

**ANALISIS DINAMIK MODEL PENYAKIT *BRUCELLOSIS*  
ANTAR DOMBA DENGAN IMIGRASI**

**SKRIPSI**

oleh:  
**RICA USWATUN CHASANAH FAUZIAH**  
**145090400111010**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS BRAWIJAYA  
MALANG  
2018**

**ANALISIS DINAMIK MODEL PENYAKIT *BRUCELLOSIS*  
ANTAR DOMBA DENGAN IMIGRASI**

**SKRIPSI**

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar  
Sarjana Matematika

oleh:

**RICA USWATUN CHASANAH FAUZIAH**

**145090400111010**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS BRAWIJAYA  
MALANG  
2018**



**LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI**  
**ANALISIS DINAMIK MODEL PENYAKIT *BRUCELLOSIS***  
**ANTAR DOMBA DENGAN IMIGRASI**

oleh  
**RICA USWATUN CHASANAH FAUZIAH**  
**145090400111010**

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji pada  
tanggal 19 Februari 2018 dan  
dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar  
Sarjana Matematika

**Pembimbing**

**Dr. Isnani Darti, S.Si., M.Si**  
**NIP. 197312162002122001**

**Mengetahui,**  
**Ketua Jurusan Matematika**  
**Fakultas MIPA Universitas Brawijaya**

**Ratno Bagus EdyWibowo, S.Si, M.Si, Ph.D.**  
**NIP. 197509082000031003**



## LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Rica Uswatun Chasanah Fauziah  
NIM : 145090400111010  
Jurusan : Matematika  
Penulis Skripsi berjudul : Analisis Dinamik Model Penyakit  
*Brucellosis* antar Domba dengan  
Imigrasi

Dengan ini menyatakan bahwa :

1. Isi dari Skripsi yang saya buat adalah benar-benar karya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain, selain nama-nama yang termaktub di isi dan tertulis di daftar pustaka dalam Skripsi ini.
2. Apabila dikemudian hari ternyata Skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya akan bersedia menanggung segala resiko yang akan saya terima.

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 19 Februari 2018

Yang menyatakan,

(Rica Uswatun Chasanah Fauziah)

NIM. 145090400111010



# ANALISIS DINAMIK MODEL PENYAKIT *BRUCELLOSIS* ANTAR DOMBA DENGAN IMIGRASI

## ABSTRAK

Pada skripsi ini dibahas model transmisi penyakit *Brucellosis* pada domba dengan adanya imigrasi, kelahiran alami, serta menjelaskan penularan secara langsung dan tidak langsung dengan hewan yang terinfeksi dan bakteri dari lingkungan. Imigrasi domba adalah perpindahan domba yang berasal dari kelompok lain, sedangkan *Brucellosis* adalah salah satu penyakit yang disebabkan oleh bakteri *Brucella* dan menyerang hewan ternak diantaranya yaitu domba. Analisis kestabilan lokal dan global pada model ini ditentukan oleh angka reproduksi dasar yaitu  $R_0$ . Jika  $R_0 < 1$ , maka titik kesetimbangan bebas penyakit bersifat stabil asimtotik global, sedangkan jika  $R_0 > 1$  maka titik keseimbangan endemik eksis dan bersifat stabil asimtotik global. Pada analisis kestabilan lokal digunakan kriteria *Routh-Hurwitz* untuk menentukan kestabilannya, sedangkan untuk analisis kestabilan global digunakan fungsi Lyapunov. Simulasi numerik dilakukan dengan menggunakan Matlab yang ditentukan berdasarkan  $R_0 < 1$  dan  $R_0 > 1$  untuk menunjukkan kestabilan titik keseimbangan bebas penyakit dan titik keseimbangan endemik. Hasil simulasi numerik sesuai dengan hasil yang diperoleh secara analitik.

Kata Kunci: *Brucellosis*, angka reproduksi dasar, kestabilan lokal, kestabilan global, kriteria *Routh-Hurwitz*, fungsi Lyapunov.





# DYNAMIC ANALYSIS OF THE *BRUCELLOSIS* MODEL IN SHEEP WITH IMMIGRATION

## ABSTRACT

This final project discusses the transmission model of *Brucellosis* disease in sheep with immigration, natural birth and also explains direct and indirect contact transmission with infected animals and bacteria in the environment. Sheep immigration is the movement of sheep coming from another group, and *Brucellosis* is one of the diseases caused by *Brucella*, bacteria that attack livestock including the sheep itself. Local and global stability analysis of this model are determined by basic reproduction number,  $R_0$ . If  $R_0 < 1$ , then *the disease free equilibrium point is globally asymptotically stable, whereas if  $R_0 > 1$ , an endemic equilibrium point exists and is globally asymptotically stable.* In the local stability analysis, *Routh-Hurwitz* criterion is used to provide to determine its stability while in global stability analysis, it uses Lyapunov function. Numerical simulations are conducted using a Matlab which is analyzed based on  $R_0 < 1$  and  $R_0 > 1$  to show the stability of the disease-free equilibrium point and the endemic equilibrium point.

Keywords: *Brucellosis*, basic reproduction number, local stability, global stability, *Routh-Hurwitz* criterion, Lyapunov function



## KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul **ANALISIS DINAMIK MODEL PENYAKIT BRUCELOSIS ANTAR DOMBA DENGAN IMIGRASI** dengan baik dan lancar. Shalawat dan salam selalu tercurahkan kepada Rasulullah SAW sebagai suri teladan bagi penulis. Skripsi ini tidak dapat diselesaikan dengan baik tanpa bantuan, bimbingan, dan motivasi dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada

1. Dr. Isnani Darti, S.Si., M.Si. selaku dosen pembimbing sekaligus dosen pembimbing akademik dan Ketua Program Studi Matematika, atas segala bimbingan, motivasi, bantuan, dan saran yang diberikan.
2. Indah Yanti, S.Si., M.Si. dan Syaiful Anam, S.Si., M.T., Ph.D. selaku dosen penguji, atas segala kritik dan saran yang diberikan untuk perbaikan skripsi ini.
3. Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si., M.Si., Ph.D. selaku Ketua Jurusan Matematika, Pak Syahroni serta seluruh staff Tata Usaha Jurusan Matematika atas segala bantuan yang diberikan.
4. Ayah (Mulyono), Ibu (Siti Chusnul Chotimah), dan adik-adik (Nita Uswatun Chasanah Fauziah dan Mochammad Lukman Hakim Zulkarnain) yang selalu mendoakan dan memberikan dukungan moril serta materiil.
5. *The O Squad* (Pradevi Putri Indriastuti, Zulfira Giri Putri dan Larasati Deanira) yang selalu memberi semangat dan saran.
6. Noraniza Bahrotul Ilmi, Mega Rachmawati Lestari, Rizqiatul Ula atas ilmu, kritik, dan saran dalam penulisan skripsi ini.
7. Keluarga Besar Matematika 2014 yang mendukung dan mendoakan kelancaran pengerjaan skripsi ini.
8. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran. Kritik dan saran dapat dikirim melalui email ricachafa97@gmail.com, untuk perbaikan di masa

yang akan datang. Penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak.

