\sigma_H^2 \mathbf{H}$. Peubah \mathbf{y}_1 dan \mathbf{y}_2 akan saling berkorelasi sehingga pendekatan akan menggunakan sebaran bersyarat $\mathbf{y}_1 | \mathbf{y}_2$.

Transformasi terhadap \mathbf{y} menjadi:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{L}^T \mathbf{y} \quad (2.13)$$

di mana :

$$\mathbf{L} = [\mathbf{L}_1 \quad \mathbf{L}_2]$$

$$\text{Kondisi 1: } \mathbf{L}_1^T \mathbf{X} = \mathbf{I}_{r+1}$$

$$\text{Kondisi 2: } \mathbf{L}_2^T \mathbf{X} = \mathbf{O}_{(r^2-(r+1)) \times (r+1)}$$

di bawah kondisi:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{pmatrix} \sim N \left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{\tau} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{L}_1^T \mathbf{H} \mathbf{L}_1 & \mathbf{L}_1^T \mathbf{H} \mathbf{L}_2 \\ \mathbf{L}_2^T \mathbf{H} \mathbf{L}_1 & \mathbf{L}_2^T \mathbf{H} \mathbf{L}_2 \end{pmatrix} \right)$$

$$\mathbf{y}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1^* \\ \mathbf{y}_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_1^T \mathbf{y} \\ \mathbf{L}_2^T \mathbf{y} \end{pmatrix}$$

$$\text{var}(\mathbf{y}^*) = \begin{pmatrix} \text{var}(\mathbf{L}_1^T \mathbf{y}) & \text{cov}(\mathbf{L}_1^T \mathbf{y}, \mathbf{L}_2^T \mathbf{y}) \\ \text{cov}(\mathbf{L}_2^T \mathbf{y}, \mathbf{L}_1^T \mathbf{y}) & \text{var}(\mathbf{L}_2^T \mathbf{y}) \end{pmatrix}$$

$$= \sigma_H^2 \begin{pmatrix} \mathbf{L}_1^T \mathbf{H} \mathbf{L}_1 & \mathbf{L}_1^T \mathbf{H} \mathbf{L}_2 \\ \mathbf{L}_2^T \mathbf{H} \mathbf{L}_1 & \mathbf{L}_2^T \mathbf{H} \mathbf{L}_2 \end{pmatrix}$$

$$= \sigma_H^2 \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{pmatrix}$$

Dari persamaan (2.11) dan (2.13) dihasilkan:

$$E(\mathbf{y}^*) = E \begin{pmatrix} \mathbf{L}_1^T \mathbf{y} \\ \mathbf{L}_2^T \mathbf{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_1^T \mathbf{X} \\ \mathbf{L}_2^T \mathbf{X} \end{pmatrix} \boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\tau} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$$E(\mathbf{y}_1^*) = \boldsymbol{\tau} \text{ dan } E(\mathbf{y}_2^*) = \mathbf{0}$$

$$E(\mathbf{y}_1^* | \mathbf{y}_2^*) = \boldsymbol{\tau} + \mathbf{L}_1^T \mathbf{H} \mathbf{L}_2 (\mathbf{L}_2^T \mathbf{H} \mathbf{L}_2)^{-1} \mathbf{y}_2^* \quad (2.14)$$

$$\text{var}(\mathbf{y}_1^* | \mathbf{y}_2^*) = \sigma_H^2 [\mathbf{L}_1^T \mathbf{H} \mathbf{L}_1 - \mathbf{L}_1^T \mathbf{H} \mathbf{L}_2 (\mathbf{L}_2^T \mathbf{H} \mathbf{L}_2)^{-1} \mathbf{L}_2^T \mathbf{H} \mathbf{L}_1] \quad (2.15)$$

Terapkan persamaan (2.14) dan (2.15) terhadap peubah y_1 dan y_2 .

$$y_1 | y_2 \sim N \left(\begin{array}{c} \tau + L_1^T H L_2 (L_2^T H L_2)^{-1} y_2 \\ \sigma_H^2 [L_1^T H L_1 - L_1^T H L_2 (L_2^T H L_2)^{-1} L_2^T H L_1] \end{array} \right)$$

Jika $y_2^* = L_1^T H L_2 (L_2^T H L_2)^{-1} y_2$

dan $L_1^T H L_1 - L_1^T H L_2 (L_2^T H L_2)^{-1} L_2^T H L_1 = (X^T H^{-1} X)^{-1}$ maka

$$y_1 | y_2 \sim N(\tau + y_2^*, \sigma_H^2 (X^T H^{-1} X)^{-1})$$

(O'Neill dan Mitakda, 2015)

1.8.2 Fungsi Loglikelihood Pengaruh Acak

$y_2 \sim N(\mathbf{0}, \sigma_H^2 L_2^T H L_2)$ sebagai *Residual logLikelihood* (ℓ_R).

Fungsi *likelihood* vektor peubah y_2

$$f(y_2) = \frac{1}{2\pi^{1/2} |\sigma_H^2 L_2^T H L_2|^{1/2}} \exp - \frac{1}{2\sigma_H^2} [y_2^T (L_2^T H L_2)^{-1} y_2]$$

$$\begin{aligned} \ell_R = & -\frac{1}{2} \left((r^2 - (r + 1)) \log(2\pi) + (r^2 - (r + 1)) \log(\sigma_H^2) + \right. \\ & \left. \log |L_2^T H L_2| + \frac{y_2^T (L_2^T H L_2)^{-1} y_2}{\sigma_H^2} \right) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Persamaan (2.16) dalam bentuk vektor:

$$\begin{aligned} \ell_R = & -\frac{1}{2} \left((r^2 - (r + 1)) \log(2\pi) + (r^2 - (r + 1)) \log(\sigma_H^2) + \right. \\ & \left. \log |L_2^T H L_2| + \frac{y (L_2^T H L_2)^{-1} y}{\sigma_H^2} \right) \end{aligned} \quad (2.17)$$

di mana:

$$H^{-1} = H^{-1} X (X^T H^{-1} X)^{-1} X^T H^{-1} + L_2 (L_2^T H L_2)^{-1} L_2^T$$

$$H^{-1} - H^{-1} X (X^T H^{-1} X)^{-1} X^T H^{-1} = L_2 (L_2^T H L_2)^{-1} L_2^T$$

$$L_2 (L_2^T H L_2)^{-1} L_2^T = P$$

Jika

$$\log|\mathbf{L}_2^T \mathbf{H} \mathbf{L}_2| = \log|\mathbf{L}^T \mathbf{H} \mathbf{L}| + \log|\mathbf{X}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{X}|$$

$$\log|\mathbf{L}_2^T \mathbf{H} \mathbf{L}_2| = \log|\mathbf{L} \mathbf{L}^T \mathbf{H}| + \log|\mathbf{X}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{X}|$$

$$\log|\mathbf{L}_2^T \mathbf{H} \mathbf{L}_2| = \log|\mathbf{L} \mathbf{L}^T| + \log|\mathbf{H}| + \log|\mathbf{X}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{X}|$$

