PSEUDO-KOMUTATOR DALAM BCK-ALJABAR

SKRIPSI

oleh:
VIRGA RETHA AYUNING MADYA RATRI
145090401111040

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2018

PSEUDO-KOMUTATOR DALAM BCK-ALJABAR

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

oleh:
VIRGA RETHA AYUNING MADYA RATRI
145090401111040

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2018

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

PSEUDO-KOMUTATOR DALAM BCK-ALJABAR

Oleh:
VIRGA RETHA AYUNING MADYA RATRI
145090401111040

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji
pada tanggal 18 Januari 2018
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Pembimbing

Drs. Bambang Sugandi, M.Si.
NIP. 195905151992031002

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si., M.Si., Ph. D.
NIP. 197509082000031003

LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	**:**	**VIRGA RETHA AYUNING MADYA RATRI**
NIM	**:**	**145090401111040**
jurusan	**:**	**MATEMATIKA**
judul skripsi	**:**	**PSEUDO-KOMUTATOR DALAM BCK ALJABAR**

dengan ini menyatakan bahwa:

1. **isi skripsi yang saya buat adalah benar-benar karya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain, selain nama-nama yang termaktub di isi dan tertulis di daftar pustaka dalam skripsi ini;**
2. **apabila di kemudian hari ternyata skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala risiko yang akan saya terima.**

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 18 Januari 2018
yang menyatakan,

(VIRGA RETHA AYUNING MADYA RATRI)
NIM. 145090401111040

PSEUDO-KOMUTATOR DALAM BCK-ALJABAR

ABSTRAK

Sebuah konsep baru telah ditemukan dalam BCK-aljabar, yaitu pseudo-komutator. Pseudo-komutator merupakan struktur baru yang terbentuk dari dua buah elemen yang saling komutatif. Himpunan pseudo-komutator dalam BCK-aljabar merupakan BCK-subaljabar. Jika BCK-subaljabar yang terbentuk dari pseudo-komutator tersebut beranggotakan elemen khusus saja, maka BCK-aljabar bersifat komutatif. Sebaliknya jika anggota dari BCK-subaljabar yang terbentuk tidak hanya elemen khusus, maka BCK-aljabar bersifat non komutatif. Dalam skripsi ini dibahas beberapa sifat Pseudo-komutator dalam BCK-aljabar.

Kata Kunci: BCK-aljabar, pseudo-komutator, BCK-subaljabar.

PSEUDO-COMMUTATORS IN BCK-ALGEBRAS

ABSTRACT

A new founded concept in BCK-algebra is called pseudo-commutator. Pseudo-commutator is a new structure that formed from two mutually commutative elements. The set of pseudo-commutators in BCK-algebra is called BCK-subalgebra. If the BCK-subalgebra consists of only distinguished element, then the BCK-algebra is commutative. Conversely, if the BCK-subalgeba do not consists of special element only, then the BCK-algebra is non commutative. In this final project properties of pseudo-commutators in BCK-algebra is discussed.

Keywords: BCK-algebra, pseudo-commutators, BCK-subalgebra.

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirabbil'Alamiin, puji dan syukur ke hadirat Allah SWT berkat rahmat, taufiq serta hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul **'PSEUDO-KOMUTATOR DALAM BCK-ALJABAR'** sebagai syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains dalam bidang matematika.

Dalam penulisan skripsi ini penulis mendapatkan banyak bimbingan, motivasi dan bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Drs. Bambang Sugandi, M.Si. selaku dosen pembimbing skripsi yang tak pernah lelah memberikan bimbingan, nasihat, kritik dan saran serta motivasi dalam penulisan skripsi ini.
2. Drs. Abdul Rouf Alghofari, M.Sc., Ph.D dan Dra. Ari Andari, M.S. selaku dosen penguji skripsi atas segala kritik dan saran untuk perbaikan skripsi ini.
3. Seluruh dosen Jurusan Matematika yang telah memberikan ilmunya kepada penulis serta segenap staf dan karyawan TU Jurusan Matematika atas segala bantuannya.
4. Ayah, Mama, Adik, Emak, serta keluarga tercinta yang selalu mendoakan dan memberikan semangat serta kasih sayangnya kepada penulis.
5. Sahabat tercinta, CCLUB, Akhmad Faisol dan keluarga besar Matematika 2014 atas segala dukungannya.
6. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih terdapat kekurangan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran yang bersifat membangun untuk perbaikan penulisan selanjutnya dan dapat disampaikan melalui email virgaretha2014@gmail.com. Akhir kata penulis berharap skripsi ini dapat bermanfaat bagi penulis khususnya dan pembaca umumnya.

Malang, 18 Januari 2018

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR SIMBOL

Simbol	**Keterangan**
$\cdot$	Operasi pergandaan
$\mathbb{Z}$	Himpunan bilangan bulat
$\wedge$	Meet
$\vee$	Join
G'	Subgrup komutator dari G
$\leq$	Kurang dari sama dengan
$\mathbb{R}$	Himpunan bilangan real
$\mathbb{R}\backslash\{0\}$	Himpunan bilangan real tanpa nol

DAFTAR LAMPIRAN

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Struktur aljabar adalah suatu himpunan tak kosong yang didalamnya didefinisikan satu atau lebih operasi biner. Selain grup dan ring, terdapat juga suatu struktur aljabar lain yaitu BCK-aljabar. BCK-aljabar pertama kali diperkenalkan oleh Imai dan Iseki pada tahun 1966. BCK-aljabar memiliki konsep yang hampir sama dengan konsep yang ada pada teori grup karena BCK-aljabar dikonstruksi dari sebuah grup komutatif dengan sebuah operasi biner baru.

Grup dapat bersifat komutatif. Untuk membentuk sifat komutatif dari grup dibutuhkan sebarang dua buah elemen untuk mengujinya. Selanjutnya operasi dari dua buah elemen yang saling komutatif ini membentuk struktur baru yaitu komutator. Sebagaimana pada grup, pada BCK-aljabar juga dapat berlaku sifat komutatif dan operasi dari dua buah elemen yang saling komutatif ini dapat membentuk struktur baru yaitu pseudo-komutator.

Dalam grup, himpunan semua elemen komutator dapat membentuk subgrup komutator. Dalam BCK-aljabar, Himpunan dari semua elemen pseudo-komutator dapat membentuk subaljabar pseudo-komutator atau BCK-subaljabar. Secara umum, konsep komutator dalam grup hampir sama dengan konsep pseudo-komutator dalam BCK-aljabar, akan tetapi keduanya memiliki definisi yang berbeda.

Sehingga sifat, lemma dan teorema yang berlaku pada pseudo-komutator dalam BCK-aljabar berbeda dengan komutator biasa dalam grup. Pada skripsi ini, akan dibahas mengenai Pseudo-komutator dalam BCK-aljabar yang dirujuk dari hasil penelitian Ardavan Najafi pada tahun 2013 dalam artikel *Pseudo-Commutators in BCK-Algebras*.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dijelaskan sebelumnya, rumusan masalah yang dibahas dalam skripsi ini adalah bagaimana lemma, teorema dan bukti yang berkaitan dengan Pseudo-komutator dalam BCK-aljabar.

1.3 Tujuan

Berdasarkan latar belakang yang telah dijelaskan sebelumnya, tujuan skripsi ini adalah membahas lemma, teorema dan bukti yang berkaitan dengan Pseudo-komutator dalam BCK-aljabar.

BAB II
DASAR TEORI

Pada bab ini akan diberikan konsep dasar yang digunakan dalam pembahasan pada bab III.

2.1 Pemetaan dan Operasi Biner

Berikut ini akan diberikan definisi subset, relasi, hasil kali kartesius, pemetaan dan operasi biner yang dikutip dari Bhattacharya, dkk. (1995), definisi *partial order* yang dikutip dari Brown (1993) dan definisi elemen maksimum yang dikutip dari Pinter (2013).

Definisi 2.1.1 (Subset)
Misalkan A dan B masing-masing adalah himpunan tak kosong. A disebut subset dari B jika setiap elemen di A juga merupakan elemen di B.
A subset dari B dinotasikan dengan $A \subseteq B$.

Definisi 2.1.2 (Hasil Kali Kartesius)
Misalkan A dan B masing-masing adalah himpunan tak kosong. Himpunan semua pasangan terurut (x, y) dengan $x \in A$ dan $y \in B$ disebut hasil kali kartesius A dan B, dinotasikan dengan $A \times B$.

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A \text{ dan y} \in \text{B}\}.$$

Definisi 2.1.3 (Relasi)
Misalkan A dan B masing-masing adalah himpunan. Jika R adalah subset dari $A \times B$, maka R disebut relasi dari A ke B. Jika $(x, y) \in R$ maka dikatakan x berelasi R dengan y, dituliskan sebagai xRy.

Contoh 2.1.4
Diberikan himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$ dan himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$, akan ditentukan $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$. Kemudian jika didefinisikan $(x, y) \in R$ yaitu x adalah akar kuadrat dari y, akan ditentukan relasi dari $\mathbb{N}$ ke $\mathbb{Z}$.
Bukti
$\mathbb{N} = \{1,2,3, \dots\}$
$\mathbb{Z} = \{\dots, -1,0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 \dots\}$
$\mathbb{N} \times \mathbb{Z} = \{(1, -1), (1,0), (1,1), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,9), \dots\}$

$R = \{(1,1), (2,4), (3,9), \ldots\}$.

Definisi 2.1.5 (*Partial Order)*
Misalkan S adalah suatu himpunan dan didefinisikan sebuah relasi $\leq$ pada S. $\leq$ disebut *partial order* pada himpunan S jika memenuhi kondisi berikut:

i) Refleksif. Yaitu untuk setiap $x \in S$, berlaku $x \leq x$.
ii) Antisimetrik. Yaitu untuk setiap $x, y \in S$, jika $x \leq y$ dan $y \leq x$ maka $x = y$.
iii) Transitif. Yaitu untuk setiap $x, y, z \in S$, jika $x \leq y$ dan $y \leq z$ maka $x \leq z$.

Definisi 2.1.6 (Pemetaan)
Misalkan A dan B masing-masing adalah himpunan dan f adalah relasi dari A ke B. Relasi f disebut pemetaan dari A ke B, dinotasikan dengan $f: A \to B$ atau $A \xrightarrow{f} B$ jika untuk setiap $x \in A$, terdapat tepat satu $y \in B$, sehingga $(x, y) \in f$ ditulis dengan $f(x) = y$.

Dengan kata lain, jika $x_1 = x_2$, maka $f(x_1) = f(x_2)$ untuk setiap $x_1, x_2 \in A$.

Contoh 2.1.7
Diberikan himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dan relasi f dari $\mathbb{Z}$ ke $\mathbb{Z}$ dengan $f(x) = 4x^2 + 1$ untuk setiap $x \in \mathbb{Z}$. Akan dibuktikan bahwa f adalah suatu pemetaan.
Bukti
Ambil $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ dengan $x_1 = x_2$.

$$x_1 = x_2.$$
$$x_1^2 = x_2^2$$
$$4x_1^2 = 4x_2^2$$
$$4x_1^2 + 1 = 4x_2^2 + 1$$
$$f(x_1) = f(x_2)$$

terbukti untuk $x_1 = x_2$ berlaku $f(x_1) = f(x_2)$, sehingga jelas untuk setiap $x \in \mathbb{Z}$ terdapat tepat satu $f(x) \in \mathbb{Z}$. Jadi, dapat disimpulkan bahwa f adalah suatu pemetaan.

Definisi 2.1.8 (Operasi Biner)
Misalkan S adalah himpunan tak kosong. Pemetaan

$$*: S \times S \to S,$$
$$(x, y) \mapsto * (x, y) = x * y$$

Disebut operasi biner pada G, jika x dan y elemen di S maka $x * y$ juga merupakan elemen di S.

Contoh 2.1.9
$\mathbb{R}$ adalah himpunan bilangan real. Operasi biner di $\mathbb{R}$ adalah pergandaan. Akan dibuktikan bahwa operasi $(\cdot)$ merupakan operasi biner.
Bukti
Operasi pergandaan $(\cdot)$ adalah suatu operasi biner pada $\mathbb{R}$ yang dinotasikan dengan

$$\cdot: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto x \cdot y$$

Artinya, untuk setiap $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ berlaku $x \cdot y \in \mathbb{R}$. Karena x dan y elemen di $\mathbb{R}$ dan $x \cdot y$ juga elemen di $\mathbb{R}$, jadi operasi pergandaan di $\mathbb{R}$ merupakan operasi biner.

Definisi 2.1.10 (Elemen Maksimum)
Misalkan S sebuah *partial order*. Sebuah elemen $a \in S$ disebut elemen maksimum jika tidak ada elemen lain dengan urutan sesudah a.

2.2 Struktur Aljabar

Istilah struktur aljabar sering dijumpai dalam mempelajari aljabar. Berikut akan diberikan definisi struktur aljabar yang dikutip dari Bhattacharya (1995).

Definisi 2.2.1 (Struktur Aljabar)
Struktur aljabar adalah himpunan tak kosong yang didalamnya didefinisikan satu atau lebih operasi biner.

Contoh 2.2.2
Diberikan himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dengan dua buah operasi biner yaitu penjumlahan $(+)$ dan pergandaan $(\cdot)$. Jelas bahwa $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$

tertutup terhadap operasi penjumlahan dan pergandaan, sehingga $\mathbb{Z}$ merupakan struktur aljabar.

2.3 Komutator dan Grup

Berikut ini akan diberikan definisi komutator yang dirujuk dari Kurzweil dan Stellmacher (2004). Sebelumnya akan diberikan definisi dan contoh tentang grup dan subgrup yang dirujuk dari Andari (2015).

Definisi 2.3.1 (Grup)
Misalkan G adalah himpunan tak kosong yang didefinisikan satu buah operasi biner $*$. $(G,*)$ disebut grup jika memenuhi aksioma berikut:

(i) Tertutup, yaitu untuk setiap $a, b \in G$, terdapat $c \in G$ sedemikian sehingga berlaku $a * b = c$.
(ii) Assosiatif, yaitu untuk setiap $a, b, c \in G$, berlaku $(a * b) * c = a * (b * c)$.
(iii) Memiliki elemen satuan/identitas, yaitu terdapat $e \in G$ untuk setiap $a \in G$ sedemikian sehingga berlaku $e * a = a * e = a$.
(iv) Setiap elemen mempunyai invers, yaitu untuk setiap $a \in G$ terdapat $a^{-1} \in G$ sedemikian sehingga berlaku kondisi $a * (a^{-1}) = (a^{-1}) * a = e$.