Malang, Februari 2018

Penulis



## DAFTAR ISI

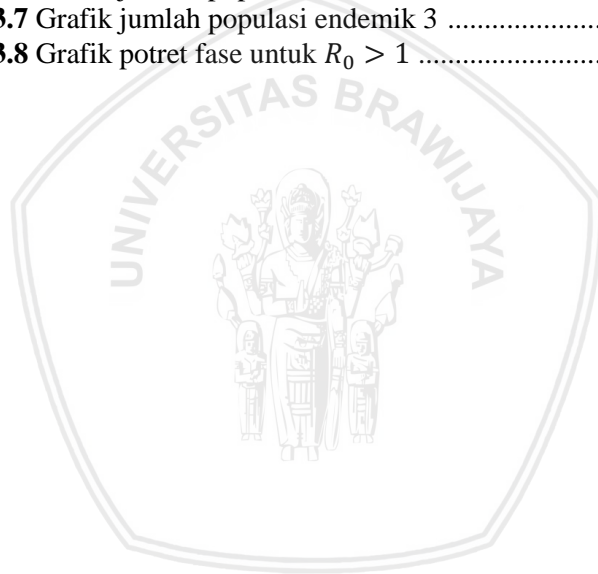
<b>HALAMAN JUDUL</b> .....	i
<b>HALAMAN PENGESAHAN</b> .....	ii
<b>HALAMAN PERNYATAAN</b> .....	v
<b>ABSTRAK</b> .....	vii
<b>ABSTRACT</b> .....	ix
<b>KATA PENGANTAR</b> .....	xi
<b>DAFTAR ISI</b> .....	xiii
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	xv
<b>DAFTAR TABEL</b> .....	xvii
<b>DAFTAR LAMPIRAN</b> .....	xix
<b>BAB I PENDAHULUAN</b> .....	1
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	2
1.3 Tujuan.....	2
1.4 Batasan Masalah.....	2
<b>BAB II DASAR TEORI</b> .....	5
2.1 Persamaan Diferensial.....	5
2.2 Sistem Dinamik.....	6
2.2.1 Sistem otonomus linear.....	7
2.2.2 Sistem otonomus nonlinear.....	8
2.3 Analisis Kestabilan.....	9
2.4 Kriteria Kestabilan <i>Routh-Hurwitz</i> .....	11
2.5 Angka Reproduksi Dasar.....	12
2.6 Metode <i>Next Generation Matrix</i> .....	13
2.7 <i>Brucellosis</i> .....	14
2.7.1 Definisi.....	14
2.7.2 Karakteristik bakteri <i>Brucella sp</i> .....	15
2.7.3 Sumber penularan dan cara transmisi.....	16
2.7.4 Epidemiologi.....	18
2.8 Model Matematika <i>Brucellosis</i> .....	19
<b>BAB III PEMBAHASAN</b> .....	23
3.1 Titik Keseimbangan.....	23
3.2 Angka Reproduksi Dasar.....	25
3.3 Syarat Eksistensi Titik Keseimbangan Endemik.....	27
3.4 Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan.....	28
4.1.1 Analisis kestabilan lokal.....	28
4.1.2 Analisis kestabilan global.....	31
3.5 Simulasi Numerik.....	35

3.5.1 Titik kesetimbangan bebas penyakit.....	36
3.5.2 Titik kesetimbangan endemik.....	40
<b>BAB IV PENUTUP</b> .....	45
4.1 Kesimpulan .....	45
4.2 Saran .....	45
<b>DAFTAR PUSTAKA</b> .....	47
Lampiran .....	51



## DAFTAR GAMBAR

<b>Gambar 2.1</b> Bakteri <i>Brucella</i> .....	15
<b>Gambar 2.2</b> Penularan <i>Brucellosis</i> .....	17
<b>Gambar 2.3</b> Penularan <i>Brucella Melitensis</i> .....	17
<b>Gambar 2.4</b> Peta Epidemiologi <i>Brucellosis</i> .....	19
<b>Gambar 2.5</b> Diagram kompartemen model matematika .....	20
<b>Gambar 3.1</b> Grafik jumlah populasi bebas penyakit 1 .....	37
<b>Gambar 3.2</b> Grafik jumlah populasi bebas penyakit 2 .....	37
<b>Gambar 3.3</b> Grafik jumlah populasi bebas penyakit 3 .....	38
<b>Gambar 3.4</b> Grafik potret fase untuk $R_0 < 1$ .....	39
<b>Gambar 3.5</b> Grafik jumlah populasi endemik 1 .....	41
<b>Gambar 3.6</b> Grafik jumlah populasi endemik 2 .....	42
<b>Gambar 3.7</b> Grafik jumlah populasi endemik 3 .....	42
<b>Gambar 3.8</b> Grafik potret fase untuk $R_0 > 1$ .....	43







## DAFTAR TABEL

<b>Tabel 3.1</b> Syarat eksistensi dan kestabilan titik kesetimbangan .....	35
<b>Tabel 3.2</b> Sifat kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit .....	36
<b>Tabel 3.3</b> Sifat kestabilan titik kesetimbangan endemik .....	40





## DAFTAR LAMPIRAN

<b>Lampiran 1</b> Kriteria <i>Routh-Hurwitz</i> kestabilan lokal .....	51
<b>Lampiran 2</b> Analisis kestabilan global bebas penyakit.....	55
<b>Lampiran 3</b> Analisis kestabilan global endemik.....	59
<b>Lampiran 4</b> <i>Source code</i> program Matlab 1 .....	65
<b>Lampiran 5</b> <i>Source code</i> program Matlab 2 .....	67





# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Pemodelan matematika adalah usaha menggunakan matematika untuk menggali dan menelaah topik-topik diluar matematika. Sedangkan model matematika adalah salah satu alat yang dapat digunakan untuk membantu menyelesaikan suatu masalah dalam kehidupan nyata. Masalah-masalah tersebut dapat dibentuk kedalam model matematika dengan menggunakan asumsi-asumsi tertentu. Selanjutnya dari model yang diperoleh, dapat dicari solusinya secara analisis maupun secara numerik (Widowati dan Sutimin, 2007).