Maka *residual likelihood* persamaan (2.17) menjadi:

$$\ell_R = -\frac{1}{2} \left((r^2 - (r + 1)) \log(2\pi) + (r^2 - (r + 1)) \log(\sigma_H^2) + \log|\mathbf{L}_2^T \mathbf{H} \mathbf{L}_2| + \frac{\mathbf{y}^T \mathbf{P}_y}{\sigma_H^2} \right)$$

$$\ell_R = -\frac{1}{2} \left((r^2 - (r + 1)) \log(2\pi) + \log|\mathbf{L} \mathbf{L}^T| \right) - \frac{1}{2} \left((r^2 - (r + 1)) \log(\sigma_H^2) + \log|\mathbf{H}| + \log|\mathbf{X}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{X}| + \frac{\mathbf{y}^T \mathbf{P}_y}{\sigma_H^2} \right) \quad (2.18)$$

Solusi REML untuk pengaruh acak diperoleh dari menurunkan ℓ_R pada persamaan (2.18) terhadap σ_H^2 :

$$\frac{\partial \ell_R}{\partial \sigma_H^2} = -\frac{1}{2} \left(\frac{r^2 - (r + 1)}{\sigma_H^2} - \frac{\mathbf{y}^T \mathbf{P}_y}{(\sigma_H^2)^2} \right) \quad (2.19)$$

Samakan persamaan (2.19) dengan nol, menghasilkan

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{r^2 - (r + 1)}{\hat{\sigma}_H^2} - \frac{\mathbf{y}^T \hat{\mathbf{P}}_y}{(\hat{\sigma}_H^2)^2} \right) = 0$$

$$r^2 - r - 1 = \frac{\mathbf{y}^T \hat{\mathbf{P}}_y}{\hat{\sigma}_H^2}$$

$$\hat{\sigma}_H^2 = \frac{\mathbf{y}^T \hat{\mathbf{P}}_y}{r^2 - r - 1} \quad (2.20)$$

di mana:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{L}_2(\mathbf{L}_2^T \mathbf{H} \mathbf{L}_2)^{-1} \mathbf{L}_2^T \\ &= \mathbf{H}^{-1} - \mathbf{H}^{-1} \mathbf{X}(\mathbf{X}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{H}^{-1} \end{aligned} \quad (\text{O'Neill dan Mitakda, 2015})$$

1.8.3 Fungsi Loglikelihood Pengaruh Tetap

Fungsi *loglikelihood* untuk pengaruh tetap (ℓ_1), dilandasi pada sebaran bersyarat $\mathbf{y}_1 | \mathbf{y}_2$ sehingga:

$$\ell_1 = -\left(\frac{1}{2} ((r+1) \log(2\pi))\right) - \frac{1}{2} ((r+1) \log(\sigma_H^2) + \log|(\mathbf{X}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{X})^{-1}| + (\mathbf{y}_1 - \boldsymbol{\tau} - \mathbf{y}_2^*)^T (\mathbf{X}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{X}) (\mathbf{y}_1 - \boldsymbol{\tau} - \mathbf{y}_2^*) / \sigma_H^2) \quad (2.21)$$

di mana:

$$\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu} = \mathbf{y}_1 - (\boldsymbol{\tau} + \mathbf{y}_2^*) = \mathbf{y}_1 - \boldsymbol{\tau} - \mathbf{y}_2^*$$

Solusi REML untuk pengaruh tetap diperoleh dari hasil menurunkan persamaan ℓ_1 pada persamaan (2.21) terhadap $\boldsymbol{\tau}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell_1}{\partial \boldsymbol{\tau}} &= \frac{\partial \ell_1}{\partial \boldsymbol{\tau}} \left(-\left(\frac{1}{2} ((r+1) \log(2\pi))\right) - \frac{1}{2} ((r+1) \log(\sigma_H^2) + \log|(\mathbf{X}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{X})^{-1}| + (\mathbf{y}_1 - \boldsymbol{\tau} - \mathbf{y}_2^*)^T (\mathbf{X}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{X}) (\mathbf{y}_1 - \boldsymbol{\tau} - \mathbf{y}_2^*) / \sigma_H^2) \right) \\ \frac{\partial \ell_1}{\partial \boldsymbol{\tau}} &= 0 + 0 + \frac{\partial \ell_1}{\partial \boldsymbol{\tau}} \left(-\frac{1}{2} (\mathbf{y}_1 - \boldsymbol{\tau} - \mathbf{y}_2^*)^T (\mathbf{X}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{X}) (\mathbf{y}_1 - \boldsymbol{\tau} - \mathbf{y}_2^*) / \sigma_H^2 \right) \end{aligned} \quad (2.22)$$

Karena mengandung dua suku $(\mathbf{y}_1 - \boldsymbol{\tau} - \mathbf{y}_2^*)$ sehingga berpangkat 2 maka

$$\frac{\partial \ell_1}{\partial \boldsymbol{\tau}} \left((\mathbf{y}_1 - \boldsymbol{\tau} - \mathbf{y}_2^*)^T (\mathbf{y}_1 - \boldsymbol{\tau} - \mathbf{y}_2^*) \right) = -2(\mathbf{y}_1 - \boldsymbol{\tau} - \mathbf{y}_2^*) \quad (2.23)$$

Substitusi persamaan (2.23) pada persamaan (2.22),

$$\frac{\partial \ell_1}{\partial \boldsymbol{\tau}} = -\frac{1}{2} (-2) (\mathbf{X}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{X}) (\mathbf{y}_1 - \boldsymbol{\tau} - \mathbf{y}_2^*) / \sigma_H^2 \quad (2.24)$$

Dengan mensubstitusikan $\mathbf{y}_2^* = \mathbf{L}_1^T \mathbf{H} \mathbf{L}_2 (\mathbf{L}_2^T \mathbf{H} \mathbf{L}_2)^{-1} \mathbf{y}_2$ dan menyamakan persamaan (2.24) dengan nol, menghasilkan

$$\frac{\partial \ell_1}{\partial \boldsymbol{\tau}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{X})(\mathbf{y}_1 - \hat{\boldsymbol{\tau}} - \mathbf{L}_1^T \mathbf{H} \mathbf{L}_2 (\mathbf{L}_2^T \mathbf{H} \mathbf{L}_2)^{-1} \mathbf{y}_2) / \sigma_H^2 = \mathbf{0}$$

Maka:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_1 - \hat{\boldsymbol{\tau}} - \mathbf{L}_1^T \mathbf{H} \mathbf{L}_2 (\mathbf{L}_2^T \mathbf{H} \mathbf{L}_2)^{-1} \mathbf{y}_2 &= \mathbf{0}, \\ \hat{\boldsymbol{\tau}} &= \mathbf{y}_1 - \mathbf{L}_1^T \mathbf{H} \mathbf{L}_2 (\mathbf{L}_2^T \mathbf{H} \mathbf{L}_2)^{-1} \mathbf{y}_2 \end{aligned}$$

Namun $\mathbf{y}_1 = \mathbf{L}_1^T \mathbf{y}$ dan $\mathbf{y}_2 = \mathbf{L}_2^T \mathbf{y}$ sehingga:

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\tau}} &= \mathbf{L}_1^T \mathbf{y} - \mathbf{L}_1^T \mathbf{H} \mathbf{L}_2 (\mathbf{L}_2^T \mathbf{H} \mathbf{L}_2)^{-1} \mathbf{L}_2^T \mathbf{y} \\ \hat{\boldsymbol{\tau}} &= (\mathbf{L}_1^T - \mathbf{L}_1^T \mathbf{H} \mathbf{L}_2 (\mathbf{L}_2^T \mathbf{H} \mathbf{L}_2)^{-1} \mathbf{L}_2^T) \mathbf{y} \end{aligned}$$

Gunakan sebagai pengganda awal \mathbf{H} terhadap vektor \mathbf{y} dan sesuaikan dengan \mathbf{H}^{-1} karena $\mathbf{H} \mathbf{H}^{-1} = \mathbf{I}$

$$\hat{\boldsymbol{\tau}} = (\mathbf{L}_1^T - \mathbf{L}_1^T \mathbf{H} \mathbf{L}_2 (\mathbf{L}_2^T \mathbf{H} \mathbf{L}_2)^{-1} \mathbf{L}_2^T) \mathbf{H} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{y}$$

$$\text{Karena } \mathbf{L}_1^T \mathbf{H} - (\mathbf{L}_1^T \mathbf{H} \mathbf{L}_2) (\mathbf{L}_2^T \mathbf{H} \mathbf{L}_2)^{-1} \mathbf{L}_2^T \mathbf{H} = (\mathbf{X}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T$$

Maka

$$\hat{\boldsymbol{\tau}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{y} \quad (2.25)$$

(O'Neill dan Mitakda, 2015)

2.9 Perbandingan MKT dan REML

Efisiensi Relatif (ER) adalah ukuran untuk membandingkan efisiensi dua metode yang memiliki kebaikan relatif. Menurut Freuds (2004), kebaikan penduga MKT dan REML dilandasi pada Efisiensi Relatif (ER). Penduga tak bias dengan ragam lebih kecil lebih efisien.

$$ER = \frac{\text{var}(\hat{\theta}_M)}{\text{var}(\hat{\theta}_R)}, \quad \begin{cases} > 100\% \text{ maka } \hat{\theta}_R \text{ lebih efisien dari } \hat{\theta}_M \\ 100\% \text{ maka } \hat{\theta}_R \text{ dan } \hat{\theta}_M \text{ sama efisien} \\ < 100\% \text{ maka } \hat{\theta}_M \text{ lebih efisien dari } \hat{\theta}_R \end{cases} \quad (2.26)$$

di mana :

$\hat{\theta}_M$ = penduga tak bias dengan metode MKT

$\hat{\theta}_R$ = penduga tak bias dengan metode REML

Searle dkk (2006) menjelaskan bahwa jika jumlah kuadrat sebanding dengan χ_f^2 maka ragam kuadrat tengah $KT = \frac{JK}{f}$ adalah :

$$\text{var}(KT) = \frac{2 [E(KT)]^2}{f} \quad (2.27)$$

dan $\frac{KT^2}{f+2}$ adalah penduga tak bias bagi $\frac{KT^2}{f}$

Penduga tak bias bagi komponen ragam $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$, $\hat{\sigma}_B^2$ dan $\hat{\sigma}_L^2$ pada Rancangan Bujur Sangkar Latin adalah:

$$\begin{aligned} \text{var}(\hat{\sigma}_\varepsilon^2) &= \text{var}(KTG) \\ &= \frac{2 [E(KT_{galat})]^2}{(r-1)(r-2)+2} \\ &= \frac{2 (\hat{\sigma}_\varepsilon^2)^2}{(r-1)(r-2)+2} \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} \text{var}(\hat{\sigma}_B^2) &= \text{var}\left(\frac{KT_{baris} - KT_{galat}}{r}\right) \\ &= \frac{2}{r^2} \left[\frac{E(KT_{baris})^2}{(r-1)+2} + \frac{E(KT_{galat})^2}{(r-1)(r-2)+2} \right] \\ &= \frac{2}{r^2} \left[\frac{(\hat{\sigma}_\varepsilon^2 + r \hat{\sigma}_B^2)^2}{(r-1)+2} + \frac{(\hat{\sigma}_\varepsilon^2)^2}{(r-1)(r-2)+2} \right] \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} \text{var}(\hat{\sigma}_L^2) &= \text{var}\left(\frac{KT_{lajur} - KT_{galat}}{r}\right) \\ &= \frac{2}{r^2} \left[\frac{E(KT_{lajur})^2}{(r-1)+2} + \frac{E(KT_{galat})^2}{(r-1)(r-2)+2} \right] \\ &= \frac{2}{r^2} \left[\frac{(\hat{\sigma}_\varepsilon^2 + r \hat{\sigma}_L^2)^2}{(r-1)+2} + \frac{(\hat{\sigma}_\varepsilon^2)^2}{(r-1)(r-2)+2} \right] \end{aligned} \quad (2.30)$$

Kebaikan model didasari pada model ragam sama dan model ragam berubah pada REML dilakukan dengan menghitung perubahan nilai *deviance* yakni jumlah kuadrat galat pada analisis ragam.

$$\text{deviance} = -2 \times \text{Log}(L) \quad (2.31)$$

di mana:

$\text{Log}(L) = \text{loglikelihood}$ komponen ragam

Hipotesis yang melandasi pengujian kebaikan model adalah:

H_0 : Model $\sigma_{\text{sama}}^2 >$ model $\sigma_{\text{berubah}}^2$

H_1 : Model $\sigma_{\text{sama}}^2 \leq$ model $\sigma_{\text{berubah}}^2$

Statistik uji dari perubahan *deviance* mengikuti sebaran khi-kuadrat.

$$\begin{array}{rcl} \text{deviance}_1 & \sim & \chi_{db_1}^2 \\ \text{deviance}_2 & \sim & \chi_{db_2}^2 \\ \hline \text{deviance}_1 - \text{deviance}_2 & \sim & \chi_{db_1 - db_2}^2 \end{array}$$

$$d = |\text{deviance}_1 - \text{deviance}_2| \sim \chi_{|db_1 - db_2|}^2$$

di mana :

- d = statistik uji perubahan *deviance*
- deviance_1 = *deviance* model ragam sama
- deviance_2 = *deviance* model ragam berubah
- db_1 = derajat bebas model ragam sama
- db_2 = derajat bebas model ragam berubah

Jika H_0 ditolak maka model ragam berubah lebih baik daripada model ragam sama.

(O'Neill, 2010)

BAB III METODE PENELITIAN

1.1 Sumber Data

Data sekunder bersumber pada Fretty (2013) : “Pengaruh Pemberian Tanaman Sorgum (*Sorghum bicolor* L) terhadap Pertumbuhan Rusa Timor (*Rusa timorensis* de Blainville 1822) di Hutan Penelitian Dramaga, Bogor” disajikan pada Lampiran 1, menggunakan Rancangan Bujur Sangkar Latin

























Objek penelitian adalah empat ekor rusa dengan kelompok bobot badan yang berbeda menjadi faktor baris. Penelitian dibagi dalam empat periode yaitu bulan April, Mei, Juni dan Juli menjadi faktor lajur dan menggunakan empat petak kandang individual yang dilengkapi dengan tempat makan. Pakan berupa rumput gajah (*Pennisetum purpureum*) dan kaliandra (*Caliandra callothyrsus*) sebagai pakan dasar dan sorgum (*Sorghum bicolor*) sebagai pakan tambahan.