Jika ditambah berlaku hukum

(v) Komutatif, yaitu untuk setiap $a, b \in G$, berlaku
$a * b = b * a$,

maka $(G,*)$ disebut Grup Komutatif (Grup Abelian).

Contoh 2.3.2
Diberikan $G = \{\bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}\} \subseteq \mathbb{Z}_{10}$. Akan ditunjukkan G terhadap operasi pergandaan merupakan grup.
Bukti
Misalkan $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_{10}$ dengan $\bar{a} = a + 10k_1, \bar{b} = b + 10k_2$,
$\bar{c} = c + 10k_3$ dan $a, b, c, k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$.
Akan dibuktikan bahwa $2\mathbb{Z}_{10}\backslash\{\bar{0}\} = G$ adalah grup.

i. Tertutup
Ambil $2\bar{a}, 2\bar{b} \in G$.

$$\begin{aligned} 2\bar{a} \cdot 2\bar{b} &= 2(a + 10k_1) \cdot 2(b + 10k_2) \\ &= (2a + 2 \cdot 10k_1)(2b + 2 \cdot 10k_2) \\ &= 2a2b + 2 \cdot 2 \cdot 10ak_2 + 2 \cdot 2 \cdot 10bk_1 + 2 \cdot 2 \cdot 10 \end{aligned}$$

$\cdot 10k_1k_2$

$= 2(2ab + 2 \cdot 10ak_2 + 2 \cdot 10bk_1 + 2 \cdot 10 \cdot 10k_1k_2)$

$= 2(2ab + 10(2ak_2 + 2bk_1 + 2 \cdot 10k_1k_2)$

Misal $2ab = c \in \mathbb{Z}$ dan $2ak_2 + 2bk_1 + 2 \cdot 10k_1k_2 = k_3 \in \mathbb{Z}$, sehingga diperoleh $2(c + 10k_3)$. Terbukti bahwa berlaku sifat tertutup.

Dengan cara yang sama berlaku untuk setiap $2\bar{a}, 2\bar{b} \in G$.

ii. Assosiatif

Ambil $2\bar{a}, 2\bar{b}, 2\bar{c} \in G$.

$\left(2\bar{a} \cdot 2\bar{b}\right) \cdot 2\bar{c}$

$= \left((2a + 20k_1) \cdot (2b + 20k_2)\right) \cdot (2c + 20k_3)$

$= (4ab + 40ak_2 + 40bk_1 + 400k_1k_2) \cdot (2c + 20k_3)$

$= 8abc + 80abk_3 + 80ack_2 + 800ak_2k_3 + 80bck_1$
$+800bk_1k_3 + 800ck_1k_2 + 8000k_1k_2k_3$

$= (2a + 20k_1)(4bc + 40bk_3 + 40ck_2 + 400k_2k_3)$

$= (2a + 20k_1)\left((2b + 20k_2)(2c + 20k_3)\right)$

$= 2\bar{a} \cdot \left(2\bar{b} \cdot 2\bar{c}\right).$

Dengan cara yang sama berlaku untuk setiap $2\bar{a}, 2\bar{b}, 2\bar{c} \in G$.

iii. Memiliki elemen identitas, yaitu $\bar{6}$. Karena untuk setiap $2\bar{a} \in G$ sedemikian sehingga berlaku $\bar{6} \cdot 2\bar{a} = 2\bar{a} \cdot \bar{6} = 2\bar{a}$.

iv. Setiap elemen mempunyai invers.

- Invers dari $\bar{2}$ adalah $\bar{8}$, karena $\bar{2} \cdot \bar{8} = \bar{6}$.
- Invers dari $\bar{4}$ adalah $\bar{4}$, karena $\bar{4} \cdot \bar{4} = \bar{6}$.
- Invers dari $\bar{6}$ adalah $\bar{6}$, karena $\bar{6} \cdot \bar{6} = \bar{6}$.
- Invers dari $\bar{8}$ adalah $\bar{2}$, karena $\bar{8} \cdot \bar{2} = \bar{6}$.

Jadi, terbukti bahwa G merupakan grup terhadap operasi pergandaan.

Contoh 2.3.3.

Diberikan himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ yang dilengkapi operasi biner $+$. Akan dibuktikan bahwa $(\mathbb{Z}, +)$ adalah grup komutatif.

Bukti

i. Tertutup.

Ambil sebarang $x, y \in \mathbb{Z}$, berlaku $x + y \in \mathbb{Z}$.

Jadi untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}$ memenuhi sifat tertutup.

Aksioma (i) terpenuhi.

ii. Assosiatif.

Ambil sebarang $x, y, z \in \mathbb{Z}$, berlaku

$(x + y) + z = x + (y + z)$. Jadi untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{Z}$ memenuhi sifat assosiatif.
Aksioma (ii) terpenuhi.

iii. Memiliki elemen identitas.
Ambil sebarang $x \in \mathbb{Z}$, jika $x + e = e + x = x$, maka e adalah elemen identitas pada $\mathbb{Z}$. Elemen identitas pada $\mathbb{Z}$ dengan operasi $(+)$ adalah 0.
Aksioma (iii) terpenuhi.

iv. Setiap elemen mempunyai invers.
Ambil sebarang $x \in \mathbb{Z}$.
Berlaku $x + (-x) = (-x) + x = e$
$x + (-x) = (-x) + x = 0$
Jadi untuk setiap $x \in \mathbb{Z}$ memiliki invers.
Aksioma (iv) terpenuhi.

v. Berlaku hukum komutatif.
Ambil sebarang $x, y \in \mathbb{Z}$, berlaku $x + y = y + x \in \mathbb{Z}$.
Jadi untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}$ berlaku $x + y = y + x$.

Berdasarkan (i), (ii), (iii), (iv) dan (v) $(\mathbb{Z}, +)$ merupakan grup komutatif (abelian).

Contoh 2.3.4
Diberikan himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ tanpa nol yang dilengkapi operasi biner pergandaan $(\cdot)$. Akan dibuktikan bahwa $(\mathbb{R}\backslash\{0\}, \cdot)$ adalah grup komutatif.
Bukti

i. Tertutup.
Ambil sebarang $x, y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, berlaku $x \cdot y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Jadi untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ memenuhi sifat tertutup. Aksioma (i) terpenuhi.

ii. Assosiatif.
Ambil sebarang $x, y, z \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, berlaku
$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.
Jadi untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ memenuhi sifat assosiatif. Aksioma (ii) terpenuhi.

iii. Memiliki elemen identitas.
Ambil sebarang $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, jika $x \cdot e = e \cdot x = x$, maka e adalah elemen identitas pada $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Elemen identitas pada $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ dengan operasi $(\cdot)$ adalah 1.

Aksioma (iii) terpenuhi.

iv. Setiap elemen mempunyai invers.
Ambil sebarang $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.
Berlaku $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e$
$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$.
Jadi untuk setiap $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ memiliki invers.
Aksioma (iv) terpenuhi.

v. Berlaku hukum komutatif.
Ambil sebarang $x, y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, sehingga berlaku
$x \cdot y = y \cdot x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.
Jadi untuk setiap $x, y \in (\mathbb{R}\backslash\{0\})$ berlaku $x \cdot y = y \cdot x$.

Berdasarkan (i), (ii), (iii), (iv) dan (v) $(\mathbb{R}\backslash\{0\},\cdot)$ merupakan grup komutatif (abelian).

Definisi 2.3.5 (Subgrup)
Misalkan G adalah suatu grup dan H adalah subset tidak kosong dari G. H merupakan subgrup dari G, jika terhadap operasi biner yang sama dengan G, H juga merupakan grup.
H subgrup dari grup G dinotasikan dengan $H \trianglelefteq G$.

Teorema 2.3.6
Misalkan G adalah grup. H merupakan subgrup dari G bila dan hanya bila berlaku untuk setiap $a, b \in H$, berlaku $ab^{-1} \in H$.

Bukti

($\Rightarrow$) Diketahui : H adalah subgrup.
Akan dibuktikan: Untuk setiap $a, b \in H$ berlaku $ab^{-1} \in H$
Jika H subgrup maka H juga memenuhi aksioma yang sama dengan grup, yaitu:
i) Tertutup, yaitu untuk setiap $a, b \in H$ berlaku $ab \in H$.
ii) Memiliki elemen invers, yaitu Untuk setiap $a \in H$ berlaku $a^{-1} \in H$.

Karena menurut ii) setiap elemen dari H mempunyai invers, sehingga berlaku pula jika $b \in H$ maka $b^{-1} \in H$. Selanjutnya menurut ketentuan i) jika $a, b^{-1} \in H$ maka $ab^{-1} \in H$.
Jadi, terbukti untuk setiap $a, b \in H$ berlaku $ab^{-1} \in H$.

(⇐) Diketahui : Untuk setiap $a, b \in H$ berlaku $ab^{-1} \in H$.
Akan dibuktikan: Bahwa H adalah subgrup dari G.
Ambil $a \in H$ menurut ketentuan berlaku $aa^{-1} = e \in H$. Kemudian ambil $e, b \in H$ sehingga $eb^{-1} = b^{-1} \in H$. Jika $a, b^{-1} \in H$ maka $a(b^{-1})^{-1} \in H = ab \in H$. Karena H adalah subset dari G, maka berlaku sifat assosiatif pada H. Terbukti bahwa H adalah subgrup dari G.

Contoh 2.3.7
Berdasarkan Contoh 2.3.2, diketahui G adalah grup. Diberikan $H = \{\overline{4}, \overline{6}\}$ adalah subset dari G. Akan ditunjukkan bahwa H adalah subgrup dari G.
Bukti

- Ambil $a, b, b^{-1} \in H$. $a = \overline{4}$, $b = \overline{6}$ dan $b^{-1} = \overline{6}$
$$ab^{-1} = \overline{4} \cdot \overline{6} = \overline{4} \in H.$$
- Ambil $a, b, b^{-1} \in H$. $a = \overline{6}$, $b = \overline{4}$ dan $b^{-1} = \overline{4}$
$$ab^{-1} = \overline{6} \cdot \overline{4} = \overline{4} \in H.$$

Sehingga terbukti untuk setiap $a, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$

Definisi 2.3.8 (Komutator)
Misalkan G adalah grup. $x, y \in G$ dan X dan Y masing-masing adalah subset tak kosong dari G. Didefinisikan:

- $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$ adalah komutator dari x dan y.
- $G' = \{[x, y] | x, y \in G\}$ adalah subgrup komutator yang dihasilkan oleh semua komutator dari elemen grup G. Atau dapat dinyatakan sebagai
$$G' = [G, G] = \{[x, y] | x, y \in G\}.$$
- $[X, Y] = \{[x, y] | x \in X \text{ dan } y \in Y\}$ adalah subgrup yang dibangun oleh komutator dari himpunan X dan himpunan Y.

Contoh 2.3.9
Berdasarkan Contoh 2.3.2, G adalah grup.
i. Akan ditentukan komutator dari semua elemen dalam G.
ii. Akan ditentukan apakah G merupakan grup komutatif.
Bukti
i. Berdasarkan Contoh 2.3.2 (iv), diperoleh:
   - Invers dari $\overline{2}$ adalah $\overline{8}$.

- Invers dari $\overline{4}$ adalah $\overline{4}$.
- Invers dari $\overline{6}$ adalah $\overline{6}$.
- Invers dari $\overline{8}$ adalah $\overline{2}$.

Berdasarkan Definisi 2.3.8, komutator (x, y) didefinisikan dengan $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$ dengan $x, y \in G$. Komutator dari G akan disajikan pada Tabel 2.1 berikut:

Tabel 2.1 Komutator dari G

$[x, y]$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$
$\overline{2}$	$\overline{6}$	$\overline{6}$	$\overline{6}$	$\overline{6}$
$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{6}$	$\overline{6}$	$\overline{6}$
$\overline{6}$	$\overline{6}$	$\overline{6}$	$\overline{6}$	$\overline{6}$
$\overline{8}$	$\overline{6}$	$\overline{6}$	$\overline{6}$	$\overline{6}$

Jadi, himpunan komutator dari G dinotasikan dengan G' adalah $\{\overline{6}\}$.

ii. Akan ditentukan apakah G merupakan grup komutatif.

Bukti

Misalkan $2\overline{a}, 2\overline{b} \in G$ di mana $\overline{a}, \overline{b} \in \mathbb{Z}_{10}$ dengan $\overline{a} = a + 10k_1$ dan $\overline{b} = b + 10k_2$ dan $a, b, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

Akan dibuktikan bahwa $2\overline{a} \cdot 2\overline{b} = 2\overline{b} \cdot 2\overline{a}$.

$$\begin{aligned} 2\overline{a} \cdot 2\overline{b} &= 2(a + 10k_1) \cdot 2(b + 10k_2) \\ &= (2a + 20k_1) \cdot (2b + 20k_2) \\ &= 4ab + 40a10k_2 + 40b10k_1 + 100k_1k_2. \end{aligned}$$

Karena $ab \in \mathbb{Z}$, maka $ab = ba$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} &= 4ba + 40b10k_1 + 40a10k_2 + 100k_2k_1 \\ &= 2\overline{b} \cdot 2\overline{a}. \end{aligned}$$

Jadi, terbukti untuk setiap $2\overline{a}, 2\overline{b} \in G$ berlaku $2\overline{a} \cdot 2\overline{b} = 2\overline{b} \cdot 2\overline{a}$ dan G merupakan grup komutatif.

Berdasarkan i diperoleh $G' = \{\overline{6}\}$ dan berdasarkan ii G merupakan grup komutatif. Menurut Contoh 2.3.2, $\{\overline{6}\}$ adalah elemen identitas dalam G sehingga dapat disimpulkan $G' = \{e\}$ jika dan hanya jika G merupakan grup komutatif.

2.4 BCK-Aljabar

Berikut ini akan diberikan definisi dan contoh yang berkaitan dengan BCK-aljabar yang dirujuk dari Dvurečenskij, dkk (2000), Ahsan (1989) dan Boorzooei (2006).