Salah satu permasalahan di kehidupan nyata yang dapat dibentuk kedalam model matematika adalah model tentang penyebaran suatu penyakit. Salah satu contohnya adalah penyakit *Brucellosis*. *Brucellosis* adalah salah satu penyakit hewan (*zoonosis*), terutama hewan ternak, yang disebabkan oleh bakteri kelompok *Brucella*. Bakteri dari genus *Brucella* memiliki enam spesies: *Brucella abortus*, *Brucella suis*, *Brucella melitensis*, *Brucella neotomae*, *Brucella ovis* dan *Brucella canis*.

Setiap spesies *Brucella* mempunyai hewan target sebagai reservoir, yaitu *B. abortus* pada sapi, *B. melitensis* pada domba dan kambing, *B. ovis* pada ruminansia kecil, *B. suis* pada babi dan *B. canis* pada anjing. *Brucellosis* disebut juga demam Undulant, demam Mediterania atau demam Malta yang infeksiya hampir selalu ditularkan melalui kontak langsung atau tidak langsung dengan hewan yang terinfeksi atau produk yang dihasilkan oleh hewan tersebut (Acha dan Boris, 2003).

Beberapa pemodelan matematika tentang *Brucellosis* telah dikembangkan, seperti Zinsstag dkk. (2005) membahas model dinamik penyebaran penyakit *Brucellosis* antar domba betina dengan manusia di Mongolia. Aïnseba dkk. (2009) mengulas model dinamik individu rentan, terinfeksi, dan lingkungan yang terkontaminasi dari penyakit epidemi *Brucellosis* dengan penyebaran secara langsung dan tidak langsung. Qiang Hou dkk. (2013) mengkaji model dinamis yang mencakup penyebaran penyakit *Brucellosis* antar domba dan dari domba ke manusia di Mongolia, China. Qiang Hou dkk. (2014) kembali mengkaji tentang sifat global model dinamik umum untuk

penyakit hewan dengan studi kasus transmisi *Brucellosis* dan *Tuberculosis*. Ming Tao Li dkk. (2014) membahas model dinamika *multi-group* dengan infeksi gabungan dua arah antara sapi dan domba di peternakan umum, China. Sampai saat ini, pengembangan model matematika dari penyakit *Brucellosis* semakin banyak.

Skripsi ini mengulas kembali model transmisi secara langsung dan tidak langsung dari penyakit *Brucellosis* antar domba dengan adanya imigrasi yang telah dikaji oleh Gui Quan Sun dan Zi Ke Zhang (2014). Pada bagian pembahasan, ditentukan titik kesetimbangan model dan analisis kestabilannya serta kaitannya dengan angka reproduksi dasar. Pada bagian akhir, dilakukan simulasi numerik untuk mengilustrasikan perilaku solusi sistem dari model yang dikaji.

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, pokok permasalahan yang dikaji pada skripsi ini sebagai berikut

1. Bagaimana titik kesetimbangan model matematika untuk penyakit *Brucellosis* antar domba dengan imigrasi?
2. Bagaimana hasil analisis lokal dan global titik kesetimbangan model?
3. Bagaimana interpretasi hasil simulasi numerik model?

## 1.3 Tujuan

Tujuan yang ingin diperoleh pada skripsi ini adalah sebagai berikut

1. Menentukan titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemik.
2. Menentukan kestabilan lokal dan global titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemik.
3. Menginterpretasikan hasil simulasi numerik model.

## 1.4 Batasan Masalah

Pada skripsi ini diberikan batasan masalah sebagai berikut

1. Jumlah kelahiran pada kompartemen *exposed* dan *infected* diabaikan.
2. Jumlah kelahiran suatu kelompok domba per unit waktu adalah perkalian antara tingkat kelahiran dengan jumlahan individu *susceptible* dan *vaccinated*.

3. Domba yang sedang dalam masa inkubasi dan masa infeksi memiliki tingkat transmisi yang sama dan banyaknya *Brucella* yang dilepaskan ke lingkungan memiliki jumlah yang sama per satuan waktunya.
4. Domba yang divaksinasi tidak dapat terinfeksi kecuali jika domba kehilangan kekebalan setelah vaksinasi.







## BAB II DASAR TEORI

### 2.1 Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat hubungan antara suatu fungsi yang tidak diketahui dengan turunan-turunan dari suatu fungsi yang tidak diketahui. Beberapa contoh persamaan diferensial

$$y' + xy - 3 = 0, \quad (2.1)$$

$$y'' + 5y' + 6y - \cos x = 0, \quad (2.2)$$

$$y'' - (1 + y^2)(x^2 + y^2) = 0, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} - \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} = 0. \quad (2.4)$$

(Finizio dan Ladas, 1982)

Berdasarkan banyaknya variabel bebas, persamaan diferensial dibedakan menjadi dua, yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial. Persamaan diferensial biasa adalah suatu persamaan yang memuat satu variabel bebas sedangkan persamaan diferensial parsial adalah suatu persamaan yang memuat lebih dari satu variabel bebas.

Suatu persamaan diferensial disebut memiliki tingkat atau orde ke- $n$  apabila orde dari turunan tertinggi yang muncul merupakan turunan ke- $n$ . Persamaan (2.1) merupakan contoh persamaan diferensial berorde satu, sedangkan persamaan (2.2), (2.3), dan (2.4) merupakan contoh persamaan diferensial berorde dua. Secara umum dapat dituliskan sebagai berikut

$$F[t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n)}(t)] = 0, \quad (2.5)$$

dengan  $t$  merupakan variabel bebas,  $x$  merupakan variabel tak bebas dan  $x^{(n)}$  adalah turunan ke  $n$  dari  $x$  terhadap  $t$ . Persamaan diferensial biasa dibagi menjadi dua, yaitu persamaan diferensial biasa linear dan persamaan diferensial biasa nonlinear. Persamaan (2.5) merupakan persamaan diferensial biasa linear jika  $F$  merupakan fungsi linear dari  $x(t), x'(t), \dots, x^{(n)}$ , maka persamaan diferensial biasa linear secara umum dapat dituliskan sebagai berikut

$$a_0(t)x^{(n)}(t) + a_1(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + a_n(t)x(t) = g(t), \quad (2.6)$$

dengan  $a_0(t) \neq 0$ , untuk setiap  $t$ . Sedangkan persamaan diferensial biasa dikatakan nonlinear jika salah satu sifat berikut dipenuhi oleh  $F$ , yaitu

1. Variabel-variabel tak bebas atau turunannya berderajat lebih dari satu,
2. Mengandung bentuk perkalian antara variabel bebas dengan variabel tak bebas, turunan satu dengan turunan yang lainnya, atau variabel tak bebas dengan turunannya,
3. Variabel tak bebasnya merupakan fungsi transenden.