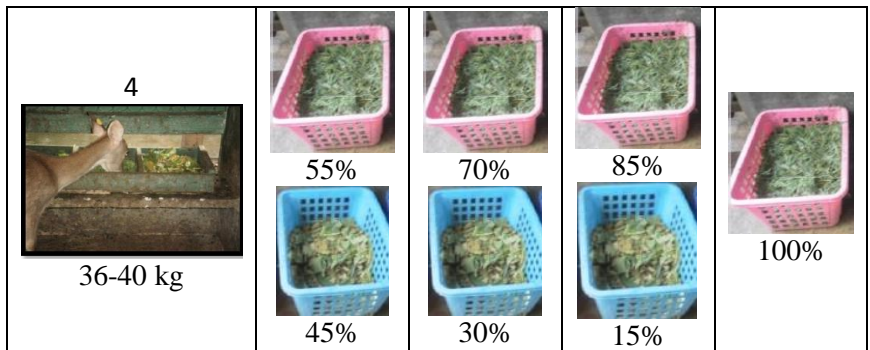
Respon penelitian adalah konsumsi pakan (Data 1), penambahan bobot badan (Data 2) dan panjang badan (Data 3). Konsumsi pakan diperoleh dengan cara menghitung selisih antara jumlah pakan yang diberikan dengan jumlah pakan yang tersisa setiap hari, pada setiap pengumpulan data tiap periode yang ditimbang dengan timbangan analitik berkapasitas 5000 g. Bobot badan rusa diukur menggunakan timbangan digital berkapasitas 50 kg, sedangkan pengukuran panjang badan menggunakan meteran jahit yang dibantu dengan kayu kecil sepanjang 1 m sebagai patokan ketelitian pengukuran. Panjang badan diukur dari tepi depan sendi bahu sampai dengan tepi belakang bungkul tulang rusuk.

Rancangan Bujur Sangkar Latin pada penelitian disajikan pada Tabel 3.1. Jenis perlakuan yang diberikan sebagai berikut:

- A = Pakan dasar berupa rumput gajah + kaliandra
- B = Pakan dasar (85 %) + sorgum (15 %)
- C = Pakan dasar (70 %) + sorgum (30 %)
- D = Pakan dasar (55 %) + sorgum (45 %)

Tabel 3.1. Denah Percobaan Rusa Timor Diberi Tanaman Sorgum pada Empat Periode

Rusa	Periode			
	April	Mei	Juni	Juli
<p>1</p>  <p>21-25 kg</p>	 <p>100%</p>	 <p>85%</p>  <p>15%</p>	 <p>70%</p>  <p>30%</p>	 <p>55%</p>  <p>45%</p>
<p>2</p>  <p>26-30 kg</p>	 <p>85%</p>  <p>15%</p>	 <p>100%</p>	 <p>55%</p>  <p>45%</p>	 <p>70%</p>  <p>30%</p>
<p>3</p>  <p>31-35 kg</p>	 <p>70%</p>  <p>30%</p>	 <p>55%</p>  <p>45%</p>	 <p>100%</p>	 <p>85%</p>  <p>15%</p>

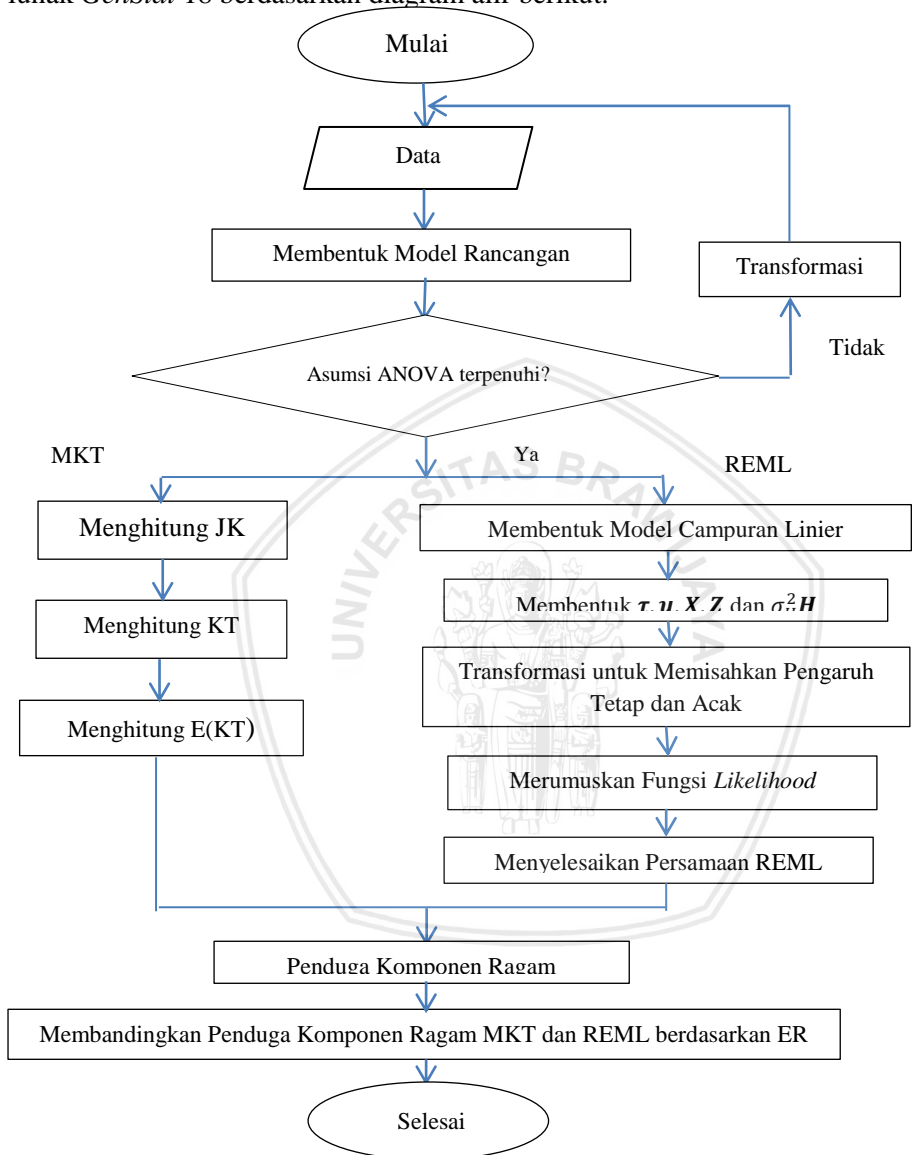


1.2 Metode Penelitian

Prosedur analisis yang diterapkan pada data adalah:

1. Membentuk model Rancangan Bujur Sangkar Latin.
2. Menguji asumsi analisis ragam.
3. Penanganan pelanggaran asumsi dengan transformasi.
4. Menduga komponen ragam dengan MKT.
 - 4.1 Menghitung Jumlah Kuadrat (JK) setiap sumber keragaman sesuai persamaan (2.9).
 - 4.2 Menghitung Kuadrat Tengah (KT) menggunakan rumus pada Tabel 2.3.
 - 4.3 Menduga komponen ragam dengan menghitung E(KT) menggunakan rumus pada Tabel 2.4.
5. Menduga komponen ragam dengan REML.
 - 5.1 Membentuk model linier campuran sesuai persamaan (2.10).
 - 5.2 Membentuk matriks pengaruh tetap (H).
 - 5.3 Membentuk matriks ragam-peragam pengaruh acak persamaan (2.12).
 - 5.4 Melakukan transformasi untuk memisahkan pengaruh tetap dari pengaruh acak menggunakan persamaan (2.13).
 - 5.5 Merumuskan fungsi *likelihood* pengaruh acak dan tetap.
 - 5.6 Menurunkan fungsi *likelihood* terhadap setiap parameter
 - 5.7 Memaksimumkan dua fungsi *likelihood* untuk mendapatkan penduga komponen ragam.
6. Membandingkan penduga komponen ragam yang dihasilkan MKT dan REML berdasarkan Efisiensi Relatif pada persamaan (2.26).

Tahapan pendugaan komponen ragam dilakukan dengan perangkat lunak *GenStat* 18 berdasarkan diagram alir berikut.



Gambar 3.1. Diagram Alir Pendugaan Komponen Ragam

BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Pengujian Asumsi Analisis Ragam

4.1.1 Kenormalan Galat

Kenormalan galat diuji dengan uji *Shapiro Wilk* karena uji *Shapiro Wilk* tepat digunakan untuk sampel yang kurang dari 50. Hipotesis uji kenormalan galat yaitu:

H_0 : Galat percobaan menyebar normal

H_1 : Galat percobaan tidak menyebar normal

Hasil pengujian kenormalan galat disajikan pada Tabel 4.1 dan Lampiran 2.

Tabel 4.1. Hasil pengujian Kenormalan Galat

Data	Statistik uji W	Nilai-p
1	0.9689	0.820
2	0.8854	0.047
3	0.9762	0.926

Karena nilai-p Data 1 dan 3 lebih dari 0.05 maka H_0 diterima dan dapat disimpulkan bahwa galat percobaan Data 1 menyebar normal. Nilai-p Data 2 kurang dari 0.05 maka H_0 ditolak maka disimpulkan bahwa galat percobaan Data 2 tidak menyebar normal sehingga perlu dilakukan transformasi.

4.1.2 Kehomogenan Ragam Galat

Kehomogenan ragam galat diuji dengan χ^2 *Bartlett* berdasarkan hipotesis:

$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_r^2 = \sigma^2$

H_1 : Paling tidak terdapat satu dari ragam tidak sama

Hasil pengujian kehomogenan ragam galat disajikan pada Tabel 4.2 dan Lampiran 2.

Tabel 4.2. Hasil Pengujian Kehomogenan Ragam Galat

Data	Faktor	Statistik uji χ^2 <i>Bartlett</i>	Nilai-p
1	Perlakuan	2.53	0.470
	Baris	0.33	0.955
	Lajur	2.10	0.551
2	Perlakuan	12.32	0.011
	Baris	14.14	0.004
	Lajur	14.71	0.003

3	Perlakuan	0.21	0.975
	Baris	1.34	0.720
	Lajur	5.20	0.157

Nilai-p Data 1 dan 3 lebih dari 0.05 maka H_0 diterima, jadi asumsi kehomogenan ragam galat dapat dipenuhi. Penolakan H_0 terjadi pada Data 2, terjadi pelanggaran asumsi kehomogenan ragam galat sehingga perlu transformasi.

4.1.3 Kebebasan Galat

Pemenuhan asumsi kebebasan galat diketahui melalui plot antara penduga galat percobaan ($\hat{\epsilon}_{ij(k)}$) dengan penduga respon ($\hat{Y}_{ij(k)}$) yang disajikan pada Tabel 4.3.

Tabel 4.3. Hasil Pengujian Kebebasan Galat

Data	Diagram
1	<p>The scatter plot for Data 1 shows the relationship between the predicted response (Yijk_duga) on the x-axis and the predicted error (eijk_duga) on the y-axis. Both axes range from approximately -4800 to -4200. The data points are scattered randomly around the diagonal line, indicating that the assumption of constant variance is satisfied.</p>
2	<p>The scatter plot for Data 2 shows the relationship between the predicted response (Yijk_duga) on the x-axis and the predicted error (eijk_duga) on the y-axis. The x-axis ranges from -425 to -375, and the y-axis ranges from 400 to 540. The data points show a clear downward trend, indicating a violation of the constant variance assumption.</p>
3	<p>The scatter plot for Data 3 shows the relationship between the predicted response (Yijk_duga) on the x-axis and the predicted error (eijk_duga) on the y-axis. The x-axis ranges from -1.25 to -0.95, and the y-axis ranges from 1.20 to 1.50. The data points are scattered randomly around the diagonal line, indicating that the assumption of constant variance is satisfied.</p>

Karena diagram pencar semua data tidak membentuk suatu pola tertentu maka asumsi kebebasan galat terpenuhi

4.1.4 Keaditifan Model

Keaditifan model diuji dengan uji *Tukey* berdasarkan hipotesis:

H_0 : Model bersifat aditif

H_1 : Model bersifat non aditif

Hasil pengujian keaditifan model disajikan pada Tabel 4.4.

Tabel 4.4. Hasil Pengujian Keaditifan Model

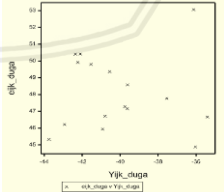
Data	Statistik uji-F	$F_{.05(1,6)}$
1	0.114	5.99
2	0.020	
3	0.012	

Karena semua statistik uji kurang dari 5.99 maka H_0 diterima dan dapat disimpulkan bahwa model semua data bersifat aditif.

4.1.5 Pengujian Asumsi Analisis Ragam Data Setelah Transformasi

Transformasi Data 2 menggunakan transformasi akar karena rata-rata perlakuan sebanding dengan simpangan baku perlakuan. Setelah transformasi, dilakukan pengujian pemenuhan asumsi. Berikut disajikan hasil pengujian asumsi analisis ragam Data 2 setelah transformasi pada Tabel 4.5.

Tabel 4.5. Hasil Pengujian Asumsi pada Data Setelah Transformasi

Asumsi	Nilai-p	Statistik uji	Keputusan	
Keaditifan Model	0.075	4.64 (F)	Terima H_0	
Kenormalan Galat	0.537	0.9529 (Z)	Terima H_0	
Kehomogenan Galat	perlakuan	0.344	3.02 (χ^2)	Terima H_0
	baris	0.625	3.99 (χ^2)	Terima H_0
	lajur	0.750	1.01 (χ^2)	Terima H_0
Kebebasan Galat				

Dapat dilihat pada Tabel 4.5 bahwa asumsi kenormalan dan kehomogenan galat terpenuhi dan diagram pencar semua data tidak membentuk suatu pola tertentu maka asumsi kebebasan galat terpenuhi. Dapat disimpulkan bahwa data setelah transformasi sudah memenuhi asumsi analisis ragam.