Definisi 2.4.1 (BCK-Aljabar)
Misalkan G adalah himpunan tak kosong dengan sebuah operasi biner $*$ dan elemen khusus 0. $(G,*,0)$ disebut BCK-aljabar jika untuk setiap $x, y, z \in G$, berlaku:

(i) $\big((x*y)*(x*z)\big)*(z*y)=0$,
(ii) $\big(x*(x*y)\big)*y=0$,
(iii) $x*x=0$,
(iv) $0*x=0$,
(v) Jika $x*y=0$ dan $y*x=0$, maka $x=y$.

Dalam skripsi ini, $x*y$ akan dituliskan dengan xy, dengan xy adalah operasi biner yang didahulukan. Sehingga aksioma diatas ditulis sebagai berikut:

(i) $(xy*xz)*zy=0$,
(ii) $(x*xy)*y=0$,
(iii) $xx=0$,
(iv) $0x=0$,
(v) Jika $xy=0$ dan $yx=0$, maka $x=y$.

Contoh 2.4.2
Diberikan $G=\{0,2,4\}$ dengan elemen khusus 0 dan didefinisikan sebuah operasi $*$ yang didefinisikan pada Tabel 2.2 berikut :

Tabel 2.2 Operasi biner $*$ pada G

$*$	0	2	4
0	0	0	0
2	2	0	0
4	4	2	0

Akan dibuktikan bahwa $(G,*,0)$ adalah BCK-aljabar.

Bukti

i. Akan dibuktikan bahwa untuk setiap $x, y, z \in G$ memenuhi kondisi $(xy * xz) * zy = 0$.
   - Untuk $x = 0,\ y = 2,\ z = 4$, diperoleh
     $(02 * 04) * 42 = 00 * 2 = 02 = 0.$

   Untuk nilai $x, y, z \in G$ yang lain disajikan pada Lampiran 1.

ii. Akan dibuktikan bahwa untuk setiap $x, y \in G$ memenuhi $(x * xy) * y = 0$
   - Untuk $x = 0, y = 2$, diperoleh
     $(0 * 02) * 2 = 00 * 2 = 02 = 0$

   Untuk nilai $x, y \in G$ yang lain akan disajikan pada Lampiran 1.

iii. Akan dibuktikan bahwa untuk setiap $x \in G$, berlaku $xx = 0$. Ambil $x = 2$, karena definisi operasi biner pada Tabel 2.2 diatas, jelas memenuhi $22 = 0$. Untuk nilai x yang lain akan disajikan pada Lampiran 1.

iv. Akan dibuktikan bahwa untuk setiap $x \in G$, berlalu $0x = 0$. Dari Tabel 2.2, untuk $x = 0$ berlaku $0x = 0$. Untuk nilai x yang lain akan disajikan pada Lampiran 1.

v. Akan dibuktikan bahwa untuk setiap $x, y \in G$ memenuhi

   jika $xy = 0$ dan $yx = 0$ maka $x = y$.

   Bukti akan ditunjukkan secara kontraposisi.
   - Untuk $x = 0$ dan $y = 2$, jelas bahwa $x \neq y$. Dari Tabel 2.2, diperoleh $xy = 02 = 0$ tetapi $yx = 20 = 2$. Sehingga $xy \neq yx$.Untuk nilai $x, y \in G$ yang lain akan disajikan pada Lampiran 1.

Berdasarkan tabel pada Lampiran 1, untuk setiap $x, y, z \in G$ memenuhi aksioma i, ii, iii, iv dan v. Sehingga terbukti bahwa $(G, *, 0)$ adalah BCK-aljabar.

Contoh 2.4.3

Diberikan $G = \{0, a, b, 1\}$ dengan elemen khusus 0 dan operasi biner $*$ yang didefinisikan pada Tabel 2.3 berikut:

Tabel 2.3 Operasi biner $*$ pada G

$*$	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	a	0	0	0
b	b	b	0	0
1	1	b	a	0

Akan dibuktikan bahwa $(G,*,0)$ adalah BCK-aljabar.

Bukti

i. Akan dibuktikan bahwa untuk setiap $x, y, z \in G$ memenuhi kondisi $(xy * xz) * zy = 0$
   - Untuk $x = 0,\ y = a,\ z = b$. Diperoleh $(0a * 0b) * ba = 00 * b = 0b = 0$.

   Untuk nilai $x, y, z \in G$ yang lain akan disajikan pada Lampiran 2.

ii. Akan dibuktikan bahwa untuk setiap $x, y \in G$ memenuhi $(x * xy) * y = 0$.
   - Untuk $x = 0, y = a$, diperoleh $(0 * 0a) * a = 00 * a = 0a = 0$.

   Untuk nilai $x, y \in G$ yang lain akan disajikan pada Lampiran 2.

iii. Akan dibuktikan bahwa untuk setiap $x \in G$, berlaku $xx = 0$. Untuk $x = a$, berdasarkan Tabel 2.3, nilai $aa = 0$. Untuk nilai $x \in G$ yang lain akan disajikan pada Lampiran 2.

iv. Akan dibuktikan bahwa untuk setiap $x \in G$, berlalu $0x = 0$. Untuk $x = a$, berdasarkan Tabel 2.3, nilai $0a = 0$. Untuk nilai $x \in G$ yang lain akan disajikan pada Lampiran 2.

v. Akan dibuktikan bahwa untuk setiap $x, y \in G$ memenuhi jika $xy = 0$ dan $yx = 0$, maka $x = y$.

   Bukti akan ditunjukkan secara kontraposisi.
   - Untuk $x = 0$ dan $y = a$, jelas bahwa $x \neq y$. Dari definisi operasi biner $*$ pada Tabel 2.3, diperoleh $xy = 0a = 0$ tetapi $yx = a0 = a$. Sehingga $xy \neq yx$.

   Untuk nilai $x, y \in G$ yang lain akan disajikan pada Lampiran 2.

Berdasarkan Lampiran 2, untuk setiap $x, y, z \in G$ memenuhi aksioma i, ii, iii, iv dan v. Sehingga terbukti bahwa $(G,*,0)$ adalah BCK-aljabar.

Contoh 2.4.4

Diberikan $G = \{0,1,2,3\}$ dengan elemen khusus 0 dan operasi biner $*$ yang didefinisikan pada Tabel 2.4 berikut:

Tabel 2.4 Operasi biner$*$ Pada G

$*$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	0	1	1
2	2	2	0	0
3	3	3	2	0

Akan dibuktikan bahwa $(G,* ,0)$ adalah BCK-aljabar.

Bukti

i. Akan dibuktikan untuk setiap $x, y, z \in G$ memenuhi kondisi $(xy * xz) * zy = 0$.
   - Untuk$x = 0,\ y = 1,\ z = 2$. Diperoleh
     $(01 * 02) * 21 = 00 * 2 = 02 = 0.$

   Untuk nilai $x, y, z \in G$ yang lain akan disajikan pada Lampiran 3.

ii. Akan dibuktikan bahwa untuk setiap $x, y \in G$ memenuhi $(x * xy) * y = 0$.
   - Untuk$x = 0, y = 1$, diperoleh
     $(0 * 01) * 1 = 00 * 1 = 01 = 0.$

   Untuk nilai $x, y \in G$ yang lain akan disajikan pada Lampiran 3.

iii. Akan dibuktikan bahwa untuk setiap $x \in G$, berlaku $xx = 0$. Untuk $x = 2$, berdasarkan Tabel 2.4, nilai $22 = 0$. Untuk nilai $x \in G$ yang lain akan disajikan pada Lampiran 3.

iv. Akan dibuktikan bahwa untuk setiap $x \in G$, berlalu $0x = 0$. Untuk $x = 2$, berdasarkan Tabel 2.4, nilai $02 = 0$. Untuk nilai $x \in G$ yang lain akan disajikan pada Lampiran 3.

v. Akan dibuktikan bahwa untuk setiap $x, y \in G$ memenuhi jika $xy = 0$ dan $yx = 0$ maka $x = y$.
   Bukti akan ditunjukkan secara kontraposisi.
   - Untuk $x = 0$ dan $y = 2$, jelas bahwa $x \neq y$. Dari Tabel 2.4 diperoleh $xy = 02 = 0$ tetapi $yx = 20 = 2$.
     Sehingga $xy \neq yx$.

   Untuk nilai $x, y \in G$ yang lain akan disajikan pada Lampiran 3.

Contoh 2.4.5
Diberikan $G = \{0,1,2\}$ dengan elemen khusus 0 dan sebuah operasi biner $*$ yang didefinisikan pada Tabel 2.5 berikut:

Tabel 2.5 Operasi biner $*$ pada G

$*$	0	1	2
0	0	0	0
1	2	2	0
2	2	2	0

$(G,\cdot,0)$ bukan BCK-aljabar karena tidak memenuhi Definisi 2.4.1 (iii), yaitu terdapat $1 \in G$ dimana $11 = 2 \neq 0$.

Contoh 2.4.6
Berdasarkan Contoh 2.3.3, $(\mathbb{Z}, +)$ merupakan grup komutatif. Jika himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dengan elemen khusus 0 didefinisikan sebuah operasi biner $*$ dengan ketentuan sebagai berikut:

$$x * y = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ x - y, & yang\ lain \end{cases}$$

Akan dibuktikan bahwa $(\mathbb{Z},*,0)$ adalah BCK-aljabar.
Bukti
Untuk $x = 0,\ y = 0$, dan $z \neq 0$.

i. Akan dibuktikan bahwa untuk setiap $x, y, x \in \mathbb{Z}$ memenuhi $(xy * xz) * zy = 0$.
   $(xy * xz) * zy = 00 * (z - y) = 0 * (z - y) = 0$. Jadi untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{Z}$ memenuhi $(xy * xz) * zy = 0$.
   Aksioma (i) terpenuhi.
ii. Akan dibuktikan bahwa untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}$ memenuhi $(x * xy) * y = 0$.
   $x0 * y = 0y = 0$. Jadi untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}$ memenuhi $(x * xy) * zy = 0$.
   Aksioma (ii) terpenuhi.
iii. Akan dibuktikan bahwa untuk setiap $x \in \mathbb{Z}$ memenuhi $xx = 0$.
   Berdasarkan Definisi operasi biner pada $\mathbb{Z}$, dan didefinisikan nilai $x = 0$, maka $xx = 0$. Jadi untuk setiap $x \in \mathbb{Z}$ memenuhi $xx = 0$.

Aksioma (iii) terpenuhi.

iv. Akan ditunjukkan untuk setiap $x \in \mathbb{Z}$ memenuhi $0x = 0$. Berdasarkan Definisi operasi biner pada $\mathbb{Z}$, jika $x = 0$ maka $xy = 0$ maka berlaku pula untuk $0x = 0$. Jadi untuk setiap $x \in \mathbb{Z}$ memenuhi $0x = 0$.
Aksioma (iv) terpenuhi.

v. Akan dibuktikan bahwa untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}$ berlaku jika $xy = 0$ dan $yx = 0$ maka $x = y$.
Berdasarkan Definisi operasi biner pada $\mathbb{Z}$, $xy = 0$ dan $yx = 0$ sehingga $xy = yx$ dan terbukti $x = y$. Sehingga berlaku pernyataan yang kontraposisi dengan aksioma (v).
Aksioma (v) terpenuhi.

Untuk $x \neq,\ y = 0,\ z \neq 0$.

i. Akan dibuktikan bahwa untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{Z}$ memenuhi $(xy * xz) * zy = 0$.

$$\begin{aligned}(xy * xz) * zy &= \big((x-y) * (x-z)\big) * (z-y)\\ &= \big((x-y) - (x-z)\big) - (z-y)\\ &= (x - y - x + z) - z + y\\ &= x - y - x + z - z + y\\ &= 0.\end{aligned}$$

Jadi untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{Z}$ memenuhi $(xy * xz) * zy = 0$.
Aksioma (i) terpenuhi.

ii. Akan dibuktikan bahwa untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}$ memenuhi $(x * xy) * y = 0$.

$$(x * (x-y)) * y = x - (x-y) - y = x - x + y - y = 0.$$

Jadi untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}$ memenuhi $(x * xy) * y = 0$.
Aksioma (ii) terpenuhi.

iii. Akan dibuktikan bahwa untuk setiap $x \in \mathbb{Z}$ memenuhi $xx = 0$. Berdasarkan Definisi operasi biner pada $\mathbb{Z}$, dan didefinisikan nilai $x \neq 0$, maka $xx = x - x$=0. Jadi untuk setiap $x \in \mathbb{Z}$ memenuhi $xx = 0$.
Aksioma (iii) terpenuhi.

iv. Akan dibuktikan bahwa untuk setiap $x \in \mathbb{Z}$ memenuhi $0x = 0$. Berdasarkan Definisi operasi biner pada $\mathbb{Z}$, jika $x = 0$ maka $xy = 0$ maka berlaku pula untuk $0x = 0$. Jadi untuk setiap $x \in \mathbb{Z}$ memenuhi $0x = 0$.

Aksioma (iv) terpenuhi.

v. Akan dibuktikan bahwa untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}$ berlaku jika $xy = 0$ dan $yx = 0$ maka $x = y$.
Berdasarkan Definisi operasi biner pada $\mathbb{Z}$, $xy = x - y \neq 0$ sedangkan $yx = 0$ sehingga $xy \neq yx$ dan terbukti
$x \neq y$. Sehingga berlaku pernyataan yang kontraposisi dengan aksioma (v).
Aksioma (v) terpenuhi.