Sebagai contoh  $y'' + 2e^x y' + yy' + y^2 = 0$  merupakan persamaan diferensial biasa nonlinear karena adanya suku  $y''$ ,  $yy'$ , dan  $y^2$ .

Sistem persamaan diferensial biasa orde satu berdimensi  $n$  adalah suatu sistem yang terdiri dari  $n$  persamaan diferensial biasa dengan  $n$  fungsi yang tidak diketahui, dengan  $n \geq 2$ . Bentuk umum sistem persamaan diferensial biasa berdimensi  $n$  yang memuat  $n + 1$  variabel dapat dituliskan

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= F_1(x_1, \dots, x_n, t), \\ \frac{dx_2}{dt} &= F_2(x_1, \dots, x_n, t), \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= F_n(x_1, \dots, x_n, t). \end{aligned}$$

(Boyce Diprima, 2012)

## 2.2 Sistem Dinamik

### Definisi 2.2.1 (Sistem Dinamik)

Sistem dinamik adalah suatu sistem yang dapat diketahui kondisinya pada masa yang akan datang jika diberikan suatu kondisi di masa sekarang atau masa lalu (Nagle dkk., 2012).

Dalam penerapannya, sistem dinamik dibagi menjadi dua yaitu sistem dinamik diskrit dan sistem dinamik kontinu. Sistem dinamik diskrit dinyatakan sebagai persamaan beda, secara umum dapat dituliskan

$$\vec{x}_{t+1} = \vec{f}(\vec{x}_t), t \in \mathbb{Z} \vee t \in \mathbb{N} \text{ dan } \vec{x} \in \mathbb{R}^n,$$

Sedangkan sistem dinamik kontinu dinyatakan sebagai persamaan diferensial biasa, secara umum dapat dituliskan

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}, t), t \in \mathbb{R} \text{ dan } \vec{x} \in \mathbb{R}^n.$$

(Arrowsmith dan Place, 1990)

### Definisi 2.2.2 (Sistem Otonomus)

Sistem persamaan diferensial orde satu berdimensi  $n$  berbentuk

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= F_1(x_1, \dots, x_n, t), \\ \frac{dx_2}{dt} &= F_2(x_1, \dots, x_n, t), \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= F_n(x_1, \dots, x_n, t),\end{aligned}\tag{2.7}$$

dengan  $F_i$  adalah fungsi kontinu yang tidak bergantung secara eksplisit terhadap variabel bebas  $t$ , untuk  $i = 1, 2, \dots, n$  disebut sistem otonomus. Sistem otonomus dibagi menjadi dua, yaitu sistem otonomus linear dan sistem otonomus nonlinear. Sistem otonomus dikatakan linear jika  $F_i$  merupakan fungsi linear untuk semua  $i$  dan dikatakan nonlinear jika  $F_i$  merupakan fungsi nonlinear minimal untuk satu buah  $F_i$ .

(Boyce DiPrima, 2012)

### Definisi 2.2.3 (Titik Kesetimbangan)

Pada sistem otonomus (2.7), titik  $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  disebut titik kesetimbangan jika memenuhi  $F_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ , untuk setiap  $i = 1, 2, \dots, n$ . Pada kondisi  $\frac{dx_1}{dt} = \frac{dx_2}{dt} = \dots = \frac{dx_n}{dt} = 0$ , solusi  $x_1(t), x_2(t), \dots$ , dan  $x_n(t)$  tidak mengalami perubahan nilai seiring dengan peningkatan nilai  $t$ .

(Boyce DiPrima, 2012)

#### 2.2.1 Sistem otonomus linear

Perhatikan sistem otonomus linear berikut

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n, \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n, \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n.\end{aligned}\tag{2.8}$$

Persamaan (2.8) dapat dituliskan dalam bentuk  $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$ , dengan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Penentuan tipe kestabilan titik kesetimbangan pada sistem otonomus bergantung pada nilai eigen matriks  $A$ .

(Boyce DiPrima, 2012)

### 2.2.2 Sistem otonomus nonlinear

Perhatikan sistem otonomus nonlinear dengan  $n$  persamaan berikut

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, x_2, \dots, x_n), i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.9)$$

Misalkan  $F_i$  adalah fungsi nonlinear yang mempunyai turunan parsial yang kontinu di titik kesetimbangan  $\vec{x}^*$ . Deret Taylor fungsi  $F_i$  di sekitar  $\vec{x}^*$  adalah

$$F_i(\vec{x}) = F_i(\vec{x}^*) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_i(\vec{x}^*)}{\partial x_j} (x_j - x_j^*) + \omega_i(\vec{x}), \quad (2.10)$$

dengan  $\omega_i(\vec{x})$  adalah suku sisa untuk  $i = 1, 2, \dots, n$ . Suku sisa pada hampiran orde satu memenuhi sifat

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^*} \frac{\omega_i(\vec{x})}{\|\vec{w}\|} = 0,$$

dengan  $\vec{w} = (x_1 - x_1^*, x_2 - x_2^*, \dots, x_n - x_n^*)^T$ .