4.2 Pendugaan Komponen Ragam

4.2.1 Pendugaan Komponen Ragam Data 1

a. Metode Kuadrat Terkecil

Hasil analisis ragam pada Lampiran 7 menghasilkan penduga komponen ragam:

$$\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2 = KT_{galat} = 17068$$

$$\hat{\sigma}_B^2 = \frac{KT_{Baris} - \hat{\sigma}_{\varepsilon}^2}{r} = \frac{266476 - 17068}{4} = 62352$$

$$\hat{\sigma}_L^2 = \frac{KT_{Lajur} - \hat{\sigma}_{\varepsilon}^2}{r} = \frac{11580 - 17068}{4} = -1372$$

$$\begin{aligned} \text{var}(\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2) &= \text{var}(KTG) \\ &= \frac{2[E(KT_{galat})]^2}{(r-1)(r-2)+2} \\ &= \frac{(2)(17068^2)}{(4-1)(4-2)+2} \\ &= 72829156 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{var}(\hat{\sigma}_B^2) &= \text{var}\left(\frac{KT_{baris} - KT_{galat}}{r}\right) \\ &= \frac{2}{r^2} \left[\frac{(\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2 + r \hat{\sigma}_B^2)^2}{(r-1)+2} + \frac{(\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2)^2}{(r-1)(r-2)+2} \right] \\ &= \frac{2}{4^2} \left[\frac{(17068 + 4(62352))^2}{(4-1)+2} + \frac{17068^2}{(4-1)(4-2)+2} \right] \\ &= 1779788287 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{var}(\hat{\sigma}_L^2) &= \text{var}\left(\frac{KT_{lajur} - KT_{galat}}{r}\right) \\ &= \frac{2}{r^2} \left[\frac{(\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2 + r \hat{\sigma}_L^2)^2}{(r-1)+2} + \frac{(\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2)^2}{(r-1)(r-2)+2} \right] \\ &= \frac{2}{4^2} \left[\frac{(17068 + 4(-1372))^2}{(4-1)+2} + \frac{17068^2}{(4-1)(4-2)+2} \right] \\ &= 7904232.25 \end{aligned}$$

b. Metode Kemungkinan Maksimum Terbatas

Penduga komponen ragam dengan metode REML pada Lampiran 8 adalah:

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = 15239$$

$$\hat{\sigma}_B^2 = 62809$$

$$\hat{\sigma}_L^2 = 0$$

Metode REML menghasilkan keragaman konsumsi pakan dan Sorgum sebesar 15239 gram sedangkan keragaman konsumsi pakan dan Sorgum berdasarkan pengacakan kelompok bobot badan rusa sebesar 62809 gram. Penduga komponen ragam lajur bernilai nol maka konsumsi pakan dan Sorgum berdasarkan periode sama.

Kelayakan model REML didasarkan pada perubahan *deviance*. Tabel 4.6 menyajikan perubahan *deviance* beberapa model.

Tabel 4.6. Perubahan Nilai *Deviance* Data 1

	<i>Deviance</i>	db	$ dev_1 - dev_2 $	$ db_1 - db_2 $	Nilai-p
Ragam sama	141.71	9			
Ragam berubah	150.28	1	8.57	8	0.3798

Pengujian kebaikan model ragam sama dan berbeda dilandasi pada hipotesis:

H_0 : Model ragam sama lebih baik dari model ragam berubah

H_1 : Model ragam berubah lebih baik dari model ragam sama

Tabel 4.6 menunjukkan bahwa nilai-p ragam berubah lebih dari 0.05 maka H_0 diterima. Dapat disimpulkan bahwa model ragam sama lebih baik dibandingkan model ragam berubah.

4.2.2 Pendugaan Komponen Ragam Data 2

a. Metode Kuadrat Terkecil

Hasil analisis ragam pada Lampiran 10 menghasilkan penduga komponen ragam:

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = KT_{galat} = 12.534$$

$$\hat{\sigma}_B^2 = \frac{KT_{Baris} - \hat{\sigma}_\varepsilon^2}{r} = \frac{0.25 - 12.534}{4} = -3.071$$

$$\hat{\sigma}_L^2 = \frac{KT_{Lajur} - \hat{\sigma}_\varepsilon^2}{r} = \frac{1.73 - 12.534}{4} = -2.701$$

$$var(\hat{\sigma}_\varepsilon^2) = var(KTG)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2 [E(KT_{galat})]^2}{(r-1)(r-2)+2} \\
 &= \frac{(2)(12.534^2)}{(4-1)(4-2)+2} \\
 &= 39.275
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{var}(\hat{\sigma}_B^2) &= \text{var}\left(\frac{KT_{baris} - KT_{galat}}{r}\right) \\
 &= \frac{2}{r^2} \left[\frac{(\hat{\sigma}_\varepsilon^2 + r \hat{\sigma}_B^2)^2}{(r-1)+2} + \frac{(\hat{\sigma}_\varepsilon^2)^2}{(r-1)(r-2)+2} \right] \\
 &= \frac{2}{4^2} \left[\frac{(12.534 + 4(-3.071))^2}{(4-1)+2} + \frac{12.534^2}{(4-1)(4-2)+2} \right] \\
 &= 2.456
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{var}(\hat{\sigma}_L^2) &= \text{var}\left(\frac{KT_{lajur} - KT_{galat}}{r}\right) \\
 &= \frac{2}{r^2} \left[\frac{(\hat{\sigma}_\varepsilon^2 + r \hat{\sigma}_L^2)^2}{(r-1)+2} + \frac{(\hat{\sigma}_\varepsilon^2)^2}{(r-1)(r-2)+2} \right] \\
 &= \frac{2}{r^2} \left[\frac{(12.534 + 4(-2.701))^2}{(4-1)+2} + \frac{(12.534)^2}{(4-1)(4-2)+2} \right] \\
 &= 2.529
 \end{aligned}$$

Penduga komponen ragam harus dikembalikan ke skala asli menggunakan pangkat dua maka penduga komponen ragam Data 2 adalah:

$$\begin{aligned}
 \hat{\sigma}_\varepsilon^2 &= KT_{galat} = 12.534^2 = 157.1 \\
 \hat{\sigma}_B^2 &= \frac{KT_{Baris} - \hat{\sigma}_\varepsilon^2}{r} = \frac{0.0625 - 157.1}{4} = -39.259 \\
 \hat{\sigma}_L^2 &= \frac{KT_{Lajur} - \hat{\sigma}_\varepsilon^2}{r} = \frac{2.993 - 157.1}{4} = -38.526
 \end{aligned}$$

b. Metode Kemungkinan Maksimum Terbatas

Penduga komponen ragam dengan metode REML pada Lampiran 11 adalah:

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = 6.762$$

$$\hat{\sigma}_B^2 = 0.000$$

$$\hat{\sigma}_L^2 = 0.000$$

Penduga komponen ragam harus ditransformasi balik menggunakan pangkat dua.

