EQUALITY ALGEBRA PADA HEYTING ALGEBRA, HERTZ ALGEBRA, BOOLEAN ALGEBRA, DAN EQ-AlGEBRA

SKRIPSI

oleh :

AULIA IMAM WICAKSANA

125090407111002

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS BRAWIJAYA

MALANG

2018

EQUALITY ALGEBRA PADA HEYTING ALGEBRA, HERTZ ALGEBRA, BOOLEAN ALGEBRA, DAN EQ-AlGEBRA

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Matematika dalam bidang matematika

oleh :
AULIA IMAM WICAKSANA
125090407111002

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2018

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

EQUALITY ALGEBRA PADA HEYTING ALGEBRA, HERTZ ALGEBRA, BOOLEAN ALGEBRA, DAN EQ-AlGEBRA

oleh :

AULIA IMAM WICAKSANA
125090407111002

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji
pada tanggal 20 desember 2018
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Matematika dalam bidang matematika

Pembimbing

Drs. Bambang Sugandi, M.Si
NIP. 195905151992031002

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si, M.Si, Ph.D
NIP. 197509082000031003

LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Aulia Imam Wicaksana
NIM : 125090407111002
Jurusan : Matematika
Menulis Skripsi Berjudul : Equality Algebra pada Heyting Algebra, Hertz Algebra, Boolean Algebra, dan EQ-Algebra

Dengan ini menyatakan bahwa :

1. **Isi dari Skripsi yang saya buat adalah benear-benar karya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain, selain nama-nama yang termaksud di isi dan tertulis di daftar pustaka dalam Skripsi ini.**
2. **Apabila dikemudian hari ternyata Skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya akan bersedia menanggung segala resiko yang akan saya terima.**

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 26 Desember 2018
Yang menyatakan,

(Aulia Imam Wicaksana)
NIM. 125090407111002

EQUALITY ALGEBRA PADA HEYTING ALGEBRA, HERTZ ALGEBRA, BOOLEAN ALGEBRA, DAN EQ-AlGEBRA

ABSTRAK

Bentuk struktur aljabar yang akan dibahas di sini adalah *Equality Algebra*, *Heyting Algebra*, *Hertz Algebra*, *Boolean Algebra*, dan *EQ-Algebra*. Dari bentuk struktur aljabar yang telah ditunjukkan, *Equality Algebra* yang dibahas di sini dikembangkan dari *EQ-Algebra*. Berdasarkan pernyataan tersebut maka bagaimana hubungan antara *Equality Algebra* dan *EQ-Algebra*. *EQ-Algebra* merupakan bentuk dari *Heyting Algebra*, bagaimana hubungan antara *Equality Algebra* dengan *Heyting Algebra* sendiri. *Hertz Algebra* dan *Boolean Algebra* merupakan bentuk lain dari *Heyting Algebra*, bagaimana hubungan antara *Equality Algebra* dengan *Hertz Algebra* dan *Boolean Algebra*. Tujuan dari skripsi ini adalah membahas syarat cukup di mana *Equality Algebra* menjadi *Heyting Algebra*, *Hertz Algebra*, *Boolean Algebra*, dan *EQ-Algebra*. Hasil pembahasan menunjukkan jika E adalah prelinear *equality algebra* dengan $x \wedge (x \rightarrow y) = x \wedge y$ untuk setiap $x, y \in E$, maka E adalah *heyting algebra*. Jika E adalah *equality algebra* dengan $x \wedge (x \rightarrow y) = x \wedge y$ dan $x \rightarrow (y \wedge z) = (x \rightarrow y) \wedge (x \rightarrow z)$ untuk setiap $x, y \in E$, maka E adalah *hertz algebra*. Jika E adalah involutif prelinear *equality algebra* dengan bentuk $x' \rightarrow x = x$ untuk setiap $x \in E$, maka E adalah *boolean algebra*. Setiap *EQ-algebra* yang bagus $(E, \wedge, \otimes, \sim, I)$ adalah *equality algebra*. Maka *Equality Algebra* mempunyai syarat cukup dengan *Heyting Algebra*, *Hertz Algebra*, *Boolean Algebra*, dan *EQ-Algebra*.

EQUALITY ALGEBRA ON HEYTING ALGEBRA, HERTZ ALGEBRA, BOOLEAN ALGEBRA, AND EQ-AlGEBRA

ABSTRACT

Type of algebraic structure that will be talk about in here is *Equality Algebra*, *Heyting Algebra*, *Hertz Algebra*, *Boolean Algebra*, dan *EQ-Algebra*. Among the type of algebraic structure that was shown, *Equality Algebra* is something that was developed from *EQ-Algebra*. From that statement, what is the connection between *Equality Algebra* and *EQ-Algebra*. *EQ-Algebra* itself is a form of *Heyting Algebra*, so what is the connection between *Equality Algebra* and *Heyting Algebra* itself. *Hertz Algebra* and *Boolean Algebra* both are a form of *Heyting Algebra*, so what is the connection between *Equality Algebra* with *Hertz Algebra* dan *Boolean Algebra*. The purpose for this paper is to find out the condition where *Equality Algebra* become *Heyting Algebra*, *Hertz Algebra*, *Boolean Algebra*, dan *EQ-Algebra*. The results shown that if E prelinear *equality algebra* with $x \wedge (x \to y) = x \wedge y$ for every $x, y \in E$, then E is *heyting algebra*. If E *equality algebra* with $x \wedge (x \to y) = x \wedge y$ and $x \to (y \wedge z) = (x \to y) \wedge (x \to z)$ for every $x, y \in E$, then E is *hertz algebra*. If E involutif prelinear *equality algebra* with $x' \to x = x$ for every $x \in E$, then E is *boolean algebra*. Every good *EQ-algebra* is *equality algebra*. Then *Equality Algebra* have a condition in which to become *Heyting Algebra*, *Hertz Algebra*, *Boolean Algebra*, dan *EQ-Algebra*.

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadirat Allah SWT, atas limpahan Rahmat dan Karunia-Nya, sehingga penulis dapat merampungkan skripsi dengan judul: *Equality Algebra* pada *Heyting Algebra*, *Hertz Algebra*, *Boolean Algebra*, dan *EQ-Algebra*. Ini untuk memenuhi salah satu syarat menyelesaikan studi serta dalam rangka memperoleh gelar Sarjana Pendidikan Strata Satu pada Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Muhammadiyah Brawijaya.

Penghargaan dan terima kasih yang setulus-tulusnya kepada orang tua yang telah mencurahkan segenap cinta dan kasih sayang serta perhatian moril maupun materil. Semoga Allah SWT selalu melimpahkan Rahmat, Kesehatan, Karunia dan keberkahan di dunia dan di akhirat atas budi baik yang telah diberikan kepada penulis. Penghargaan dan terima kasih penulis berikan kepada Bapak Drs. Bambang Sugandi, M.Si selaku Pembimbing yang telah membantu penulisan skripsi ini.

Akhir kata penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan. Karena itu, penulis memohon saran dan kritik yang sifatnya membangun demi kesempurnaannya dan semoga bermanfaat bagi kita semua.

DAFTAR ISI

Halaman

HALAMAN JUDUL i
HALAMAN PENGESAHAN ii
HALAMAN PERNYATAAN iii
ABSTRAK / ABSTRACT iv
KATA PENGANTAR v
DAFTAR ISI vi
DAFTAR TABEL vii
DAFTAR SIMBOL viii

BAB I Pendahuluan
1.1 Latar Belakang 1
1.2 Rumusan Masalah 2
1.3 Tujuan 2

BAB II TINJAUAN PUSTAKA
2.1 Operasi Biner 9
2.2 Struktur Aljabar 11
2.3 Grup 11
2.4 Ring 18
2.5 Field 22
2.6 Latis 32
2.7 Heyting Algebra, Hertz Algebra, Boolean Algebra, EQ Algebra 43

BAB III PEMBAHASAN
3.1 Equality Algebra 62
3.2 Hubungan Equality Algebra dengan Heyting Algebra, Hertz Algebra, Boolean Algebra, dan EQ-Algebra 76

BAB IV KESIMPULAN
4.1 Kesimpulan 83
4.2 Saran 83

DAFTAR PUSTAKA 84

DAFTAR TABEL

	Halaman
Tabel 2.1 Opersai penjumlahan $(+)$ pada $\mathbb{Z}_6$	12
Tabel 2.2 Operasi pergandaan $(\cdot)$ pada $\mathbb{Z}_6$	19
Tabel 2.3 Opersai penjumlahan $(+)$ pada $\mathbb{Z}_2$	22
Tabel 2.4 Opersai penjumlahan $(+)$ pada $\mathbb{Z}_5$	23
Tabel 2.5 Operasi pergandaan $(\cdot)$ pada $\mathbb{Z}_5$	24
Tabel 2.6 Operasi join $(\vee)$ pada E	35
Tabel 2.7 Operasi meet $(\wedge)$ pada E	36
Tabel 2.8 Operasi uner $\star$ pada E	49
Tabel 2.9 Operasi implikasi $(\rightarrow)$ pada E	54
Tabel 2.10 Operasi product $(\otimes)$ pada E	56
Tabel 2.11 Operasi ekuivalen $(\sim)$ pada E	57
Tabel 3.1 Opersai bi-implikasi $(\leftrightarrow)$ pada E	69
Tabel 3.2 Operasi join $(\vee)$ pada F	72
Tabel 3.3 Operasi meet $(\wedge)$ pada F	73
Tabel 3.4 Operasi ekuivalen $(\sim)$ pada F	73
Tabel 3.5 Opersai implikasi $(\rightarrow)$ pada F	73

DAFTAR SIMBOL

$\star$	: Operasi Uner
$*$	: Operasi Biner
$+$	: Operasi penjumlahan biasa
$-$	: Operasi pengurangan biasa
$\cdot$	: Operasi pergandaan biasa
e	: Elemen Identitas
$\in$	: Elemen dari
$\leq$	: Kurang dari sama dengan
$\cap$	: Irisan
$\wedge$	: Operasi *meet*
$\vee$	: Operasi *join*
$\rightarrow$	: Operasi *implikasi*
$\sim$	: Operasi *ekuivalen*
$\otimes$	: Operasi *product*

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 LATAR BELAKANG

Struktur aljabar adalah kombinasi dari himpunan dan operasi biner. Operasi biner adalah pemetaan dari hasil kali kartesian suatu himpunan tidak kosong ke himpunan tidak kosong itu sendiri. Bentuk struktur aljabar yang akan dibahas di sini adalah *Equality Algebra*, *Heyting Algebra*, *Hertz Algebra*, *Boolean Algebra*, dan *EQ-Algebra*.

Latis adalah bentuk struktur aljabar yang dilengkapi dengan dua operasi biner *meet* dan *join*. *Heyting Algebra* adalah suatu bentuk dari struktur aljabar latis dimana terdapat operasi biner *meet*, *join*, dan *implikasi*. Sedangkan *Hertz Algebra* adalah bentuk dari latis yang mempunyai operasi biner *meet* dan *implikasi*, *Boolean Algebra* adalah bentuk dari latis yang mempunyai operasi biner *meet* dan *join*, dan *EQ-Algebra* adalah bentuk dari latis yang mempunyai operasi biner *meet*, isoton, dan relasi ekuivalensi.

Dari bentuk struktur aljabar yang telah ditunjukkan, *Equality Algebra* yang dibahas di sini memilki hubungan dengan *EQ-Algebra*. *EQ-Algebra* dikembangkan oleh Vilem Novak (2011). Sandor Jenei (2012) membuat struktur aljabar baru berdasarkan *EQ-Algebra* bernama *Equality Algebra*. Berdasarkan pernyataan tersebut maka bagaimana hubungan antara *Equality Algebra* dan *EQ-Algebra*.

Karena *EQ-Algebra* merupakan bentuk dari *Heyting Algebra*, bagaimana hubungan antara *Equality Algebra* dengan *Heyting Algebra*, *Hertz Algebra* dan *Boolean Algebra*. Pada skripsi ini, akan dikaji dari artikel F. Zebardast (2016) bagaimana hubungan antara *Equality Algebra* dan *Heyting Algebra*, *Hertz Algebra*, *EQ-Algebra*, dan *Boolean Algebra*.

1.2 RUMUSAN MASALAH

Berdasarkan latar belakang di atas, diperoleh rumusan masalah yang akan diselesaikan dalam skripsi ini adalah bagaimana syarat cukup dari *Equality Algebra* sehingga menjadi *Heyting Algebra*, *Hertz Algebra*, *Boolean Algebra*, dan *EQ-Algebra*?

1.3 TUJUAN

Berdasarkan latar belakang, tujuan yang ingin dicapai dalam skripsi ini adalah membahas syarat cukup di mana *Equality Algebra* menjadi *Heyting Algebra, Hertz Algebra, Boolean Algebra*, dan *EQ-Algebra*

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan dibahas definisi dan contoh dari teori-teori yang akan digunakan pada pembahasan.

2.1 Operasi Biner

Operasi biner adalah perhitungan dari dua elemen suatu himpunan yang hasilnya adalah elemen dari himpuan tersebut. Operasi biner digambarkan dengan beberapa simbol untuk menunjukkan perhitungan yang ada. Pada subbab ini akan diberikan definisi operasi biner dan juga definisi-definisi yang berkaitan dengan operasi biner disertai contoh. Penulisan ini dikutip dari Battacharya dkk. (1995), dan *Lattice Theory*, Garrett Birkhoff (1940)

Definisi 2.1.1 (Power Set)

Jika E adalah himpunan tidak kosong, maka power set $P(E)$ adalah himpunan setiap subset E. Jumlah elemen pada E dan jumlah himpunan setiap subset E dinotasikan dengan

$$|E| = n$$
$$|P(E)| = 2^n$$

Contoh 2.1.2

Diberikan $E = \{1,2\}$, maka $|E| = 2$. Power set dari E adalah

$$|P(E)| = 2^2 = 4$$
$$P(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$$

Contoh 2.1.3

Diberikan himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$, maka $|\mathbb{N}| = n$ elemen. Power set dari $\mathbb{N}$ adalah

$$|P(\mathbb{N})| = 2^n = \{A\}$$
$$P(\mathbb{N}) = \{A | \emptyset \leq A \leq \mathbb{N}\}$$

Definisi 2.1.4 (Hasil Kali Kartesius)

Jika E dan F masing-masing adalah himpunan tidak kosong, maka hasil kali kartesius dari E dan F adalah himpunan pasangan terurut (x, y) di mana $x \in E$ dan $y \in F$ dinotasikan dengan

$$E \times F = \{(x, y) | x \in E, y \in F\}$$

Contoh 2.1.5

Diberikan $E = \{1,2\}$ dan $F = \{a, b, c\}$. Hasil kali kartesius dari E dan F adalah

$$E \times F = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$$

Contoh 2.1.6

Diberikan himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$ dan $E = \{a, b, \ldots\}$. Hasil kali kartesius dari E dan F adalah

$$E \times F = \{(1, a), (1, b), (1, \ldots), (2, a), (2, b), (2, \ldots), (\ldots, \ldots)\}$$

Definisi 2.1.7 (Relasi)

Jika E dan F masing-masing adalah himpunan tidak kosong, maka R adalah relasi jika subset dari $E \times F$. Jika pasangan $(x, y) \in R$, maka x berelasi R dengan y

Contoh 2.1.8

Diberikan $E = \{2,3,5\}$ dan $F = \{2,4,6\}$, kemudian terdapat pasangan $(x, y) \in R$ dengan $x < y$ untuk setiap $x \in E$ dan $y \in F$. Sehingga relasinya adalah

$$R = \{(2,4), (2,6), (3,4), (3,6), (5,6)\} \subseteq E \times F$$

Contoh 2.1.9

Diberikan himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$ dan $E = \{2,4,6, \ldots\}$, kemudian terdapat pasangan $(x, y) \in R$ dengan $x < y$ untuk setiap $x \in E$ dan $y \in F$. Sehingga relasinya adalah

$$R = \{(1,2), (1,4), (1, \ldots), (2,4), (2,6), (2, \ldots), (\ldots, \ldots)\} \subseteq E \times F$$

Definisi 2.1.10 (Partially Ordered Set)

Jika E adalah himpunan tidak kosong, maka E adalah *partially ordered set* (poset) jika terdapat relasi $\leq$ untuk setiap $x, y, z \in E$ yang memenuhi

1. Refleksif, yaitu
$$x \leq x, \text{ untuk setiap } x \in E$$
2. Antisimetris, yaitu
$$\text{jika } x \leq y \text{ dan } y \leq x \text{ maka } x = y, \text{ untuk setiap } x, y \in E$$
3. Transitif, yaitu
$$\text{jika } x \leq y \text{ dan } y \leq z \text{ maka } x \leq z, \text{ untuk setiap } x, y, z \in E$$

Contoh 2.1.11

Diberikan $E = \{2,3,5\}$ dengan relasi $\leq$ dan terdapat pasangan $(x, y) \in R$ dimana $R \subseteq E$ untuk setiap $x, y \in E$. Berdasarkan Definisi 2.1.10, akan dibuktikan E adalah poset

Bukti

Akan dibuktikan E adalah poset. Relasi $\leq$ pada E adalah
$$R = \{(2,2), (2,3), (2,5), (3,3), (3,5), (5,5)\} \subseteq E \times E$$

i). Refleksif
Ambil sembarang $x \in E$, maka untuk setiap $(x, x) \in R$ terlihat $x \leq x$. E refleksif terhadap relasi $\leq$

ii). Antisimetris
Ambil sembarang $x, y \in E$ dimana $x \leq y$ dan $y \leq x$, maka untuk setiap $(x, y) \in R$ terlihat $x = y$. E antisimetris terhadap relasi $\leq$

iii). Transitif
Ambil sembarang $x, y, z \in E$ dimana $x \leq y$ dan $y \leq z$, maka untuk setiap $(x, z) \in R$ terlihat $x \leq z$. E transitif terhadap relasi $\leq$

Dengan demikian dari pembuktian tersebut dapat disimpulkan bahwa E adalah poset

Contoh 2.1.12

Diberikan $\mathbb{Z} = \{\dots, -1,0,1, \dots\}$ dengan relasi $\leq$ dan terdapat $(x, y) \in R$ di mana $R \subseteq \mathbb{Z}$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}$. Berdasarkan Definisi 2.1.10, akan ditunjukkan $\mathbb{Z}$ adalah poset

Bukti

Akan dibuktikan $\mathbb{Z}$ adalah poset. Relasi $\leq$ pada $\mathbb{Z}$ adalah

$$R = \{(\dots, \dots), (-1, -1), (-1,0), (0,1), (1,1), (\dots, \dots)\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

i). Refleksif

Ambil sembarang $x \in \mathbb{Z}$, maka untuk setiap $(x, x) \in R$ terlihat $x \leq x$. $\mathbb{Z}$ refleksif terhadap relasi $\leq$

ii). Antisimetris

Ambil sembarang $x, y \in \mathbb{Z}$ dimana $x \leq y$ dan $y \leq x$, maka untuk setiap $(x, y) \in R$ terlihat $x = y$. $\mathbb{Z}$ antisimetris terhadap relasi $\leq$

iii). Transitif

Ambil sembarang $x, y, z \in \mathbb{Z}$ dimana $x \leq y$ dan $y \leq z$, maka untuk setiap $(x, z) \in R$ terlihat $x \leq z$. $\mathbb{Z}$ transitif terhadap relasi $\leq$

Dengan demikian dari pembuktian tersebut dapat disimpulkan bahwa $\mathbb{Z}$ adalah poset

Contoh 2.1.13

Diberikan $E = \{1,2,3,6\}$ dengan relasi $\leq$ dan terdapat $(x, y) \in R$ dimana $R \subseteq E$ untuk setiap $x, y \in E$. Berdasarkan Definisi 2.1.10, akan ditunjukkan E adalah poset

Bukti

Akan dibuktikan E adalah poset. Relasi $\leq$ pada E adalah

$$R = \{(1,1), (1,2), (1, \dots), (2,2), (2, \dots), (\dots, \dots), (6, \dots)\} \subseteq E \times E$$

i). Refleksif

Ambil sembarang $x \in E$, maka untuk setiap $(x, x) \in R$ terlihat $x \leq x$. E refleksif terhadap relasi $\leq$

ii). Antisimetris

Ambil sembarang $x, y \in E$ dimana $x \leq y$ dan $y \leq x$, maka untuk setiap $(x, y) \in R$ terlihat $x = y$. E antisimetris terhadap relasi $\leq$

iii). Transitif

Ambil sembarang $x, y, z \in E$ dimana $x \leq y$ dan $y \leq z$, maka untuk setiap $(x, z) \in R$ terlihat $x \leq z$. E transitif terhadap relasi $\leq$

Dengan demikian dari pembuktian tersebut dapat disimpulkan bahwa E adalah poset

Contoh 2.1.14

Diberikan himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$ dan terdapat $P(\mathbb{N}) = \{A | \emptyset \leq A \leq \mathbb{N}\}$ dengan relasi $\leq$ adalah bentuk subset $\subseteq$. Berdasarkan Definisi 2.1.10, akan ditunjukkan $P(\mathbb{N})$ adalah poset

i). Refleksif

Ambil sembarang $P(\mathbb{N}) = \{A | \emptyset \leq A \leq \mathbb{N}\}$, maka untuk setiap $(A, A) \in P(\mathbb{N})$ terlihat $A \leq A$. $P(\mathbb{N})$ refleksif terhadap relasi $\leq$

ii). Antisimetris

Ambil sembarang $P(\mathbb{N}) = \{A, B | \emptyset \leq A, B \leq \mathbb{N}\}$, dengan $A \leq B$ dan $B \leq A$ maka untuk setiap $(A, B) \in E$ terlihat $A = B$. $P(\mathbb{N})$ antisimetris terhadap relasi $\leq$

iii). Transitif

Ambil sembarang $P(\mathbb{N}) = \{A, B, C | \emptyset \leq A, B, C \leq \mathbb{N}\}$, dengan $A \leq B$ dan $B \leq C$ maka untuk setiap $(A, C) \in E$ terlihat $A \leq C$. $P(\mathbb{N})$ transitif terhadap relasi $\leq$

Dengan demikian dari pembuktian tersebut dapat disimpulkan bahwa $P(\mathbb{N})$ adalah poset

Definisi 2.1.15 (Pemetaan)

Jika E dan F masing-masing adalah himpunan tidak kosong, maka relasi f dari E ke F disebut pemetaan dari E ke F jika untuk setiap $x \in E$ terdapat tepat satu $y \in F$ sehingga $(x, y) \in f$. Sedangkan pemetaan f dari E ke F dapat dituliskan dengan

$$f: E \to F$$
$$x \mapsto f(x) = y$$

Konsep pemetaan juga dapat dinyatakan dengan

$$x_1 = x_2 \to f(x_1) = f(x_2)$$

Contoh 2.1.16

Diberikan himpunan $E = \{2,3,5\}$ dan $F = \{4,9,25\}$, relasi f dari E ke F dengan $f(x) = x^2$ untuk setiap $x \in E$ maka

$$f(2) = 2^2 = 4$$
$$f(3) = 3^2 = 9$$
$$f(5) = 5^2 = 25$$

Jelas bahwa untuk setiap $x \in E$ terdapat tepat satu $f(x) \in F$. Maka f adalah suatu pemetaan