Dengan menggunakan persamaan (2.10) dan mengingat bahwa

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{d(x_1 - x_1^*)}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt} = \frac{d(x_n - x_n^*)}{dt}, \text{ serta } F_i(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = 0$$

maka sistem (2.9) dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} (x_1 - x_1^*) \\ (x_2 - x_2^*) \\ \vdots \\ (x_n - x_n^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_i(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_2(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_i(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (x_1 - x_1^*) \\ (x_2 - x_2^*) \\ \vdots \\ (x_n - x_n^*) \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} \omega_1(\vec{x}^*) \\ \omega_2(\vec{x}^*) \\ \vdots \\ \omega_n(\vec{x}^*) \end{bmatrix}, \tag{2.11}$$

sehingga secara singkat persamaan (2.11) dapat ditulis sebagai berikut

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = J\vec{w} + \vec{\omega}, \tag{2.12}$$

dengan

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_1(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_2(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_n(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \text{ merupakan matriks Jacobi.}$$

Jika  $\vec{x}$  berada dekat dengan  $\vec{x}^*$  maka  $\vec{w}$  bernilai kecil. Akibatnya  $\vec{w} \rightarrow \vec{0}$  dan nilai  $\vec{w}$  dapat diabaikan, sehingga sistem nonlinear (2.12) dapat dihampiri oleh sistem linear berikut

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = J\vec{w}, \tag{2.13}$$

Jika  $\vec{x} = \vec{x}^*$  maka diperoleh  $(w_1^*, w_2^*, \dots, w_n^*) = (0, 0, \dots, 0)$ , sehingga titik kesetimbangan (2.13) adalah  $(w_1^*, w_2^*, \dots, w_n^*) = (0, 0, \dots, 0)$ . Proses menghampiri (2.9) dengan sistem (2.13) disebut linearisasi.

(Boyce DiPrima, 2012)

### 2.3 Analisis Kestabilan

Stabilitas dapat dikatakan sebagai perubahan kecil dalam syarat awal hanya menyebabkan pengaruh kecil pada penyelesaian, sedangkan kestabilan asimtotik berarti bahwa pengaruh dari suatu perubahan kecil cenderung tidak berpengaruh. Kestabilan berarti bahwa suatu perubahan kecil dalam syarat awal mempunyai pengaruh besar pada penyelesaian. Kestabilan dari sistem otonomus linear atau kestabilan dari sistem otonomus linearisasi dari sistem nonlinear adalah kestabilan asimtotik lokal. Analisis kestabilan dapat dilihat dari tanda nilai karakteristik (nilai eigen) matrik Jacobi.

(Finizio & Ladas, 1982)

### **Teorema 2.1 (Kestabilan Sistem Otonomus Linear)**

1. Titik kesetimbangan  $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  dari sistem otonomus linear bersifat stabil tetapi tidak asimtotik jika dan hanya jika akar-akar dari persamaan karakteristik adalah real dan negatif atau mempunyai bagian riil tak positif.
2. Titik kesetimbangan  $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  dari sistem otonomus linear bersifat stabil asimtotik jika dan hanya jika akar-akar dari persamaan karakteristik adalah real dan negatif atau mempunyai bagian riil yang negatif.
3. Titik kesetimbangan  $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  dari sistem otonomus linear bersifat tak stabil jika paling sedikit satu akar mempunyai bagian real yang positif.

### **Teorema 2.2 (Kestabilan Sistem Otonomus Nonlinear)**

1. Titik kesetimbangan  $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  dari sistem otonomus nonlinear bersifat stabil asimtotik jika titik kesetimbangan  $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  adalah hasil linearisasi dari sistem yang stabil asimtotik pada sistem linearnya.
2. Titik kesetimbangan  $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  dari sistem otonomus nonlinear bersifat tak stabil jika titik kesetimbangan  $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  adalah hasil linearisasi dari sistem yang tak stabil pada sistem linearnya.

(Finizio dan Ladas, 1982)

Untuk mengetahui kestabilan global, pada skripsi ini digunakan fungsi Lyapunov sebagai berikut.

#### **Definisi 2.3.1 (Fungsi Lyapunov Lemah)**

Misalkan  $\vec{x}^*$  adalah titik kesetimbangan persamaan diferensial  $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x})$ . Suatu fungsi  $\mathcal{L}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  disebut fungsi Lyapunov lemah untuk  $\vec{x}^*$  jika terdapat suatu persekitaran  $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^n$  pada  $\vec{x}^*$  yang memenuhi kondisi berikut

1.  $\mathcal{L}(\vec{x}^*) = 0$  dan  $\mathcal{L}(\vec{x}) > 0, \forall \vec{x} \neq \vec{x}^* \in \mathcal{W}$ .
2.  $\mathcal{L}'(\vec{x}) \leq 0, \forall \vec{x} \in \mathcal{W}$ .

(Alligood dkk., 2000)

### Definisi 2.3.2 (Fungsi Lyapunov Kuat)

Fungsi  $\mathcal{L}$  disebut fungsi Lyapunov kuat untuk  $\vec{x}^*$  jika terdapat suatu  $\mathcal{W}$  pada  $\vec{x}^*$  yang memenuhi kondisi (1) pada Definisi 2.3.1 dan  $\mathcal{L}'(\vec{x}) < 0, \forall \vec{x} \neq \vec{x}^*$  dengan  $\vec{x} \in \mathcal{W}$ .

(Alligood dkk., 2000)

### Teorema 2.3 (Kestabilan Global dengan Fungsi Lyapunov)

Misalkan  $\vec{x}^*$  adalah suatu titik kesetimbangan persamaan diferensial  $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x})$ . Titik kesetimbangan  $\vec{x}^*$  bersifat

1. Stabil global jika terdapat suatu fungsi Lyapunov lemah untuk  $\vec{x}^*$ .
2. Stabil asimtotik global jika terdapat suatu fungsi Lyapunov kuat untuk  $\vec{x}^*$ .

(Alligood dkk., 2000)

### 2.4 Kriteria Kestabilan Routh-Hurwitz

Kestabilan titik kesetimbangan sistem otonomus linear bergantung pada akar persamaan karakteristik atau nilai eigennya. Jika suatu sistem linear mempunyai persamaan karakteristik berbentuk

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0, \quad (2.14)$$

maka kestabilan titik kesetimbangan dapat ditentukan dengan menggunakan kriteria *Routh-Hurwitz* untuk menentukan tanda nilai eigennya tanpa harus menentukan nilai eigennya dengan memanfaatkan koefisien-koefisien yang ada pada persamaan (2.14).

### Teorema 2.4

Akar-akar persamaan (2.14) memiliki bagian riil negatif jika dan hanya jika

$$D_1 = |a_1| > 0,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} > 0,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ 1 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0,$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 \\ 1 & a_2 & a_4 & a_6 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & 1 & a_2 & a_4 \end{vmatrix} > 0,$$

⋮



$$D_k = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & a_{2k-1} \\ 1 & a_2 & a_4 & \dots & a_{2k-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & a_{2k-3} \\ 0 & 0 & a_2 & \dots & a_{2k-4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_k \end{vmatrix} > 0,$$

dengan  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ .

Misal diberikan persamaan karakteristik berderajat 5 sebagai berikut

$$\lambda^5 + a_1\lambda^4 + a_2\lambda^3 + a_3\lambda^2 + a_4\lambda + a_5 = 0. \quad (2.15)$$

Titik kesetimbangan sistem yang dimiliki persamaan karakteristik (2.15) akan stabil jika dan hanya jika

1.  $D_1 = |a_1| = a_1 > 0.$

2.  $D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} = a_1a_2 - a_3 > 0.$

3.  $D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ 1 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_1a_2a_3 - a_3^2 - a_1^2a_4 > 0.$

4.  $D_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 \\ 1 & a_2 & a_4 & a_6 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & 1 & a_2 & a_4 \end{vmatrix} = a_1a_2a_3a_4 - a_1^2a_4^2 - a_3^2a_4 > 0.$

5.  $D_5 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & a_9 \\ 1 & a_2 & a_4 & a_6 & a_8 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 \\ 0 & 1 & a_2 & a_4 & a_6 \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 \end{vmatrix} = a_3a_4(a_1a_2 - a_3) - a_2a_5(a_1a_2 - a_3) - (a_1a_4 - a_5)^2 = a_5D_4 > 0.$

(Murray, 2002)

### 2.5 Angka Reproduksi Dasar

Angka reproduksi dasar dinotasikan dengan  $R_0$  merupakan suatu ukuran potensi penyebaran penyakit dalam suatu populasi. Bilangan reproduksi dasar didefinisikan sebagai nilai harapan banyaknya populasi rentan yang menjadi terinfeksi selama masa infeksi berlangsung (Driessche dan Watmough, 2001).

Pada model epidemi penyebaran penyakit, angka reproduksi dasar digunakan sebagai penentu untuk mengetahui apakah dalam

suatu populasi terjadi suatu penyebaran penyakit atau tidak. Angka reproduksi dasar menyatakan rata-rata banyaknya individu yang terinfeksi akibat satu individu yang telah terinfeksi sebelumnya.

Penyebaran penyakit terjadi jika  $R_0 > 1$  karena rata-rata satu individu terinfeksi menyebabkan lebih dari satu individu baru terinfeksi. Jika  $R_0 < 1$  maka penyebaran penyakit tidak terjadi karena rata-rata satu individu terinfeksi menyebabkan kurang dari satu individu baru terinfeksi, dengan kata lain individu tersebut belum tentu dapat menginfeksi individu lainnya (Brauer dan Van den Driessche, 2010).

Kestabilan lokal dapat ditentukan berdasarkan angka reproduksi dasarnya seperti pada teorema berikut.

### **Teorema 2.5**

1. Titik kesetimbangan bebas penyakit (*disease-free equilibrium*) bersifat stabil asimtotik lokal jika  $R_0 < 1$  dan tidak stabil jika  $R_0 > 1$ .
2. Jika  $R_0 < 1$  maka semua solusi konvergen ke titik kesetimbangan bebas penyakit (*disease-free equilibrium*).
3. Titik kesetimbangan endemik (*endemic equilibrium*) stabil asimtotik lokal jika  $R_0 > 1$ .
4. Jika  $R_0 > 1$  maka penyakit tersebut endemik.

(Rost dan Wu, 2008)

### **2.6 Metode Next Generation Matrix**

Metode *next generation matrix* adalah suatu metode yang digunakan untuk memperoleh nilai pendekatan dari angka reproduksi dasar ( $R_0$ ) pada model kompartemen penyebaran penyakit. Pada metode ini, populasi model kompartemen penyebaran penyakit dibagi menjadi dua kelompok, yaitu kelompok kompartemen penyakit dan kelompok kompartemen non-penyakit.

Suatu kompartemen disebut kompartemen penyakit jika terdapat individu-individu yang terinfeksi, misalkan terdapat  $1, \dots, m, m + 1, \dots, n$  kompartemen dengan kompartemen pertama sampai kompartemen  $m$  terdiri dari individu terinfeksi dan kompartemen  $m + 1$  sampai dengan  $n$  terdiri dari individu tidak terinfeksi. Model kompartemen dapat ditulis dalam bentuk

$$x_i' = F_i - V_i, i = 1, 2, \dots, m$$

dengan  $x_i$  menyatakan jumlah individu pada setiap kompartemen  $i$ . Parameter  $F_i$  menyatakan komponen pembentuk matriks  $F$ , dengan

komponen  $F_i$  merupakan infeksi baru yang masuk pada kompartemen ke- $i$ . Infeksi baru hanya dapat diperoleh dari populasi individu rentan dan  $F_i$  tidak boleh negatif. Parameter  $V_i$  menyatakan komponen berbentuk matriks  $V$ , dengan  $V_i$  merupakan tranfer keluar atau masuk dari kompartemen satu ke lainnya. Transfer infeksi dapat terjadi apabila terdapat proses penularan penyakit dari satu kompartemen ke lainnya. Jika  $V_i$  menyatakan transfer keluar dari kompartemen ke- $i$  maka  $V_i$  bernilai positif, jika masuk pada satu kompartemen maka  $V_i$  bernilai negatif.

Didefinisikan  $F$  dan  $V$  adalah matriks  $m \times m$  sebagai berikut

$$F = \left[ \frac{dF_i(\varepsilon_0)}{dx_j} \right] \text{ dan } V = \left[ \frac{dV_i(\varepsilon_0)}{dx_j} \right], i, j = 1, \dots, m$$

dengan  $\varepsilon_0$  merupakan titik kesetimbangan bebas penyakit (*disease-free equilibrium*)  $F$  non negatif dan  $V$  matriks non singular. *Next generation matrix* didefinisikan sebagai

$$K = FV^{-1}$$

dan angka reproduksi dasar yang diperoleh dari perhitungan *next generation matrix* dapat ditulis sebagai berikut

$$R_0 = \rho(K),$$

dengan  $\rho(K)$  adalah *spectral radius* matriks  $K$  yang merupakan maksimum modulus dari nilai eigen  $K$ .