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = KT_{galat} = 6.762^2 = 45.72$$

Metode REML menghasilkan keragaman pertambahan bobot badan rusa Timor sebesar 45.72 gram. Keragaman pertambahan bobot badan rusa Timor berdasarkan baris dan lajur sebesar 0 maka tidak terdapat perbedaan pertambahan bobot badan berdasarkan kelompok bobot badan rusa Timor dan periode.

Pengujian kebaikan model pada REML antara model dengan ragam sama dan berbeda didasarkan pada perubahan *deviance*. Tabel 4.7 menyajikan perubahan *deviance* beberapa model.

Tabel 4.7. Perubahan Nilai *Deviance* Data 2

	<i>Deviance</i>	db	$ dev_1 - dev_2 $	$ db_1 - db_2 $	Nilai-p
Ragam sama	112.15	9			
Ragam berubah	146.07	1	33.92	8	0.00004

Nilai-p ragam berubah Tabel 4.6 kurang dari 0.05 maka H_0 ditolak, berarti model ragam berubah lebih baik dari model ragam sama.

4.2.3 Pendugaan Komponen Ragam Data 3

a. Metode Kuadrat Terkecil

Hasil analisis ragam pada Lampiran 14 menghasilkan penduga komponen ragam:

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = KT_{galat} = 0.02457$$

$$\hat{\sigma}_B^2 = \frac{KT_{Baris} - \hat{\sigma}_\varepsilon^2}{r} = \frac{0.01414 - 0.02457}{4} = -0.0026$$

$$\hat{\sigma}_L^2 = \frac{KT_{Lajur} - \hat{\sigma}_\varepsilon^2}{r} = \frac{0.00241 - 0.02457}{4} = -0.0055$$

$$var(\hat{\sigma}_\varepsilon^2) = var(KTG)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2 [E(KT_{galat})]^2}{(r-1)(r-2)+2} \\
 &= \frac{(2)(0.02457^2)}{(4-1)(4-2)+2}
 \end{aligned}$$

$$= 0.00015$$

$$var(\hat{\sigma}_B^2) = var\left(\frac{KT_{baris} - KT_{galat}}{r}\right)$$

$$= \frac{2}{r^2} \left[\frac{(\hat{\sigma}_\epsilon^2 + r \hat{\sigma}_B^2)^2}{(r-1)+2} + \frac{(\hat{\sigma}_\epsilon^2)^2}{(r-1)(r-2)+2} \right]$$

$$= \frac{2}{4^2} \left[\frac{(0.0246 + 4(-0.0026))^2}{(4-1)+2} + \frac{0.0246^2}{(4-1)(4-2)+2} \right]$$

$$= 0.000014$$

$$var(\hat{\sigma}_L^2) = var\left(\frac{KT_{lajur} - KT_{galat}}{r}\right)$$

$$= \frac{2}{r^2} \left[\frac{(\hat{\sigma}_\epsilon^2 + r \hat{\sigma}_L^2)^2}{(r-1)+2} + \frac{(\hat{\sigma}_\epsilon^2)^2}{(r-1)(r-2)+2} \right]$$

$$= \frac{2}{4^2} \left[\frac{(0.0246 + 4(-0.0055))^2}{(4-1)+2} + \frac{0.0246^2}{(4-1)(4-2)+2} \right]$$

$$= 0.000009$$

b. Metode Kemungkinan Maksimum Terbatas

Penduga komponen ragam dengan metode REML pada Lampiran 15 adalah:

$$\hat{\sigma}_\epsilon^2 = 0.0487$$

$$\hat{\sigma}_B^2 = 0.000$$

$$\hat{\sigma}_L^2 = 0.000$$

Metode REML menghasilkan keragaman panjang badan rusa Timor sebesar 0.0487 cm. Keragaman pertambahan panjang badan rusa Timor berdasarkan pengacakan menurut baris dan lajur sebesar 0, maka tidak terdapat perbedaan pertambahan panjang badan rusa Timor berdasarkan kelompok bobot badan dan periode.

Pada metode REML, dilakukan pengujian kebaikan model ragam sama dan berbeda dengan menghitung perubahan *deviance*. Tabel 4.8 menyajikan perubahan *deviance* beberapa model.

Tabel 4.8. Perubahan Nilai *Deviance* Data 3

	<i>Deviance</i>	db	$ dev_1 - dev_2 $	$ db_1 - db_2 $	Nilai-p
Ragam sama	-31.77	9			
Ragam berubah	-28.21	1	3.56	8	0.8945

Tabel 4.8 menunjukkan bahwa nilai-p lebih dari 0.05 maka terjadi penerimaan H_0 . Dapat disimpulkan bahwa model ragam sama lebih baik dari model ragam berubah.

4.3 Perbandingan MKT dan REML

Hasil analisis dengan dua metode pendugaan parameter yaitu MKT dan REML pada tiga data respon penelitian Pengaruh Pemberian Tanaman Sorgum terhadap Pertumbuhan Rusa Timor disajikan pada Tabel 4.9.

Tabel 4.9. Perbandingan Penduga Komponen Ragam

Data	Komponen Ragam	Metode Pendugaan Parameter	
		MKT	REML
1	$\hat{\sigma}_\varepsilon^2$	17068	15239
	$\hat{\sigma}_B^2$	62352	62809
	$\hat{\sigma}_L^2$	-1372	0
	$\text{var}(\hat{\sigma}_\varepsilon^2)$	72829156	51603371
	$\text{var}(\hat{\sigma}_B^2)$	1779788287	2961962666
	$\text{var}(\hat{\sigma}_L^2)$	7904232.25	0
2	$\hat{\sigma}_\varepsilon^2$	12.534	6.762
	$\hat{\sigma}_B^2$	-3.071	0
	$\hat{\sigma}_L^2$	-2.701	0
	$\text{var}(\hat{\sigma}_\varepsilon^2)$	39.275	7.622
	$\text{var}(\hat{\sigma}_B^2)$	2.456	0
	$\text{var}(\hat{\sigma}_L^2)$	2.529	0
3	$\hat{\sigma}_\varepsilon^2$	0.02457	0.0487
	$\hat{\sigma}_B^2$	-0.0026	0
	$\hat{\sigma}_L^2$	-0.0055	0
	$\text{var}(\hat{\sigma}_\varepsilon^2)$	0.00015	0.000044941

	$\text{var}(\hat{\sigma}_B^2)$	0.000014	0
	$\text{var}(\hat{\sigma}_T^2)$	0.000009	0

Tabel 4.9 menunjukkan bahwa pada Data 1 melalui MKT diperoleh keragaman faktor lajur yang bernilai negatif sedangkan Data 2 dan Data 3 diperoleh keragaman faktor baris dan lajur yang bernilai negatif karena KT baris atau KT lajur kurang dari KT galat. Penduga ragam negatif merupakan salah satu kelemahan MKT yang diperbaiki oleh REML. Metode REML menghasilkan keragaman baris atau lajur bernilai nol.