Untuk $x = 0,\ y \neq 0,\ z = 0$.

i. Akan dibuktikan bahwa untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{Z}$ memenuhi $(xy * xz) * zy = 0$.
$(xy * xz) * zy = 00 * (z - y) = 0 * (z - y) = 0$. Jadi untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{Z}$ memenuhi $(xy * xz) * zy = 0$.
Aksioma (i) terpenuhi.

ii. Akan dibuktikan bahwa untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}$ memenuhi $(x * xy) * y = 0$.
$x0 * y = 0y = 0$. Jadi terbukti untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}$ memenuhi $(x * xy) * y = 0$.
Aksioma (ii) terpenuhi.

iii. Akan dibuktikan bahwa untuk setiap $x \in \mathbb{Z}$ memenuhi $xx = 0$.
Berdasarkan Definisi operasi biner pada $\mathbb{Z}$, dan didefinisikan nilai $x = 0$, maka $xx = 0$. Jadi untuk setiap $x \in \mathbb{Z}$ memenuhi $xx = 0$.
Aksioma (iii) terpenuhi.

iv. Akan dibuktikan bahwa untuk setiap $x \in \mathbb{Z}$ memenuhi $0x = 0$.
Berdasarkan Definisi operasi biner pada $\mathbb{Z}$, jika $x = 0$ maka $xy = 0$ maka berlaku pula untuk $0x = 0$. Jadi untuk setiap $x \in \mathbb{Z}$ memenuhi $0x = 0$.
Aksioma (iv) terpenuhi.

v. Akan dibuktikan bahwa untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}$ berlaku jika $xy = 0$ dan $yx = 0$ maka $x = y$.
Berdasarkan Definisi operasi biner pada $\mathbb{Z}$, jika $x = 0$ maka $xy = 0$ sedangkan $yx = y - x \neq 0$ sehingga $xy \neq yx$ dan terbukti $x \neq y$. Sehingga berlaku pernyataan yang kontraposisi dengan aksioma (v).
Aksioma (v) terpenuhi.

Untuk $x = 0,\ y \neq 0,\ z \neq 0$.

i. Akan dibuktikan bahwa untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{Z}$ memenuhi $(xy * xz) * zy = 0$.
$(xy * xz) * zy = 00 * (z - y) = 0 * (z - y) = 0$. Jadi untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{Z}$ memenuhi $(xy * xz) * zy = 0$.
Aksioma (i) terpenuhi.

ii. Akan dibuktikan bahwa untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}$ memenuhi $(x * xy) * y = 0$.
$00 * y = 0y = 0$. Jadi terbukti untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}$ memenuhi $(x * xy) * y = 0$.
Aksioma (ii) terpenuhi.

iii. Akan dibuktikan bahwa untuk setiap $x \in \mathbb{Z}$ memenuhi $xx = 0$. Berdasarkan Definisi operasi biner pada $\mathbb{Z}$, dan didefinisikan nilai $x = 0$, maka $xx = 0$. Jadi untuk setiap $x \in \mathbb{Z}$ memenuhi $xx = 0$.
Aksioma (iii) terpenuhi.

iv. Akan dibuktikan bahwa untuk setiap $x \in \mathbb{Z}$ memenuhi $0x = 0$. Berdasarkan Definisi operasi biner pada $\mathbb{Z}$, jika $x = 0$ maka $xy = 0$ maka berlaku pula untuk $0x = 0$. Jadi untuk setiap $x \in \mathbb{Z}$ memenuhi $0x = 0$.
Aksioma (iv) terpenuhi.

v. Akan dibuktikan bahwa untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}$ berlaku jika $xy = 0$ dan $yx = 0$ maka $x = y$.
Berdasarkan Definisi operasi biner pada $\mathbb{Z}$, jika $x = 0$ maka $xy = 0$ sedangkan $yx = y - x \neq 0$ sehingga $xy \neq yx$ dan terbukti $x \neq y$. Sehingga berlaku pernyataan yang kontraposisi dengan aksioma (v).
Aksioma (v) terpenuhi.

Untuk $x \neq 0,\ y \neq 0,\ z \neq 0$.

i. Akan dibuktikan bahwa untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{Z}$ memenuhi $(xy * xz) * zy = 0$.
$$(xy * xz) * zy = \big((x - y) * (x - z)\big) * (z - y)$$
$$= (x - y - x + z) * (z - y)$$
$$(xy * xz) * zy = x - y - x + z - z + y = 0.$$
Jadi untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{Z}$ memenuhi $(xy * xz) * zy = 0$.
Aksioma (i) terpenuhi.

ii. Akan dibuktikan bahwa untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}$ memenuhi $(x * xy) * y = 0$.
$\big(x * (x - y)\big) * y = x - x + y - y = 0$. Jadi terbukti untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}$ memenuhi $(x * xy) * y = 0$.
Aksioma (ii) terpenuhi.
iii. Akan dibuktikan bahwa untuk setiap $x \in \mathbb{Z}$ memenuhi $xx = 0$.
Didefinisikan nilai $x \neq 0$, maka $xx = x - x = 0$. Jadi untuk setiap $x \in \mathbb{Z}$ memenuhi $xx = 0$.
Aksioma (iii) terpenuhi.
iv. Akan dibuktikan bahwa untuk setiap $x \in \mathbb{Z}$ memenuhi $0x = 0$.
Berdasarkan Definisi operasi biner pada $\mathbb{Z}$, jika $x = 0$ maka $xy = 0$ maka berlaku pula untuk $0x = 0$. Jadi untuk setiap $x \in \mathbb{Z}$ memenuhi $0x = 0$.
Aksioma (iv) terpenuhi.
v. Akan dibuktikan bahwa untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}$ berlaku jika $xy = 0$ dan $yx = 0$ maka $x = y$.
Diketahui $x \neq 0, y \neq 0$ maka $xy = x - y \neq 0$ sedangkan untuk $yx = y - x \neq 0$ sehingga $xy \neq yx$ dan terbukti $x \neq y$. Sehingga berlaku pernyataan yang kontraposisi dengan aksioma (v).

Aksioma (v) terpenuhi.

Berlaku pula untuk semua nilai $x, y, z \in \mathbb{Z}$, yaitu memenuhi aksioma i, ii, iii, iv, dan v. Jadi, terbukti bahwa $(\mathbb{Z}, *, 0)$ adalah BCK-aljabar.

Contoh 2.4.7

Berdasarkan Contoh 2.3.4, $(\mathbb{R}\backslash\{0\}, \cdot)$ adalah grup komutatif. Jika himpunan bilangan real tanpa 0 $(\mathbb{R}\backslash\{0\})$ dengan elemen khusus 1 didefinisikan sebuah operasi biner $*$ dengan ketentuan sebagai berikut,

$$x * y = \begin{cases} 1, & x = 1 \\ \dfrac{x}{y}, & yang\ lain \end{cases}$$

Akan dibuktikan bahwa $(\mathbb{R}\backslash\{0\}, *, 1)$ adalah BCK-aljabar.

Bukti.

Untuk $x = 1,\ y \neq 1$, dan $z = 1$.

i. Akan dibuktikan bahwa untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ memenuhi $(xy * xz) * zy = 1$.
$(xy * xz) * zy = 11 * 1 = 11 = 1$.

Jadi untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ berlaku $(xy * xz) * zy = 1$. Aksioma (i) terpenuhi.

ii. Akan dibuktikan bahwa untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ memenuhi $(x * xy) * y = 1$.
$(x * xy) * y = x1 * y = 1y = 1$.
Jadi untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ memenuhi $(x * xy) * zy = 1$.
Aksioma (ii) terpenuhi.

iii. Akan dibuktikan bahwa untuk setiap $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ memenuhi $xx = 1$. Didefinisikan nilai $x = 1$, berdasarkan Definisi operasi biner pada $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, diperoleh $xx = 1$. Jadi untuk setiap $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ memenuhi $xx = 1$.
Aksioma (iii) terpenuhi.

iv. Akan dibuktikan bahwa untuk setiap $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ memenuhi $1x = 1$. Berdasarkan Definisi operasi biner pada $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, jika $x = 1$ maka $xy = 1$ maka berlaku pula untuk $1x = 1$. Jadi terbukti untuk setiap $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ memenuhi $1x = 1$.
Aksioma (iv) terpenuhi.

v. Akan dibuktikan bahwa untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ berlaku jika $xy = 1$ dan $yx = 1$ maka $x = y$.
Berdasarkan Definisi operasi biner pada $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, $xy = 1$ sedangkan $yx = \frac{y}{x} \neq 1$ sehingga $xy \neq yx$ dan terbukti $x \neq y$. Sehingga berlaku pernyataan yang kontraposisi dengan aksioma (v).
Aksioma (v) terpenuhi.

Untuk $x \neq 1$, y =1, dan $z \neq 1$.

i. Akan dibuktikan bahwa untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ memenuhi $(xy * xz) * zy = 1$.
$(xy * xz) * zy = \left(\frac{x}{y} * \frac{x}{z}\right) * \frac{z}{y} = \left(\frac{x}{y} \times \frac{z}{x}\right) *= \frac{z}{y} * \frac{z}{y} = \frac{z}{y} \times \frac{y}{z} = 1.$
Untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ memenuhi $(xy * xz) * zy = 1$.
Aksioma (i) terpenuhi.

ii. Akan dibuktikan bahwa untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ memenuhi $(x * xy) * y = 1$.
$(x * xy) * y = \left(x * \frac{x}{y}\right) * y = \left(x \times \frac{y}{x}\right) * y = yy = y \times \frac{1}{y} = 1.$
Jadi untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ memenuhi $(x * xy) * zy = 1$.
Aksioma (ii) terpenuhi.

iii. Akan dibuktikan untuk setiap $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ memenuhi $xx = 1$.
$xx = x \times \frac{1}{x} = 1$. Jadi untuk setiap $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ berlaku $xx = 1$.
Aksioma (iii) terpenuhi.

iv. Akan dibuktikan bahwa untuk setiap $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ memenuhi $1x = 1$. Berdasarkan Definisi operasi biner pada $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, jika $x = 1$ maka $xy = 1$ maka berlaku pula untuk $1x = 1$. Jadi terbukti untuk setiap $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ memenuhi $1x = 1$.
Aksioma (iv) terpenuhi.

v. Akan dibuktikan bahwa untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ berlaku jika $xy = 1$ dan $yx = 1$ maka $x = y$.
Berdasarkan Definisi operasi biner pada $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, $xy = \frac{x}{y} \neq 1$ sedangkan $yx = 1$ sehingga $xy \neq yx$ dan terbukti $x \neq y$. Sehingga berlaku pernyataan yang kontraposisi dengan aksioma (v).
Aksioma (v) terpenuhi.

Untuk $x = 1$, $y = 1$, dan $z \neq 1$.

i. Akan dibuktikan bahwa untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ memenuhi $(xy * xz) * zy = 1$.
$(xy * xz) * zy = 11 * \left(\frac{z}{y}\right) = 1 * \frac{z}{y} = 1$. Jadi untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ memenuhi $(xy * xz) * zy = 1$.
Aksioma (i) terpenuhi.

ii. Akan dibuktikan bahwa untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ memenuhi $(x * xy) * y = 1$.
$(x * xy) * y = x1 * y = 1y = 1$.
Jadi untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ memenuhi $(x * xy) * zy = 1$.
Aksioma (ii) terpenuhi.

iii. Akan dibuktikan bahwa untuk setiap $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ memenuhi $xx = 1$. Berdasarkan Definisi operasi biner pada $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, dan didefinisikan nilai $x = 1$, maka $xx = 1$. Jadi untuk setiap $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, memenuhi $xx = 1$.
Aksioma (iii) terpenuhi.

iv. Akan dibuktikan untuk setiap $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ memenuhi $1x = 1$.
Berdasarkan Definisi operasi biner pada $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, jika $x = 1$ maka $xy = 1$ maka berlaku pula untuk $1x = 1$. Jadi terbukti untuk setiap $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ memenuhi $1x = 1$.

Aksioma (iv) terpenuhi.

v. Akan dibuktikan bahwa untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ berlaku kondisi jika $xy = 1$ dan $yx = 1$ maka $x = y$.
Berdasarkan Definisi operasi biner pada $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, $xy = 1$ dan $yx = 1$ sehingga $xy = yx$ dan terbukti $x = y$.
Aksioma (v) terpenuhi.

Untuk $x = 1,\ y \neq 1,\ z \neq 1$.

i. Akan dibuktikan bahwa untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ memenuhi
$(xy * xz) * zy = 1$.
$(xy * xz) * zy = 11 * \left(\frac{z}{y}\right) = 1 * \left(\frac{z}{y}\right) = 1$. Jadi untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ memenuhi $(xy * xz) * zy = 1$.
Aksioma (i) terpenuhi.

ii. Akan dibuktikan bahwa untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ memenuhi $(x * xy) * y = 1$.
$11 * y = 1y = 1$. Jadi terbukti untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ memenuhi $(x * xy) * y = 1$.
Aksioma (ii) terpenuhi.

iii. Akan dibuktikan bahwa untuk setiap $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ memenuhi $xx = 1$. Berdasarkan Definisi operasi biner pada $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, dan didefinisikan nilai $x = 1$, maka $xx = 1$. Jadi terbukti untuk setiap $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ memenuhi $xx = 1$.
Aksioma (iii) terpenuhi.

iv. Akan dibuktikan untuk setiap $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ memenuhi $1x = 1$. Berdasarkan Definisi operasi biner pada $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, jika $x = 1$ maka $xy = 1$ maka berlaku pula untuk $1x = 1$. Jadi untuk setiap $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ memenuhi $1x = 1$.
Aksioma (iv) terpenuhi.

v. Akan dibuktikan bahwa untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ berlaku jika $xy = 1$ dan $yx = 1$ maka $x = y$.
Berdasarkan Definisi operasi biner pada $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, jika $x = 1$ maka $xy = 1$ sedangkan $yx = \frac{y}{x} \neq 1$ sehingga $xy \neq yx$ dan terbukti $x \neq y$. Sehingga berlaku pernyataan yang kontraposisi dengan aksioma (v).
Aksioma (v) terpenuhi.