(Brauer dan Charlos., 2010)

## 2.7 *Brucellosis*

### 2.7.1 Definisi

*Brucellosis* atau penyakit keluron menular merupakan salah satu penyakit hewan menular strategis karena penularannya yang relatif cepat antar daerah dan lintas batas serta memerlukan pengaturan lalu lintas ternak yang ketat (Ditjennak, 1998). Penyakit ini disebabkan oleh bakteri genus *Brucella* dan dikategorikan sebagai zoonosis serta diklasifikasikan sebagai mikroorganisme kelompok BSL III (*Biosafety level 3*) (OIE, 2012).

*Brucellosis* atau dalam bahasa Jawa disebut dengan keluron merupakan penyakit pada hewan yang disebabkan oleh bakteri *Brucella sp.* yang hidup dalam sel dan menimbulkan demam. Penyakit ini dapat menular dari hewan ke manusia (zoonosis) tetapi tidak menular dari manusia ke manusia. *Brucellosis* merupakan salah satu penyakit zoonosis yang tersebar di seluruh bagian dunia dan masih bersifat endemik bagi sebagian besar negara berkembang,

termasuk di Indonesia (Doganay & Aygen, 2003). Brucellosis terutama terdapat di negara-negara Mediterania di Eropa, utara dan timur Afrika, Timur Tengah, Asia Selatan dan Asia Tengah serta Amerika Tengah dan Selatan, namun sering tidak diketahui dan sering terjadi tanpa adanya laporan. Hanya terdapat beberapa negara di dunia yang secara resmi bebas dari penyakit, meskipun kasus masih terjadi pada orang-orang yang kembali dari negara endemik (WHO, 2006).

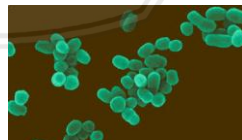
*Brucellosis* mempunyai banyak istilah diantaranya keluron, Mediteranean fever (karena banyak ditemukan di daerah Mediteranian), Undulant fever (karena suhu tubuh yang naik-turun selama berminggu-minggu pada pasien yang tidak mendapat penanganan), Crimean fever (muncul pertama kali saat perang Crimea tahun 1805-an di Malta), Maltese fever (ditemukan sumber infeksi oleh dokter berkebangsaan Malta, Temi Zammit), Bang's Disease (diisolasi pertama kali oleh drh. Benhard Bang), Brucellosis (diketahui pertama kali sebagai agen penyakit oleh Dr. David Bruce).

### 2.7.2 Karakteristik bakteri *Brucella* sp

Bakteri dari genus *Brucella*, berbentuk kokobasili dengan panjang  $0,6-0,7\mu m$  dan lebar  $0,5-0,7\mu m$ , ditemukan secara tunggal dan terkadang berpasangan dengan morfologi yang konstan, bersifat gram negatif, non-motil, tidak berkapsul, tidak membentuk spora dan anaerobik fakultatif. Dalam media biakan, koloni berbentuk seperti setetes madu bulat, halus, permukaan cembung dan licin, mengkilap serta tembus cahaya dengan diameter  $1 - 2 mm$  (Corbel dan Brinley, 1982). Bentuk dari bakteri *Brucella* dapat dilihat pada Gambar 2.1.

Klasifikasi *Brucella* sp adalah sebagai berikut.

Kelas : Alpha Proteobacteria  
Ordo : Rhizobiales  
Famili : Brucellaceae  
Genus : *Brucella*



**Gambar 2.1** Bakteri *Brucella*

*Brucella* sp terdiri atas 6 genus yaitu *B.abortus*, *B.suis*, *B.canis*, *B.ovis*, *B.melitensis* dan *B. neotomae*. Tidak semua genus menimbulkan penyakit, hanya 5 jenis dari genus ini yang potensial menimbulkan penyakit pada hewan dan manusia yaitu *B.abortus* pada sapi, *B.suis* pada babi, *B.canis* pada anjing, *B.ovis* pada domba

jantan dan *B melitensis* pada kambing dan domba (Acha dan Boris, 2003).

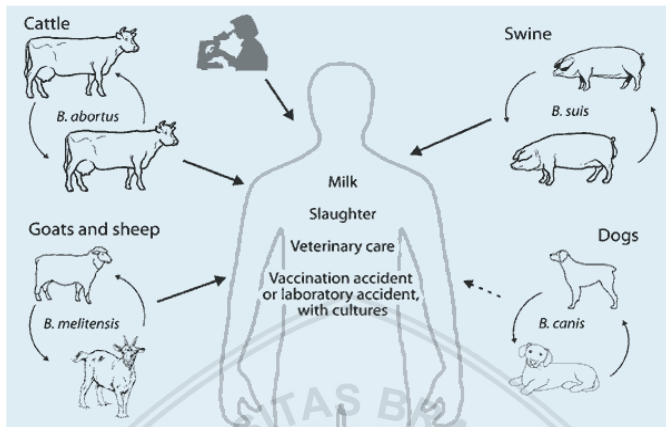
Bakteri ini adalah parasit intraseluler atau parasit obligat karena berduplikasi di dalam sel dan berkemampuan untuk menginvasi semua jaringan hewan sehingga dapat menyebabkan bermacam-macam infeksi. Bakteri ini dapat bertahan hidup diluar tubuh induk pada berbagai kondisi lingkungan dalam jangka waktu tertentu. Kemampuan daya tahan hidup kuman *Brucella* pada tanah kering adalah 4 hari, tanah lembab 66 hari dan tanah becek 151-185 hari (Crawford dkk., 1990). Pada kotoran atau limbah kandang bagian bawah dengan suhu yang relatif tinggi bertahan selama 2 hari, pada air minum ternak bertahan selama 5 – 114 hari dan pada air limbah selama 30 – 150 hari (Noor, 2006). Pada susu bakteri *Brucella sp* dapat bertahan selama beberapa hari di dalam susu dan beberapa minggu atau bulan dalam produk susu (Acha dan Boris, 2003).