Contoh 2.1.17

Diberikan himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$ dan relasi f dari $\mathbb{N}$ ke $\mathbb{N}$ dengan $f(x) = x^2$ untuk setiap $x \in \mathbb{N}$. Ambil sembarang $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$ dengan $x_1 = x_2$ maka ${x_1}^2 = {x_2}^2$ sehingga $f(x_1) = f(x_2)$. Jelas bahwa untuk setiap $x \in \mathbb{N}$ terdapat tepat satu $f(x) \in \mathbb{N}$. Maka f adalah suatu pemetaan

Definisi 2.1.18 (Isoton)

Misalkan E dan F masing-masing adalah himpunan tidak kosong. Pemetaan f dari E ke F untuk setiap $x \in E$ dan terdapat tepat satu $y \in F$ disebut isoton jika

$$x_1 \leq x_2 \rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

Contoh 2.1.19

Diberikan himpunan $E = \{2,3,5\}$ dan $F = \{4,9,25\}$, relasi f dari E ke F dengan $f(x) = x^2$ untuk setiap $x \in E$. Ambil sembarang $x_1, x_2 \in E$ dengan $x_1 \leq x_2$ dan memakai Contoh 2.1.16 maka ${x_1}^2 \leq {x_2}^2$ sehingga $f(x_1) \leq f(x_2)$. Maka pemetaan f adalah isoton

Contoh 2.1.20

Diberikan himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$ dan pemetaan f dari $\mathbb{N}$ ke $\mathbb{N}$ dengan $f(x) = x^2$ untuk setiap $x \in \mathbb{N}$. Ambil sembarang $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$ dengan $x_1 \leq x_2$ maka ${x_1}^2 \leq {x_2}^2$ sehingga $f(x_1) \leq f(x_2)$. Maka pemetaan f adalah isoton

Definisi 2.1.21 (Operasi Uner)

Jika H adalah himpunan tidak kosong, maka operasi uner $\star$ pada himpunan H adalah pemetaan dari H ke H dinotasikan dengan

$$\star: H \to H$$
$$x \mapsto x^{\star} \in H$$

Contoh 2.1.22

Diberikan himpunan $E = \{1,2,3,6\}$ dan pemetaan f dari E ke E dengan $f(x) = \frac{6}{x}$ untuk setiap $x \in E$

$$f(1) = \frac{6}{1} = 6$$
$$f(2) = \frac{6}{2} = 3$$
$$f(3) = \frac{6}{3} = 2$$
$$f(6) = \frac{6}{6} = 1$$

Maka pemetaan f adalah operasi uner

Contoh 2.1.23

Diberikan himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$ dan pemetaan f dari $\mathbb{N}$ ke $\mathbb{N}$ dengan $f(x) = x^2$ untuk setiap $x \in \mathbb{N}$. Ambil sembarang $x \in \mathbb{N}$ sehingga $f(x) \in \mathbb{N}$ dinotasikan dengan

$$\star: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$x \mapsto x^{\star} = f(x) = x^2 \in \mathbb{N}$$

Maka pemetaan f adalah operasi uner

Definisi 2.1.24 (Operasi Biner)

Jika H adalah himpunan tidak kosong, maka operasi biner $*$ pada himpunan H adalah pemetaan dari $H \times H$ ke H dinotasikan dengan

$$*: H \times H \to H$$
$$(x, y) \mapsto *(x, y) = x * y \in H$$

Suatu operasi biner $*: H \times H \rightarrow H$ pada himpunan H disebut

1. Tertutup, jika
$$x * y \in H, \text{ untuk setiap } x, y \in H$$
2. Asosiatif, jika
$$x * (y * z) = (x * y) * z, \text{ untuk setiap } x, y, z \in H$$
3. Komutatif, jika
$$x * y = y * x, \text{ untuk setiap } x, y \in H$$
4. Terdapat elemen identitas $e \in H$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in H$
$$x * e = x \in H$$
5. Untuk setiap $x \in H$ terdapat elemen invers $x^{-1} \in H$ sedemikian sehingga
$$x * x^{-1} = e \in H$$
6. Misalkan $\circ$ adalah operasi biner lain pada H, maka $*$ disebut
   i). Distributif kiri atas $\circ$ jika
$$x * (y \circ z) = (x * y) \circ (x * z), \text{ untuk setiap } x, y, z \in H$$
   ii). Distributif kanan atas $\circ$ jika
$$(x \circ y) * z = (x * z) \circ (y * z), \text{ untuk setiap } x, y, z \in H$$
7. Misalkan $\circ$ adalah operasi biner lain pada H, maka $*$ disebut absorpsi jika
$$x \circ (x * y) = x, \text{ untuk setiap } x, y \in H$$
$$x * (x \circ y) = x, \text{ untuk setiap } x, y \in H$$

Contoh 2.1.25

Diberikan himpunan $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$ dan himpunan pasangan terurut dari hasil kali kartesius $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6$. Pemetaan $+$ dari $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6$ ke $\mathbb{Z}_6$ dengan $*(x, y) = x + y$ untuk setiap $(x, y) \in \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6$. Ambil sembarang $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6$ dengan $x_1 = x_2$ dan $y_1 = y_2$ maka $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$ sehingga $*(x_1, y_1) = *(x_2, y_2)$. Jelas bahwa untuk setiap $(x, y) \in \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6$ terdapat tepat satu $*(x, y) \in \mathbb{Z}_6$. Maka $+$ adalah suatu operasi biner

Contoh 2.1.26

Diberikan himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$ dan himpunan pasangan terurut dari hasil kali kartesius $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Pemetaan $+$ dari $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ke $\mathbb{N}$ dengan $*(x, y) = x + y$ untuk setiap $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Ambil sembarang $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dengan $x_1 = x_2$ dan $y_1 = y_2$ maka $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$ sehingga $*(x_1, y_1) = *(x_2, y_2)$. Jelas bahwa untuk setiap $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ terdapat tepat satu $*(x, y) \in \mathbb{N}$. Maka $+$ adalah suatu operasi biner

2.2 Struktur Aljabar

Skripsi ini tergolong pada bidang ilmu aljabar, sesuai dengan itu diberikan definisi struktur aljabar untuk membahas isi dari pembahasan di bab selanjutnya. Definisi struktur aljabar merujuk pada Battacharya dkk. (1995)

Definisi 2.2.1 (Struktur Aljabar)

Struktur aljabar merupakan himpunan tidak kosong yang dilengkapi satu operasi biner atau lebih

Contoh 2.2.2

Berdasarkan Contoh 2.1.21, $\mathbb{Z}_6$ adalah himpunan dengan operasi biner $+$ maka berdasarkan Definisi 2.2.1, $\mathbb{Z}_6$ adalah struktur aljabar

Contoh 2.2.3

Berdasarkan Contoh 2.1.16, $\mathbb{N}$ adalah himpunan bilangan asli dengan operasi biner $+$ maka berdasarkan Definisi 2.2.1, $\mathbb{N}$ adalah struktur aljabar

2.3 Grup

Grup merupakan salah satu contoh struktur aljabar yang dilengkapi dengan satu operasi biner dan memenuhi kondisi-kondisi tertentu. Pada subbab ini akan diberikan definisi grup dan juga definisi-definisi yang berkaitan dengan grup disertai contoh. Penulisan ini dikutip dari Andari (2014) dan Battacharya dkk. (1995).

Definisi 2.3.1 (Semi Grup)

Suatu himpunan tak kosong G dan dilengkapi satu operasi biner $*$ disebut semigrup jika memenuhi kondisi berikut

1. Tertutup

$$x * y \in G \text{ untuk setiap } x, y \in G$$

2. Asosiatif

$$x * (y * z) = (x * y) * z \text{ untuk setiap } x, y, z \in G$$

Contoh 2.3.2

Diberikan himpunan $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$ dengan operasi biner $+$. Berdasarkan Definisi 2.3.1, akan ditunjukkan $\mathbb{Z}_6$ adalah semigrup

Bukti

Akan dibuktikan $\mathbb{Z}_6$ adalah semi grup, seperti berikut

Tabel 2.1 Operasi penjumlahan $(+)$ pada $\mathbb{Z}_6$

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$

i). Tertutup, terlihat dari Tabel 2.1 bahwa untuk setiap $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_6$ berlaku $\bar{x} + \bar{y} \in \mathbb{Z}_6$

ii). Asosiatif, diberikan $\bar{x} = x + 6k_1$, $\bar{y} = y + 6k_2$, dan $\bar{z} = z + 6k_3$ dimana $x, y, z \in \mathbb{Z}_6$

$$\begin{aligned}(\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z} &= \big((x + 6k_1) + (y + 6k_2)\big) + (z + 6k_3) \\ &= x + 6k_1 + y + 6k_2 + z + 6k_3\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= x + 6k_1 + (y + 6k_2 + z + 6k_3) \\
&= (x + 6k_1) + \left((y + 6k_2) + (z + 6k_3)\right) \\
&= \bar{x} + (\bar{y} + \bar{z})
\end{aligned}
$$

Dengan demikian dari pembuktian tersebut dapat disimpulkan bahwa $\mathbb{Z}_6$ adalah semigrup.

Contoh 2.3.3

Diberikan $\mathbb{Z}$ adalah himpunan bilangan bulat. Didefinisikan dengan operasi biner $x * y = x + y + xy$. Berdasarkan Definisi 2.3.1, akan ditunjukkan $\mathbb{Z}$ adalah semigrup

Bukti

Akan dibuktikan $\mathbb{Z}$ adalah semi grup, seperti berikut

- Tertutup

  Ambil sembarang $x, y \in \mathbb{Z}$. Karena $x, y \in \mathbb{Z}$ dan $xy \in \mathbb{Z}$ maka

  $$x * y = x + y + xy \in \mathbb{Z}$$

  $\mathbb{Z}$ tertutup terhadap operasi biner $*$

- Asosiatif

  Ambil sembarang $x, y, z \in \mathbb{Z}$, maka

  $$
  \begin{aligned}
  x * (y * z) &= x * (y + z + yz) \\
  &= x + (y + z + yz) + x(y + z + yz) \\
  &= x + y + z + yz + xy + xz + xyz \\
  &= x + y + xy + z + xz + yz + xyz \\
  &= (x + y + xy) + z + (x + y + xy)z \\
  &= (x + y + xy) * z \\
  &= (x * y) * z
  \end{aligned}
  $$

  Terlihat $x * (y * z) = (x * y) * z$, maka $\mathbb{Z}$ asosiatif terhadap operasi biner $*$

Dengan demikian dari pembuktian tersebut dapat disimpulkan bahwa $\mathbb{Z}$ adalah semigrup.

Contoh 3.2.4

Diberikan himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$ dengan operasi biner $+$. Berdasarkan Definisi 2.3.1, akan ditunjukkan $\mathbb{N}$ adalah semigrup

Bukti

Akan dibuktikan $\mathbb{N}$ adalah semi grup, seperti berikut

- Tertutup, ambil sembarang $x, y \in \mathbb{N}$. Maka
$$x * y = x + y \in \mathbb{N}$$
$\mathbb{Z}$ tertutup terhadap operasi biner $+$
- Asosiatif, ambil sembarang $x, y, z \in \mathbb{N}$, maka
$$\begin{aligned} x * (y * z) &= x + (y + z) \\ &= x + y + z \\ &= (x + y) + z \\ &= (x * y) * z \end{aligned}$$
Terlihat $x * (y * z) = (x * y) * z$, maka $\mathbb{N}$ asosiatif terhadap operasi biner $+$

Dengan demikian dari pembuktian tersebut dapat disimpulkan bahwa $\mathbb{N}$ adalah semigrup

Definisi 2.3.5 (Monoid)

Jika $(M,*)$ adalah semigrup dan M memiliki elemen identitas maka $(M,*)$ adalah monoid

Contoh 2.3.6

Berdasarkan Contoh 2.3.2, $\mathbb{Z}_6$ adalah semigrup dengan operasi biner $+$. Berdasarkan Definisi 2.3.5, akan ditunjukkan $\mathbb{Z}_6$ disebut monoid

Bukti

Akan dibuktikan $\mathbb{Z}_6$ adalah monoid. Terlihat dari Tabel 2.1 bahwa untuk setiap $\bar{x} + e = \bar{x} \in \mathbb{Z}_6$ jika $e = \bar{0}$. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa $\mathbb{Z}_6$ adalah monoid karena terdapat elemen identitas bernilai $\bar{0}$

Contoh 2.3.7

Berdasarkan Contoh 2.3.3, $\mathbb{Z}$ adalah semigrup dengan operasi biner $x * y = x + y + xy$. Berdasarkan Definisi 2.3.5, akan ditunjukkan $\mathbb{Z}$ disebut monoid

Bukti

Akan dibuktikan $\mathbb{Z}$ adalah monoid, seperti berikut

$$x * y = x + y + xy$$
$$x * e = x + e + xe$$
$$x = x + e + xe$$
$$x - x = e + xe$$
$$0 = e(1 + x)$$
$$\frac{0}{(1 + x)} = e$$
$$0 = e$$

Ambil $e = 0$ dan sembarang $x \in \mathbb{Z}$ maka akan terlihat $x * e = x + e + xe = x$. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa $\mathbb{Z}$ adalah monoid karena terdapat elemen identitas bernilai 0

Contoh 2.3.8

Diberikan himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$ dengan operasi biner pergandaan. Berdasarkan Definisi 2.3.5, akan ditunjukkan $\mathbb{N}$ adalah monoid

Bukti

Akan dibuktikan $\mathbb{N}$ adalah monoid, seperti berikut

$$x * e = x$$
$$x \cdot e = x$$
$$e = \frac{x}{x}$$
$$e = 1$$

Ambil $e = 1$ dan sembarang $x \in \mathbb{N}$ maka akan terlihat $x * e = x \cdot e = x$. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa $\mathbb{N}$ adalah monoid karena terdapat elemen identitas bernilai 1

Definisi 2.3.9 (Grup)

Suatu himpunan tak kosong G dan dilengkapi satu operasi biner $*$ disebut grup jika memenuhi kondisi berikut

1. Tertutup

$$x * y \in G \text{ untuk setiap } x, y \in G$$

2. Asosiatif

$$x * (y * z) = (x * y) * z \text{ untuk setiap } x, y, z \in G$$

3. Elemen Identitas

   Terdapat $e \in G$ sedemikian sehingga berlaku

$$x * e = e * x = x \text{ untuk setiap } x \in G$$

4. Elemen Invers

   Untuk setiap $x \in G$ terdapat $x^{-1} \in G$ sedemikian sehingga berlaku

$$x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$$

Contoh 2.3.10

Berdasarkan Contoh 2.3.6, $\mathbb{Z}_6$ adalah monoid dengan operasi biner $+$. Berdasarkan Definisi 2.3.9, akan ditunjukkan $\mathbb{Z}_6$ disebut grup

Bukti

Terlihat dari Tabel 2.1 bahwa untuk setiap $\bar{x} + \bar{y} \in \mathbb{Z}_6$ sama dengan $\bar{0}$ jika

$$\text{Invers } \bar{0} \text{ adalah } \bar{0}, \text{ sebab } \bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$$
$$\text{Invers } \bar{1} \text{ adalah } \bar{\bar{\bar{5}}}, \text{ sebab } \bar{1} + \bar{\bar{\bar{5}}} = \bar{0}$$
$$\text{Invers } \bar{2} \text{ adalah } \bar{4}, \text{ sebab } \bar{2} + \bar{4} = \bar{0}$$
$$\text{Invers } \bar{3} \text{ adalah } \bar{3}, \text{ sebab } \bar{3} + \bar{3} = \bar{0}$$
$$\text{Invers } \bar{4} \text{ adalah } \bar{2}, \text{ sebab } \bar{4} + \bar{2} = \bar{0}$$
$$\text{Invers } \bar{\bar{\bar{5}}} \text{ adalah } \bar{1}, \text{ sebab } \bar{\bar{\bar{5}}} + \bar{1} = \bar{0}$$

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa $\mathbb{Z}_6$ adalah grup karena terdapat elemen invers

Contoh 2.3.11

Diberikan $m \in \mathbb{Z}$ dengan $m \neq 0$ dan $G = \{m^a | a \in \mathbb{Z}\}$. Berdasarkan Definisi 2.3.9, akan ditunjukkan $(G,\cdot)$ adalah grup

Bukti

Akan dibuktikan $(G,\cdot)$ adalah grup, seperti berikut

i). Tertutup
$m^a m^b = m^{a+b}$. Karena $a + b \in \mathbb{Z}$ maka $m^{a+b} \in G$. Jadi terbukti $m^a m^b \in G$

ii). Asosiatif
$(m^a m^b)m^c = m^{a+b}m^c = m^{(a+b)+c} = m^{a+(b+c)} = m^a m^{(b+c)} = m^a(m^b m^c)$. Jadi tebukti bahwa $(m^a m^b)m^c = m^a(m^b m^c)$

iii). Elemen Identitas
Terdapat $e = 1 = m^0 \in G$ untuk setiap $m^a \in G$, sehingga berlaku $m^a m^0 = m^0 m^a = m^{0+a} = m^a$. Jadi terbukti terdapat $e = 1 = m^0 \in G$ untuk setiap $m^a \in G$

iv). Elemen Invers
Untuk setiap $m^a \in G$ terdapat $m^{-a} = \frac{1}{m^a} \in G$, sehingga berlaku $m^a m^{-a} = m^{-a}m^a = m^{a+(-a)} = m^0 = e$. Jadi terbukti untuk setiap $m^a \in G$ terdapat $m^{-a} = \frac{1}{m^a} \in G$

Dengan demikian dari pembuktian tersebut dapat disimpulkan bahwa $(G,\cdot)$ adalah grup

Definisi 2.3.12 (Grup Komutatif)

Jika G adalah grup dengan operasi biner $*$, maka $(G,*)$ disebut grup komutatif jika memenuhi kondisi berikut

$$x * y = y * x \text{ untuk setiap } x, y \in E$$

Contoh 2.3.13

Berdasarkan Contoh 2.3.9, telah terbukti bahwa $(\mathbb{Z}_6, +)$ adalah grup. Berdasarkan Definisi 2.3.12, akan ditunjukkan $(\mathbb{Z}_6, +)$ adalah grup komutatif

Bukti

Terlihat dari Tabel 2.1 bahwa untuk setiap $\bar{x} + \bar{y} \in \mathbb{Z}_6$ sama dengan $\bar{y} + \bar{x} \in \mathbb{Z}_6$. Sehingga $(\mathbb{Z}_6, +)$ adalah grup komutatif

Contoh 2.3.12

Berdasarkan Contoh 2.3.11, telah terbukti bahwa $(G,\cdot)$ adalah grup. Berdasarkan Definisi 2.3.12, akan ditunjukkan $(G,\cdot)$ adalah grup komutatif

Bukti

Untuk setiap $m^a, m^b \in G$ berlaku $m^a m^b = m^{a+b} = m^{b+a} = m^b m^a$. Jadi terbukti untuk setiap $m^a, m^b \in G$ berlaku $m^a m^b = m^b m^a$. Sehingga $(G,\cdot)$ adalah grup komutatif

2.4 Ring

Ring merupakan salah satu contoh struktur aljabar yang dilengkapi dengan dua operasi biner dan memenuhi kondisi-kondisi tertentu. Pada subbab ini akan diberikan definisi ring dan juga definisi-definisi yang berkaitan dengan ring disertai contoh. Penulisan ini dikutip dari Andari (2014) dan Battacharya dkk. (1995).

Definisi 2.4.1 (Ring)

Misalkan R adalah himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan operasi biner penjumlahan $(+)$ dan pergandaan $(\cdot)$. $(R,+,\cdot)$ disebut ring jika memenuhi kondisi berikut

1. $(R,+)$ adalah grup komutatif
2. $(R,\cdot)$ adalah semi grup
3. $(R,+,\cdot)$ memenuhi kondisi distributif kiri dan kanan

Contoh 2.4.2

Diberikan himpunan $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$ dengan dua operasi biner $+$ dan $\cdot$. Berdasarkan Definisi 2.4.1, akan ditunjukkan $(\mathbb{Z}_6,+,\cdot)$ adalah ring

Bukti

Akan dibuktikan $(\mathbb{Z}_6,+,\cdot)$ adalah ring, sebagai berikut

Tabel 2.2 Operasi pergandaan $(\cdot)$ pada $\mathbb{Z}_6$

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

1. Akan dibuktikan $(\mathbb{Z}_6, +)$ adalah grup komutatif
   i). Tertutup, terlihat dari Tabel 2.1 bahwa untuk setiap $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_6$ berlaku $\bar{x} + \bar{y} \in \mathbb{Z}_6$
   ii). Asosiatif, diberikan $\bar{x} = x + 6k_1$, $\bar{y} = y + 6k_2$, dan $\bar{z} = z + 6k_3$ dimana $x, y, z \in \mathbb{Z}$
$$
\begin{aligned}
(\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z} &= \big((x + 6k_1) + (y + 6k_2)\big) + (z + 6k_3) \\
&= x + 6k_1 + y + 6k_2 + z + 6k_3 \\
&= x + 6k_1 + (y + 6k_2 + z + 6k_3) \\
&= (x + 6k_1) + \big((y + 6k_2) + (z + 6k_3)\big) \\
&= \bar{x} + (\bar{y} + \bar{z})
\end{aligned}
$$
   iii). Dari Tabel 2.1, terlihat bahwa $\bar{0} \in \mathbb{Z}_6$ adalah elemen identitas untuk setiap $\bar{x} \in \mathbb{Z}_6$ sedemikian sehingga berlaku
$$\bar{0} + \bar{x} = \bar{x} + \bar{0} = \bar{x}$$
   iv). Dari Tabel 2.1, terlihat melalui elemen identitas yang ada bahwa setiap $\bar{x} \in \mathbb{Z}_6$ terdapat $-\bar{x} \in \mathbb{Z}_6$,

Invers $\bar{0}$ adalah $\bar{0}$, sebab $\bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$

Invers $\bar{1}$ adalah $\bar{\bar{5}}$, sebab $\bar{1} + \bar{\bar{5}} = \bar{0}$