Untuk $x \neq 1,\ y \neq 1,\ z \neq 1.$

i. Akan dibuktikan bahwa untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ memenuhi
$(xy * xz) * zy = 1.$

$$(xy * xz) * zy = \left(\left(\frac{x}{y}\right) * \left(\frac{x}{z}\right)\right) * \frac{z}{y}$$

$$= \left(\frac{\frac{x}{y}}{\frac{x}{z}}\right) * \frac{z}{y}$$

$$= \frac{z}{y} * \frac{z}{y} = \frac{\frac{z}{y}}{\frac{z}{y}} = 1.$$

Untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ memenuhi $(xy * xz) * zy = 1.$
Aksioma (i) terpenuhi.

ii. Akan dibuktikan bahwa untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ memenuhi $(x * xy) * y = 1.$
$\left(x * \left(\frac{x}{y}\right)\right) * y = \frac{x}{\frac{x}{y}} * y = \frac{y}{y}$=1. Jadi terbukti bahwa untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ memenuhi $(x * xy) * y = 1.$
Aksioma (ii) terpenuhi.

iii. Akan dibuktikan bahwa untuk setiap $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ memenuhi $xx = 1$. Didefinisikan nilai $x \neq 1$, maka $xx = \frac{x}{x} = 1$. Jadi untuk setiap $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ memenuhi $xx = 1$.
Aksioma (iii) terpenuhi.

iv. Akan dibuktikan bahwa untuk setiap $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ memenuhi $1x = 1$. Berdasarkan Definisi operasi biner pada $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. jika $x = 1$ maka $xy = 1$ maka berlaku pula untuk $1x = 1$. Jadi untuk setiap $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ memenuhi $1x = 1$.
Aksioma (iv) terpenuhi.

v. Akan dibuktikan bahwa untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ berlaku jika $xy = 1$ dan $yx = 1$ maka $x = y$.
Diketahui $x \neq 1, y \neq 1$ maka $xy = \frac{x}{y} \neq 1$ sedangkan untuk $yx = \frac{y}{x} \neq 1$ sehingga $xy \neq yx$ dan terbukti $x \neq y$. Sehingga berlaku pernyataan yang kontraposisi dengan aksioma (v).

Aksioma (v) terpenuhi.

Berlaku pula untuk semua nilai $x, y, z \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, yaitu memenuhi aksioma i, ii, iii, iv, dan v. Jadi, terbukti bahwa $(\mathbb{R}\backslash\{0\}, *, 1)$ adalah BCK-aljabar.

Definisi 2.4.8 (Relasi Biner $\leq$ pada G)
Misalkan $(G, *, 0)$ adalah BCK-aljabar dan didefinisikan sebuah relasi $\leq$ pada G. $x \leq y$ jika dan hanya jika $xy = 0$.

Contoh 2.4.9
Berdasarkan Contoh 2.4.2, ambil $x = 0$ dan $y = 2$ Menurut Tabel 2.2 pada Contoh 2.4.2, jelas bahwa $02 = 0$ sehingga dapat disimpulkan $0 \leq 2$.

Contoh 2.4.10
Berdasarkan Contoh 2.4.3, ambil $x = a$ dan $y = b$. Berdasarkan Tabel 2.3, didefinisikan $ab = 0$ sehingga $a \leq b$.

Proposisi 2.4.11
Jika $(G, *, 0)$ adalah BCK-aljabar dan $x \leq y$, maka $zy \leq zx$
Bukti

Misalkan $x, y, z \in G$ dan $x \leq y \Leftrightarrow xy = 0$	Definisi 2.4.8,
$(xy * xz) * zy = 0$	Definisi 2.4.1 (i)
$xy * xz \leq zy$	Definisi 2.4.8,
analog dengan $zy * zx \leq xy$	Definisi 2.4.1 (i)
Karena $x \leq y$, sehingga $zy * zx = 0$.	
$zy \leq zx$	Definisi 2.4.8.

Proposisi 2.4.12
Jika $(G, *, 0)$ adalah BCK-aljabar maka berlaku $xy * z = xz * y$ untuk setiap $x, y, z \in G$.
Bukti
Pembuktian akan ditunjukkan secara kontradiksi.
Misalkan $x, y, z \in G$. Berdasarkan Definisi 2.4.1 (ii) $(x * xy) * y = 0$.

$$\text{Andaikan } (ab) * c \neq (ac) * b$$

Dengan mensubstitusikan $a = x$, $b = x * y$, dan $b = y$ pada Definisi 2.4.1 (ii) dan Definisi 2.4.1 (iii). diperoleh:

$$(x * xy) * y \neq xy * xy = 0$$

Sehingga pengandaian harus diingkari, dan terbukti bahwa

$$xy * z = xz * y$$

Proposisi 2.4.13

Jika $(G, * , 0)$ adalah BCK-aljabar dengan relasi $\leq$ pada G. Untuk setiap $x, y, z \in G$, berlaku:

(i) $xy \leq z$ maka $xz \leq y$,

(ii) $xz * yz \leq xy$,

(iii) $x \leq y$ maka $xz \leq yz$,

(iv) $xy \leq x$,

(v) $x0 = x$.

Bukti

i. Berdasarkan Definisi 2.4.8, $x \leq y$ jika $xy = 0$. Sehingga untuk membuktikan bahwa $xy \leq z$ maka $xz \leq y$, dengan membuktikan bahwa $xy * z = 0$ dan $xz * y = 0$. Menurut Proposisi 2.4.12, $xy * z = xz * y$, sehingga menyebabkan $xy * z = xz * y = 0$. $y = 0$.

Akan dibuktikan bahwa $xy * z = xz * y = 0$. Berdasarkan Definisi 2.4.1 (ii) $(x * xy) * y = 0$, dimisalkan $x = x$, $y = xy$ dan $z = y$. Sehingga didapat $(x * xy) * y = xy * xy = 0$. Sehingga berlaku $xy \leq z$ dan $xz \leq y$.

ii. Akan dibuktikan bahwa $xz * yz \leq xy$. Menurut Definisi 2.4.8, $xz * yz \leq xy \Leftrightarrow (xz * yz) * xy = 0$. Lalu misalkan $a = xz$, $b = yz$, $c = xy$. Berdasarkan Proposisi 2.4.12, berlaku $(ab)c = (ac)b$, sehingga dengan mensubstitusikan nilai $a, b,$ dan c pada perumpamaan tersebut diperoleh

$$(xz * yz) * xy = (xz * xy) * yz.$$

Berdasarkan Definisi 2.4.1 (i), $(xz * xy) * yz = 0$. Sehingga terbukti $xz * yz \leq xy$.

iii. Akan dibuktikan jika $x \leq y$ maka $xz \leq yz$.

Berdasarkan Proposisi 2.4.13 (ii), berlaku $xz * yz \leq xy$. Berdasarkan Definisi 2.4.8, $x \leq y \Leftrightarrow xy = 0$ sehingga diperoleh persamaan $xz * yz = 0$ yang mengakibatkan $xz \leq yz$.

iv. Misalkan $x, y \in G$. Akan dibuktikan bahwa $xy \leq x$. Menurut Definisi 2.4.8 $x \leq y \Leftrightarrow xy = 0$.
Misalkan diketahui $xy \leq x$, akan dibuktikan bahwa $xy \cdot x = 0$.

$xy * x$	$= xx * y$	Proposisi 2.4.12
	$= 0 * y$	Definisi 2.4.1 (iii)
	$= 0$	Definisi 2.4.1 (iv)

Jadi terbukti $xy \leq x$.

v. Ambil $x \in G$. Untuk membuktikan bahwa $x0 = x$, substitusikan pada Definisi 2.4.1 (iii) yaitu $xx = 0$. Sehingga diperoleh

$$x * x0 = 0 \text{ dan } x0 * x = 0.$$

Berdasarkan Definisi 2.4.1 (v), jika $x * x0 = 0$ dan $x0 * x = 0$ maka $x0 = x$.

- Akan dibuktikan bahwa $x * x0 = 0$.
  Misalkan $x = 0$, $y = x * x0$. Berdasarkan Definisi 2.4.1 (v) jika $0 * (x * x0) = 0$ dan $(x * x0) * 0 = 0$ maka diperoleh $x * x0 = 0$.
  - Menurut Definisi 2.4.1 (iv) jelas terbukti bahwa $0 * (x * x0) = 0$, dan
  - menurut Definisi 2.4.1 (ii) jelas terbukti bahwa $(x * x0) * 0 = 0$.

  Sehingga terbukti $x * x0 = 0$.
- Akan dibuktikan bahwa $x0 * x = 0$.
  Misalkan $y = x0$ lalu substitusikan pada Definisi 2.4.1 (ii), diperoleh

  $$\big(x * (x * x0)\big) * x0 = 0.$$

  Karena akan dibuktikan bahwa $x0 = x$, maka

  $$(x * xx) * x = 0.$$

  Sehingga terbukti $x0 * x = 0$.

Dari kedua poin diatas, terbukti bahwa berlaku kondisi $x * x0 = 0$ dan $x0 * x = 0$ sehingga terbukti menurut Definisi 2.4.1 (v) $x0 = x$.

Definisi 2.4.14 (BCK-aljabar Terbatas)
Misalkan G adalah BCK-aljabar. G disebut terbatas jika memuat elemen maksimum, misalkan 1 sedemikian sehingga $x \leq 1$ untuk semua $x \in G$. Elemen 1 disebut unit dari G.
Misalkan G adalah BCK-aljabar terbatas dinotasikan $1x$ dengan Nx.

Contoh 2.4.15

Berdasarkan Contoh 2.4.2, G adalah BCK-aljabar terbatas dengan unit 4.

Akan dibuktikan bahwa 4 adalah elemen maksimum dalam G, yaitu dengan menunjukkan bahwa untuk setiap $x \in G$ berlaku $x \leq 4$.

Bukti

Berdasarkan Definisi 2.4.10, $x \leq y$ jika dan hanya jika $xy = 0$.

- Untuk $x = 0$, berdasarkan Tabel 2.2 pada soal 2.4.2, diperoleh $04 = 0$.
- Untuk $x = 2$, berdasarkan Tabel 2.2 pada soal 2.4.2, diperoleh $24 = 0$.

Contoh 2.4.16

Berdasarkan Contoh 2.4.3, G adalah BCK-aljabar terbatas dengan unit 1.

Akan dibuktikan bahwa 1 adalah elemen maksimum dalam G, yaitu dengan menunjukkan bahwa untuk setiap $x \in G$ berlaku $x \leq 1$.

Bukti

Berdasarkan Definisi 2.4.10, $x \leq y$ jika dan hanya jika $xy = 0$.

- Untuk $x = 0$, berdasarkan Tabel 2.3, diperoleh $01 = 0$.
- Untuk $x = a$, berdasarkan Tabel 2.3, diperoleh $a1 = 0$.
- Untuk $x = b$, berdasarkan Tabel 2.3, diperoleh $b1 = 0$.
- Untuk $x = 1$, berdasarkan Tabel 2.3, diperoleh $11 = 0$.

Sehingga terbukti untuk setiap $x \in G$ berlaku $x \leq 4$, dan 4 adalah unit dari G.

Contoh 2.4.17

Berdasarkan Contoh 2.4.4, G adalah BCK-aljabar. Akan ditentukan apakah G merupakan BCK-aljabar terbatas dengan unit 3.

Bukti

Berdasarkan Definisi 2.4.8, $x \leq y$ jika dan hanya jika $xy = 0$.

- Untuk $x = 0$, berdasarkan Tabel 2.4, diperoleh $03 = 0$
- Untuk $x = 1$, berdasarkan Tabel 2.4, diperoleh $13 = 1$
- Untuk $x = 2$, berdasarkan Tabel 2.4, diperoleh $23 = 0$
- Untuk $x = 3$, berdasarkan Tabel 2.4, diperoleh $33 = 0$

Karena terdapat $x \in G$, yaitu $x = 1$ dimana $xy \neq 0$, sehingga tidak memenuhi Definisi 2.4.8 Jadi G bukan BCK-aljabar terbatas.

Definisi 2.4.18 (Batas Bawah Terbesar pada BCK-Aljabar)
Misalkan $(G,*,0)$ adalah BCK-aljabar dan $x, y \in G$. Batas bawah dari x, y dinotasikan dengan $x \wedge y = y * yx$.
Untuk setiap $x \in G$, berlaku $x \wedge x = x, x \wedge 0 = 0$, dan $0 \wedge x = 0$.

Definisi 2.4.19 (Batas Atas Terkecil pada BCK-Aljabar)
Misalkan $(G,*,0)$ adalah BCK-aljabar dan $x, y \in G$. Batas atas dari x, y dinotasikan dengan $x \vee y = N(Nx \wedge Ny)$, dimana $Nx = 1x$.

Definisi 2.4.20 (BCK-Aljabar Komutatif)
Misalkan $(G,*,0)$ adalah BCK-aljabar. G disebut BCK-aljabar komutatif jika memenuhi $x \wedge y = y \wedge x$ untuk setiap $x, y \in G$.

Jika $(G,*,0)$ adalah BCK-aljabar komutatif dan terbatas dengan unit 1, maka untuk setiap $x, y \in G$ berlaku beberapa kondisi berikut:
(i) $0 \wedge x = x \wedge 0 = 0$.
(ii) $x \vee y = y \vee x$.
(iii) $x \vee 1 = 1 \vee x = 1$.
(iv) $x \vee 0 = 0 \vee x = x \wedge 1 = 1 \wedge x = x$.
(v) $N * N\text{x} = \text{x}$.
(vi) $x \wedge x = x \vee x = x$.

Bukti

i. Akan dibuktikan $0 \wedge x = x \wedge 0 = 0$.

$x * x0 = 0 * 0x$	Definisi 2.4.18 ,
$xx = 00$	Proposisi 2.4.13 (v) dan Definisi 2.4.1 (iv)
$0 = 0$	Definisi 2.4.1 (iii).

ii. Akan dibuktikan bahwa $x \vee y = y \vee x$.

$N(Nx \wedge Ny) = N(Ny \wedge Nx)$	Definisi 2.4.19
$Nx \wedge Ny = Ny \wedge Nx$	Definisi 2.4.20

Sehingga terbukti berlaku $N(Nx \wedge Ny) = N(Ny \wedge Nx)$

iii. Akan dibuktikan $x \vee 1 = 1 \vee x = 1$.