Kebaikan $\hat{\sigma}_\epsilon^2$ dan $\hat{\sigma}_B^2$ antara MKT dan REML dilandasi pada Efisiensi Relatif (ER).

Data 1:

$$ER = \frac{\text{var}(\hat{\sigma}_{B,M}^2)}{\text{var}(\hat{\sigma}_{B,R}^2)} = \frac{1779788287}{2961962666} = 0.600$$

$$ER = \frac{\text{var}(\hat{\sigma}_{\epsilon,M}^2)}{\text{var}(\hat{\sigma}_{\epsilon,R}^2)} = \frac{72829156}{51603371} = 1.411$$

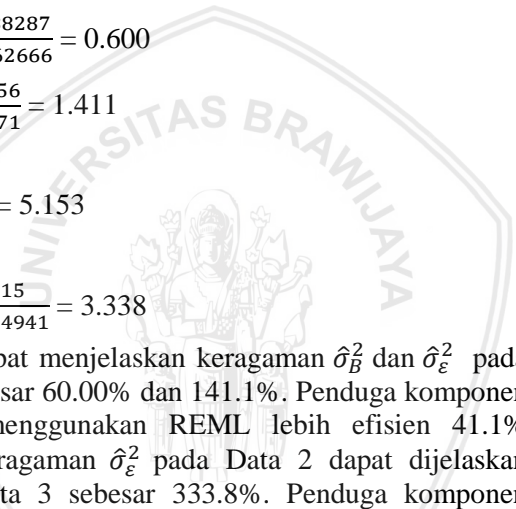
Data 2:

$$ER = \frac{\text{var}(\hat{\sigma}_{\epsilon,M}^2)}{\text{var}(\hat{\sigma}_{\epsilon,R}^2)} = \frac{39.275}{7.622} = 5.153$$

Data 3:

$$ER = \frac{\text{var}(\hat{\sigma}_{\epsilon,M}^2)}{\text{var}(\hat{\sigma}_{\epsilon,R}^2)} = \frac{0.00015}{0.000044941} = 3.338$$

Metode REML dapat menjelaskan keragaman $\hat{\sigma}_B^2$ dan $\hat{\sigma}_\epsilon^2$ pada Data 1 berturut-turut sebesar 60.00% dan 141.1%. Penduga komponen ragam galat Data 1 menggunakan REML lebih efisien 41.1% dibandingkan MKT. Keragaman $\hat{\sigma}_\epsilon^2$ pada Data 2 dapat dijelaskan sebesar 515.3% dan Data 3 sebesar 333.8%. Penduga komponen ragam galat Data 2 menggunakan REML lebih efisien 415.3% dan Data 3 lebih efisien 233.8% dibandingkan MKT. Jadi dapat disimpulkan bahwa REML lebih baik dibandingkan MKT karena $ER(\hat{\sigma}_{\epsilon,M}^2, \hat{\sigma}_{\epsilon,R}^2) > 100\%$.



BAB V PENUTUP

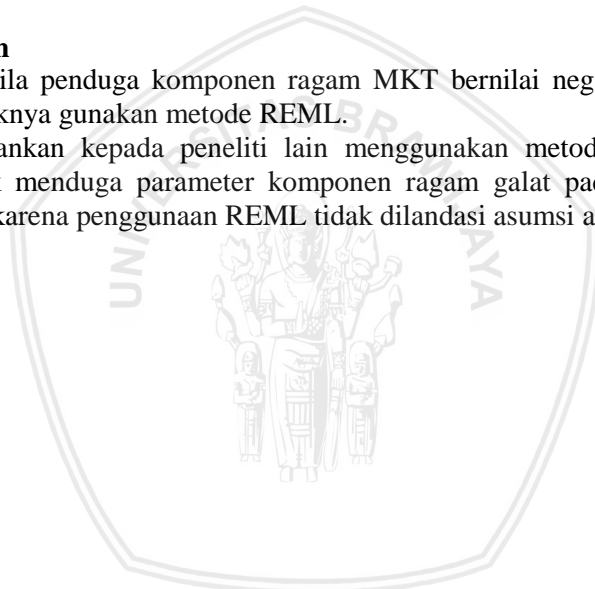
5.1 Kesimpulan

Berdasarkan perbandingan penduga komponen ragam menggunakan MKT dan REML disimpulkan bahwa:

1. Penduga komponen ragam MKT bernilai negatif karena KT baris atau KT lajur $<$ KT galat. Penduga komponen ragam negatif merupakan salah satu kelemahan MKT yang diperbaiki oleh REML yang menghasilkan penduga komponen ragam nol.
2. Metode REML lebih baik dibandingkan MKT karena Efisiensi Relatif penduga komponen ragam tiga data $>$ 100%.

5.2 Saran

1. Apabila penduga komponen ragam MKT bernilai negatif maka sebaiknya gunakan metode REML.
2. Disarankan kepada peneliti lain menggunakan metode REML untuk menduga parameter komponen ragam galat pada semua data karena penggunaan REML tidak dilandasi asumsi apa pun.





DAFTAR PUSTAKA

- Box G.E.P.; W.G. Hunter; & J.S. Hunter. 1978. *Statistics for Experimenters: An Introduction to Design, Data Analysis, and Model Building*. John Wiley & Sons, Inc. Canada.
- Fretty, D. 2013. *Pengaruh Pemberian Tanaman Sorgum (Sorghum bicolor L) terhadap Pertumbuhan Rusa Timor (Rusa timorensis de Blainville 1822) di Hutan Penelitian Dramaga, Bogor*. Skripsi.
- Freud's, J. 2014. *Mathematical Statistics With Applications*. Pearson Education, Inc. London.
- Harjosuwono, B.A., Arnata, I.W. & Puspawati, G.A.K.D. 2011. *Rancangan Percobaan Teori, Aplikasi SPSS dan Excel*. Lintas Kata Publishing. Malang.
- Mattjik, A. dan Sumertajaya, I. 2006. *Perancangan Percobaan dengan Aplikasi SAS dan Minitab*. IPB Press. Bogor.
- Montgomery, D. 2013. *Design and Analysis of Experiments*. John Wiley and Sons, Inc. New York.
- O'Neill, M. 2010. *ANOVA and REML: A Guide to Linear Mixed Models in Experimental Design Context*. www.stats.net.au/dropbox/ANOVA%20&%20REML%20manual.pdf.
- O'Neill, M. dan Mitakda, M. 2015. *Matematika REML*. Tidak dipublikasikan.
- Searle, S., Casella, G. dan Mc. Culloch, C. 2006. *Variance Components*. John Wiley and Sons, Inc. New York.
- Steel, R.G.D. & Torrie, J.H. 1991. *Prinsip dan Prosedur Statistika Suatu Pendekatan Biometrik* (Terjemahan: Bambang Sumantri). Gramedia. Jakarta.

repository.ub.ac.id

Sugiarto, E. 1994. *Rancangan Percobaan Teori dan Aplikasi*. Andi Offset. Yogyakarta.

Yitnosumarto, S. 1993. *Percobaan:Perancangan, Analisis dan Interpretasinya*. PT. Gramedia Pustaka Utama. Jakarta.