Invers $\bar{2}$ adalah $\bar{4}$, sebab $\bar{2} + \bar{4} = \bar{0}$

Invers $\bar{3}$ adalah $\bar{3}$, sebab $\bar{3} + \bar{3} = \bar{0}$

Invers $\bar{4}$ adalah $\bar{2}$, sebab $\bar{4} + \bar{2} = \bar{0}$

Invers $\bar{\bar{5}}$ adalah $\bar{1}$, sebab $\bar{\bar{5}} + \bar{1} = \bar{0}$

   v). Komutatif, diberikan $\bar{x} = x + 6k_1$ dan $\bar{y} = y + 6k_2$ dimana $x, y \in \mathbb{Z}$
$$\bar{x} + \bar{y} = (x + 6k_1) + (y + 6k_2)$$

$$= \left((x+y) + 6(k_1 + k_2)\right)$$
$$= \left((y+x) + 6(k_2 + k_1)\right)$$
$$= (y + 6k_2) + (x + 6k_1)$$
$$= \bar{y} + \bar{x}$$

sehingga $\bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x}$

2. Akan dibuktikan $(\mathbb{Z}_6, \cdot)$ adalah semi grup
   i). Tertutup, terlihat dari Tabel 2.2 bahwa untuk setiap $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_{\mathbf{6}}$ berlaku $\bar{x} \cdot \bar{y} \in \mathbb{Z}_{\mathbf{6}}$
   ii). Asosiatif, diberikan $\bar{x} = x + 6k_1$, $\bar{y} = y + 6k_2$, dan $\bar{z} = z + 6k_3$ dimana $x, y, z \in \mathbb{Z}$
   $$\bar{x} \cdot (\bar{y} \cdot \bar{z}) = (x + 6k_1) \cdot \left((y + 6k_2) \cdot (z + 6k_3)\right)$$
   $$= (x + 6k_1) \cdot (yz + 6yk_3 + 6zk_2 + 36k_2k_3)$$
   $$= xyz + 6xyk_3 + 6xzk_2 + 36xk_2k_3 + 6yzk_1 + 36yk_1k_3 + 36zk_1k_2 + 216k_1k_2k_3$$
   $$(\bar{x} \cdot \bar{y}) \cdot \bar{z} = \left((x + 6k_1) \cdot (y + 6k_2)\right) \cdot (z + 6k_3)$$
   $$= (xy + 6xk_2 + 6yk_1 + 36k_1k_2) \cdot (z + 6k_3)$$
   $$= xyz + 6xyk_3 + 6xzk_2 + 36xk_2k_3 + 6yzk_1 + 36yk_1k_3 + 36zk_1k_2 + 216k_1k_2k_3$$
   sehingga $\bar{x} \cdot (\bar{y} \cdot \bar{z}) = (\bar{x} \cdot \bar{y}) \cdot \bar{z}$
3. Ajan dibuktikan $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ adalah distributif kiri dan kanan, misalkan $\bar{x} = x + 6k_1$, $\bar{y} = y + 6k_2$, dan $\bar{z} = z + 6k_3$ dimana $x, y, z \in \mathbb{Z}$
   $$\bar{x} \cdot (\bar{y} + \bar{z}) = (x + 6k_1) \cdot \left((y + 6k_2) + (z + 6k_3)\right)$$
   $$= (x + 6k_1) \cdot (y + z + 6k_2 + 6k_3)$$
   $$= xy + xz + 6xk_2 + 6xk_3 + 6yk_1 + 6zk_1 + 36k_1k_2 + 36k_1k_3$$
   $$= (xy + 6xk_2 + 6yk_1 + 36k_1k_2) + (xz + 6xk_3 + 6zk_1 + 36k_1k_3)$$
   $$= \left((x + 6k_1) \cdot (y + 6k_2)\right) + \left((x + 6k_1) \cdot (z + 6k_3)\right)$$
   $$= (\bar{x} \cdot \bar{y}) + (\bar{x} \cdot \bar{z})$$
   sehingga $\bar{x} \cdot (\bar{y} + \bar{z}) = (\bar{x} \cdot \bar{y}) + (\bar{x} \cdot \bar{z})$ dan
   $$(\bar{x} + \bar{y}) \cdot \bar{z} = \left((x + 6k_1) + (y + 6k_2)\right) \cdot (z + 6k_3)$$

$$
\begin{aligned}
&= (x + y + 6k_1 + 6k_2) \cdot (z + 6k_3) \\
&= xz + yz + 6zk_1 + 6zk_2 + 6xk_3 + 6yk_3 + \\
&\quad 36k_1k_3 + 36k_2k_3 \\
&= (xz + 6xk_3 + 6zk_1 + 36k_1k_3) + \\
&\quad (yz + 6yk_3 + 6zk_2 + 36k_2k_3) \\
&= \big((x + 6k_1) \cdot (z + 6k_3)\big) + \big((y + 6k_2) \cdot (z + 6k_3)\big) \\
&= (\bar{x} \cdot \bar{z}) + (\bar{y} \cdot \bar{z})
\end{aligned}
$$

sehingga $(\bar{x} + \bar{y}) \cdot \bar{z} = (\bar{x} \cdot \bar{z}) + (\bar{y} \cdot \bar{z})$

Dengan demikian dari pembuktian tersebut dapat disimpulkan bahwa $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ adalah ring

Definisi 2.4.3 (Idempoten)

Jika $(R, +, \cdot)$ adalah ring, maka elemen $x \in R$ disebut idempoten jika memenuhi $x^2 = x \cdot x = x$

Contoh 2.4.4

Diberikan ring $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$. Berdasarkan Contoh 2.4.2 akan ditunjukkan elemen idempoten yang terdapat pada $\mathbb{Z}_6$

Bukti

Akan ditentukan elemen idempoten yang terdapat pada $\mathbb{Z}_6$, sebagai berikut

$$
\begin{aligned}
\bar{0}^2 &= \bar{0} \cdot \bar{0} = \bar{0} \\
\bar{1}^2 &= \bar{1} \cdot \bar{1} = \bar{1} \\
\bar{2}^2 &= \bar{2} \cdot \bar{2} = \bar{4} \\
\bar{3}^2 &= \bar{3} \cdot \bar{3} = \bar{3} \\
\bar{4}^2 &= \bar{4} \cdot \bar{4} = \bar{4} \\
\bar{5}^2 &= \bar{5} \cdot \bar{5} = \bar{1}
\end{aligned}
$$

Dengan demikian dari uraian tersebut maka elemen idempoten yang terdapat pada $\mathbb{Z}_6$ adalah $\bar{0}$, $\bar{1}$, $\bar{3}$, dan $\bar{4}$

Definisi 2.4.5 (Monoid Idempoten)

Jika $(E, *)$ adalah monoid dan setiap elemen pada $(E, *)$ memiliki elemen idempoten, maka $(E, *)$ disebut monoid idempoten

Contoh 2.4.6

Diberikan himpunan $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ dengan operasi biner $+$. Berdasarkan Definisi 2.4.5, akan ditunjukkan $(\mathbb{Z}_2, +)$ adalah monoid idempoten

Bukti

Akan dibuktikan $(\mathbb{Z}_2, +)$ adalah monoid idempoten, seperti berikut

Tabel 2.3 Operasi penjumlahan $(+)$ pada $\mathbb{Z}_2$

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$

i). Tertutup, terlihat dari Tabel 2.3 bahwa untuk setiap $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_2$ berlaku $\bar{x} + \bar{y} \in \mathbb{Z}_2$

ii). Asosiatif, diberikan $\bar{x} = x + 2k_1$, $\bar{y} = y + 2k_2$, dan $\bar{z} = z + 2k_3$ dimana $x, y, z \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}(\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z} &= \big((x + 2k_1) + (y + 2k_2)\big) + (z + 2k_3) \\ &= x + 2k_1 + y + 2k_2 + z + 2k_3 \\ &= x + 2k_1 + (y + 2k_2 + z + 2k_3) \\ &= (x + 2k_1) + \big((y + 2k_2) + (z + 2k_3)\big) \\ &= \bar{x} + (\bar{y} + \bar{z})\end{aligned}$$

iii). Dari Tabel 2.3, terlihat bahwa $\bar{0} \in \mathbb{Z}_2$ adalah elemen identitas untuk setiap $\bar{x} \in \mathbb{Z}_2$ sedemikian sehingga berlaku

$$\bar{0} + \bar{x} = \bar{x} + \bar{0} = \bar{x}$$

Dengan demikian dari uraian tersebut dapat disimpulkan bahwa $(\mathbb{Z}_2, +)$ adalah monoid. Menggunakan Contoh 2.4.4 terlihat bahwa setiap elemen pada $\mathbb{Z}_2$ merupakan elemen idempoten. Jadi $(\mathbb{Z}_2, +)$ adalah monoid idempoten

2.5 Field

Field merupakan salah satu contoh struktur aljabar yang dilengkapi dengan dua operasi biner dan memenuhi kondisi-kondisi tertentu. Pada subbab ini akan diberikan definisi field dan juga definisi-definisi yang berkaitan dengan field disertai contoh. Penulisan ini dikutip dari Andari (2014)

Definisi 2.5.1 (Pembagi Nol)

Jika R adalah suatu ring, maka setiap $x \in R$ dimana $x \neq 0$ disebut pembagi nol jika terdapat $y \in R$ dimana $y \neq 0$ sehingga $xy = 0$

Contoh 2.5.2

Diberikan himpunan $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$, maka terlihat dari Tabel 2.2 bahwa pembagi nol dari E adalah $\bar{3}$ dan $\bar{4}$

Definisi 2.5.3 (Field)

Jika F adalah himpunan tak kosong yang merupakan poset dan dilengkapi dengan operasi biner penjumlahan $(+)$ dan pergandaan $(\cdot)$, maka $(F, +, \cdot)$ disebut field jika memenuhi kondisi berikut

1. $(F, +)$ adalah grup komutatif
2. $(F - \{0\}, \cdot)$ adalah grup komutatif
3. $(F, +, \cdot)$ adalah distributif

Contoh 2.5.4

Diketahui $\mathbb{Z}_5 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$ dengan dua operasi biner $+$ dan $\cdot$. Berdasarkan Definisi 2.5.2, akan ditunjukkan $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ adalah field

Bukti

Akan dibuktikan $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ adalah field, seperti berikut

Tabel 2.4 Operasi penjumlahan $(+)$ pada $\mathbb{Z}_5$

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$

Tabel 2.5 Operasi pergandaan $(\cdot)$ pada $\mathbb{Z}_5$

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

1. Akan dibuktikan $(\mathbb{Z}_5, +)$ adalah grup komutatif
   i). Tertutup, terlihat dari Tabel 2.4 bahwa untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}_5$ berlaku $x + y \in \mathbb{Z}_5$
   ii). Asosiatif, diberikan $\bar{x} = x + 5k_1, \bar{y} = y + 5k_2$, dan $\bar{z} = z + 5k_3$ dimana $x, y, z \in \mathbb{Z}$

$$
\begin{aligned}
(\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z} &= \big((x + 5k_1) + (y + 5k_2)\big) + (z + 5k_3) \\
&= x + 5k_1 + y + 5k_2 + z + 5k_3 \\
&= x + 5k_1 + (y + 5k_2 + z + 5k_3) \\
&= (x + 5k_1) + \big((y + 5k_2) + (z + 5k_3)\big) \\
&= \bar{x} + (\bar{y} + \bar{z})
\end{aligned}
$$

   iii). Dari Tabel 2.4, terlihat bahwa $\bar{0} \in \mathbb{Z}_5$ adalah elemen identitas untuk setiap $\bar{x} \in \mathbb{Z}_5$ sedemikian sehingga berlaku

$$\bar{0} + \bar{x} = \bar{x} + \bar{0} = \bar{x}$$

   iv). Dari Tabel 2.4, terlihat melalui elemen identitas yang ada bahwa setiap $\bar{x} \in \mathbb{Z}_5$ terdapat $-\bar{x} \in \mathbb{Z}_5$,

Invers $\bar{0}$ adalah $\bar{0}$, sebab $\bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$

Invers $\bar{1}$ adalah $\bar{4}$, sebab $\bar{1} + \bar{4} = \bar{0}$

Invers $\bar{2}$ adalah $\bar{3}$, sebab $\bar{2} + \bar{3} = \bar{0}$

Invers $\bar{3}$ adalah $\bar{2}$, sebab $\bar{3} + \bar{2} = \bar{0}$

Invers $\bar{4}$ adalah $\bar{1}$, sebab $\bar{4} + \bar{1} = \bar{0}$

   v). Komutatif, diberikan $\bar{x} = x + 5k_1$ dan $\bar{y} = y + 5k_2$ dimana $x, y \in \mathbb{Z}$

$$
\begin{aligned}
\bar{x} + \bar{y} &= (x + 5k_1) + (y + 5k_2) \\
&= \big((x + y) + 5(k_1 + k_2)\big) \\
&= \big((y + x) + 5(k_2 + k_1)\big)
\end{aligned}
$$

$$= (y + 5k_2) + (x + 5k_1)$$
$$= \bar{y} + \bar{x}$$

sehingga $\bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x}$

2. Akan dibuktikan $(\mathbb{Z}_5 - \{0\}, \cdot)$ adalah grup komutatif
   i). Tertutup, terlihat dari Tabel 2.5 bahwa untuk setiap $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_5$ berlaku $\bar{x} \cdot \bar{y} \in \mathbb{Z}_5$
   ii). Asosiatif, diberikan $\bar{x} = x + 5k_1, \bar{y} = y + 5k_2,$ dan $\bar{z} = z + 5k_3$ dimana $x, y, z \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}\bar{x} \cdot (\bar{y} \cdot \bar{z}) &= (x + 5k_1) \cdot \big((y + 5k_2) \cdot (z + 5k_3)\big) \\ &= (x + 5k_1) \cdot (yz + 5yk_3 + 5zk_2 + 25k_2k_3) \\ &= xyz + 5xyk_3 + 5xzk_2 + 25xk_2k_3 + 5yzk_1 + \\ &\quad 25yk_1k_3 + 25zk_1k_2 + 125k_1k_2k_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\bar{x} \cdot \bar{y}) \cdot \bar{z} &= \big((x + 5k_1) \cdot (y + 5k_2)\big) \cdot (z + 5k_3) \\ &= (xy + 5xk_2 + 5yk_1 + 25k_1k_2) \cdot (z + 5k_3) \\ &= xyz + 5xyk_3 + 5xzk_2 + 25xk_2k_3 + 5yzk_1 + \\ &\quad 25yk_1k_3 + 25zk_1k_2 + 125k_1k_2k_3\end{aligned}$$

   sehingga $\bar{x} \cdot (\bar{y} \cdot \bar{z}) = (\bar{x} \cdot \bar{y}) \cdot \bar{z}$
   iii). Dari Tabel 2.5, terlihat bahwa $\bar{1} \in \mathbb{Z}_5$ adalah elemen identitas untuk setiap $\bar{x} \in \mathbb{Z}_5$ sedemikian sehingga berlaku

$$\bar{1} \cdot \bar{x} = \bar{x} \cdot \bar{1} = \bar{x}$$

   iv). Dari Tabel 2.5, terlihat melalui elemen identitas yang ada bahwa setiap $\bar{x} \in \mathbb{Z}_5$ terdapat $\bar{x}^{-1} \in \mathbb{Z}_5$,

Invers $\bar{1}$ adalah $\bar{1}$, sebab $\bar{1} \cdot \bar{1} = \bar{1}$
Invers $\bar{2}$ adalah $\bar{3}$, sebab $\bar{2} \cdot \bar{3} = \bar{1}$
Invers $\bar{3}$ adalah $\bar{2}$, sebab $\bar{3} \cdot \bar{2} = \bar{1}$
Invers $\bar{4}$ adalah $\bar{4}$, sebab $\bar{4} \cdot \bar{4} = \bar{1}$

   v). Dari Tabel 2.5, terlihat bahwa setiap $\bar{x} \in \mathbb{Z}_5 - \{0\}$ tidak memuat pembagi nol sejati karena tidak terdapat $\bar{y} \in \mathbb{Z}_5 - \{0\}$ sedemikian sehingga berlaku $\bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{0}$
   vi). Komutatif, diberikan $\bar{x} = x + 5k_1$ dan $\bar{y} = y + 5k_2$ dimana $x, y \in \mathbb{Z}$

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = (x + 5k_1) \cdot (y + 5k_2)$$

$$= xy + 5xk_2 + 5yk_1 + 25k_1k_2$$
$$= yx + 5yk_1 + 5xk_2 + 25k_2k_1$$
$$= (y + 5k_2) \cdot (x + 5k_1)$$
$$= \bar{y} \cdot \bar{x}$$

Sehingga $\bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{y} \cdot \bar{x}$

3. Akan dibuktikan$(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ adalah distributif, misalkan $\bar{x} = x + 5k_1$, $\bar{y} = y + 5k_2$, dan $\bar{z} = z + 5k_3$ dimana $x, y, z \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
\bar{x} \cdot (\bar{y} + \bar{z}) &= (x + 5k_1) \cdot \big((y + 5k_2) + (z + 5k_3)\big) \\
&= (x + 5k_1) \cdot (y + z + 5k_2 + 5k_3) \\
&= xy + xz + 5xk_2 + 5xk_3 + 5yk_1 + 5zk_1 + \\
&\quad 25k_1k_2 + 25k_1k_3 \\
&= (xy + 5xk_2 + 5yk_1 + 25k_1k_2) + \\
&\quad (xz + 5xk_3 + 5zk_1 + 25k_1k_3) \\
&= \big((x + 5k_1) \cdot (y + 5k_2)\big) + \big((x + 5k_1) \cdot (z + 5k_3)\big) \\
&= (\bar{x} \cdot \bar{y}) + (\bar{x} \cdot \bar{z})
\end{aligned}$$

sehingga $\bar{x} \cdot (\bar{y} + \bar{z}) = (\bar{x} \cdot \bar{y}) + (\bar{x} \cdot \bar{z})$ dan

$$\begin{aligned}
(\bar{x} + \bar{y}) \cdot \bar{z} &= \big((x + 5k_1) + (y + 5k_2)\big) \cdot (z + 5k_3) \\
&= (x + y + 5k_1 + 5k_2) \cdot (z + 5k_3) \\
&= xz + yz + 5zk_1 + 5zk_2 + 5xk_3 + 5yk_3 + \\
&\quad 25k_1k_3 + 25k_2k_3 \\
&= (xz + 5xk_3 + 5zk_1 + 25k_1k_3) + \\
&\quad (yz + 5yk_3 + 5zk_2 + 25k_2k_3) \\
&= \big((x + 5k_1) \cdot (z + 5k_3)\big) + \big((y + 5k_2) \cdot (z + 5k_3)\big) \\
&= (\bar{x} \cdot \bar{z}) + (\bar{y} \cdot \bar{z})
\end{aligned}$$

sehingga $(\bar{x} + \bar{y}) \cdot \bar{z} = (\bar{x} \cdot \bar{z}) + (\bar{y} \cdot \bar{z})$

Dengan demikian dari pembuktian tersebut dapat disimpulkan bahwa $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ adalah field

Definisi 2.5.5 (Daerah Integral)

Jika D adalah himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan dua operasi biner $+$ dan $\cdot$, maka $(D, +, \cdot)$ disebut daerah integral jika memenuhi kondisi berikut

1. $(D, +)$ adalah grup komutatif
2. $(D, \cdot)$ adalah tertutup, asosiatif, mempunyai elemen identitas, tidak memuat pembagi nol, dan komutatif
3. $(D, +, \cdot)$ adalah distributif

Contoh 2.5.6

Diberikan himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dengan dua operasi biner $+$ dan $\cdot$. Berdasarkan Definisi 2.5.5, akan ditunjukkan $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ adalah daerah integral

Bukti

1. Akan dibuktikan $(\mathbb{Z}, +)$ adalah grup komutatif
   i). Tertutup, untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}$ berlaku $x + y = z \in \mathbb{Z}$
   ii). Asosiatif, diberikan $x, y, z \in \mathbb{Z}$
   $$(x + y) + z = x + y + z$$
   $$= x + (y + z)$$
   sehingga $(x + y) + z = x + (y + z)$
   iii). Untuk setiap $x \in \mathbb{Z}$
   $$x + e = x$$
   $$e = x - x$$
   $$e = 0$$
   sehingga elemen identitas adalah 0
   iv). Untuk setiap $x \in \mathbb{Z}$
   $$x + x = e$$
   $$x + x = 0$$
   $$x = -x$$
   sehingga elemen invers adalah $-x$
   v). Komutatif, diberikan $x, y \in \mathbb{Z}$
   $$x + y = z$$
   $$= y + x$$
   sehingga $x + y = y + x$
2. Akan dibuktikan $(\mathbb{Z} - \{0\}, \cdot)$ adalah grup komutatif
   i). Tertutup, untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}$ berlaku $x \cdot y = z \in \mathbb{Z}$
   ii). Asosiatif, diberikan $x, y, z \in \mathbb{Z}$

$$x \cdot (y \cdot z) = x \cdot y \cdot z$$
$$= (x \cdot y) \cdot z$$

sehingga $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

iii). Untuk setiap $x \in \mathbb{Z}$

$$x \cdot e = x$$
$$e = \frac{x}{x}$$
$$e = 1$$
$$1 \in \mathbb{Z}$$

sehingga memiliki elemen identitas

iv). Untuk setiap $x \in \mathbb{Z}$

$$x \cdot x = e$$
$$x = \frac{e}{x}$$
$$x = \frac{1}{x} = x^{-1}$$
$$x^{-1} \notin \mathbb{Z}$$

sehingga tidak memiliki elemen invers

v). Untuk setiap $x \in \mathbb{Z} - \{0\}$ tidak memuat pembagi nol karena tidak terdapat $y \in \mathbb{Z} - \{0\}$ sedemikian sehingga berlaku $x \cdot y = 0$

vi). Komutatif, diberikan $x, y \in \mathbb{Z}$

$$x \cdot y = z$$
$$= y \cdot x$$

Sehingga $x \cdot y = y \cdot x$

3. Akan dibuktikan $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ adalah distributif, untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{Z}$

$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$$
$$(x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$$

Dengan demikian dari pembuktian tersebut dapat disimpulkan bahwa $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ adalah daerah integral

Definisi 2.5.7 (Monoid Integral)

Jika $(M, *)$ adalah monoid dan tidak memuat pembagi nol, maka $(M, *)$ adalah monoid integral

Contoh 2.5.8

Diberikan himpunan $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ dengan operasi biner $\cdot$. Berdasarkan Definisi 2.5.7, akan ditunjukkan $(\mathbb{Z}_2,\cdot)$ adalah monoid integral

Bukti

Akan dibuktikan $(\mathbb{Z}_2,\cdot)$ adalah monoid integral, seperti berikut

i). Tertutup, terlihat dari Tabel 2.5 bahwa untuk setiap $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_2$ berlaku $\bar{x} \cdot \bar{y} \in \mathbb{Z}_2$

ii). Asosiatif, diberikan $\bar{x} = x + 2k_1$, $\bar{y} = y + 2k_2$, dan $\bar{z} = z + 2k_3$ dimana $x, y, z \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}\bar{x} \cdot (\bar{y} \cdot \bar{z}) &= (x + 2k_1) \cdot \big((y + 2k_2) \cdot (z + 2k_3)\big)\\ &= (x + 2k_1) \cdot (yz + 2yk_3 + 2zk_2 + 4k_2k_3)\\ &= xyz + 2xyk_3 + 2xzk_2 + 4xk_2k_3 + 2yzk_1 + \\ &\quad 4yk_1k_3 + 4zk_1k_2 + 8k_1k_2k_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\bar{x} \cdot \bar{y}) \cdot \bar{z} &= \big((x + 2k_1) \cdot (y + 2k_2)\big) \cdot (z + 2k_3)\\ &= (xy + 2xk_2 + 2yk_1 + 4k_1k_2) \cdot (z + 2k_3)\\ &= xyz + 2xyk_3 + 2xzk_2 + 4xk_2k_3 + 2yzk_1 + \\ &\quad 4yk_1k_3 + 4zk_1k_2 + 8k_1k_2k_3\end{aligned}$$

sehingga $\bar{x} \cdot (\bar{y} \cdot \bar{z}) = (\bar{x} \cdot \bar{y}) \cdot \bar{z}$

iii). Dari Tabel 2.5, terlihat bahwa $\bar{1} \in \mathbb{Z}_2$ adalah elemen identitas untuk setiap $\bar{x} \in \mathbb{Z}_2$ sedemikian sehingga berlaku

$$\bar{1} \cdot \bar{x} = \bar{x} \cdot \bar{1} = \bar{x}$$

iv). Dari Tabel 2.5, terlihat bahwa setiap $\bar{x} \in \mathbb{Z}_2 - \{0\}$ tidak memuat pembagi nol karena tidak terdapat $\bar{y} \in \mathbb{Z}_2 - \{0\}$ sedemikian sehingga berlaku $\bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{0}$

Dengan demikian dari pembuktian tersebut dapat disimpulkan bahwa $(\mathbb{Z}_2,\cdot)$ adalah monoid integral.