$N(Nx \wedge N1) = N(N1 \wedge Nx)$	Definisi 2.4.19
$N(N1 * N1Nx) = N(Nx * NxN1)$	Definisi 2.4.18
$N(0 * 0Nx) = N(Nx * Nx0)$	Definisi 2.4.8

$N(0Nx)$	$= N(NxNx)$	Definisi 2.4.1 (iv) dan Proposisi 2.4.13 (v)
$N0$	$= N0$	Definisi 2.4.1 (iv) dan (iii)
N	$= N$	Proposisi 2.4.13 (v)
1	$= 1$	Definisi 2.4.14.

iv. Akan dibuktikan $x \wedge 1 = 1 \wedge x = x$

$1 \wedge x = x * x1$		Definisi 2.4.18
$= x * 0$		Definisi 2.4.8
$= x$		Proposisi 2.4.13 (v)
karena $x \wedge 1$	$= 1 \wedge x$	Definisi 2.4.20
terbukti $x \wedge 1$	$= 1 \wedge x = x$	
Akan dibuktikan $x \vee 0$	$= 0 \vee x$	
$N(Nx \wedge N0)$	$= N(N0 \wedge Nx)$	Definisi 2.4.19
$N(N0 * N0Nx)$	$= N(Nx * NxN0)$	Definisi 2.4.18
$N(N * NNx)$	$= N(Nx * NxN)$	Proposisi 2.4.13 (v)
$N * Nx$	$= N(Nx * 0)$	Definisi 2.4.20 (v) dan Definisi 2.4.8
$N * Nx$	$= N * Nx$	Proposisi 2.4.13 (v)
$x \wedge N$	$= x \wedge N$	Definisi 2.4.18
$x \wedge 1$	$= 1 \wedge x$	
x	$= x$	

v. Akan dibuktikan $N * N$x = x.

$N * Nx = x \wedge N$	Definisi 2.4.18
$x \wedge N \;\; = N \wedge x$	Definisi 2.4.20

Berdasarkan Definisi 2.4.22 (iv) diatas, terbukti bahwa $x \wedge N \;\; = N \wedge x = x$.

vi. Akan dibuktikan $x \wedge x = x \vee x = x$

$x * xx = N(Nx \wedge Nx)$	Definisi 2.4.18 dan Definisi 2.4.19
$x * 0 \;\; = N\big(Nx * (Nx * Nx)\big)$	Definisi 2.4.1 (i) dan Definisi 2.4.18
$x \;\;\; = N(Nx * 0)$	Proposisi 2.4.13 (v) Dan Definisi 2.4.1 (iii)

$x \quad = N * Nx$ Proposisi 2.4.13 (v)

terbukti dengan Definisi 2.4.22 (iv).

Contoh 2.4.21

Berdasarkan Contoh 2.4.3, $G = \{0, a, b, 1\}$ adalah BCK-aljabar. Akan dibuktikan bahwa G merupakan BCK-aljabar komutatif.

Bukti

- Untuk $x = 0, y = a$, maka diperoleh
  $x \wedge y = y * yx = a * a0 = aa = 0$
  $y \wedge x = x * xy = 0 * 0a = 00 = 0$
  $0 \wedge a = a \wedge 0.$
- Untuk $x = 0, y = b$, maka diperoleh
  $x \wedge y = y * yx = b * b0 = bb = 0$
  $y \wedge x = x * xy = 0 * 0b = 00 = 0$
  $0 \wedge b = b \wedge 0.$
- Untuk $x = 0, y = 1$, maka diperoleh
  $x \wedge y = y * yx = 1 * 10 = 11 = 0$
  $y \wedge x = x * xy = 0 * 01 = 00 = 0$
  $0 \wedge 1 = 0 \wedge 1.$
- Untuk $x = 1, y = a$, maka diperoleh
  $x \wedge y = y * yx = a * a1 = a0 = a$
  $y \wedge x = x * xy = 1 * 1a = 1b = a$
  $1 \wedge a = a \wedge 1.$
- Untuk $x = 1, y = b$, maka diperoleh
  $x \wedge y = y * yx = b * b1 = b0 = b$
  $y \wedge x = x * xy = 1 * 1b = 1a = b$
  $1 \wedge b = b \wedge 1.$
- Untuk $x = a, y = b$, maka diperoleh
  $x \wedge y = y * yx = b * ba = bb = 0$
  $y \wedge x = x * xy = a * ab = a0 = a$
  $a \wedge b \neq b \wedge a.$

Karena terdapat $x, y \in G$ dimana $x \wedge y \neq y \wedge x$ maka G bukan BCK-aljabar komutatif.

Contoh 2.4.22

Berdasarkan Contoh 2.4.4, $G = \{0,1,2,3\}$ adalah BCK-aljabar. Akan dibuktikan G adalah BCK-aljabar komutatif.

Bukti

- Untuk $x = 0, y = 1$, maka diperoleh
  $x \wedge y = y * yx = 1 * 10 = 11 = 0$
  $y \wedge x = x * xy = 0 * 01 = 00 = 0$
  $0 \wedge 1 = 1 \wedge 0.$
- Untuk $x = 0, y = 2$, maka diperoleh
  $x \wedge y = y * yx = 2 * 20 = 22 = 0$
  $y \wedge x = x * xy = 0 * 02 = 00 = 0$
  $0 \wedge 2 = 2 \wedge 0.$
- Untuk $x = 0, y = 3$, maka diperoleh
  $x \wedge y = y * yx = 3 * 30 = 33 = 0$
  $y \wedge x = x * xy = 0 * 03 = 00 = 0$
  $0 \wedge 3 = 3 \wedge 0.$
- Untuk $x = 1, y = 2$, maka diperoleh
  $x \wedge y = y * yx = 2 * 21 = 22 = 0$
  $y \wedge x = x * xy = 1 * 12 = 11 = 0$
  $1 \wedge 2 = 2 \wedge 1.$
- Untuk $x = 1, y = 3$, maka diperoleh
  $x \wedge y = y * yx = 3 * 31 = 33 = 0$
  $y \wedge x = x * xy = 1 * 13 = 11 = 0$
  $1 \wedge 3 = 3 \wedge 1.$
- Untuk $x = 2, y = 3$, maka diperoleh
  $x \wedge y = y * yx = 3 * 32 = 32 = 2$
  $y \wedge x = x * xy = 2 * 23 = 20 = 2$
  $2 \wedge 3 = 3 \wedge 2.$

Karena untuk setiap $x, y \in G$ berlaku $x \wedge y = y \wedge x$, terbukti G adalah BCK-aljabar komutatif.

2.5 BCK-Subaljabar

Berikut ini akan diberikan definisi dan contoh BCK-subaljabar yang dirujuk dari Dvurečenskij, dkk (2000).

Definisi 2.5.1 (BCK-subaljabar)
Misalkan $(G,*,0)$ adalah BCK-aljabar dan didefinisikan $S \subseteq G$. S disebut BCK-subaljabar dari G jika untuk setiap $x, y \in S$ memenuhi $xy \in S$.

Contoh 2.5.2

Berdasarkan Contoh 2.4.2, $(G,*,0)$ adalah BCK-aljabar. Diberikan dua buah himpunan tak kosong $S = \{0,2\}$ dan $H = \{0,4\}$, dimana $S, H \subseteq G$

Akan ditunjukkan bahwa S dan H adalah BCK-subaljabar dari G.

Bukti

i. Untuk $S = \{0,2\}$.
   a. Untuk $x = 0$ dan $y = 0$, diperoleh $xy = 00 = 0 \in S$.
   b. Untuk $x = 0$ dan $y = 2$, diperoleh $xy = 02 = 0 \in S$.
   c. Untuk $x = 2$ dan $y = 0$, diperoleh $xy = 20 = 2 \in S$.
   d. Untuk $x = 2$ dan $y = 2$, diperoleh $xy = 22 = 0 \in S$.

ii. Untuk $H = \{0,4\}$.
   a. Untuk $x = 0$ dan $y = 0$, diperoleh $xy = 00 = 0 \in H$.
   b. Untuk $x = 0$ dan $y = 4$, diperoleh $xy = 04 = 0 \in H$.
   c. Untuk $x = 4$ dan $y = 0$, diperoleh $xy = 40 = 4 \in H$.
   d. Untuk $x = 4$ dan $y = 4$, diperoleh $xy = 44 = 0 \in H$.

Sehingga terbukti bahwa S dan H adalah BCK-subaljabar dari G.

Contoh 2.5.3

Berdasarkan Contoh 2.4.3, $(G,*,0)$ adalah BCK-aljabar. Diberikan sebuah himpunan tak kosong $S \subseteq G$ dimana $S = \{0, a, b\}$.

Akan ditunjukkan bahwa S adalah BCK-subaljabar dari G.

Bukti

a. Untuk $x = 0$ dan $y = a$, diperoleh $xy = 0a = 0 \in S$.
b. Untuk $x = 0$ dan $y = b$, diperoleh $xy = 0b = 0 \in S$.
c. Untuk $x = a$ dan $y = 0$, diperoleh $xy = a0 = a \in S$.
d. Untuk $x = a$ dan $y = b$, diperoleh $xy = ab = 0 \in S$.
e. Untuk $x = b$ dan $y = 0$, diperoleh $xy = b0 = b \in S$.
f. Untuk $x = b$ dan $y = a$, diperoleh $xy = ba = b \in S$.

Dari a. sampai f. Terbukti bahwa untuk setiap $x, y \in S$ berlaku $xy \in S$. Jadi S adalah BCK-subaljabar dari G.

Contoh 2.5.4

Berdasarkan Contoh 2.4.3 , $(G,*,0)$ adalah BCK-aljabar. Diberikan sebuah himpunan tak kosong $H \subseteq G$ dimana $H = \{0, b, 1\}$.

Akan ditunjukkan bahwa H adalah BCK-aljabar dari G.

Bukti

a. Untuk $x = 0$ dan $y = b$, diperoleh $xy = 0b = 0 \in H$.
b. Untuk $x = 0$ dan $y = 1$, diperoleh $xy = 01 = 0 \in H$.
c. Untuk $x = b$ dan $y = 0$, diperoleh $xy = b0 = b \in H$.
d. Untuk $x = b$ dan $y = 1$, diperoleh $xy = b1 = 0 \in H$.
e. Untuk $x = 1$ dan $y = 0$, diperoleh $xy = 10 = 1 \in H$.
f. Untuk $x = 1$ dan $y = b$, diperoleh $xy = 1b = a \notin H$.

Karena pada f. terdapat $x, y \in H$ tetapi $xy \notin H$ maka H bukan BCK-subaljabar dari G.

BAB III
PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibahas definisi, contoh, teorema, lemma dan bukti Pseudo-komutator dalam BCK-aljabar.

3.1 Pseudo-komutator

Berikut ini akan dibahas definisi dan contoh dari pseudo-komutator dan himpunan pseudo-komutator yang dirujuk dari Najafi A. (2013).

Definisi 3.1.1(Pseudo-Komutator dalam BCK-aljabar)
Misalkan $(G,*,0)$ adalah BCK-aljabar dan $x, y \in G$. Pseudo-komutator dari (x, y) dinotasikan dengan :

$$[x, y] = (x \wedge y) * (y \wedge x).$$

Dan himpunan pseudo-komutator dari (x, y) dinotasikan dengan:

$$G' = [G, G] = \{[x, y] | x, y \in G\}.$$

Contoh 3.1.2
Berdasarkan Contoh 2.4.2, $G = \{0,2,4\}$ dengan operasi biner yang didefinisikan pada Tabel 3.1 berikut adalah BCK-aljabar.

Tabel 3.1 Operasi biner $*$ pada G

$*$	0	2	4
0	0	0	0
2	2	0	0
4	4	2	0

Akan ditentukan pseudo-komutator dalam G.
Bukti
Ambil $x, y \in G$. Akan ditentukan pseduo-komutator dari x dan y.

- Untuk $x = 0$ dan $y = 2$, diperoleh

$$\begin{aligned}[0,2] &= (0 \wedge 2) * (2 \wedge 0)\\ &= (2 * 20) * (0 * 02)\\ &= 22 * 00\\ &= 00 \ = 0.\end{aligned}$$

Untuk nilai $x, y \in G$ yang lain akan disajikan pada Tabel 3.2 berikut.

Tabel 3.2 Pseudo-komutator dalam G

$[x, y]$	0	2	4
0	0	0	0
2	0	0	0
4	0	0	0

Jadi himpunan pseudo-komutator dari G dinotasikan dengan $G' = \{0\}$.

Contoh 3.1.3

Berdasarkan Contoh 2.4.3, $G = \{0, a, b, 1\}$ dengan operasi biner yang didefinisikan pada Tabel 3.3 adalah BCK-aljabar.

Tabel 3.3 Operasi biner $*$ pada G

$*$	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	a	0	0	0
b	b	b	0	0
1	1	b	a	0

Akan ditentukan pseudo-komutator dalam G.

Bukti

Ambil $x, y \in G$. Akan ditentukan pseduo-komutator dari x dan y.

- Untuk $x = b$ dan $y = a$, diperoleh

$$
\begin{aligned}
[b, a] &= (b \wedge a) * (a \wedge b) \\
&= (a * ab) * (b * ba) \\
&= a0 * bb \\
&= a0 \\
&= a.
\end{aligned}
$$

Untuk nilai $x, y \in G$ yang lain akan disajikan pada Tabel 3.4 yang akan disajikan pada halaman berikut.

Tabel 3.4 Pseudo-komutator dalam G

$[x, y]$	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	0	0	0
b	0	a	0	0
1	0	0	0	0

Jadi himpunan pseudo-komutator dari G dinotasikan dengan $G' = \{0, a\}$.

Contoh 3.1.4
Berdasarkan Contoh 2.4.4, $G = \{0,1,2,3\}$ dengan operasi biner yang didefinisikan pada Tabel 3.5 adalah BCK-aljabar.

Tabel 3.5 Operasi biner $*$ pada G

$*$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	0	1	1
2	2	2	0	0
3	3	3	2	0

Akan ditentukan Pseudo-komutator dalam G.
Bukti
Ambil $x, y \in G$. Akan ditentukan pseduo-komutator dari x dan y.

- Untuk $x = 0$ dan $y = 1$, diperoleh
$$\begin{aligned}[0,1] &= (0 \wedge 1) * (1 \wedge 0) \\ &= (1 * 10) * (0 * 01) \\ &= 11 * 00 \\ &= 00 \\ &= 0\end{aligned}$$
Untuk nilai $x, y \in G$ yang lain akan disajikan pada Tabel 3.6 yang akan disajikan pada halaman berikut.

Tabel 3.6 Pseudo-komutator dalam G

$[x,y]$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	0	0	0
2	0	0	0	0
3	0	0	0	0

Jadi himpunan pseudo-komutator dari G dinotasikan dengan $G' = \{0\}$.