Contoh 2.5.9

Diberikan himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$ dan terdapat $P(\mathbb{N}) = \{A | \emptyset \leq A \leq \mathbb{N}\}$ dengan relasi $\leq$ adalah bentuk subset $\subseteq$.

Berdasarkan Definisi 2.5.7, akan ditunjukkan $P(\mathbb{N})$ dengan operasi biner $\cap$ adalah monoid integral

Bukti

Akan dibuktikan $(P(\mathbb{N}),\cap)$ adalah monoid integral, seperti berikut

i). Tertutup, untuk setiap $A, B \in P(\mathbb{N})$ berlaku $A \cap B \in P(\mathbb{N})$

ii). Asosiatif, diberikan $A, B, C \in P(\mathbb{N})$

$$A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$$
$$= (A \cap B) \cap C$$

sehingga $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

iii). Terlihat bahwa $\mathbb{N} \in P(\mathbb{N})$ adalah elemen identitas untuk setiap $A \in P(\mathbb{N})$ sedemikian sehingga berlaku

$$A \cap e = A$$
$$A \cap \mathbb{N} = A$$

iv). Terlihat bahwa setiap $A \in P(\mathbb{N}) - \emptyset$ tidak memuat pembagi nol karena tidak terdapat $B \in P(\mathbb{N}) - \emptyset$ sedemikian sehingga berlaku $A \cdot B = \emptyset$

Dengan demikian dari pembuktian tersebut dapat disimpulkan bahwa $(P(\mathbb{N}),\cap)$ adalah monoid integral

Definisi 2.5.10 (Monoid Idempoten Integral)

Jika $(M,*)$ adalah monoid, setiap elemen idempoten, dan tidak memuat pembagi nol, maka $(M,*)$ adalah monoid idempoten integral

Contoh 2.5.11

Berdasarkan Contoh 2.5.8 telah terbukti bahwa $(\mathbb{Z}_2,\cdot)$ adalah monoid integral. Memakai Contoh 2.4.4 terlihat bahwa setiap elemen pada $\mathbb{Z}_2$ memiliki elemen idempoten maka $(\mathbb{Z}_2,\cdot)$ adalah monoid idempoten integral

Contoh 2.5.12

Berdasarkan Contoh 2.5.9 telah terbukti bahwa $(P(\mathbb{N}),\cap)$ adalah monoid integral. Memakai Definisi 2.4.3, maka elemen idempoten pada $(P(\mathbb{N}),\cap)$

$$\emptyset^2 = \emptyset \cap \emptyset = \emptyset$$
$$A^2 = A \cap A = A$$
$$\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \cap \mathbb{N} = \mathbb{N}$$

Terlihat bahwa setiap elemen pada $P(\mathbb{N})$ memiliki elemen idempoten, maka $(P(\mathbb{N}),\cap)$ adalah monoid idempoten integral

Definisi 2.5.13 (Monoid Idempoten Komutatif)

Jika $(M,*)$ adalah monoid, setiap elemen idempoten, dan komutatif, maka $(M,*)$ adalah monoid idempoten komutatif

Contoh 2.5.14

Berdasarkan Contoh 2.5.11 telah terbukti bahwa $(\mathbb{Z}_2,\cdot)$ adalah monoid idempoten. Berdasarkan Definisi 2.5.13, akan ditunjukkan $(\mathbb{Z}_2,\cdot)$ adalah monoid idempoten komutatif

Bukti

Akan dibuktikan $(\mathbb{Z}_2,\cdot)$ adalah monoid idempoten komutatif, seperti berikut

- Komutatif, diberikan $\bar{x} = x + 2k_1$ dan $\bar{y} = y + 2k_2$ dimana $x, y \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}\bar{x} \cdot \bar{y} &= (x + 2k_1) \cdot (y + 2k_2) \\ &= xy + 2xk_2 + 2yk_1 + 4k_1k_2 \\ &= yx + 2yk_1 + 2xk_2 + 4k_2k_1 \\ &= (y + 2k_2) \cdot (x + 2k_1) \\ &= \bar{y} \cdot \bar{x}\end{aligned}$$

  Sehingga $\bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{y} \cdot \bar{x}$

Dengan demikian dari pembuktian tersebut dapat disimpulkan bahwa $(\mathbb{Z}_2,\cdot)$ adalah monoid idempoten komutatif

Contoh 2.5.15

Berdasarkan Contoh 2.5.12 telah terbukti bahwa $(P(\mathbb{N}),\cap)$ adalah monoid idempoten. Berdasarkan Definisi 2.5.13, akan ditunjukkan $(P(\mathbb{N}),\cap)$ adalah monoid idempoten komutatif

Bukti

Akan dibuktikan $(P(\mathbb{N}),\cap)$ adalah monoid idempoten komutatif, seperti berikut

- Komutatif, diberikan $A, B \in P(\mathbb{N})$
$$\begin{aligned} A \cap B &= C \\ &= B \cap A \end{aligned}$$
Sehingga $A \cap B = B \cap A$

Dengan demikian dari pembuktian tersebut dapat disimpulkan bahwa $(P(\mathbb{N}),\cap)$ adalah monoid idempoten komutatif

Definisi 2.5.16 (Monoid Idempoten Integral Komutatif)

Jika $(M,*)$ adalah monoid, setiap elemen idempoten, tidak memuat pembagi nol, dan komutatif, maka $(M,*)$ adalah monoid idempoten integral komutatif

Contoh 2.5.17

Berdasarkan Contoh 2.5.11 dan Contoh 2.5.14, telah terbukti bahwa $(\mathbb{Z}_2,\cdot)$ adalah monoid idempoten integral komutatif

Contoh 2.5.17

Berdasarkan Contoh 2.5.12 dan Contoh 2.5.15, telah terbukti bahwa $(P(\mathbb{N}),\cap)$ adalah monoid idempoten integral komutatif

2.6 Latis

Latis merupakan salah satu contoh struktur aljabar yang dilengkapi dengan dua operasi biner dan memenuhi kondisi-kondisi tertentu. Pada subbab ini akan diberikan definisi latis dan juga definisi-definisi yang berkaitan dengan latis disertai contoh. Penulisan ini dikutip dari *Lattice Theory*, Garrett Birkhoff (1940)

Definisi 2.6.1 (Meet)

Operasi biner *meet* $(\wedge)$ pada suatu himpunan tak kosong E untuk setiap $x, y \in E$ adalah nilai minimum pasangan (x, y)

$$x \wedge y = inf\{x, y\}$$

Contoh 2.6.2

Diberikan himpunan $E = \{2,3,5\}$ dan terdapat pasangan (x, y) dengan operasi biner $\wedge$ untuk setiap $x, y \in E$. Berdasarkan Definisi 2.6.1, akan ditunjukkan hasil operasi pada E

- $2 \wedge 2 = inf\{2,2\} = 2$
- $2 \wedge 3 = inf\{2,3\} = 2$
- $2 \wedge 5 = inf\{2,5\} = 2$
- $3 \wedge 2 = inf\{3,2\} = 2$
- $3 \wedge 3 = inf\{3,3\} = 3$
- $3 \wedge 5 = inf\{3,5\} = 3$
- $5 \wedge 2 = inf\{5,2\} = 2$
- $5 \wedge 3 = inf\{5,3\} = 3$
- $5 \wedge 5 = inf\{5,5\} = 5$

Contoh 2.6.3

Diberikan himpunan $\mathbb{Z} = \{\dots, -1,0,1, \dots\}$ dan terdapat pasangan (x, y) dengan operasi biner $\wedge$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}$. Berdasarkan Definisi 2.6.1, akan ditunjukkan beberapa hasil operasi pada $\mathbb{Z}$

- $-2 \wedge -1 = inf\{-2, -1\} = -2$
- $-1 \wedge -1 = inf\{-1, -1\} = -1$
- $1 \wedge -1 = inf\{1, -1\} = -1$
- $1 \wedge 2 = inf\{1,2\} = 1$
- $1 \wedge 1 = inf\{1,1\} = 1$
- $-1 \wedge 1 = inf\{-1,1\} = -1$

Definisi 2.6.4 (Join)

Operasi biner *join* $(\vee)$ pada suatu himpunan tak kosong E untuk setiap $x, y \in E$ adalah nilai maksimum pasangan (x, y)

$$x \vee y = sup\{x, y\}$$

Contoh 2.6.5

Diberikan himpunan $E = \{2,3,5\}$ dan terdapat pasangan (x, y) dengan operasi biner $\vee$ untuk setiap $x, y \in E$. Berdasarkan Definisi 2.6.4, akan ditunjukkan hasil operasi pada E

- $2 \vee 2 = sup\{2,2\} = 2$
- $2 \vee 3 = sup\{2,3\} = 3$
- $2 \vee 5 = sup\{2,5\} = 5$
- $3 \vee 2 = sup\{3,2\} = 3$
- $3 \vee 3 = sup\{3,3\} = 3$
- $3 \vee 5 = sup\{3,5\} = 5$
- $5 \vee 2 = sup\{5,2\} = 5$
- $5 \vee 3 = sup\{5,3\} = 5$
- $5 \vee 5 = sup\{5,5\} = 5$

Contoh 2.6.6

Diberikan himpunan $\mathbb{Z} = \{\dots, -1,0,1, \dots\}$ dan terdapat pasangan $(x, y) \in R$ dengan operasi biner $\vee$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}$. Berdasarkan Definisi 2.6.4, akan ditunjukkan beberapa hasil operasi pada $\mathbb{Z}$

- $-2 \vee -1 = inf\{-2, -1\} = -1$
- $-1 \vee -1 = inf\{-1, -1\} = -1$
- $1 \vee -1 = inf\{1, -1\} = 1$
- $1 \vee 2 = inf\{1,2\} = 2$
- $1 \vee 1 = inf\{1,1\} = 1$
- $-1 \vee 1 = inf\{-1,1\} = 1$

Definisi 2.6.7 (Latis)

Jika L adalah himpunan tak kosong yang merupakan poset dan dilengkapi dengan operasi biner *meet* $(\wedge)$ dan *join* $(\vee)$, maka $(L, \wedge, \vee)$ disebut latis jika memenuhi kondisi berikut untuk setiap $x, y, z \in L$:

i). Komutatif, yaitu $x, y \in L$ sedemikian sehingga berlaku

$$x \wedge y = y \wedge x$$
$$x \vee y = y \vee x$$

ii). Asosiatif, yaitu $x, y, z \in L$ sedemikian sehingga berlaku

$$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$$
$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$$

iii). Absorpsi, yaitu $x, y \in L$ sedemikian sehingga berlaku

$$x \wedge (x \vee y) = x$$
$$x \vee (x \wedge y) = x$$

iv). Idempoten, yaitu $x \in L$ sedemikian sehingga berlaku

$$x \wedge x = x \vee x = x$$

Contoh 2.6.8

Diberikan himpunan poset $E = \{1,2,3,6,7,14,21,42\}$ dengan operasi biner $\wedge$ dan $\vee$. Berdasarkan Definisi 2.6.7, akan ditunjukkan $(E, \wedge, \vee)$ adalah latis

Bukti

Akan dibuktikan $(E, \wedge, \vee)$ adalah latis, seperti berikut

Tabel 2.6 Operasi join $(\vee)$ pada $\boldsymbol{E}$

$\vee$	1	2	3	6	7	14	21	42
1	1	2	3	6	7	14	21	42
2	2	2	3	6	7	14	21	42
3	3	3	3	6	7	14	21	42
6	6	6	6	6	7	14	21	42
7	7	7	7	7	7	14	21	42
14	14	14	14	14	14	14	21	42
21	21	21	21	21	21	21	21	42
42	42	42	42	42	42	42	42	42

- $1 \vee 1 = sup\{1,1\} = 1$
- $1 \vee 2 = sup\{1,2\} = 2$
- $1 \vee 3 = sup\{1,3\} = 3$
- $1 \vee 6 = sup\{1,6\} = 6$
- $1 \vee 7 = sup\{1,7\} = 7$
- $1 \vee 14 = sup\{1,14\} = 14$
- $1 \vee 21 = sup\{1,21\} = 21$
- $1 \vee 42 = sup\{1,42\} = 42$
- $2 \vee 1 = sup\{2,1\} = 2$
- $2 \vee 2 = sup\{2,2\} = 2$
- $2 \vee 3 = sup\{2,3\} = 3$
- $2 \vee 6 = sup\{2,6\} = 6$
- $2 \vee 7 = sup\{2,7\} = 7$
- $2 \vee 14 = sup\{2,14\} = 14$
- $2 \vee 21 = sup\{2,21\} = 21$
- $2 \vee 42 = sup\{2,42\} = 42$

Tabel 2.7 Operasi meet $(\wedge)$ pada *E*

$\wedge$	1	2	3	6	7	14	21	42
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2	2	2	2
3	1	2	3	3	3	3	3	3
6	1	2	3	6	6	6	6	6
7	1	2	3	6	7	7	7	7
14	1	2	3	6	7	14	14	14
21	1	2	3	6	7	14	21	21
42	1	2	3	6	7	14	21	42

- $1 \wedge 1 = inf\{1,1\} = 1$
- $1 \wedge 2 = inf\{1,2\} = 1$
- $1 \wedge 3 = inf\{1,6\} = 1$
- $1 \wedge 6 = inf\{1,6\} = 1$
- $1 \wedge 7 = inf\{1,7\} = 1$
- $1 \wedge 14 = inf\{1,14\} = 1$
- $1 \wedge 21 = inf\{1,21\} = 2$
- $1 \wedge 42 = inf\{1,42\} = 4$
- $2 \wedge 1 = inf\{2,1\} = 1$
- $2 \wedge 2 = inf\{2,2\} = 2$
- $2 \wedge 3 = inf\{2,3\} = 2$
- $2 \wedge 6 = inf\{2,6\} = 2$
- $2 \wedge 7 = inf\{2,7\} = 2$
- $2 \wedge 14 = inf\{2,14\} = 2$
- $2 \wedge 21 = inf\{2,21\} = 2$
- $2 \wedge 42 = inf\{2,42\} = 2$

i). Komutatif, dari Tabel 2.6 dan Tabel 2.7 tampak bahwa

$$x \vee y = y \vee x$$
$$x \wedge y = y \wedge x$$

ii). Asosiatif, diberikan $x = 2$, $y = 7$, dan $z = 21$. Maka

$$x \wedge (y \wedge z) = 2 \wedge (7 \wedge 21) = 2 \wedge 7 = 2$$

$$(x \wedge y) \wedge z = (2 \wedge 7) \wedge 21 = 2 \wedge 21 = 2$$

sehingga $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$. Memakai cara yang sama untuk setiap $x, y, z \in E$ dan memakai Tabel 2.7 berlaku $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$

$$x \vee (y \vee z) = 2 \vee (7 \vee 21) = 2 \vee 21 = 21$$
$$(x \vee y) \vee z = (2 \vee 7) \vee 21 = 7 \vee 21 = 21$$

sehingga $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$. Memakai cara yang sama untuk setiap $x, y, z \in E$ dan memakai Tabel 2.6 berlaku $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$

iii). Absorpsi, diberikan $x = 2$, $y = 7$. Maka

$$x \wedge (x \vee y) = 2 \wedge (2 \vee 7) = 2 \wedge 7 = 2 = x$$
$$x \vee (x \wedge y) = 2 \vee (2 \wedge 7) = 2 \vee 2 = 2 = x$$

sehingga $x \wedge (x \vee y) = x \vee (x \wedge y) = x$. Memakai cara yang sama untuk setiap $x, y, z \in E$ dan memakai Tabel 2.6 dan Tabel 2.7 berlaku $x \wedge (x \vee y) = x$ dan $x \vee (x \wedge y) = x$

iv). Idempoten, diberikan $x = 2$. Maka

$$x \wedge x = 2 \wedge 2 = 2 = x$$
$$x \vee x = 2 \vee 2 = 2 = x$$

sehingga $x \wedge x = x \vee x = x$. Memakai cara yang sama untuk setiap $x, y, z \in E$ dan memakai Tabel 2.6 dan Tabel 2.7 berlaku $x \wedge x = x$ dan $x \vee x = x$

Dengan demikian dari pembuktian tersebut dapat disimpulkan bahwa $(E, \wedge, \vee)$ adalah latis

Contoh 2.6.9

Diberikan himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$ dan $P(\mathbb{N}) = \{A | \emptyset \leq A \leq \mathbb{N}\}$ dengan relasi $\leq$ adalah bentuk subset $\subseteq$. Diberikan himpunan $N = \{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \dots\}$ dan $P(N) = \{A | \emptyset \leq A \leq N\}$ dengan relasi $\leq$ adalah bentuk subset $\subseteq$. Jika $P(N) \subset P(\mathbb{N})$, maka berdasarkan Definisi 2.6.7 akan ditunjukkan $(P(N), \wedge, \vee)$ adalah latis

Bukti

Akan dibuktikan $(P(N),\wedge,\vee)$ adalah latis, seperti berikut

$$A \vee B = sup\{A, B\} = B$$
$$B \vee A = sup\{B, A\} = B$$
$$A \wedge B = inf\{A, B\} = A$$
$$B \wedge A = inf\{B, A\} = A$$

i). Komutatif, diberikan $x = A$, $y = B$. Maka

$$x \vee y = A \vee B = B \vee A = y \vee x$$
$$x \wedge y = A \wedge B = B \wedge A = y \wedge x$$

ii). Asosiatif, diberikan $x = A$, $y = B$, dan $z = B$. Maka

$$x \wedge (y \wedge z) = A \wedge (B \wedge B) = A \wedge B = A$$
$$(x \wedge y) \wedge z = (A \wedge B) \wedge B = A \wedge B = A$$

sehingga $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$

$$x \vee (y \vee z) = A \vee (B \vee B) = A \vee B = B$$
$$(x \vee y) \vee z = (A \vee B) \vee B = B \vee B = B$$

sehingga $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$

iii). Absorpsi, diberikan $x = A$, $y = B$. Maka

$$x \wedge (x \vee y) = A \wedge (A \vee B) = A \wedge B = A = x$$
$$x \vee (x \wedge y) = A \vee (A \wedge B) = A \vee A = A = x$$

sehingga $x \wedge (x \vee y) = x \vee (x \wedge y) = x$

iv). Idempoten, diberikan $x = A$. Maka

$$x \wedge x = A \wedge A = A = x$$
$$x \vee x = A \vee A = A = x$$

sehingga $x \wedge x = x \vee x = x$

Dengan demikian dari pembuktian tersebut dapat disimpulkan bahwa $(P(N),\wedge,\vee)$ adalah latis

Definisi 2.6.10 (Distributif Latis)

Jika $(L,\wedge,\vee)$ adalah suatu latis, maka $(L,\wedge,\vee)$ disebut distributif latis jika

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \text{ untuk setiap } x, y, z \in L$$
$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \text{ untuk setiap } x, y, z \in L$$

Contoh 2.6.11

Berdasarkan Contoh 2.6.8, telah terbukti bahwa $(E,\wedge,\vee)$ adalah latis. Berdasarkan Definisi 2.6.10, akan ditunjukkan $(E,\wedge,\vee)$ adalah distributif latis

Bukti

Akan dibuktikan $(E,\wedge,\vee)$ adalah distributif latis. Seperti terlihat dari Tabel 2.6 dan Tabel 2.7, $(E,\wedge,\vee)$ memenuhi kondisi berikut

i). Distributif, diberikan $x = 2$, $y = 7$, dan $z = 21$. Maka

$$x \wedge (y \vee z) = 2 \wedge (7 \vee 21) = 2 \wedge 21 = 2$$

$$(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = (2 \wedge 7) \vee (2 \wedge 21) = 2 \vee 2 = 2$$

sehingga $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$. Memakai cara yang sama untuk setiap $x, y, z \in E$ dengan memakai Tabel 2.6 dan Tabel 2.7 berlaku $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

$$x \vee (y \wedge z) = 2 \vee (7 \wedge 21) = 2 \vee 7 = 7$$

$$(x \vee y) \wedge (x \vee z) = (2 \vee 7) \wedge (2 \vee 21) = 7 \wedge 21 = 7$$

sehingga $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$. Memakai cara yang sama untuk setiap $x, y, z \in E$ dengan memakai Tabel 2.6 dan Tabel 2.7 berlaku $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa $(E,\wedge,\vee)$ adalah distributif latis

Contoh 2.6.12

Berdasarkan Contoh 2.6.9, telah terbukti bahwa $(P(N),\wedge,\vee)$ adalah latis. Berdasarkan Definisi 2.6.10, akan ditunjukkan $(P(N),\wedge,\vee)$ adalah distributif latis

Bukti

Akan dibuktikan $(P(N),\wedge,\vee)$ adalah distributif latis jika memenuhi kondisi berikut

i). Distributif, diberikan $x = A$, $y = B$, dan $z = B$. Maka

$$x \wedge (y \vee z) = A \wedge (B \vee A) = A \wedge B = A$$

$$(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = (A \wedge B) \vee (A \wedge A) = A \vee A = A$$

sehingga $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

$$x \vee (y \wedge z) = A \vee (B \wedge A) = A \vee A = A$$

$$(x \vee y) \wedge (x \vee z) = (A \vee B) \wedge (A \vee A) = B \wedge A = A$$

sehingga $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa $(P(N), \wedge, \vee)$ adalah distributif latis

Definisi 2.6.13 (Elemen Terkecil)

Jika E adalah himpunan tidak kosong dan dilengkapi dengan relasi $\leq$, maka suatu $a \in E$ disebut elemen tekecil yang disimbolkan dengan 0 jika untuk setiap $x \in E$ memenuhi $a \leq x$

Contoh 2.6.14

Diberikan himpunan $E = \{2,3,5\}$. Berdasarkan Definisi 2.6.13, akan ditunjukkan elemen tekecil (0) pada E

Bukti

Akan ditunjukkan elemen tekecil (0) pada E. Berdasarkan Definisi 2.6.13 terlihat

$$2 \leq 2$$
$$2 \leq 3$$
$$2 \leq 5$$

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa 2 adalah elemen tekecil (0)

Contoh 2.6.15

Diberikan himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$ dengan $P(\mathbb{N}) = \{A | \emptyset \leq A \leq \mathbb{N}\}$. Berdasarkan Definisi 2.6.14, akan ditunjukkan elemen tekecil (0) pada $P(\mathbb{N})$

Bukti

Akan ditunjukkan elemen tekecil (0) pada $P(\mathbb{N})$. Berdasarkan Definisi 2.6.14 terlihat

$$\emptyset \leq A$$

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa $\emptyset$ adalah elemen tekecil (0)

Definisi 2.6.16 (Elemen Terbesar)

Jika E adalah himpunan tidak kosong dan dilengkapi dengan relasi $\geq$, maka suatu $a \in E$ disebut elemen terbesar yang disimbolkan dengan I jika untuk setiap $x \in E$ memenuhi $a \geq x$

Contoh 2.6.17

Diberikan himpunan $E = \{2,3,5\}$. Berdasarkan Definisi 2.6.15, akan ditunjukkan elemen terbesar (I) pada E

Bukti

Akan ditunjukkan elemen terbesar (I) pada E. Berdasarkan Definisi 2.6.15 terlihat

$$5 \geq 2$$
$$5 \geq 3$$
$$5 \geq 5$$

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa 5 adalah elemen terbesar (I)

Contoh 2.6.18

Diberikan himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$ dengan $P(\mathbb{N}) = \{A | \emptyset \leq A \leq \mathbb{N}\}$. Berdasarkan Definisi 2.6.15, akan ditunjukkan elemen terbesar (I) pada $P(\mathbb{N})$

Bukti

Akan ditunjukkan elemen terbesar (I) pada $P(\mathbb{N})$. Berdasarkan Definisi 2.6.15 terlihat

$$\mathbb{N} \geq A$$

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa $\mathbb{N}$ adalah elemen terbesar (I)

Definisi 2.6.19 (Latis Lengkap)

Jika $(L,\wedge,\vee)$ adalah suatu latis, maka $(L,\wedge,\vee)$ disebut latis lengkap jika memiliki elemen terkecil (0) dan elemen terbesar (I)

Contoh 2.6.20

Berdasarkan Contoh 2.6.8, telah terbukti bahwa $(E,\wedge,\vee)$ adalah latis. Berdasarkan Definisi 2.6.19, akan ditunjukkan $(E,\wedge,\vee)$ adalah latis lengkap

Bukti

Akan dibuktikan $(E,\wedge,\vee)$ adalah latis lengkap. Berdasarkan Definisi 2.6.13 dan Definisi 2.6.16 terlihat

- $1 \leq x$, untuk setiap $x \in E$
- $42 \geq x$, untuk setiap $x \in E$

Sehingga terdapat elemen tekecil $(0) = 1$ dan elemen terbesar $(I) = 42$. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa $(E,\wedge,\vee)$ adalah latis lengkap

Contoh 2.6.21

Berdasarkan Contoh 2.6.9, telah terbukti bahwa $(P(N),\wedge,\vee)$ adalah latis. Berdasarkan Definisi 2.6.19, akan ditunjukkan $(P(N),\wedge,\vee)$ adalah latis lengkap

Bukti

Akan dibuktikan $(P(N),\wedge,\vee)$ adalah latis lengkap, terlihat

- $\emptyset \leq A$, untuk setiap $A \in P(N)$
- $N \geq A$, untuk setiap $A \in P(N)$

Sehingga terdapat elemen tekecil $(0) = \emptyset$ dan elemen terbesar $(I) = N$. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa $(P(N),\wedge,\vee)$ adalah latis lengkap

Definisi 2.6.22 (Latis Terbatas)

Jika $(L,\wedge,\vee)$ adalah suatu latis yang memiliki elemen terkecil (0) dan elemen terbesar (I), maka $(L,\wedge,\vee,0,I)$ disebut latis terbatas jika

$$x \wedge 0 = 0 \text{ dan } x \vee 0 = x, \text{ untuk setiap } x \in E$$

$$x \wedge I = x \text{ dan } x \vee I = I, \text{ untuk setiap } x \in E$$

Contoh 2.6.23

Berdasarkan Contoh 2.6.8, telah terbukti bahwa $(E,\wedge,\vee)$ adalah latis. Berdasarkan Definisi 2.6.22, akan ditunjukkan $(E,\wedge,\vee,1,42)$ adalah latis terbatas

Bukti

Akan dibuktikan $(E,\wedge,\vee,1,42)$ adalah latis terbatas. Seperti terlihat dari Tabel 2.6 dan Tabel 2.7, $(E,\wedge,\vee,1,42)$ memenuhi kondisi berikut

- $x \wedge 1 = 1$ dan $x \vee 1 = x$, untuk setiap $x \in E$
- $x \wedge 42 = x$ dan $x \vee 42 = 42$, untuk setiap $x \in E$

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa $(E,\wedge,\vee,1,42)$ adalah latis terbatas

Contoh 2.6.24

Berdasarkan Contoh 2.6.9, telah terbukti bahwa $(P(N),\wedge,\vee)$ adalah latis. Berdasarkan Definisi 2.6.22, akan ditunjukkan $(P(N),\wedge,\vee,\emptyset,N)$ adalah latis terbatas

Bukti

Akan dibuktikan $(P(N),\wedge,\vee,\emptyset,N)$ adalah latis terbatas. Seperti terlihat dari Contoh 2.6.21, $(P(N),\wedge,\vee,\emptyset,N)$ memenuhi kondisi berikut

- $A \wedge \emptyset = \emptyset$ dan $A \vee \emptyset = A$, untuk setiap $A \in P(N)$
- $A \wedge N = A$ dan $A \vee N = N$, untuk setiap $A \in P(N)$

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa $(P(N),\wedge,\vee,\emptyset,N)$ adalah latis terbatas

2.7 Heyting Algebra, Hertz Algebra, Boolean Algebra, dan EQ-Algebra

Heyting algebra, *Hertz Algebra*, *Boolean Algebra*, dan *EQ-Algebra* merupakan struktur aljabar yang dilengkapi dengan tiga operasi biner. Berikut diberikan definisi *heyting algebra*, *hertz algebra*, *boolean algebra*, dan *EQ-algebra* dan juga definisi-definisi yang berkaitan dengan disertai contoh. Penulisan ini dikutip dari F. Zebardast (2016) dan *Lattice Theory*, Garrett Birkhoff (1940)

Definisi 2.7.1 (Implikasi)

Operasi biner *implikasi* $(\rightarrow)$ pada suatu himpunan tak kosong E untuk setiap $x, y \in E$ adalah

1. $x \rightarrow y = I$, jika dan hanya jika $x \leq y$
2. $x \rightarrow y = y$, jika dan hanya jika $x > y$
3. $I \rightarrow x = x$
4. $x \rightarrow I = I$
5. $x \rightarrow x = I$

Contoh 2.7.2

Diberikan himpunan $E = \{2,3,5\}$. Berdasarkan Definisi 2.7.1, akan ditunjukkan operasi biner *implikasi* $(\rightarrow)$ pada E dengan $I = 5$

1. $2 \rightarrow 3 = 5$, jika dan hanya jika $2 \leq 3$
   $2 \rightarrow 5 = 5$, jika dan hanya jika $2 \leq 5$
2. $3 \rightarrow 2 = 2$, jika dan hanya jika $3 > 2$
3. $5 \rightarrow 2 = 2$
   $5 \rightarrow 3 = 3$
4. $3 \rightarrow 5 = 5$
5. $2 \rightarrow 2 = 5$
   $3 \rightarrow 3 = 5$
   $5 \rightarrow 5 = 5$

Contoh 2.7.3

Diberikan himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$ dan $P(\mathbb{N}) = \{A | \emptyset \leq A \leq \mathbb{N}\}$ dengan relasi $\leq$ adalah bentuk subset $\subseteq$. Diberikan himpunan $N = \{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \ldots\}$ dan $P(N) = \{A | \emptyset \leq A \leq N\}$ dengan relasi $\leq$ adalah bentuk subset $\subseteq$. Jika $P(N) \subset P(\mathbb{N})$, maka berdasarkan Definisi 2.7.1 akan ditunjukkan operasi biner *implikasi* $(\rightarrow)$ pada $P(N)$ dengan $I = N$

1. $A \rightarrow B = N$, jika dan hanya jika $A \leq B$
2. $B \rightarrow A = A$, jika dan hanya jika $B > A$
3. $N \rightarrow A = A$
4. $A \rightarrow N = N$
5. $A \rightarrow A = N$
   $N \rightarrow N = N$

Definsi 2.7.4 (Ekuivalen)

Operasi biner *ekuivalen* $(\sim)$ pada suatu himpunan tak kosong E untuk setiap $x, y \in E$ adalah

1. $x \sim y = y \sim x$
2. $x \sim y = x$ jika dan hanya jika $x < y$
3. $x \sim y = I$ jika dan hanya jika $x = y$

Contoh 2.7.5

Diberikan himpunan $E = \{2,3,5\}$. Berdasarkan Definisi 2.7.4, akan ditunjukkan operasi biner *ekuivalen* $(\sim)$ pada E dengan $I = 5$

1. $2 \sim 2 = 2 \sim 2$
   $2 \sim 3 = 3 \sim 2$
   $2 \sim 5 = 5 \sim 2$
   $3 \sim 5 = 5 \sim 3$
2. $2 \sim 3 = 2$
   $2 \sim 5 = 2$
   $3 \sim 5 = 3$
3. $2 \sim 2 = 5$
   $3 \sim 3 = 5$
   $5 \sim 5 = 5$

Contoh 2.7.6

Diberikan himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$ dan $P(\mathbb{N}) = \{A | \emptyset \leq A \leq \mathbb{N}\}$ dengan relasi $\leq$ adalah bentuk subset $\subseteq$. Diberikan himpunan $N = \{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \dots\}$ dan

$P(N) = \{A | \emptyset \leq A \leq N\}$ dengan relasi $\leq$ adalah bentuk subset $\subseteq$. Jika $P(N) \subset P(\mathbb{N})$, maka berdasarkan Definisi 2.7.4, akan ditunjukkan operasi biner *ekuivalen* $(\sim)$ pada $P(N)$ dengan $I = N$

1. $A \sim A = A \sim A$
   $A \sim B = B \sim A$
   $A \sim N = N \sim A$
2. $A \sim B = A$
   $A \sim N = A$
3. $A \sim A = N$
   $N \sim N = N$

Definisi 2.7.7 (Product)

Operasi biner *product* $(\otimes)$ pada suatu himpunan tak kosong E untuk setiap $x, y \in E$ adalah

$$x \otimes y = x \wedge y = x, \text{ jika dan hanya jika } x \leq y$$

Contoh 2.7.8

Diberikan himpunan $E = \{2,3,5\}$ dengan operasi biner $\otimes$ untuk setiap $x, y \in E$. Berdasarkan Definisi 2.7.7, akan ditunjukkan hasil operasi pada E

- $2 \otimes 2 = 2 \wedge 2 = 2$, jika dan hanya jika $2 \leq 2$
- $2 \otimes 3 = 2 \wedge 3 = 2$, jika dan hanya jika $2 \leq 3$
- $2 \otimes 5 = 2 \wedge 5 = 2$, jika dan hanya jika $2 \leq 5$
- $3 \otimes 2 = 3 \wedge 2 = 2$
- $3 \otimes 3 = 3 \wedge 3 = 3$, jika dan hanya jika $3 \leq 3$
- $3 \otimes 5 = 3 \wedge 5 = 3$, jika dan hanya jika $3 \leq 5$
- $5 \otimes 2 = 5 \wedge 2 = 2$
- $5 \otimes 3 = 5 \wedge 3 = 3$
- $5 \otimes 5 = 5 \wedge 5 = 5$, jika dan hanya jika $5 \leq 5$

Contoh 2.7.8

Diberikan himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$ dan $P(\mathbb{N}) = \{A|\emptyset \leq A \leq \mathbb{N}\}$ dengan relasi $\leq$ adalah bentuk subset $\subseteq$. Diberikan himpunan $N = \{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \dots\}$ dan $P(N) = \{A|\emptyset \leq A \leq N\}$ dengan relasi $\leq$ adalah bentuk subset $\subseteq$. Jika $P(N) \subset P(\mathbb{N})$ dan terdapat operasi biner $\otimes$ untuk setiap $A \in P(N)$, maka berdasarkan Definisi 2.7.7 akan ditunjukkan hasil operasi pada $P(N)$

- $A \otimes A = A \wedge A = A$, jika dan hanya jika $A \leq A$
- $A \otimes B = A \wedge B = A$, jika dan hanya jika $A \leq B$
- $A \otimes N = A \wedge N = A$, jika dan hanya jika $A \leq N$
- $B \otimes A = B \wedge A = A$
- $B \otimes B = B \wedge B = B$, jika dan hanya jika $B \leq B$
- $B \otimes N = B \wedge \mathbb{N} = B$, jika dan hanya jika $B \leq N$
- $N \otimes A = N \wedge A = A$
- $N \otimes B = N \wedge B = B$
- $N \otimes N = N \wedge N = N$, jika dan hanya jika $N \leq N$

Definisi 2.7.9 (Heyting Algebra)

Jika H adalah himpunan tak kosong yang merupakan poset dan dilengkapi dengan operasi $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, dan elemen terbesar (I), maka $(H, \vee, \wedge, \rightarrow, I)$ disebut *heyting algebra* jika setiap $x, y, z \in E$ memenuhi kondisi berikut

1. $(H, \wedge, \vee)$ adalah suatu latis
2. $x \leq y \rightarrow z$ jika dan hanya jika $x \wedge y \leq z$

Contoh 2.7.10

Berdasarkan Contoh 2.6.8, telah terbukti bahwa $(E, \wedge, \vee)$ adalah latis. Berdasarkan Definisi 2.7.9, akan ditunjukkan $(E, \vee, \wedge, \rightarrow, 42)$ adalah *heyting algebra*

Bukti

Akan dibuktikan $(E,\vee,\wedge,\rightarrow,42)$ adalah *heyting algebra*. Diberikan $x = 2$, $y = 7$, dan $z = 21$. Maka

$$2 \leq 7 \rightarrow 21 = 2 \leq 42 \text{ jika dan hanya jika } 2 \wedge 7 \leq 21 = 2 \leq 21$$

Memakai cara yang sama untuk setiap $x, y, z \in E$ dapat disimpulkan bahwa $(E,\vee,\wedge,\rightarrow,42)$ adalah *heyting algebra* karena memenuhi Definisi 2.7.8

Contoh 2.7.11

Berdasarkan Contoh 2.6.9, telah terbukti bahwa $(P(N),\wedge,\vee)$ adalah latis. Berdasarkan Definisi 2.7.9, akan ditunjukkan $(P(N),\vee,\wedge,\rightarrow,N)$ adalah *heyting algebra*

Bukti

Akan dibuktikan $(P(N),\vee,\wedge,\rightarrow,N)$ adalah *heyting algebra*. Diberikan $x = A$, $y = B$, dan $z = B$. Maka

$$A \leq B \rightarrow B = B \text{ jika dan hanya jika } A \wedge B = A \leq B$$

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa $(P(N),\vee,\wedge,\rightarrow,N)$ adalah *heyting algebra* karena memenuhi Definisi 2.7.9

Definisi 2.7.12 (Boolean Algebra)

Jika B adalah himpunan tak kosong yang merupakan poset dan dilengkapi dengan operasi $\wedge$, $\vee$, operasi uner $\star$, elemen terkecil (0), dan elemen terbesar (I), maka $(B,\wedge,\vee,\star,0,I)$ disebut *boolean algebra* jika untuk setiap $x, y, z \in B$ memenuhi kondisi berikut

1. $(B,\wedge,\vee)$ adalah suatu distributif latis
2. Untuk semua $x \in B$ mempunyai elemen terkecil (0) dan elemen terbesar (I) yang mengikuti hukum

$$0 \wedge x = 0$$
$$0 \vee x = x$$
$$I \wedge x = x$$
$$I \vee x = I$$

3. E mempunyai operasi uner $x \rightarrow x^{\star}$ yang mengikuti hukum

$$x \wedge x^{\star} = inf\{x, x^{\star}\}$$

$$x \vee x^{\star} = sup\{x, x^{\star}\}$$
$$(x^{\star})^{\star} = x$$
$$(x \wedge y)^{\star} = x^{\star} \vee y^{\star}$$
$$(x \vee y)^{\star} = x^{\star} \wedge y^{\star}$$

Contoh 2.7.13

Memakai Contoh 2.6.8 dan Definisi 2.7.12, akan ditunjukkan $(E, \vee, \wedge, \star, 1, 42)$ adalah *boolean algebra* dengan operasi uner $\star$ adalah $x^{\star} = \frac{42}{x}$

Bukti

Akan dibuktikan $(E, \wedge, \vee, \star, 1, 42)$ adalah *boolean algebra* , seperti berikut

Tabel 2.8 Operasi uner ⋆ pada *E*

x	1	2	3	6	7	14	21	42
$x^{\star}$	42	21	14	7	6	3	2	1

- $x^{\star} = \frac{42}{1} = 42$
- $x^{\star} = \frac{42}{2} = 21$
- $x^{\star} = \frac{42}{3} = 14$
- $x^{\star} = \frac{42}{4} = 7$
- $x^{\star} = \frac{42}{7} = 6$
- $x^{\star} = \frac{42}{14} = 3$
- $x^{\star} = \frac{42}{21} = 2$
- $x^{\star} = \frac{42}{42} = 1$

i). Idempoten, diberikan $x = 2$. Maka

$$x \wedge x = 2 \wedge 2 = 2 = x$$
$$x \vee x = 2 \vee 2 = 2 = x$$

sehingga $x \wedge x = x \vee x = x$. Memakai cara yang sama untuk setiap $x, y, z \in E$ dan memakai Tabel 2.6 dan Tabel 2.7 berlaku $x \wedge x = x$ dan $x \vee x = x$

ii). Komutatif, dari Tabel 2.6 dan Tabel 2.7 tampak bahwa

$$x \vee y = y \vee x$$
$$x \wedge y = y \wedge x$$

iii). Asosiatif, diberikan $x = 2$, $y = 7$, dan $z = 21$. Maka

$$x \wedge (y \wedge z) = 2 \wedge (7 \wedge 21) = 2 \wedge 7 = 2$$
$$(x \wedge y) \wedge z = (2 \wedge 7) \wedge 21 = 2 \wedge 21 = 2$$

sehingga $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$. Memakai cara yang sama untuk setiap $x, y, z \in E$ dan memakai Tabel 2.7 berlaku $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$

$$x \vee (y \vee z) = 2 \vee (7 \vee 21) = 2 \vee 21 = 21$$
$$(x \vee y) \vee z = (2 \vee 7) \vee 21 = 7 \vee 21 = 21$$

sehingga $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$. Memakai cara yang sama untuk setiap $x, y, z \in E$ dan memakai Tabel 2.6 berlaku $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$

iv). Distributif, diberikan $x = 2$, $y = 7$, dan $z = 21$. Maka

$$x \wedge (y \vee z) = 2 \wedge (7 \vee 21) = 2 \wedge 21 = 2$$
$$(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = (2 \wedge 7) \vee (2 \wedge 21) = 2 \vee 2 = 2$$

sehingga $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$. Memakai cara yang sama untuk setiap $x, y, z \in E$ dan memakai Tabel 2.6 dan Tabel 2.7 berlaku $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

$$x \vee (y \wedge z) = 2 \vee (7 \wedge 21) = 2 \vee 7 = 7$$
$$(x \vee y) \wedge (x \vee z) = (2 \vee 7) \wedge (2 \vee 21) = 7 \wedge 21 = 7$$

sehingga $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$. Memakai cara yang sama untuk setiap $x, y, z \in E$ dan memakai Tabel 2.6 dan Tabel 2.7 berlaku $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

v). Absorpsi, diberikan $x = 2$, $y = 7$. Maka

$$x \wedge (x \vee y) = 2 \wedge (2 \vee 7) = 2 \wedge 7 = 2 = x$$
$$x \vee (x \wedge y) = 2 \vee (2 \wedge 7) = 2 \vee 2 = 2 = x$$

sehingga $x \wedge (x \vee y) = x \vee (x \wedge y) = x$. Memakai cara yang sama untuk setiap $x, y \in E$ dan memakai Tabel 2.6 dan Tabel 2.7 berlaku $x \wedge (x \vee y) = x$ dan $x \vee (x \wedge y) = x$

vi). Dari Tabel 2.6 dan Tabel 2.7, tampak bahwa untuk setiap $x \in E$ yang mengikuti

$$0 \vee x = x \text{ dan } 0 \wedge x = 0$$

mempunyai elemen terkecil $(0) = 1$

$$I \wedge x = x \text{ dan } I \vee x = I$$

mempunyai elemen terbesar $(I) = 42$

vii). Setiap $x \in E$ mempunyai operasi uner $\star$ seperti terlihat pada Tabel 2.8. Memakai Tabel 2.6 dan Tabel 2.7 tampak bahwa

$$x \wedge x^\star = inf\{x, x^\star\}$$
$$x \vee x^\star = sup\{x, x^\star\}$$

viii). Setiap $x \in E$ mempunyai operasi uner $\star$ seperti terlihat pada Tabel 2.8 dan memenuhi $(x^\star)^\star = x$

$$(1^\star)^\star = 42^\star = 1$$
$$(2^\star)^\star = 21^\star = 2$$
$$(3^\star)^\star = 14^\star = 3$$
$$(6^\star)^\star = 7^\star = 6$$
$$(7^\star)^\star = 6^\star = 7$$
$$(14^\star)^\star = 3^\star = 14$$
$$(21^\star)^\star = 2^\star = 21$$
$$(42^\star)^\star = 1^\star = 42$$

ix). Setiap $x \in E$ mempunyai operasi uner $\star$ seperti terlihat pada Tabel 2.8, diberikan $x = 2$, $y = 7$. Maka

$$(x \wedge y)^\star = (2 \wedge 7)^\star = 2^\star = 21$$
$$x^\star \vee y^\star = 2^\star \vee 7^\star = 21 \vee 6 = 21$$

sehingga $(x \wedge y)^\star = x^\star \vee y^\star$. Memakai cara yang sama untuk setiap $x, y \in E$ dan memakai Tabel 2.6 dan Tabel 2.7 berlaku $(x \wedge y)^\star = x^\star \vee y^\star$

$$(x \vee y)^\star = (2 \vee 7)^\star = 7^\star = 6$$
$$x^\star \wedge y^\star = 2^\star \wedge 7^\star = 21 \wedge 6 = 6$$

sehingga $(x \vee y)^\star = x^\star \wedge y^\star$. Memakai cara yang sama untuk setiap $x, y \in E$ dan memakai Tabel 2.6 dan Tabel 2.7 berlaku $(x \vee y)^\star = x^\star \wedge y^\star$

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa $(E, \wedge, \vee, \star, 1, 42)$ adalah *boolean algebra*

Contoh 2.7.14

Memakai Contoh 2.6.9 dan Definisi 2.7.12, akan ditunjukkan $(P(N), \vee, \wedge, \star, \emptyset, N)$ adalah *boolean algebra* dengan operasi uner $\star$ adalah $x^\star = A^\star = B$