Definisi 3.1.5
Misalkan G adalah BCK-aljabar. X_1 dan X_2 adalah himpunan tak kosong subset dari G. Himpunan pseudo-komutator dari X_1 dan X_2 didefinisikan dengan:

$$[X_1, X_2] = \{[x_1, x_2] | x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\}$$

Contoh 3.1.6
Berdasarkan Contoh 2.4.3, diketahui $G = \{0, a, b, 1\}$ adalah BCK-aljabar. Diberikan $A = \{0, b\}$ dan $B = \{1, a\}$ masing-masing adalah subset dari G. Akan ditentukan himpunan pseudo-komutator dari A dan B.
Bukti
Berdasarkan Definisi 3.1.5, himpunan pseudo-komutator dari 2 buah subset dalam G adalah

$$[A, B] = \{[x, y] | x \in A, y \in B\}$$

Akan ditentukan pesudo-komutator dari himpunan A dan himpunan B.

- Untuk $x = b \in A$ dan $y = a \in B$, diperoleh
  $$\begin{aligned} [b, a] &= (b \wedge a) * (a \wedge b) \\ &= (a * ab) * (b * ba) \\ &= a0 * bb \\ &= a0 \\ &= a. \end{aligned}$$
  Untuk nilai $x \in A$ dan $y \in B$ yang lain, akan disajikan pada Tabel 3.7 berikut.

Tabel 3.7 Pseudo-komutator dari himpunan A dan himpunan B

		$y \in B$	
	$[x, y]$	1	a
$x \in A$	0	0	0
	b	0	a

Jadi, himpunan pseudo-komutator dari subset A dan subset B dinotasikan dengan $[A, B] = \{0, a\}$

3.2 Teorema

Berikut ini akan dibahas lemma, teorema, dan bukti yang berkaitan dengan pseudo-komutator dan subaljabar pseudo-komutator yang dirujuk dari Najafi A. (2013).

Lemma 3.2.1

Jika $(G,*,0)$ adalah BCK-aljabar, A dan B masing-masing adalah subset dari G maka untuk setiap $x, y \in G$ berlaku:

i. Jika $x \leq y$ maka $[x, y] = 0$,
ii. $[x, 0] = [0, x] = [x, x] = 0$ sehingga $[A, B] \neq \emptyset$.
iii. $[x, y] * x = 0$
iv. $[y, x] * y = 0$

Bukti

i. Diberikan $x, y \in G$ dimana $x \leq y$. Akan dibuktikan bahwa $[x, y] = 0$. Berdasarkan Definisi 2.4.8 $x \leq y$ jika $xy = 0$.

$[x, y] = (x \wedge y) * (y \wedge x)$ Definisi 3.1.1
$= (y * yx) * (x * xy)$ Definisi 2.4.18
$= (y * yx) * (x0)$ Definisi 2.4.8
$= (y * yx) * x$ Proposisi 2.4.13 (v)
$= 0$ Definisi 2.4.1 (ii)

Jadi, terbukti bahwa jika $x \leq y$ maka $[x, y] = 0$.

ii. Diberikan $x \in G$.

- Akan dibuktikan bahwa $[x, 0] = 0$.

$[x, 0] = (x \wedge 0) * (0 \wedge x)$ Definisi 3.1.1
$= (0 * 0x) * (x * x0)$ Definisi 2.4. 18

$= 00 * xx$ Definisi 2.4.1 (iv) dan Proposisi 2.4.13 (v)
$= 0$ Definisi 2.4.1 (iii) .

Sehingga terbukti $[x, 0] = 0$.

- Akan dibuktikan bahwa $[0, x] = 0$.

$[0, x] = (0 \wedge x) * (x \wedge 0)$ Definisi 3.1.1
$= (x * x0) * (0 * 0x)$ Definisi 2.4.18
$= xx * 00$ Proposisi 2.4.13 (v) dan Definisi 2.4.1 (iv)
$= 0$ Definisi 2.4.1 (iii)

Sehingga terbukti $[0, x] = 0$.

- Akan dibuktikan bahwa $[x, x] = 0$.

$[x, x] = (x \wedge x) * (x \wedge x)$ Definisi 3.1.1
$= (x * xx) * (x * xx)$ Definisi 2.4.18
$= (x0) * (x0)$ Definisi 2.4.1 (iii)
$= xx$ Proposisi 2.4.13 (v)
$= 0$ Definisi 2.4.1 (iii)

Sehingga terbukti $[x, x] = 0$.

iii. Akan dibuktikan bahwa untuk setiap $x, y \in G$, berlaku $[x, y] * x = 0$.

$[x, y] * x = \big((x \wedge y) * (y \wedge x)\big) * x$ Definisi 3.1.1
$= \big((y * yx) * (x * xy)\big) * x$ Definisi 2.4.18
$= (y * yx) * x * (x * xy)$ Proposisi 2.4.12
$= 0 * (x * xy)$ Definisi 2.4.1 (ii)
$= 0$ Definisi 2.4.1 (iv).

Jadi, terbukti bahwa untuk setiap $x, y \in G$ berlaku $[x, y] * x = 0$.

iv. Akan dibuktikan bahwa untuk setiap $x, y \in G$, berlaku $[y, x] * y = 0$.

$[y, x] * y = \big((y \wedge x)(x \wedge y)\big) * y$ Definisi 3.1.1
$= \big((x * y) * (y * yx)\big) * y$ Definisi 2.4.18
$= (x * xy) * y * (y * yx)$ Proposisi 2.4.12
$= 0 * (y * yx)$ Definisi 2.4.1 (ii)
$= 0$ Definisi 2.4.1 (iv).

Jadi, terbukti bahwa untuk setiap $x, y \in G$ berlaku $[y, x] * y = 0$.

Contoh 3.2.2
Berdasarkan Contoh 3.1.3, akan dibuktikan bahwa jika $x \leq y$ maka $[x, y] = 0$.
Bukti
Berdasarkan Tabel 3.2 pada soal 3.1.3, didefinisikan $ab = 0$ sehingga menurut Definisi 2.4.8 $a \leq b$. Akan ditentukan pseudo-komutator dari a dan b.

$$\begin{aligned}[a, b] &= (a \wedge b) * (b \wedge a) \\ &= (b * ba) * (a * ab) \\ &= bb * a0 \\ &= 0a \\ &= 0.\end{aligned}$$

Dan berlaku pula untuk setiap $x, y \in G$. Jadi, terbukti jika $x \leq y$ maka $[x, y] = 0$.

Contoh 3.2.3
Berdasarkan Contoh 3.1.2, akan dibuktikan bahwa Lemma 3.2.1 (ii) berlaku.
Bukti
Ambil $x, y \in G'$, pseudo-komutator dari x dan y adalah

- Untuk $x = 2$ dan $y = 0$, diperoleh
  $$\begin{aligned}[2,0] &= (2 \wedge 0) * (0 \wedge 2) = (0 * 02) * (2 * 20) \\ &= 00 * 22 = 00 = 0.\end{aligned}$$
- Untuk $x = 4$ dan $y = 0$, diperoleh
  $$\begin{aligned}[4,0] &= (4 \wedge 0) * (0 \wedge 4) = (0 * 04) * (4 * 40) \\ &= 00 * 44 = 00 = 0.\end{aligned}$$
- Untuk $x = 0$ dan $y = 2$, diperoleh
  $$\begin{aligned}[0,2] &= (0 \wedge 2) * (2 \wedge 0) = (2 * 20) * (0 * 02) \\ &= 22 * 00 = 00 = 0.\end{aligned}$$
- Untuk $x = 0$ dan $y = 4$, diperoleh
  $$\begin{aligned}[0,4] &= (0 \wedge 4) * (4 \wedge 0) = (4 * 40) * (0 * 04) \\ &= 44 * 00 = 00 = 0.\end{aligned}$$
- Untuk $x = 0$ dan $y = 0$, diperoleh
  $$\begin{aligned}[0,0] &= (0 \wedge 0) * (0 \wedge 0) = (0 * 00) * (0 * 00) \\ &= 00 * 00 = 00 = 0.\end{aligned}$$
- Untuk $x = 2$ dan $y = 2$, diperoleh
  $$\begin{aligned}[2,2] &= (2 \wedge 2) * (2 \wedge 2) = (2 * 22) * (2 * 22) \\ &= 20 * 20 = 22 = 0.\end{aligned}$$

- Untuk $x = 4$ dan $y = 4$, diperoleh
  $[4{,}4] = (4 \wedge 4) * (4 \wedge 4) = (4 * 44) * (4 * 44)$
  $= 40 * 40 = 44 = 0.$

Contoh 3.2.4
Berdasarkan Contoh 3.1.3, akan dibuktikan bahwa untuk setiap $x, y \in G$, berlaku $[x, y] * x = 0$.
Bukti
Ambil $x, y \in G$.

- Misalkan $x = a$ dan $y = b$, diperoleh
  $$\begin{aligned}[a, b] * a &= \big((a \wedge b) * (b \wedge a)\big) * a \\ &= \big((b * ba) * (a * ab)\big) * a \\ &= (bb * a0) * a \\ &= 0a * a \\ &= 0a \\ &= 0.\end{aligned}$$
- Misalkan $x = 1$ dan $y = b$, diperoleh
  $$\begin{aligned}[1, b] * 1 &= \big((1 \wedge b) * (b \wedge 1)\big) * 1 \\ &= \big((b * b1) * (1 * 1b)\big) * 1 \\ &= (b0 * 1a) * 1 \\ &= bb * 1 \\ &= 01 \\ &= 0.\end{aligned}$$

  Berlaku pula untuk setiap $x, y \in G$. Jadi terbukti bahwa $[x, y] * x = 0$.

Contoh 3.2.5
Berdasarkan Contoh 3.1.3, akan dibuktikan bahwa untuk setiap $x, y \in G$, berlaku $[y, x] * y = 0$.
Bukti
Ambil $x, y \in G$.

- Misalkan $x = a$ dan $y = b$, diperoleh
  $$\begin{aligned}[b, a] * b &= \big((b \wedge a) * (a \wedge b)\big) * b \\ &= \big((a * ab) * (b * ba)\big) * b \\ &= (a0 * bb) * b \\ &= a0 * b \\ &= ab\end{aligned}$$

$= 0.$

- Misalkan $x = 1$ dan $y = b$, diperoleh

  $[b, 1] * b = \big((b \wedge 1) * (1 \wedge b)\big) * b$
  $= \big((1 * 1b) * (b * b1)\big) * b$
  $= (1a * b0) * b$
  $= bb * b$
  $= 0b$
  $= 0.$

  Berlaku pula untuk setiap $x, y \in G$. Jadi terbukti bahwa $[x, y] * x = 0.$

Lemma 3.2.6
Jika $(G, * , 0)$ adalah BCK-aljabar maka G' adalah BCK-subaljabar dari G.
Bukti
Misalkan G adalah BCK-aljabar dan $a_i, b_i, c_i, d_i \in G$ dengan $i = 1,2, \dots, n$. G' adalah himpunan pseudo-komutator dari G dan $x, y \in G'$. Kemudian diperoleh $x = \prod[a_i, b_i]$ dan $y = \prod[c_i, d_i]$ sehingga untuk $e_i, f_i \in G$ $(i = 1,2, \dots, n)$, $xy = (\prod[a_i, b_i]) * (\prod[c_i, d_i]) = \prod[e_i, f_i] \in G'$. Sehingga dapat disimpulkan $xy \in G'$ dan G' adalah BCK-subalajabar dari G.

Contoh 3.2.7
Berdasarkan Contoh 3.1.2, diperoleh $G' = \{0\}$. Akan dibuktikan bahwa G' adalah subaljabar dari G.
Bukti
Untuk membuktikan bahwa G' adalah BCK-subaljabar, yaitu dengan membuktikan bahwa untuk setiap $x, y \in G'$, berlaku $xy \in G'$.

- untuk $x = 0 \in G'$ dan $y = 0 \in G'$, Berdasarkan Definisi operasi biner pada G, diperoleh $00 = 0 \in G'$.

Sehingga terbukti untuk semua $x, y \in G'$ berlaku $xy \in G'$. Jadi G' adalah BCK-subaljabar dari G.

Contoh 3.2.8
Berdasarkan Contoh 3.1.3, diperoleh $G' = \{0, a\}$. Akan dibuktikan bahwa G' adalah subaljabar dari G.

Bukti

Untuk membuktikan bahwa G' adalah BCK-subaljabar, yaitu dengan membuktikan bahwa untuk setiap $x, y \in G'$, berlaku $xy \in G'$.

- Untuk $x = 0 \in G'$ dan $y = a \in G'$, Berdasarkan Tabel 3.1, diperoleh $0a = 0 \in G'$.
- Untuk $x = a \in G'$ dan $y = 0 \in G'$ Berdasarkan Tabel 3.1, diperoleh $a0 = a \in G'$.

Sehingga terbukti untuk semua $x, y \in G'$ berlaku $xy \in G'$. Jadi G' adalah BCK-subaljabar dari G.

Teorema 3.2.9

Misalkan $(G,*,0)$ adalah BCK-aljabar. G merupakan BCK-aljabar komutatif jika dan hanya jika $G' = \{0\}$.

Bukti

(⇒) Diketahui $(G,*,0)$ adalah BCK-aljabar komutatif dan $x, y \in G$. Akan dibuktikan bahwa $G' = \{0\}$.
Jika G adalah BKC-aljabar komutatif maka menurut Definisi 2.4.20 berlaku $x \wedge y = y \wedge x$. Karena menurut Definisi 3.1.1 $[x, y] = (x \wedge y) * (y \wedge x)$, sehingga dapat dituliskan sebagai $[x, y] = (x \wedge y) * (x \wedge y)$. Lalu menurut Definisi 2.4.1 (iii), $xx = 0$ sehingga diperoleh $[x, y] = (x \wedge y) * (x \wedge y) = 0$. Jadi terbukti jika $(G,*,0)$ adalah BCK-aljabar komutatif maka $G' = \{0\}$.