Bukti

Akan dibuktikan $(P(N), \vee, \wedge, \star, \emptyset, N)$ adalah *boolean algebra* , seperti berikut

i). Idempoten, diberikan $x = A$. Maka

$$x \wedge x = A \wedge A = A = x$$

$$x \vee x = A \vee A = A = x$$

sehingga $x \wedge x = x \vee x = x$

ii). Komutatif, diberikan $x = A$, $y = B$. Maka

$$x \vee y = A \vee B = B \vee A = y \vee x$$

$$x \wedge y = A \wedge B = B \wedge A = y \wedge x$$

iii). Asosiatif, diberikan $x = A$, $y = B$, dan $z = B$. Maka

$$x \wedge (y \wedge z) = A \wedge (B \wedge B) = A \wedge B = A$$

$$(x \wedge y) \wedge z = (A \wedge B) \wedge B = A \wedge B = A$$

sehingga $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$

$$x \vee (y \vee z) = A \vee (B \vee B) = A \vee B = B$$

$$(x \vee y) \vee z = (A \vee B) \vee B = B \vee B = B$$

sehingga $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$

iv). Distributif, diberikan $x = A$, $y = B$, dan $z = B$. Maka

$$x \wedge (y \vee z) = A \wedge (B \vee B) = A \wedge B = A$$

$$(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = (A \wedge B) \vee (A \wedge B) = A \vee A = A$$

sehingga $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

$$x \vee (y \wedge z) = A \vee (B \wedge B) = A \vee B = B$$

$$(x \vee y) \wedge (x \vee z) = (A \vee B) \wedge (A \vee B) = B \wedge B = B$$

sehingga $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

v). Absorpsi, diberikan $x = A$, $y = B$. Maka

$$x \wedge (x \vee y) = A \wedge (A \vee B) = A \wedge B = A = x$$

$$x \vee (x \wedge y) = A \vee (A \wedge B) = A \vee A = A = x$$

sehingga $x \wedge (x \vee y) = x \vee (x \wedge y) = x$

vi). Tampak bahwa untuk setiap $A \in P(N)$

$$\emptyset \vee A = A \text{ dan } \emptyset \wedge A = \emptyset$$

mempunyai elemen terkecil $(0) = \emptyset$

$$N \wedge A = A \text{ dan } N \vee A = N$$

mempunyai elemen terbesar $(I) = N$

vii). Tampak bahwa setiap $A \in P(N)$ mempunyai operasi uner $\star$

$$x \wedge x^\star = A \wedge A^\star = A \wedge B = inf\{A, B\} = inf\{x, x^\star\}$$
$$x \vee x^\star = A \vee A^\star = A \vee B = sup\{A, B\} = sup\{x, x^\star\}$$

viii). Tampak bahwa setiap $A \in P(N)$ mempunyai operasi uner $\star$ dan memenuhi $(x^\star)^\star = x$

$$(x^\star)^\star = (A^\star)^\star = B^\star = A = x$$

ix). Tampak bahwa setiap $A \in P(N)$ mempunyai operasi uner $\star$

$$(x \wedge y)^\star = (A \wedge B)^\star = A^\star = B$$
$$x^\star \vee y^\star = A^\star \vee B^\star = B \vee A = B$$

sehingga $(x \wedge y)^\star = x^\star \vee y^\star$

$$(x \vee y)^\star = (A \vee B)^\star = B^\star = A$$
$$x^\star \wedge y^\star = A^\star \wedge B^\star = B \wedge A = A$$

sehingga $(x \vee y)^\star = x^\star \wedge y^\star$

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa $(P(N), \vee, \wedge, \star, \emptyset, N)$ adalah *boolean algebra*

Definisi 2.7.15 (Hertz Algebra)

Jika He adalah himpunan tak kosong yang merupakan poset dan dilengkapi dengan operasi $\wedge$, $\rightarrow$, dan elemen terbesar (I), maka $(He, \wedge, \rightarrow, I)$ disebut *hertz algebra* jika untuk setiap $x, y, z \in E$ memenuhi kondisi berikut

1. $x \rightarrow x = I$
2. $y \wedge (x \rightarrow y) = y$
3. $x \wedge (x \rightarrow y) = x \wedge y$
4. $x \rightarrow (y \wedge z) = (x \rightarrow y) \wedge (x \rightarrow z)$

Contoh 2.7.16

Memakai Contoh 2.6.8 dan Definisi 2.7.15, akan ditunjukkan $(E, \wedge, \rightarrow, 42)$ adalah *hertz algebra*

Bukti

Akan dibuktikan $(E, \wedge, \rightarrow, 42)$ adalah *hertz algebra*, seperti berikut

Tabel 2.9 Operasi implikasi ($\rightarrow$) pada *E*

$\rightarrow$	1	2	3	6	7	14	21	42
1	42	42	42	42	42	42	42	42
2	1	42	42	42	42	42	42	42
3	1	2	42	42	42	42	42	42
6	1	2	3	42	42	42	42	42
7	1	2	3	6	42	42	42	42
14	1	2	3	6	7	42	42	42
21	1	2	3	6	7	14	42	42
42	1	2	3	6	7	14	21	42

- $1 \rightarrow 1 = 1 \sim (1 \wedge 1) = 1 \sim 1 = 42$
- $2 \rightarrow 1 = 2 \sim (2 \wedge 1) = 2 \sim 1 = 1 \sim 2 = 1$
- $3 \rightarrow 1 = 3 \sim (3 \wedge 1) = 3 \sim 1 = 1 \sim 3 = 1$
- $6 \rightarrow 1 = 6 \sim (6 \wedge 1) = 6 \sim 1 = 1 \sim 6 = 1$
- $7 \rightarrow 1 = 7 \sim (7 \wedge 1) = 7 \sim 1 = 1 \sim 7 = 1$
- $14 \rightarrow 1 = 14 \sim (14 \wedge 1) = 14 \sim 1 = 1 \sim 14 = 1$
- $21 \rightarrow 1 = 21 \sim (21 \wedge 1) = 21 \sim 1 = 1 \sim 21 = 1$
- $42 \rightarrow 1 = 42 \sim (42 \wedge 1) = 42 \sim 1 = 1 \sim 42 = 1$

i). Dari Tabel 2.9, tampak bahwa setiap $x \in E$ berlaku $x \rightarrow x = 42$

ii). Diberikan $x = 2, y = 7$. Maka

$$7 \wedge (2 \rightarrow 7) = 7 \wedge 42 = 7$$

sehingga $y \wedge (x \rightarrow y) = y$. Memakai cara yang sama untuk setiap $x, y \in E$ dan memakai Tabel 2.7 dan Tabel 2.9 berlaku $y \wedge (x \rightarrow y) = y$

iii). Diberikan $x = 2, y = 7$. Maka

$$2 \wedge (2 \rightarrow 7) = 2 \wedge 42 = 2$$
$$x \wedge y = 2 \wedge 7 = 2$$

sehingga $x \wedge (x \rightarrow y) = x \wedge y$. Memakai cara yang sama untuk setiap $x, y \in E$ dan memakai Tabel 2.7 dan Tabel 2.9 berlaku $x \wedge (x \rightarrow y) = x \wedge y$

iv). Diberikan $x = 2, y = 7, z = 21$. Maka

$$x \rightarrow (y \wedge z) = 2 \rightarrow (7 \wedge 21) = 2 \rightarrow 7 = 42$$
$$(x \rightarrow y) \wedge (x \rightarrow z) = (2 \rightarrow 7) \wedge (2 \rightarrow 21) = 42 \wedge 42 = 42$$

sehingga $x \to (y \wedge z) = (x \to y) \wedge (x \to z)$. Memakai cara yang sama untuk setiap $x, y, z \in E$ dan memakai Tabel 2.7 dan Tabel 2.9 berlaku $x \to (y \wedge z) = (x \to y) \wedge (x \to z)$

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa $(E, \wedge, \to, 42)$ adalah *hertz algebra*

Contoh 2.7.17

Memakai Contoh 2.6.9 dan Definisi 2.7.15, akan ditunjukkan $(P(N), \wedge, \to, N)$ adalah *hertz algebra*

Bukti

Akan dibuktikan $(P(N), \wedge, \to, N)$ adalah *hertz algebra*, seperti berikut

i). Diberikan $x = A$. Maka

$$x \to x = A \to A = A \sim (A \wedge A) = A \sim A = \mathbb{N} = I$$

ii). Diberikan $x = A, y = B$. Maka

$$y \wedge (x \to y) = B \wedge (A \to B) = B \wedge \mathbb{N} = B = y$$

sehingga $y \wedge (x \to y) = y$

iii). Diberikan $x = A, y = B$. Maka

$$x \wedge (x \to y) = A \wedge (A \to B) = A \wedge N = A$$

$$x \wedge y = A \wedge B = A$$

sehingga $x \wedge (x \to y) = x \wedge y$

iv). Diberikan $x = A, y = B, z = B$. Maka

$$x \to (y \wedge z) = A \to (B \wedge B) = A \to B = N$$

$$(x \to y) \wedge (x \to z) = (A \to B) \wedge (A \to B) = N \wedge N = N$$

sehingga $x \to (y \wedge z) = (x \to y) \wedge (x \to z)$

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa $(P(N), \wedge, \to, N)$ adalah *hertz algebra*

Definisi 2.7.18 (EQ-Algebra)

Jika Eq adalah himpunan tak kosong yang merupakan poset dan dilengkapi dengan operasi $\wedge$, $\otimes$, $\sim$, dan elemen terbesar (I), maka $(Eq, \wedge, \otimes, \sim, I)$ disebut sebagai *EQ-algebra* jika untuk setiap $x, y, z, w \in E$ memenuhi kondisi berikut

1. $(Eq, \wedge, I)$ adalah monoid idempoten komutatif
2. $(Eq, \otimes, I)$ adalah monoid
3. $x \sim x = I$
4. $\big((x \wedge y) \sim z\big) \otimes (w \sim x) \leq z \sim (w \wedge y)$
5. $(x \sim y) \otimes (z \sim w) \leq (x \sim z) \sim (y \sim w)$
6. $(x \wedge y \wedge z) \sim x \leq (x \wedge y) \sim x$
7. $x \otimes y \leq x \sim y$

Sebuah *EQ-algebra* adalah bagus jika $x \sim y = x$ dan $x < y$ untuk semua $x \in Eq$.

Contoh 2.7.19

Memakai Contoh 2.6.8 dan Definisi 2.7.18, akan ditunjukkan $(E, \wedge, \otimes, \sim, 42)$ adalah *EQ-algebra*

Bukti

Akan dibuktikan $(E, \wedge, \otimes, \sim, 42)$ adalah *EQ-algebra*, seperti berikut

Tabel 2.10 Operasi product $(\otimes)$ pada *E*

$\otimes$	1	2	3	6	7	14	21	42
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2	2	2	2
3	1	2	3	3	3	3	3	3
6	1	2	3	6	6	6	6	6
7	1	2	3	6	7	7	7	7
14	1	2	3	6	7	14	14	14
21	1	2	3	6	7	14	21	21
42	1	2	3	6	7	14	21	42

- $1 \wedge 1 = 1, 1 \leq 1$
- $2 \wedge 1 = 1$
- $3 \wedge 1 = 1$
- $6 \wedge 1 = 1$
- $7 \wedge 1 = 1$
- $14 \wedge 1 = 1$
- $21 \wedge 1 = 1$
- $42 \wedge 1 = 1$
- $1 \wedge 2 = 1, 1 \leq 2$
- $2 \wedge 2 = 2, 2 \leq 2$
- $3 \wedge 2 = 2$
- $6 \wedge 2 = 2$
- $7 \wedge 2 = 2$
- $14 \wedge 2 = 2$
- $21 \wedge 2 = 2$
- $42 \wedge 2 = 2$

Tabel 2.11 Operasi ekuivalen $(\sim)$ pada E

$\sim$	1	2	3	6	7	14	21	42
1	42	1	1	1	1	1	1	1
2	1	42	2	2	2	2	2	2
3	1	2	42	3	3	3	3	3
6	1	2	3	42	6	6	6	6
7	1	2	3	6	42	7	7	7
14	1	2	3	6	7	42	14	14
21	1	2	3	6	7	14	42	21
42	1	2	3	6	7	14	21	42

- $1 \sim 1 = 42$
- $2 \sim 1 = 1 \sim 2 = 1$
- $3 \sim 1 = 1 \sim 3 = 1$
- $6 \sim 1 = 1 \sim 6 = 1$
- $7 \sim 1 = 1 \sim 7 = 1$
- $14 \sim 1 = 1 \sim 14 = 1$
- $21 \sim 1 = 1 \sim 21 = 1$
- $42 \sim 1 = 1 \sim 42 = 1$
- $1 \sim 2 = 1$
- $2 \sim 2 = 42$
- $3 \sim 2 = 2 \sim 3 = 2$
- $6 \sim 2 = 2 \sim 6 = 2$
- $7 \sim 2 = 2 \sim 7 = 2$
- $14 \sim 2 = 2 \sim 14 = 2$
- $21 \sim 2 = 2 \sim 21 = 2$
- $42 \sim 2 = 2 \sim 42 = 2$

1. $(E, \wedge, 42)$ adalah monoid idempoten komutatif
   i). Tertutup, dari Tabel 2.7 tampak bahwa $x \wedge y \in E$
   ii). Asosiatif, diberikan $x = 2$, $y = 7$, dan $z = 21$. Maka
   $$x \wedge (y \wedge z) = 2 \wedge (7 \wedge 21) = 2 \wedge 7 = 2$$
   $$(x \wedge y) \wedge z = (2 \wedge 7) \wedge 21 = 2 \wedge 21 = 2$$
   sehingga $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$. Memakai cara yang sama untuk setiap $x, y, z \in E$ dan memakai Tabel 2.7 berlaku $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$
   iii). Dari Tabel 2.6, terlihat bahwa $42 \in E$ adalah elemen identitas untuk setiap $x \in E$ sedemikian sehingga berlaku
   $$42 \wedge x = x \wedge 42 = x$$
   iv). Idempoten , diberikan $x = 2$. Maka
   $$x \wedge x = 2 \wedge 2 = 2 = x$$
   Memakai cara yang sama untuk setiap $x, y, z \in E$ dan memakai Tabel 2.7 berlaku $x \wedge x = x$

v). Komutatif, dari Tabel 2.7 tampak bahwa $x \wedge y = y \wedge x$

2. $(E, \otimes, 42)$ adalah monoid

i). Tertutup, dari Tabel 2.10 tampak bahwa $x \otimes y \in E$

ii). Asosiatif, diberikan $x = 2$, $y = 7$, dan $z = 21$. Maka

$$x \otimes (y \otimes z) = 2 \otimes (7 \otimes 21) = 2 \otimes 7 = 2$$
$$(x \otimes y) \otimes z = (2 \otimes 7) \otimes 21 = 2 \otimes 21 = 2$$

sehingga $x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z$. Dengan cara yang sama, untuk setiap $x, y, z \in E$ dan memakai Tabel 2.10 berlaku $x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z$

iii). Dari Tabel 2.10, terlihat bahwa $42 \in E$ adalah elemen identitas. Untuk setiap $x \in E$ sedemikian sehingga berlaku

$$42 \otimes x = x \otimes 42 = x$$

3. Dari Tabel 2.11, terlihat bahwa $x \sim x = 1$

4. Diberikan $x = 2$, $y = 7$, $w = 14$, dan $z = 21$. Maka

$$\begin{aligned} \big((x \wedge y) \sim z\big) \otimes (w \sim x) &= \big((2 \wedge 7) \sim 21\big) \otimes (14 \sim 2) \\ &= (2 \sim 21) \otimes (14 \sim 2) \\ &= 2 \otimes 2 \\ &= 2 \end{aligned}$$
$$z \sim (w \wedge y) = 21 \sim (14 \wedge 7) = 21 \sim 7 = 7$$

Sehingga $\big((x \wedge y) \sim z\big) \otimes (w \sim x) \leq z \sim (w \wedge y)$. Dengan cara yang sama untuk setiap $x, y, w, z \in E$ dan memakai Tabel 2.7, Tabel 2.10, dan Tabel 2.11 berlaku $\big((x \wedge y) \sim z\big) \otimes (w \sim x) \leq z \sim (w \wedge y)$

5. Diberikan $x = 2$, $y = 7$, $w = 14$, dan $z = 21$. Maka

$$(x \sim y) \otimes (z \sim w) = (2 \sim 7) \otimes (21 \sim 14) = 2 \otimes 2 = 2$$
$$(x \sim z) \sim (y \sim w) = (2 \sim 21) \sim (7 \sim 14) = 2 \sim 7 = 2$$

Sehingga $(x \sim y) \otimes (z \sim w) \leq (x \sim z) \sim (y \sim w)$. Dengan cara yang sama, untuk setiap $x, y, w, z \in E$ dan memakai Tabel 2.10 dan Tabel 2.11 berlaku $(x \sim y) \otimes (z \sim w) \leq (x \sim z) \sim (y \sim w)$

6. Diberikan $x = 2$, $y = 7$, dan $z = 21$. Maka

$$(x \wedge y \wedge z) \sim x = (2 \wedge 7 \wedge 21) \sim 2 = 2 \sim 2 = 42$$

$$(x \wedge y) \sim x = (2 \wedge 7) \sim 2 = 2 \sim 2 = 42$$

Sehingga $(x \wedge y \wedge z) \sim x \leq (x \wedge y) \sim x$. Memakai cara yang sama untuk setiap $x, y, z \in E$ dan memakai Tabel 2.7 dan Tabel 2.11 berlaku $(x \wedge y \wedge z) \sim x \leq (x \wedge y) \sim x$

7. Diberikan $x = 2$ dan $y = 7$. Maka

$$x \otimes y = 2 \otimes 7 = 2$$
$$x \sim y = 2 \sim 7 = 2$$

Sehingga $x \otimes y \leq x \sim y$. Dengan cara yang sama untuk setiap $x, y \in E$ dan memakai Tabel 2.10 dan Tabel 2.11 berlaku $x \otimes y \leq x \sim y$

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa $(E, \wedge, \otimes, \sim, 42)$ adalah *EQ-algebra*. Dari Tabel 2.11 tampak bahwa $x \sim y = x$ jika dan hanya jika $x < y$ sehingga *EQ-algebra* adalah bagus

Contoh 2.7.20

Memakai Contoh 2.6.9 dan Definisi 2.7.18, akan ditunjukkan $(P(N), \wedge, \otimes, \sim, N)$ adalah *EQ-algebra*

Bukti

Akan dibuktikan $(P(N), \wedge, \otimes, \sim, N)$ adalah *EQ-algebra*, seperti berikut

1. $(P(N), \wedge, N)$ adalah monoid idempoten komutatif
   - i). Tertutup, tampak bahwa $A \wedge B \in P(N)$
   - ii). Asosiatif, diberikan $x = A$, $y = B$, dan $z = B$. Maka
     $$x \wedge (y \wedge z) = A \wedge (B \wedge B) = A \wedge B = A$$
     $$(x \wedge y) \wedge z = (A \wedge B) \wedge B = A \wedge B = A$$
     sehingga $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$
   - iii). Terlihat bahwa $N \in P(N)$ adalah elemen identitas untuk setiap $A \in P(N)$ sedemikian sehingga berlaku
     $$N \wedge A = A \wedge N = A$$
   - iv). Idempoten , diberikan $x = A$. Maka
     $$x \wedge x = A \wedge A = A = x$$
     sehingga $x \wedge x = x$
   - v). Komutatif, tampak bahwa $A \wedge B = B \wedge A$

2. $(P(N), \otimes, N)$ adalah monoid
   i). Tertutup, tampak bahwa $A \otimes B \in P(N)$
   ii). Asosiatif, diberikan $x = A$, $y = B$, dan $z = B$. Maka
   $$x \otimes (y \otimes z) = A \otimes (B \otimes B) = A \otimes B = A$$
   $$(x \otimes y) \otimes z = (A \otimes B) \otimes B = A \otimes B = A$$
   sehingga $x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z$
   iii). Diberikan $A \otimes N = A \wedge N = A$, jika dan hanya jika $A \leq \mathbb{N}$. Terlihat bahwa $N \in P(N)$ adalah elemen identitas, maka untuk setiap $A \in P(N)$ berlaku
   $$N \otimes A = A \otimes N = A$$
3. Terlihat bahwa $A \sim A = N$
4. Diberikan $x = A$, $y = B$, $w = B$, dan $z = B$. Maka
   $$\begin{aligned}\big((x \wedge y) \sim z\big) \otimes (w \sim x) &= \big((A \wedge B) \sim B\big) \otimes (B \sim A)\\ &= (A \sim B) \otimes (B \sim A)\\ &= A \otimes A\\ &= A\end{aligned}$$
   $$z \sim (w \wedge y) = B \sim (B \wedge B) = B \sim B = B$$
   Sehingga $\big((x \wedge y) \sim z\big) \otimes (w \sim x) \leq z \sim (w \wedge y)$
5. Diberikan $x = A$, $y = B$, $w = B$, dan $z = B$. Maka
   $$(x \sim y) \otimes (z \sim w) = (A \sim B) \otimes (B \sim B) = A \otimes A = A$$
   $$(x \sim z) \sim (y \sim w) = (A \sim B) \sim (B \sim B) = A \sim B = A$$
   Sehingga $(x \sim y) \otimes (z \sim w) \leq (x \sim z) \sim (y \sim w)$.
6. Diberikan $x = A$, $y = B$, dan $z = B$. Maka
   $$(x \wedge y \wedge z) \sim x = (A \wedge B \wedge B) \sim A = A \sim A = N$$
   $$(x \wedge y) \sim x = (A \wedge B) \sim A = A \sim A = N$$
   Sehingga $(x \wedge y \wedge z) \sim x \leq (x \wedge y) \sim x$
7. Diberikan $x = A$ dan $y = B$. Maka
   $$x \otimes y = A \otimes B = A$$
   $$x \sim y = A \sim B = A$$
   Sehingga $x \otimes y \leq x \sim y$

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa $(P(N), \wedge, \otimes, \sim, N)$ adalah *EQ-algebra*. Terlihat bahwa

$$A \sim B = A, \text{ jika dan hanya jika } A < B$$

sehingga *EQ-algebra* adalah bagus

BAB III
PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibahas definisi, teorema, proposisi, dan syarat cukup di mana *Equality Algebra* menjadi *Heyting Algebra*, *Hertz Algebra*, *Boolean Algebra*, dan *EQ-Algebra* serta pembuktiannya.

3.1 Equality Algebra

Equality algebra merupakan struktur aljabar yang dilengkapi dengan dua operasi biner dan memenuhi kondisi-kondisi tertentu. Pada subbab ini akan diberikan definisi, lemma, dan proposisi *equality algebra*. Penulisan ini dikutip dari Sandor Jenei (2012)

Definisi 3.1.1 (Equality Algebra)

Aljabar $(E, \wedge, \sim, I)$ disebut sebagai *equality algebra*, jika untuk setiap $x, y, z \in E$ memenuhi kondisi sebagai berikut

1. $(E, \wedge, I)$ adalah monoid idempoten integral komutatif
2. $x \sim y = y \sim x$
3. $x \sim x = I$
4. $x \sim y = x$ jika dan hanya jika $x < y$
5. $x \leq y \leq z$, maka $x \sim z \leq y \sim z$ dan $x \sim z \leq x \sim y$
6. $x \sim y \leq (x \wedge z) \sim (y \wedge z)$
7. $x \sim y \leq (x \sim z) \sim (y \sim z)$, dimana $x \leq y$ jika dan hanya jika $x \wedge y = x$ untuk setiap $x, y \in E$

Dengan meggunakan kondisi *equality algebra* di atas, maka operasi biner *implikasi* dan *bi-implikasi* di definisikan seperti berikut

a. $x \rightarrow y = x \sim (x \wedge y)$
b. $x \leftrightarrow y = (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$

Contoh 3.1.2

Dengan menggunakan Contoh 2.6.8 dan Definisi 3.1.1, akan ditunjukkan $(E, \wedge, \sim, 42)$ adalah *equality algebra*

Bukti

Akan dibuktikan $(E,\wedge,\sim,42)$ adalah *equality algebra*, seperti berikut

1. $(E-\{1\},\wedge,42)$ adalah monoid idempoten integral komutatif
   i). Tertutup, dari Tabel 2.7 tampak bahwa $x\wedge y\in E$
   ii). Asosiatif, diberikan $x=2$, $y=7$, dan $z=21$. Maka
   $$x\wedge(y\wedge z)=2\wedge(7\wedge 21)=2\wedge 7=2$$
   $$(x\wedge y)\wedge z=(2\wedge 7)\wedge 21=2\wedge 21=2$$
   sehingga $x\wedge(y\wedge z)=(x\wedge y)\wedge z$. Memakai cara yang sama untuk setiap $x,y,z\in E$ dan memakai Tabel 2.7 berlaku $x\wedge(y\wedge z)=(x\wedge y)\wedge z$
   iii). Dari Tabel 2.7, terlihat bahwa $42\in E$ adalah elemen identitas untuk setiap $x\in E$ sedemikian sehingga berlaku
   $$42\wedge x=x\wedge 42=x$$
   iv). Idempoten , diberikan $x=2$. Maka
   $$x\wedge x=2\wedge 2=2=x$$
   Dengan cara yang sama untuk setiap $x,y,z\in E$ dan memakai Tabel 2.7 berlaku $x\wedge x=x$
   v). Dari Tabel 2.7, terlihat bahwa setiap $x\in E-\{1\}$ tidak memuat pembagi nol sejati karena tidak terdapat $y\in E-\{1\}$ sedemikian sehingga berlaku $x\wedge y=1$
   vi). Komutatif, dari Tabel 2.7 tampak bahwa $x\wedge y=y\wedge x$
2. Dari Tabel 2.11, terlihat bahwa $x\sim y=y\sim x$
3. Dari Tabel 2.11, terlihat bahwa $x\sim x=I$
4. Dari Tabel 2.11, terlihat bahwa $x\sim 1=x$
5. Diberikan $x=2$, $y=7$, dan $z=21$. Maka
   $$x\sim z=2\sim 21=2$$
   $$y\sim z=7\sim 21=7$$
   $$x\sim y=2\sim 7=2$$
   Sehingga $x\leq y\leq z$, maka $x\sim z\leq y\sim z$ dan $x\sim z\leq x\sim y$. Memakai cara yang sama untuk setiap $x,y,z\in E$ dan memakai Tabel 2.11 berlaku $x\sim z\leq y\sim z$ dan $x\sim z\leq x\sim y$

6. Diberikan $x = 2$, $y = 7$, dan $z = 21$. Maka
$$x \sim y = 2 \sim 7 = 2$$
$$(x \wedge z) \sim (y \wedge z) = (2 \wedge 21) \sim (7 \wedge 21) = 2 \sim 7 = 2$$
Sehingga $x \sim y \leq (x \wedge z) \sim (y \wedge z)$. Memakai cara yang sama untuk setiap $x, y, z \in E$ dan memakai Tabel 2.7 dan Tabel 2.11 berlaku $x \sim y \leq (x \wedge z) \sim (y \wedge z)$
7. Diberikan $x = 2$, $y = 7$, dan $z = 21$. Maka
$$x \sim y = 2 \sim 7 = 2$$
$$(x \sim z) \sim (y \sim z) = (2 \sim 21) \sim (7 \sim 21) = 2 \sim 7 = 2$$
Sehingga $x \sim y \leq (x \sim z) \sim (y \sim z)$. Memakai cara yang sama untuk setiap $x, y, z \in E$ dan memakai Tabel 2.11 berlaku $x \sim y \leq (x \sim z) \sim (y \sim z)$

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa $(E, \wedge, \sim, 42)$ adalah *equality algebra*

Contoh 3.1.3

Dengan menggunakan Contoh 2.6.9 dan Definisi 3.1.1, akan ditunjukkan $(P(N), \wedge, \sim, N)$ adalah *equality algebra*

Bukti

Akan dibuktikan $(P(N), \wedge, \sim, N)$ adalah *equality algebra*, seperti berikut

1. $(P(N) - \{\emptyset\}, \wedge, N)$ adalah monoid idempoten integral komutatif
   i). Tertutup, tampak bahwa $A \wedge B \in P(N)$
   ii). Asosiatif, diberikan $x = A$, $y = B$, dan $z = B$. Maka
   $$x \wedge (y \wedge z) = A \wedge (B \wedge B) = A \wedge B = A$$
   $$(x \wedge y) \wedge z = (A \wedge B) \wedge B = A \wedge B = A$$
   sehingga $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$
   iii). Diberikan
   $$\emptyset \wedge N = \emptyset$$
   $$A \wedge N = A$$
   $$B \wedge N = B$$
   $$N \wedge \emptyset = \emptyset$$
   $$N \wedge A = A$$

$$N \wedge B = B$$

terlihat bahwa $N \in P(N)$ adalah elemen identitas. Untuk setiap $A \in P(N)$ berlaku

$$N \wedge A = A \wedge N = A$$

iv). Idempoten , diberikan $x = A$. Maka

$$x \wedge x = A \wedge A = A = x$$

sehingga $x \wedge x = x$

v). Terlihat bahwa setiap $A \in P(N) - \{\emptyset\}$ tidak memuat pembagi nol sejati karena tidak terdapat $B \in P(N) - \{\emptyset\}$ sedemikian sehingga berlaku $A \wedge B = \emptyset$

vi). Komutatif, terlihat bahwa $A \wedge B = B \wedge A$

2. Dari Contoh 2.7.6, terlihat bahwa $A \sim B = B \sim A$
3. Dari Contoh 2.7.6, terlihat bahwa $A \sim A = N$
4. Dari Contoh 2.7.6, terlihat bahwa $A \sim B = A$
5. Diberikan $x = A$, $y = B$, dan $z = B$. Maka

$$x \sim z = A \sim B = A$$
$$y \sim z = B \sim B = B$$
$$x \sim y = A \sim B = A$$

   Sehingga $x \leq y \leq z$, maka $x \sim z \leq y \sim z$ dan $x \sim z \leq x \sim y$
6. Diberikan $x = A$, $y = B$, dan $z = B$. Maka

$$x \sim y = A \sim B = A$$
$$(x \wedge z) \sim (y \wedge z) = (A \wedge B) \sim (B \wedge B) = A \sim B = A$$

   Sehingga $x \sim y \leq (x \wedge z) \sim (y \wedge z)$
7. Diberikan $x = A$, $y = B$, dan $z = B$. Maka

$$x \sim y = A \sim B = A$$
$$(x \sim z) \sim (y \sim z) = (A \sim B) \sim (B \sim B) = A \sim \mathbb{N} = A$$

   Sehingga $x \sim y \leq (x \sim z) \sim (y \sim z)$

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa $(P(N), \wedge, \sim, N)$ adalah *equality algebra*

Proposisi 3.1.4

Jika $(E, \wedge, \sim, I)$ adalah *equality algebra*, maka kondisi di bawah terpenuhi untuk setiap $x, y, z \in E$:

1. $x \sim y \leq x \leftrightarrow y \leq x \rightarrow y$
2. $x \rightarrow y = I$ jika dan hanya jika $x \leq y$
3. $I \rightarrow x = x, x \rightarrow I = I, x \rightarrow x = I$
4. $x \leq y \rightarrow x$
5. $x \leq (x \rightarrow y) \rightarrow y$
6. $x \rightarrow y \leq (y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z)$
7. $x \leq y \rightarrow z$ jika dan hanya jika $y \leq x \rightarrow z$
8. $x \rightarrow (y \rightarrow z) = y \rightarrow (x \rightarrow z)$
9. $y \leq x$ maka $x \leftrightarrow y = x \rightarrow y = x \sim y$
10. $x \leq y$ maka $y \rightarrow z \leq x \rightarrow z, z \rightarrow x \leq z \rightarrow y$

Bukti

Akan dibuktikan kondisi dari proposisi 3.1.4, seperti berikut

1. $x \sim y \leq x \leftrightarrow y \leq x \rightarrow y$

$x \sim y \leq (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x) \leq$ (Definisi 3.1.1 (b))

$x \sim (x \wedge y)$ (Definisi 3.1.1 (a))

$x \sim y \leq \big(x \sim (x \wedge y)\big) \wedge \big(y \sim (y \wedge x)\big) \leq$ (Definisi 3.1.1 (a))

$(x \sim x) \wedge (x \sim y)$ (Distributif kiri)

$x \sim y \leq \big((x \sim x) \wedge (x \sim y)\big) \wedge (y \sim y)$

$\wedge (y \sim x) \leq (x \sim x) \wedge (x \sim y)$ (Distributif kiri)

$x \sim y \leq \Big(\big((I \wedge x) \sim (I \wedge y)\big) \wedge \big((I \wedge y) \sim (I \wedge x)\big)\Big) \leq$

$(I \wedge x) \sim (I \wedge y)$ (Definisi 3.1.1 (3))

$x \sim y \leq \big((x \sim y) \wedge (y \sim x)\big) \leq x \sim y$ (Definisi 2.6.1)

$x \sim y \leq x \sim y \leq x \sim y$ (Definisi 3.1.1 (2))

2. $x \rightarrow y = I$

$= x \sim (x \wedge y)$ (Definisi 3.1.1(a))

$= \big((x \sim x) \wedge (x \sim y)\big)$ (Distributif kiri)

$= \big((I \wedge x) \sim (I \wedge y)\big)$ (Definisi 3.1.1 (3))

$= x \sim y$ (Definisi 2.6.1)

$x \rightarrow y = 1$ jika dan hanya jika $x \leq y$ (Definisi 3.1.1 (3))

3. $I \rightarrow x = x$

$= I \sim (I \wedge x)$ (Definisi 3.1.1(a))

$= ((I \sim I) \wedge (I \sim x))$ (Distributif kiri)

$= I \wedge x$ (Definisi 3.1.1 (3) dan (4))

$I \rightarrow x = x$ (Definisi 2.6.1)

dan

$x \rightarrow I = I$

$= x \sim (x \wedge I)$ (Definisi 3.1.1 (a))

$= ((x \sim x) \wedge (x \sim I))$ (Distributif kiri)

$= I \wedge x$ (Definisi 3.1.1 (3) dan (4))

$x \rightarrow I = I$ (Proposisi 3.1.3 (2))

dan

$x \rightarrow x = I$

$= x \sim (x \wedge x)$ (Definisi 3.1.1 (a))

$= ((x \sim x) \wedge (x \sim x))$ (Distributif kiri)

$= I \wedge I$ (Definisi 3.1.1 (3) dan (4))

$x \rightarrow x = I$ (Definisi 2.6.1)

4. $x \leq y \rightarrow x$

   $x \leq y \sim (y \wedge x)$ (Definisi 3.1.1 (a))

   $x \leq (y \sim y) \wedge (y \sim x)$ (Distributif kiri)

   $x \leq (I \wedge y) \sim (I \wedge x)$ (Definisi 3.1.1 (3))

   $x \leq y \sim x$ (Definisi 2.6.1)

5. $x \leq (x \rightarrow y) \rightarrow y$

   $x \leq (x \sim (x \wedge y)) \sim ((x \sim (x \wedge y)) \wedge y)$ (Definisi 3.1.1(a))

   $x \leq ((x \sim x) \wedge (x \sim y)) \sim$ (Distributif kiri)

   $(((x \sim x) \wedge (x \sim y)) \wedge y)$ (Distributif kiri)

   $x \leq ((I \wedge x) \sim (I \wedge y)) \sim$ (Definisi 3.1.1 (3))

   $(((I \wedge x) \sim (I \wedge y)) \wedge y)$ (Definisi 3.1.1 (3))

   $x \leq (x \sim y) \sim ((x \sim y) \wedge y)$ (Definisi 2.6.1)

   $x \leq (x \sim y) \sim ((x \wedge y) \sim (y \wedge y))$ (Distributif kanan)

   $x \leq (x \sim y) \sim ((x \wedge y) \sim y)$ (Definisi 2.6.1)

   $x \leq (x \sim y) \sim ((x \sim y) \wedge (y \sim y))$ (Distributif kanan)

$x \leq (x \sim y) \sim \big((x \sim y) \wedge I\big)$ (Definisi 3.1.1 (3))
$x \leq (x \sim y) \sim \big((x \wedge I) \sim (y \wedge I)\big)$ (Distributif kanan)
$x \leq (x \sim y) \sim (x \sim y)$ (Definisi 2.6.1)
$x \leq I$ (Definisi 3.1.1 (3))

6. $x \to y \leq (y \to z) \to (x \to z)$
$x \sim (x \wedge y) \leq \big(y \sim (y \wedge z)\big) \to \big(x \sim (x \wedge z)\big)$(Definisi 3.1.1 (a))
$(x \sim x) \wedge (x \sim y) \leq \big((y \sim y) \wedge (y \sim z)\big) \to$ (Distributif kiri)
$\big((x \sim x) \wedge (x \sim z)\big)$ (Distributif kiri)
$(I \wedge x) \sim (I \wedge y) \leq \big((I \wedge y) \sim (I \wedge z)\big) \to$ (Definisi 3.1.1 (3))
$\big((I \wedge x) \sim (I \wedge z)\big)$ (Definisi 3.1.1 (3))
$x \sim y \leq (y \sim z) \to (x \sim z)$ (Definisi 2.6.1)
$x \sim y \leq (y \sim z) \sim \big((y \sim z) \wedge (x \sim z)\big)$ (Definisi 3.1.1 (a))
$x \sim y \leq \big((y \sim z) \sim (y \sim z)\big) \wedge$
$\big((y \sim z) \sim (x \sim z)\big)$ (Distributif kiri)
$x \sim y \leq I \wedge \big((y \sim z) \sim (x \sim z)\big)$ (Definisi 3.1.1 (3))
$x \sim y \leq (y \sim z) \sim (x \sim z)$ (Definisi 2.6.1)
$x \sim y \leq (x \sim y) \sim z$ (Distributif kanan)

7. $x \leq y \to z$
$x \leq (x \to z) \to z$ (Proposisi 3.1.4 (7))
$x \leq x \to (z \to z)$ (Asosiatif)
$x \leq x \to I$ (Proposisi 3.1.4 (3))
$x \leq I$ (Proposisi 3.1.4 (3))

8. $x \to (y \to z) = y \to (x \to z)$
$(x \to y) \to z = (y \to x) \to z$ (Asosiatif)
$\big(x \sim (x \wedge y)\big) \to z = \big(y \sim (y \wedge x)\big) \to z$ (Definisi 3.1.1 (a))
$\big((x \sim x) \wedge (x \sim y)\big) \to z =$ (Distributif kiri)
$\big((y \sim y) \wedge (y \sim x)\big) \to z$ (Distributif kiri)
$\big(I \wedge (x \sim y)\big) \to z = \big(I \wedge (y \sim x)\big) \to z$ (Definisi 3.1.1 (3))
$\big((I \wedge x) \sim (I \wedge y)\big) \to z =$ (Distributif kiri)
$\big((I \wedge y) \sim (I \wedge x)\big) \to z$ (Distributif kiri)

$(x \sim y) \rightarrow z = (y \sim x) \rightarrow z$ (Definisi 2.6.1)

9. $x \leftrightarrow y = x \rightarrow y = x \sim y$

   $x \leftrightarrow x = x \rightarrow x = x \sim x$ (Proposisi 3.1.4 (9))

   $(x \rightarrow x) \wedge (x \rightarrow x) = x \rightarrow x = x \sim x$ (Definisi 3.1.1 (b))

   $I \wedge I = I = I$ (Proposisi 3.1.4 (3) dan Definisi 3.1.1 (3))

   $I = I = I$ (Definisi 2.6.1)

10. $x \leq y$ maka $y \rightarrow z \leq x \rightarrow z$

    $x \rightarrow y \leq (y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z)$ (Proposisi 3.1.4 (6))

    $I \leq (y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z)$ (Proposisi 3.1.4 (2))

    $(y \rightarrow z) \leq (x \rightarrow z)$ (Proposisi 3.1.4 (2))

    $x \leq y$ maka $z \rightarrow x \leq z \rightarrow y$

    $z \rightarrow x \leq (x \rightarrow y) \rightarrow (z \rightarrow y)$ (Proposisi 3.1.4 (6))

    $z \rightarrow x \leq I \rightarrow (z \rightarrow y)$ (Proposisi 3.1.4 (2))

    $z \rightarrow x \leq (z \rightarrow y)$ (Proposisi 3.1.4 (3))

Contoh 3.1.5

Memakai Contoh 3.1.2 akan ditunjukkan $(E, \wedge, \sim, 42)$ memenuhi Proposisi 3.1.4

Bukti

Akan dibuktikan $(E, \wedge, \sim, 42)$ memenuhi Proposisi 3.1.3, seperti berikut

Tabel 3.1 Operasi bi-implikasi $(\leftrightarrow)$ pada *E*

$\leftrightarrow$	1	2	3	6	7	14	21	42
1	42	1	1	1	1	1	1	1
2	1	42	2	2	2	2	2	2
3	1	2	42	3	3	3	3	3
6	1	2	3	42	6	6	6	6
7	1	2	3	6	42	7	7	7
14	1	2	3	6	7	42	14	14
21	1	2	3	6	7	14	42	21
42	1	2	3	6	7	14	21	42

- $1 \leftrightarrow 1 = (1 \rightarrow 1) \wedge (1 \rightarrow 1) = 42 \wedge 42 = 42$
- $2 \leftrightarrow 1 = (2 \rightarrow 1) \wedge (1 \rightarrow 2) = 1 \wedge 42 = 1$
- $3 \leftrightarrow 1 = (3 \rightarrow 1) \wedge (1 \rightarrow 3) = 1 \wedge 42 = 1$
- $6 \leftrightarrow 1 = (6 \rightarrow 1) \wedge (1 \rightarrow 6) = 1 \wedge 42 = 1$
- $7 \leftrightarrow 1 = (7 \rightarrow 1) \wedge (1 \rightarrow 7) = 1 \wedge 42 = 1$
- $14 \leftrightarrow 1 = (14 \rightarrow 1) \wedge (1 \rightarrow 14) = 1 \wedge 42 = 1$
- $21 \leftrightarrow 1 = (21 \rightarrow 1) \wedge (1 \rightarrow 21) = 1 \wedge 42 = 1$
- $42 \leftrightarrow 1 = (42 \rightarrow 1) \wedge (1 \rightarrow 42) = 1 \wedge 42 = 1$

1. Memakai Tabel 2.9, Tabel 2.11, dan Tabel 3.1 untuk setiap $x, y \in E$ terbukti E berlaku $x \sim y \leq x \leftrightarrow y \leq x \rightarrow y$
2. Memakai Tabel 2.9 untuk setiap $x, y \in E$ terbukti E berlaku $x \rightarrow y = I$ jika dan hanya jika $x \leq y$
3. Memakai Tabel 2.9 untuk setiap $x \in E$ terbukti E berlaku $I \rightarrow x = x, x \rightarrow I = I, x \rightarrow x = I$
4. Memakai Tabel 2.9 untuk setiap $x, y \in E$ terbukti E berlaku $x \leq y \rightarrow x$
5. Memakai Tabel 2.9 untuk setiap $x, y \in E$ terbukti E berlaku $x \leq (x \rightarrow y) \rightarrow y$
6. Memakai Tabel 2.9 untuk setiap $x, y, z \in E$ terbukti E berlaku $x \rightarrow y \leq (y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z)$
7. Memakai Tabel 2.9 untuk setiap $x, y, z \in E$ terbukti E berlaku $x \leq y \rightarrow z$ jika dan hanya jika $y \leq x \rightarrow z$
8. Memakai Tabel 2.9 untuk setiap $x, y, z \in E$ terbukti E berlaku $x \rightarrow (y \rightarrow z) = y \rightarrow (x \rightarrow z)$
9. Memakai Tabel 2.9, Tabel 2.11, dan Tabel 3.1 untuk setiap $x, y \in E$ terbukti E berlaku $y \leq x$ maka $x \leftrightarrow y = x \rightarrow y = x \sim y$
10. Memakai Tabel 2.9 untuk setiap $x, y, z \in E$ terbukti E berlaku $x \leq y$ maka $y \rightarrow z \leq x \rightarrow z, z \rightarrow x \leq z \rightarrow y$

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa $(E, \wedge, \sim, 42)$ memenuhi Proposisi 3.1.3

Contoh 3.1.6

Memakai Contoh 3.1.3 akan ditunjukkan $(P(N), \wedge, \sim, N)$ memenuhi Proposisi 3.1.4

Bukti

Akan dibuktikan $(P(N), \wedge, \sim, N)$ memenuhi Proposisi 3.1.4, seperti berikut

$$A \leftrightarrow B = (A \to B) \wedge (B \to A) = N \wedge A = A$$
$$B \leftrightarrow A = (B \to A) \wedge (A \to B) = A \wedge N = A$$
$$A \leftrightarrow A = (A \to A) \wedge (A \to A) = N \wedge N = N$$
$$A \leftrightarrow N = (A \to N) \wedge (N \to A) = N \wedge A = A$$
$$N \leftrightarrow A = (N \to A) \wedge (A \to N) = A \wedge N = A$$
$$N \leftrightarrow N = (N \to N) \wedge (N \to N) = N \wedge N = N$$

1. Memakai Contoh 2.7.3 dan Contoh 2.7.6 untuk setiap $A \in P(N)$ terbukti $P(N)$ berlaku $x \sim y \leq x \leftrightarrow y \leq x \to y$
2. Memakai Contoh 2.7.3 untuk setiap $A \in P(\mathbb{N})$ terbukti $P(N)$ berlaku $x \to y = I$ jika dan hanya jika $x \leq y$
3. Memakai Contoh 2.7.3 untuk setiap $A \in P(N)$ terbukti $P(N)$ berlaku $I \to x = x, x \to I = I, x \to x = I$
4. Memakai Contoh 2.7.3 untuk setiap $A \in P(N)$ terbukti $P(N)$ berlaku $x \leq y \to x$
5. Memakai Contoh 2.7.3 untuk setiap $A \in P(N)$ terbukti $P(N)$ berlaku $x \leq (x \to y) \to y$
6. Memakai Contoh 2.7.3 untuk setiap $A \in P(N)$ terbukti $P(N)$ berlaku $x \to y \leq (y \to z) \to (x \to z)$
7. Memakai Contoh 2.7.3 untuk setiap $A \in P(N)$ terbukti $P(N)$ berlaku $x \leq y \to z$ jika dan hanya jika $y \leq x \to z$
8. Memakai Contoh 2.7.3 untuk setiap $A \in P(N)$ terbukti $P(N)$ berlaku $x \to (y \to z) = y \to (x \to z)$
9. Memakai Contoh 2.7.3 dan Contoh 2.7.6 untuk setiap $A \in P(N)$ terbukti $P(N)$ berlaku $y \leq x$ maka $x \leftrightarrow y = x \to y = x \sim y$
10. Memakai Contoh 2.7.3 untuk setiap $A \in P(N)$ terbukti $P(N)$ berlaku $x \leq y$ maka $y \to z \leq x \to z, z \to x \leq z \to y$