(⇐) Diketahui $G' = \{0\}$. Akan dibuktikan bahwa $(G,*,0)$ adalah BCK-aljabar komutatif.
Ambil $x, y \in G$. Jika $G' = \{0\}$, berarti $[x, y] = 0$ dan $[y, x] = 0$. Dan berdasarkan Definisi 3.1.1 diperoleh

$[x, y] = (x \wedge y) * (y \wedge x) = 0$.......... (1)

$[y, x] = (y \wedge x) * (x \wedge y) = 0$...........(2)

Menurut Definisi 2.4.1 (v), jika $xy = 0$ dan $yx = 0$, maka $x = y$. Sehingga dari persamaan (1) dan (2) berlaku

$$(x \wedge y) = (y \wedge x).$$

Jadi terbukti jika $G' = \{0\}$ maka $(G,*,0)$ adalah BCK-aljabar komutatif.

Contoh 3.2.10
Berdasarkan Contoh 3.1.3, diperoleh $G' = \{0, a\}$. Menurut Teorema 3.2.4, G bukan merupakan BCK-aljabar komutatif dan terbukti dari Contoh 2.4.21.

Contoh 3.2.11
Berdasarkan Contoh 3.1.4, diperoleh $G' = \{0\}$. Menurut Teorema 3.2.4, G merupakan BCK-aljabar komutatif dan terbukti dari Contoh 2.4.22.

Contoh 3.2.12
Berdasarkan Contoh 2.4.6, himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dengan elemen khusus 0 yang didefinisikan sebuah operasi biner $*$ seperti dibawah ini adalah BCK-aljabar.

$$x * y = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ x - y, & yang\ lain \end{cases}$$

i. Akan ditentukan pseudo-komutator dari $\mathbb{Z}$.
ii. Akan dibuktikan apakah $\mathbb{Z}$ merupakan BCK-aljabar komutatif.

Bukti

i. Akan ditentukan pseudo-komutator dari $\mathbb{Z}$. Berdasarkan Definisi 3.1.1, $[x, y] = (x \wedge y) * (y \wedge x)$.
   - Misalkan $x \neq 0, y \neq 0, x, y \in \mathbb{Z}$.
   $$\begin{aligned}[x, y] &= (y * yx) * (x * xy) \\ &= \big(y * (y - x)\big) * \big(x\ * (x - y)\big) \\ &= \big(y - (y - x)\big) * \big(x - (x - y)\big) \\ &= (y - y + x) * (x - x + y) \\ &= xy = x - y\end{aligned}$$
   - Misalkan $x \neq 0, y = 0, x, y \in \mathbb{Z}$.
   $$\begin{aligned}[x, y] &= (y * yx) * (x * xy) \\ &= (y0) * \big(x\ * (x - y)\big) \\ &= 0 * (x - x + y) = 0\end{aligned}$$
   - Misalkan $x = 0, y \neq 0, x, y \in \mathbb{Z}$.
   $[x, y] = (y * yx) * (x * xy)$

$= (y * (y - x)) * (x0)$
$= (y - (y - x)) * 0$
$= (y - y + x) * 0$
$= x0 = 0.$
$= 0x = 0.$

- Misalkan $x = 0, y = 0, x, y \in \mathbb{Z}.$
  $[x, y] = (y * yx) * (x * xy)$
  $= (y0) * (x\,0)$
  $= 00 = 0$

Jadi, himpunan pseudo-komutator dari $\mathbb{Z}$ dinotasikan dengan $Z' = \{\, x - y, 0\}.$

ii. Berdasarkan Definisi 2.4.20, $\mathbb{Z}$ merupakan BCK-aljabar komutatif jika memenuhi $x \wedge y = y \wedge x.$
- Misalkan $x = 0, y \neq 0, x, y \in \mathbb{Z}.$
  $x \wedge y = y * yx = y * (y - x) = y - y + x = x,$
  $y \wedge x = x * xy = x0 = 0.$
- Misalkan $x = 0, y = 0, x, y \in \mathbb{Z}.$
  $x \wedge y = y * yx = y0 = 0,$
  $y \wedge x = x * xy = x0 = 0.$
- Misalkan $x \neq 0, y \neq 0, x, y \in \mathbb{Z}.$
  $x \wedge y = y * yx = y - (y - x) = y - y + x = x,$
  $y \wedge x = x * xy = x - (x - y) = x - x + y = y.$

Jadi, berdasarkan penjabaran diatas terbukti bahwa $\mathbb{Z}$ bukan merupakan BCK-aljabar komutatif karena terdapat $x, y \in \mathbb{Z}$ di mana $x \wedge y \neq y \wedge x.$

Berdasarkan i dan ii, $\mathbb{Z}$ bukan merupakan aljabar komutatif dan diperoleh pula $\mathbb{Z}' \neq 0$. Kontraposisi dengan Teorema 3.2.9 sehingga Teorema 3.2.9 terbukti berlaku.

Contoh 3.2.13

Berdasarkan Contoh 2.4.7, himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ tanpa 0 ($\mathbb{R}\backslash\{0\}$) dengan elemen khusus 1 yang didefinisikan sebuah operasi biner $*$ seperti berikut ini adalah BCK-aljabar.

$$x * y = \begin{cases} 1, & x = 1 \\ \frac{x}{y}, & yang\ lain \end{cases}$$

i. Akan ditentukan pseudo-komutator dari ℝ{0}.

ii. Akan dibuktikan apakah ℝ{0} merupakan BCK-aljabar komutatif.

Bukti

i. Akan ditentukan pseudo-komutator dari $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Berdasarkan Definisi 3.1.1, $[x, y] = (x \wedge y) * (y \wedge x)$.

- Misalkan $x \neq 1, y \neq 1, x, y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

$$[x, y] = (y * yx) * (x * xy)$$
$$= \left(y * \left(\frac{y}{x}\right)\right) * \left(x * \left(\frac{x}{y}\right)\right)$$
$$= \left(\frac{y}{\frac{y}{x}}\right) * \left(\frac{x}{\frac{x}{y}}\right)$$
$$= \left(y \times \frac{x}{y}\right) * \left(x \times \frac{y}{x}\right)$$
$$= xy = \frac{x}{y}$$

- Misalkan $x \neq 1, y = 1, x, y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

$$[x, y] = (y * yx) * (x * xy)$$
$$= (y1) * \left(x * \frac{x}{y}\right)$$
$$= 1 * \frac{x}{\frac{x}{y}}$$
$$= 1y = 1.$$

- Misalkan $x = 1, y \neq 1, x, y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

$$[x, y] = (y * yx) * (x * xy)$$
$$= \left(y * \left(\frac{y}{x}\right)\right) * (x1)$$
$$= \left(\frac{y}{\frac{y}{x}}\right) * 1$$

$$= \left(y \times \frac{x}{y}\right) * 1$$
$$= x1 = \frac{x}{1} = x$$

- Misalkan $x = 1, y = 1, x, y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

$$\begin{aligned} [x, y] &= (y * yx) * (x * xy) \\ &= (y1) * (x1) \\ &= 11 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Jadi, himpunan pseudo-komutator dari $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ dinotasikan dengan $(\mathbb{R}\backslash\{0\})' = \{x, 1, \frac{x}{y}, \frac{y}{x}\}$

ii. Berdasarkan Definisi 2.4.20, $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ merupakan BCK-aljabar komutatif jika memenuhi $x \wedge y = y \wedge x$.

Bukti

Berdasarkan definisi 2.4.22, $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ merupakan BCK-aljabar komutatif jika memenuhi $x \wedge y = y \wedge x$.

- Misalkan $x = 1, y \neq 1, x, y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

  $x \wedge y = y * yx = y * \left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y}{\frac{y}{x}} = y \times \frac{x}{y} = x,$

  $y \wedge x = x * xy = x1 = 1.$
- Misalkan $x \neq 1, y \neq 1, x, y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

  $x \wedge y = y * yx = y * \left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y}{\frac{y}{x}} = y \times \frac{x}{y} = x,$

  $y \wedge x = x * xy = x * \left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x}{\frac{x}{y}} = x \times \frac{y}{x} = y.$
- Misalkan $x = 1, y = 1, x, y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

  $x \wedge y = y * yx = y1 = 1,$

  $y \wedge x = x * xy = x1 = 1.$

Jadi, berdasarkan penjabaran diatas terbukti bahwa $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ bukan merupakan BCK-aljabar komutatif karena terdapat $x, y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ di mana $x \wedge y \neq y \wedge x$.

Berdasarkan i dan ii, $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ bukan merupakan aljabar komutatif dan diperoleh pula $(\mathbb{R}\backslash\{0\})' \neq 0$. Kontraposisi dengan Teorema 3.2.9 sehingga Teorema 3.2.9 terbukti berlaku.

Akibat 3.2.14
Jika $(G,*,0)$ adalah BCK-aljabar komutatif dan A dan B masing-masing adalah subset dari G, maka $[A,B] = [B,A] = \{0\}$.
Bukti
Diketahui $(G,*,0)$ adalah BCK-aljabar komutatif. Akan dibuktikan bahwa $[X_1,X_2] = [X_2,X_1] = \{0\}$.
Menurut Definisi 3.15, Himpunan pseudo-komutator dari X_1 dan X_2 didefinisikan dengan $[X_1,X_2] = \{[x_1,x_2] | x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\}$. Menurut Definisi 3.1.1, pseudo-komutator dari x_1 dan x_2 didefinisikan dengan $[x_1,x_2] = (x_1 \wedge x_2) * (x_2 \wedge x_1)$. Karena $(G,*,0)$ merupakan BCK-aljabar komutatif, sehingga berlaku $(x_1 \wedge x_2) = (x_2 \wedge x_1)$. Berdasarkan Definisi 2.4.1 (iii), diperoleh $(x_1 \wedge x_2) * (x_2 \wedge x_1) = 0$. Sehingga terbukti jika $(G,*,0)$ adalah BCK-aljabar komutatif maka $[X_1,X_2] = \{0\}$.

Contoh 3.2.15
Berdasarkan Contoh 2.4.2, diketahui $G = \{0,2,4\}$ adalah BCK-aljabar. Diberikan $A = \{0,2\}$ dan $B = \{2,4\}$ masing-masing adalah subset dari G. Akan ditentukan himpunan pseudo-komutator dari A dan B.
Bukti
Berdasarkan Definisi 3.1.5, himpunan pseudo-komutator dari 2 buah subset dalam G adalah

$$[A,B] = \{[x,y] | x \in A, y \in B\}$$

Akan ditentukan pesudo-komutator dari himpunan A dan himpunan B.

- Untuk $x = 0 \in A$ dan $y = 2 \in B$, diperoleh

  $$\begin{aligned} [0,2] &= (0 \wedge 2) * (2 \wedge 0) \\ &= (2 * 20) * (0 * 02) \\ &= 11 * 00 \\ &= 00 \\ &= 0. \end{aligned}$$

  Untuk nilai $x \in A$ dan $y \in B$ yang lain, akan disajikan pada Tabel 3.8.

Tabel 3.8 Pseudo-komutator dari himpunan A dan himpunan B

		$y \in B$	
	$[x, y]$	2	4
$x \in A$	0	0	0
	2	0	0

Jadi, himpunan pseudo-komutator dari subset A dan subset B dinotasikan dengan $[A, B] = \{0\}$.

Contoh 3.2.16

Berdasarkan Contoh 2.4.4, diketahui $G = \{0,1,2,3\}$ adalah BCK-aljabar. Diberikan $A = \{0,1,2\}$ dan $B = \{2,3\}$ masing-masing adalah subset dari G. Akan ditentukan himpunan pseudo-komutator dari subset A dan subset B.

Bukti

Berdasarkan Definisi 3.1.5, himpunan pseudo-komutator dari 2 buah subset dalam G adalah

$$[A, B] = \{[x, y] | x \in A, y \in B\}$$

Akan ditentukan pesudo-komutator dari subset A dan subset B.

- Untuk $x = 0 \in A$ dan $y = 2 \in B$, diperoleh

$$\begin{aligned}[0,2] &= (0 \wedge 2) * (2 \wedge 0) \\ &= (2 * 20) * (0 * 02) \\ &= 22 * 00 \\ &= 00 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Untuk nilai $x \in A$ dan $y \in B$ yang lain, akan disajikan pada Tabel 3.9.

Tabel 3.9 Pseudo-komutator dari himpunan A dan himpunan B

		$y \in B$	
	$[x, y]$	2	3
$x \in A$	0	0	0
	1	0	0
	2	0	0

Jadi, himpunan pseudo-komutator dari subset A dan subset B dinotasikan dengan $[A, B] = \{0\}$.

BAB IV
PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan dalam skripsi ini dapat disimpulkan bahwa:

1. Pseudo-komutator dalam BCK-aljabar bukan merupakan himpunan kosong.
2. Setiap himpunan pseudo-komutator dalam BCK-aljabar merupakan BCK-subaljabar.
3. Jika himpunan pseudo-komutator hanya beranggotakan elemen khusus saja, maka BCK-aljabar bersifat komutatif dan berlaku sebaliknya.

4.2 Saran

Pada skripsi ini dibahas bagaimana sifat-sifat pseudo-komutator dalam BCK-aljabar. Himpunan pseudo-komutator ini membentuk BCK-subaljabar. Untuk penelitian selanjutnya penulis menyarankan untuk menyelidiki sifat-sifat BCK-subaljabar yang terbentuk dari himpunan pseudo-komutator tersebut.

DAFTAR PUSTAKA

Ahsan, J., E.Y. Deeba, and A.B. Thaheem. 1989. *On Prime Ideals and Associated Spectrum of BCK-Algebras.* International Centre for Theoretical Physics. Pakistan.

Andari, A. 2015. *Teori Grup.* Universitas Brawijaya Press (UB Press). Malang

Bhattacharya, P. B., S. K. Jain, dan S. R. Nagpaul. 1995. *Basic Abstract Algebra. Second Edition.* Cambridge University Press. New York.

Borzooei, R.A. and S.K, Shoar. 2006. Implication Algebras are Equivalent to the Dual Implicative BCK-Algebras. *Scientiac Mathematicne Japonicae Online.* 371-373.

Brown, W.C. 1993. *Matrices Over Commutative Rings.* Marcel Dekker. New York.

Dvurečenskij, A. dan S. Pulmannová. 2000. *Mathematics and Its Applications.* Springer-Science+Business Media, B.V. Bratislava, Slovakia.

Najafi, A. 2013. Pseudo-Commutators in BCK-Algebras. *Pure Mathematical Science.*Hikari Ltd. 2(1):29-32.

Pinter, C.C., 2013. *A Book Of Set Theory*. DOVER PUBLICATIONS, INC, Mineola, New York.