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa $(P(N), \wedge, \sim, N)$ memenuhi Proposisi 3.1.4

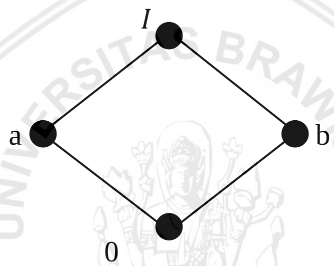
Definisi 3.1.7 (Prelinear dan Komutatif)

Jika $(E, \wedge, \sim, I)$ adalah *equality algebra*, maka

- $(E, \wedge, \sim, I)$ adalah prelinear jika I adalah batas atas dari set $\{x \rightarrow y, y \rightarrow x\}$ untuk setiap $x, y \in E$
- $(E, \wedge, \sim, I)$ adalah komutatif jika $(x \rightarrow y) \rightarrow y = (y \rightarrow x) \rightarrow x$ untuk setiap $x, y \in E$

Contoh 3.1.8

Diberikan latis $(F = \{0, a, b, I\}, \leq)$ dengan diagram



Berdasarkan Definisi 3.1.4, akan ditunjukkan $(F = \{0, a, b, I\}, \leq)$ adalah prelinear komutatif *equality algebra*

Bukti

Akan dibuktikan latis $(F = \{0, a, b, I\}, \leq)$ adalah prelinear komutatif *equality algebra*, seperti berikut

Tabel 3.2 Operasi join $(\vee)$ pada *F*

$\vee$	0	a	b	I
0	0	a	b	I
a	a	a	b	I
b	b	b	b	I
I	I	I	I	I

Tabel 3.3 Operasi meet $(\wedge)$ pada *F*

$\wedge$	0	a	b	I
0	0	0	0	0
a	0	a	a	a
b	0	a	b	b
I	0	a	b	I

Tabel 3.4 Operasi ekuivalen $(\sim)$ pada *F*

$\sim$	0	a	b	I
0	I	b	a	0
a	b	I	0	a
b	a	0	I	b
I	0	a	b	I

Tabel 3.5 Operasi implikasi $(\rightarrow)$ pada *F*

$\rightarrow$	0	a	b	I
0	I	I	I	I
a	b	I	b	I
b	a	a	I	I
I	0	a	b	I

i). Komutatif, dari Tabel 3.2 dan Tabel 3.3 tampak bahwa

$$x \vee y = y \vee x$$
$$x \wedge y = y \wedge x$$

ii). Asosiatif

Diberikan $x = 0$, $y = a$, dan $z = I$. Maka

$$x \wedge (y \wedge z) = 0 \wedge (a \wedge I) = 0 \wedge a = 0$$
$$(x \wedge y) \wedge z = (0 \wedge a) \wedge I = 0 \wedge I = 0$$

sehingga $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$. Memakai cara yang sama untuk setiap $x, y, z \in F$ dan memakai Tabel 3.3 berlaku

$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$

Diberikan $x = 0$, $y = a$, dan $z = I$. Maka

$$x \vee (y \vee z) = 0 \vee (a \vee I) = 0 \vee I = I$$
$$(x \vee y) \vee z = (0 \vee a) \vee I = a \vee I = I$$

sehingga $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$. Memakai cara yang sama untuk setiap $x, y, z \in F$ dan memakai Tabel 3.2 berlaku

$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$

iii). Absorpsi, diberikan $x = 0$, $y = a$. Maka

$$x \wedge (x \vee y) = 0 \wedge (0 \vee a) = 0 \wedge a = 0 = x$$
$$x \vee (x \wedge y) = 0 \vee (0 \wedge a) = 0 \vee 0 = 0 = x$$

sehingga $x \wedge (x \vee y) = x \vee (x \wedge y) = x$. Memakai cara yang sama untuk setiap $x, y, z \in F$ dan memakai Tabel 3.2 dan Tabel 3.3 berlaku $x \wedge (x \vee y) = x$ dan $x \vee (x \wedge y) = x$

iv). Idempoten , diberikan $x = 0$. Maka

$$x \wedge x = 0 \wedge 0 = 0 = x$$
$$x \vee x = 0 \vee 0 = 0 = x$$

sehingga $x \wedge x = x \vee x = x$. Memakai cara yang sama untuk setiap $x, y, z \in F$ dan memakai Tabel 3.2 dan Tabel 3.3 berlaku $x \wedge x = x$ dan $x \vee x = x$

v). Terlihat dari Tabel 3.5 bahwa I adalah batas atas dari set $\{x \to y, y \to x\}$ untuk setiap $x, y \in F$

vi). Diberikan $x = 0$, $y = b$. Maka

$$(0 \to b) \to b = I \to b = b$$
$$(b \to 0) \to 0 = a \to 0 = b$$

sehingga $(x \to y) \to y = (y \to x) \to x$. Memakai cara yang sama untuk setiap $x, y \in F$ dan memakai Tabel 3.5 berlaku $(x \to y) \to y = (y \to x) \to x$

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa latis $(F = \{0, a, b, I\}, \leq)$ adalah prelinear komutatif *equality algebra*

Contoh 3.1.9

Memakai Contoh 3.1.3 akan ditunjukkan $(P(N), \wedge, \sim, N)$ memenuhi Definisi 3.1.7

Bukti

Akan dibuktikan $(P(N), \wedge, \sim, N)$ memenuhi Proposisi 3.1.4, seperti berikut

1. Diberikan

$$\{x \to y, y \to x\} = \{A \to B, B \to A\} = \{N, A\}$$

$$\{x \to y, y \to x\} = \{A \to N, N \to A\} = \{N, A\}$$

terlihat bahwa N adalah batas atas dari set $\{x \to y, y \to x\}$ untuk setiap $A \in P(N)$

2. Diberikan $x = A$ dan $y = B$. Maka

$$(x \to y) \to y = (A \to B) \to B = \mathbb{N} \to B = B$$
$$(y \to x) \to x = (B \to A) \to A = A \to A = \mathbb{N}$$

sehingga $(x \to y) \to y = (y \to x) \to x$

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa $(P(N), \wedge, \sim, N)$ adalah prelinear komutatif *equality algebra*

Definisi 3.1.10 (Involutif)

$(E, \wedge, \sim, I)$ adalah *equality algebra* dan terdapat operasi $'$ yang memenuhi kondisi $x' = x \to 0 = x \sim 0$ untuk setiap $x \in E$. $(E, \wedge, \sim, I)$ disebut involutif jika memenuhi kondisi berikut

$$(x')' = x \text{ untuk setiap } x \in E$$

Contoh 3.1.11

Dengan menggunakan Contoh 3.1.8 dan Definisi 3.1.10, akan ditunjukkan $(F = \{0, a, b, I\}, \leq)$ adalah involutif

Bukti

Akan dibuktikan $(F = \{0, a, b, I\}, \leq)$ adalah involutif *equality algebra*. Seperti terlihat dari Tabel 3.2 dan Tabel 3.3, $(F = \{0, a, b, I\}, \leq)$ memenuhi kondisi

- Diberikan $x = 0$. Maka

$$(0')' = (0 \sim 0) \sim 0 = I \sim 0 = 0$$

  sehingga $(x')' = x$. Memakai cara yang sama untuk setiap $x \in F$ dan memakai Tabel 3.2 berlaku $(x')' = x$

- Diberikan $x = 0$. Maka

$$(0')' = (0 \to 0) \to 0 = I \to 0 = 0$$

  sehingga $(x')' = x$. Memakai cara yang sama untuk setiap $x \in F$ dan memakai Tabel 3.3 berlaku $(x')' = x$

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa $(F = \{0, a, b, I\}, \leq)$ adalah involutif *equality algebra*

Contoh 3.1.12

Dengan menggunakan Contoh 3.1.9 dan Definisi 3.1.10, akan ditunjukkan $(P(N),\wedge,\sim,N)$ adalah involutif

Bukti

Akan dibuktikan $(P(N),\wedge,\sim,N)$ adalah involutif *equality algebra*. Diberikan $x = A$. Maka

$$(x')' = (A')' = (A \sim A) \sim A = N \sim A = A = x$$

$$(x')' = (A')' = (A \to A) \to A = N \to A = A = x$$

sehingga $(x')' = x$. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa $(P(N),\wedge,\sim,N)$ adalah involutif *equality algebra*

Definisi 3.1.13 (Involutif Prelinear)

$(E,\wedge,\sim,I)$ disebut involutif prelinear jika memenuhi kondisi berikut

1. $(x')' = x$ untuk setiap $x \in E$
2. I adalah batas atas dari set $\{x \to y, y \to x\}$ untuk setiap $x, y \in E$

Contoh 3.1.14

Dengan menggunakan Contoh 3.1.8 dan Contoh 3.1.11, maka berdasarkan Definisi 3.1.13 terlihat bahwa $(F = \{0, a, b, I\}, \leq)$ adalah involutif prelinear *equality algebra*

Contoh 3.1.15

Dengan menggunakan Contoh 3.1.9 dan Contoh 3.1.12, maka berdasarkan Definisi 3.1.13 terlihat bahwa $(P(N),\wedge,\sim,N)$ adalah involutif prelinear *equality algebra*

3.2 Hubungan Equality Algebra dengan Heyting Algebra, Hertz Algebra, Boolean Algebra, dan EQ-Algebra

Equality algebra dengan *heyting algebra*, *hertz algebra*, *boolean algebra*, dan *EQ-algebra* merupakan struktur aljabar di mana *equality algebra* menjadi *heyting algebra*, *hertz algebra*, *boolean algebra*, dan *EQ-algebra* jika memenuhi kondisi-kondisi tertentu. Pada subbab ini akan diberikan teori di mana *equality algebra* menjadi *heyting algebra*, *hertz algebra*, *boolean algebra*, dan *EQ-algebra*. Penulisan ini dikutip dari F. Zebardast (2016)

Teorema 3.2.1 (Equality Algebra dengan Heyting Algebra)

Jika E adalah prelinear *equality algebra* dengan $x \wedge (x \to y) = x \wedge y$ untuk setiap $x, y \in E$, maka E adalah *heyting algebra*

Bukti

Akan dibuktikan E adalah *heyting algebra* jika E adalah prelinear *equality algebra* dengan $x \wedge (x \to y) = x \wedge y$ untuk setiap $x, y \in E$. Menggunakan Definisi 2.7.5, jika $x \leq y \to z$ maka $x \wedge y \leq (y \to z) \wedge y = z \wedge y \leq z$ sehingga $x \wedge y \leq z$. E adalah *equality algebra* sehingga memenuhi kondisi dari Proposisi 3.1.4 (4) dan Proposisi 3.1.4 (10) sehingga

$$\begin{aligned} x \leq y \to x &= I \wedge (y \to x) \\ &= (y \to y) \wedge (y \to x) \\ &= y \to (y \wedge x) \leq y \to z \end{aligned}$$

Terbukti E adalah *heyting algebra*

Contoh 3.2.2

Berdasarkan Contoh 3.1.8, F adalah prelinear. Berdasarkan Teorema 3.2.1, akan ditunjukkan F adalah *heyting algebra*

Bukti

Akan dibuktikan $(F = \{0, a, b, I\}, \leq)$ adalah *heyting algebra*. Dari Tabel 3.3 dan Tabel 3.5, tampak bahwa $x \wedge (x \to y) = x \wedge y$ untuk setiap $x, y \in F$ seperti berikut

$$0 \wedge (0 \to 0) = 0 \wedge 0 = 0 \qquad b \wedge (b \to 0) = b \wedge 0 = 0$$
$$0 \wedge (0 \to a) = 0 \wedge a = 0 \qquad b \wedge (b \to a) = b \wedge a = a$$
$$0 \wedge (0 \to a) = 0 \wedge b = 0 \qquad b \wedge (b \to b) = b \wedge b = b$$
$$0 \wedge (0 \to a) = 0 \wedge I = 0 \qquad b \wedge (b \to I) = b \wedge I = b$$
$$a \wedge (a \to 0) = a \wedge 0 = 0 \qquad I \wedge (I \to 0) = I \wedge 0 = 0$$
$$a \wedge (a \to a) = a \wedge a = a \qquad I \wedge (I \to a) = I \wedge a = a$$
$$a \wedge (a \to b) = a \wedge b = a \qquad I \wedge (I \to b) = I \wedge b = b$$

$$a \wedge (a \to I) = a \wedge I = a \qquad\qquad I \wedge (I \to I) = I \wedge I = I$$

Maka $(F = \{0, a, b, I\}, \leq)$ adalah *heyting algebra*

Contoh 3.2.3

Berdasarkan Contoh 3.1.9, $P(N)$ adalah prelinear. Berdasarkan Teorema 3.2.1, akan ditunjukkan $P(N)$ adalah *heyting algebra*

Bukti

Akan dibuktikan $(P(N), \wedge, \sim, N)$ adalah *heyting algebra*, dengan $x = A$ dan $y = B$. Maka

$$x \wedge (x \to y) = A \wedge (A \to B) = A \wedge N = x \wedge y$$

sehingga $x \wedge (x \to y) = x \wedge y$ untuk setiap $A \in P(N)$. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa $(P(N), \wedge, \sim, N)$ adalah *heyting algebra*

Teorema 3.2.4 (Equality Algebra dengan Hertz Algebra)

Jika E adalah *equality algebra* dengan $x \wedge (x \to y) = x \wedge y$ dan $x \to (y \wedge z) = (x \to y) \wedge (x \to z)$ untuk setiap $x, y \in E$, maka E adalah *hertz algebra*.

Bukti

Akan dibuktikan E adalah *hertz algebra* jika E adalah *equality algebra* dengan $x \wedge (x \to y) = x \wedge y$ dan $x \to (y \wedge z) = (x \to y) \wedge (x \to z)$ untuk setiap $x, y \in E$, maka $(E, \wedge, \sim, 42)$ adalah *heyting algebra*.

- E adalah *equality algebra*, maka Proposisi 3.1.4 (3) terpenuhi sehingga Definisi 2.7.12 (1) terpenuhi
- E adalah *equality algebra*, maka Proposisi 3.1.4 (4) terpenuhi sehingga

$$y \leq x \to y \text{ maka } y \wedge (x \to y) = y$$

Definisi 2.7.12 (2) terpenuhi

E adalah *equality algebra* dengan Definisi 2.7.12 (3) dan Definisi 2.7.12 (4). Terbukti E adalah *hertz algebra*

Contoh 3.2.5

Berdasarkan Contoh 3.1.2, E adalah *equality algebra*. Berdasarkan Teorema 3.2.4, akan ditunjukkan E adalah *hertz algebra*

Bukti

Akan dibuktikan $(E, \wedge, \sim, 42)$ adalah *hertz algebra*. Dari Tabel 2.7 dan Tabel 2.9, tampak bahwa $x \wedge (x \rightarrow y) = x \wedge y$ dan $x \rightarrow (y \wedge z) = (x \rightarrow y) \wedge (x \rightarrow z)$ untuk setiap $x, y \in F$. Maka $(E, \wedge, \sim, 42)$ adalah *hertz algebra*

Contoh 3.2.6

Berdasarkan Contoh 3.1.3, $P(N)$ adalah *equality algebra*. Berdasarkan Teorema 3.2.4, akan ditunjukkan $P(N)$ adalah *hertz algebra*

Bukti

Akan dibuktikan $(P(N), \wedge, \sim, N)$ adalah *hertz algebra*, dengan $x = A$, $y = B$, dan $z = B$. Maka

$$x \wedge (x \rightarrow y) = A \wedge (A \rightarrow B) = A \wedge N = x \wedge y$$

$$x \rightarrow (y \wedge z) = A \rightarrow (B \wedge B) = A \rightarrow B = N$$

$$(x \rightarrow y) \wedge (x \rightarrow z) = (A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow B) = N \wedge N = N$$

sehingga $x \wedge (x \rightarrow y) = x \wedge y$ dan $x \rightarrow (y \wedge z) = (x \rightarrow y) \wedge (x \rightarrow z)$ untuk setiap $A \in P(N)$. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa $(P(N), \wedge, \sim, N)$ adalah *hertz algebra*

Teorema 3.2.7 (Equality Algebra dengan Boolean Algebra)

Jika E adalah involutif prelinear *equality algebra* dengan bentuk $x' \rightarrow x = x$ untuk setiap $x \in E$, maka E adalah *boolean algebra*

Bukti

Akan dibuktikan E adalah *boolean algebra* jika E adalah involutif prelinear *equality algebra* dengan bentuk $x' \rightarrow x = x$ untuk setiap $x \in E$. Karena E adalah involutif dengan bentuk $x' \rightarrow x = x$ maka

$$I = x \rightarrow x = (x' \rightarrow x) \rightarrow x$$

$$I = x' \to x' = (x'' \to x') \to x' = (x \to x') \to x'$$

sehingga sesuai dengan Definisi 2.7.10

$$I = I \wedge I = \big((x' \to x) \to x\big) \wedge \big((x \to x') \to x'\big)$$
$$= (x \to x) \wedge (x' \to x')$$
$$= \big(x \to (x' \to x)\big) \wedge \big(x' \to (x'' \to x')\big)$$
$$= \big((x'' \to x') \to x\big) \wedge \big((x' \to x) \to x'\big)$$
$$= (x' \to x) \wedge (x \to x')$$
$$= (x'' \to x')' \wedge (x' \to x)'$$
$$= \big((x'' \to x') \wedge (x' \to x)\big)'$$
$$= (x' \wedge x)' = x'' \vee x' = x \vee x'$$
$$0 = I' = (x \vee x')' = x' \wedge x'' = x' \wedge x$$

Terbukti E adalah *boolean algebra*

Contoh 3.2.8

Berdasarkan Contoh 3.1.8 dan Contoh 3.1.11, F adalah prelinear dan involutif. Berdasarkan Teorema 3.2.7, akan ditunjukkan F adalah *boolean algebra*

Bukti

Akan dibuktikan $(F = \{0, a, b, I\}, \leq)$ adalah *boolean algebra*. Dari Tabel 3.3 tampak bahwa $x' \to x = x$ untuk setiap $x \in F$ seperti berikut

$$0' \to 0 = 0$$
$$a' \to a = a$$
$$b' \to b = b$$
$$I' \to I = I$$

Maka $(F = \{0, a, b, I\}, \leq)$ adalah *boolean algebra*

Contoh 3.2.9

Berdasarkan Contoh 3.1.9 dan Contoh 3.1.12, $P(N)$ adalah prelinear dan involutif. Berdasarkan Teorema 3.2.7, akan ditunjukkan $P(N)$ adalah *boolean algebra*

Bukti

Akan dibuktikan $(P(N),\wedge,\sim,N)$ adalah *boolean algebra*, dengan $x = A$.

$$x' \to x = A' \to A = A = x$$

sehingga $x' \to x = x$ untuk setiap $A \in P(N)$. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa $(P(N),\wedge,\sim,N)$ adalah *boolean algebra*

Teorema 3.2.8 (Equality Algebra dengan EQ-Algebra)

Setiap *EQ-algebra* yang bagus $(E,\wedge,\otimes,\sim,I)$ adalah *equality algebra*

Bukti

Akan dibuktikan E adalah *EQ-algebra* yang bagus jika E adalah *equality algebra*. E adalah *equality algebra* maka Definisi 3.1.1 (1), Definisi 3.1.1 (3), dan Definisi 3.1.1 (4) memenuhi Definisi 2.7.14 (1), Definisi 2.7.14 (3), dan memenuhi kondisi *EQ-algebra* yang bagus. Terbukti E adalah *EQ-algebra* yang bagus.

Contoh 3.2.9

Berdasarkan Contoh 2.7.19, E adalah *EQ-algebra*. Berdasarkan Teorema 3.2.8, akan ditunjukkan E adalah *equality algebra*

Bukti

Akan dibuktikan $(E,\wedge,\sim,42)$ adalah *equality algebra*. Dari Tabel 2.11 tampak bahwa $x \sim y = x$ jika dan hanya jika $x < y$ sehingga *EQ-algebra* adalah bagus. Jadi $(E,\wedge,\sim,42)$ adalah *equality algebra*

Contoh 3.2.10

Berdasarkan Contoh 2.7.20, $P(N)$ adalah *EQ-algebra*. Berdasarkan Teorema 3.2.8, akan ditunjukkan $P(N)$ adalah *equality algebra*

Bukti

Akan dibuktikan $(P(N),\wedge,\sim,N)$ adalah *equality algebra*, terlihat bahwa

$$A \sim B = A, \text{ jika dan hanya jika } A < B$$

sehingga *EQ-algebra* adalah bagus. Jadi $(P(N), \wedge, \sim, N)$ adalah *equality algebra*

BAB IV
KESIMPULAN

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan tujuan penelitian dan pembahasan pada bab sebelumnya, dapat diambil beberapa kesimpulan sebagai berikut:

1. Syarat cukup di mana *equality algebra* menjadi *heyting algebra* adalah, jika E adalah prelinear *equality algebra* dengan $x \wedge (x \rightarrow y) = x \wedge y$ untuk setiap $x, y \in E$. Maka E adalah *heyting algebra*
2. Syarat cukup di mana *equality algebra* menjadi *hertz algebra* adalah, jika E adalah *equality algebra* dengan $x \wedge (x \rightarrow y) = x \wedge y$ dan $x \rightarrow (y \wedge z) = (x \rightarrow y) \wedge (x \rightarrow z)$ untuk setiap $x, y \in E$. Maka E adalah *hertz algebra*
3. Syarat cukup di mana *equality algebra* menjadi *boolean algebra* adalah, jika E adalah involutif prelinear *equality algebra* dengan bentuk $x' \rightarrow x = x$ untuk setiap $x \in E$. Maka E adalah *boolean algebra*
4. Syarat cukup di mana *equality algebra* menjadi *EQ-algebra* adalah, jika suatu *Equality Algebra* memenuhi syarat cukup dari *EQ-algebra* yang bagus. Maka E adalah *EQ-algebra*

4.2 Saran

Dalam skripsi ini telah ditunjukkan syarat cukup di mana *equality algebra* menjadi *heyting algebra*, *hertz algebra*, *boolean algebra*, dan *EQ-algebra*. Oleh karena itu untuk penelitian selanjutnya disarankan untuk mengembangkan *equality algebra* pada struktur aljabar lain.

DAFTAR PUSTAKA

Andari, A. 2014. *Ring, Field, san Daerah Integral*. Malang: Universitas Brawijaya Press.

Bhattacharya, P. B., S., K., Jain, dan S., R., Nagpul. 1995. *Basic Abstract Algebra*. United Kingdom: Cambridge University Press.

Birkhoff, G. 1940. *Lattice Theory*. USA: American Mathematical Society.

F. Zebardast. 2017. Result on Equality Algebras. *Information Sciences*. 381: 270-282

Jenei, S. 2012. Equality Algebras. *Studia Logica*. Netherlands: Springer Netherlands.

Novak, V. 2007. EQ-Algebras in progress. *Theoretical Advances and Applications of Fuzzy Logic and Soft Computing*. Germany: Springer-Verlag Berlin Heidelberg.