### 2.7.3 Sumber penularan dan cara transmisi

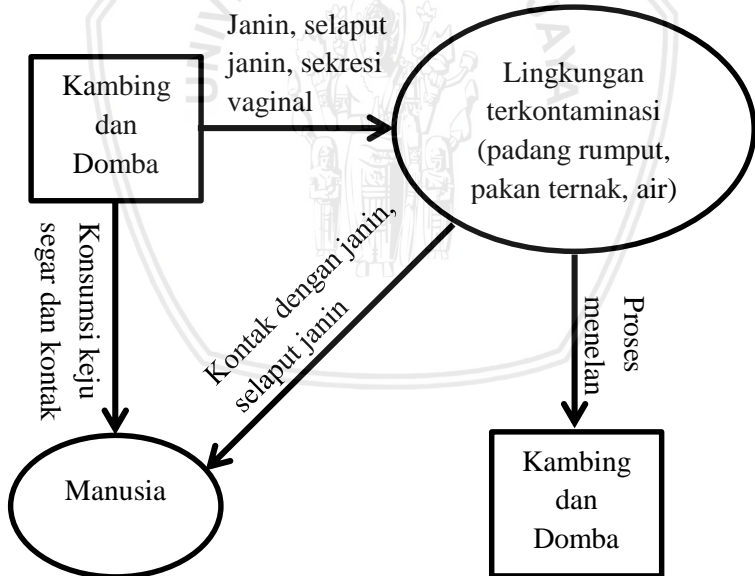
Pada hewan, *Brucella sp.* terdapat pada fetus, plasenta, dan lendir vagina (dapat ditemukan pada minggu ke-4 sampai minggu ke-6 setelah abortus), semen, urin, air liur, cairan dari rongga hidung dan mata, susu serta feses. Pada sapi, kambing, domba dan babi penularannya terjadi per oral dan melalui perkawinan. Dapat ditularkan melalui fetus, selaput fetal setelah aborsi dan *stillbirth* (lahir dalam keadaan mati), serta melalui *veneral transmission* (hubungan kelamin). *Brucella* masuk kedalam tubuh melalui mulut, saluran reproduksi, oronasal, mukosa konjunctiva, luka terbuka dan melalui transfusi darah. Hewan yang mengalami keguguran oleh *Brucellosis* mengeluarkan bakteri *B. abortus* dalam jumlah besar melalui membran fetus, cairan reproduksi, urine dan feses. Bahan-bahan tersebut akan mencemari rumput dan air minum sehingga memungkinkan penularan antar hewan.

Penularan pada domba jantan terjadi melalui *veneral transmission* pasif, yakni melalui domba betina. Ketika domba jantan yang terkena *Brucellosis* mengawini domba betina, *B. ovis* akan tertinggal dalam saluran kelamin betina, dan pada saat domba jantan lain mengawini domba betina ini, maka domba jantan tersebut akan terpapar *B. ovis* yang ada di dalam vagina domba betina (Acha dan Boris, 2003). Penularan penyakit *Brucellosis* secara keseluruhan

ditunjukkan pada Gambar 2.2 yaitu penularan *Brucellosis* dari hewan reservoir ke manusia sedangkan untuk penularan bakteri *Brucella Melitensis* antar domba dan manusia ditunjukkan pada Gambar 2.3.



**Gambar 2.2** Penularan *Brucellosis* pada manusia dan hewan



**Gambar 2.3** Penularan *Brucella Melitensis* pada kambing, domba, dan manusia

## 2.7.4 Epidemiologi

Di Indonesia, secara serologi, *Brucellosis* dikenal pertama kali pada tahun 1935, yang ditemukan pada sapi perah di Grati Kabupaten Pasuruan, Jawa Timur dan bakteri *Brucella abortus* berhasil diisolasi pada tahun 1938. Pada tahun 1940 *Brucellosis* dilaporkan muncul di Sumatera Utara dan Aceh, dikenal dengan sebutan sakit sane/radang sendi atau sakit burut/radang testis.

*Brucellosis* sudah bersifat endemi di Indonesia dan kadang-kadang muncul sebagai epidemi pada banyak peternakan sapi perah di Jakarta, Bandung, Jawa Tengah dan Jawa Timur. Beberapa wilayah seperti Bali, Pulau Lombok, Pulau Kalimantan, Sumatera bagian tengah (Riau, Kepulauan Riau, Jambi dan Sumatera Barat) telah dinyatakan bebas *Brucellosis*. Sedangkan bagian Sumatera lainnya sedang dalam persiapan menuju pembebasan *Brucellosis* (Dirkeswan, 2004).

Menurut laporan BBVet Wates (2010) di pulau Jawa kasus *Brucellosis* terjadi di kabupaten Boyolali, Klaten, Magelang, Salatiga, Surakarta dan Semarang. Untuk Indonesia bagian timur kasus *Brucellosis* terjadi di Maluku dan Sulawesi Selatan (BBVet Maros 2010). Untuk Sumatera kasus *Brucellosis* di temukan di Lampung 1 kasus pada tahun 2009 dan 3 kasus di Bengkulu pada tahun 2010, prevalensi  $< 2\%$  (BPPV Regional 3 2010). Kasus di Sumatera Utara dan Aceh juga rendah dengan prevalensi  $< 2\%$  (BPPV Regional 1 2010) dengan diterapkannya kebijakan Test and Slaughter kemungkinan pulau Sumatera bebas *Brucellosis* dapat segera terwujud. Penyebaran penyakit *Brucellosis* di Indonesia ditunjukkan oleh Gambar 2.4.

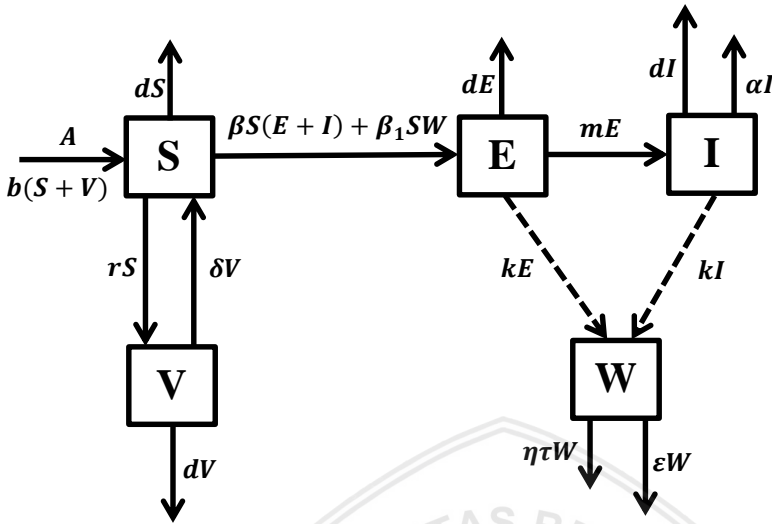


Gambar 2.4 Peta epidemiologi *Brucellosis* di Indonesia tahun

## 2.8 Model Matematika

Model matematika penyakit *Brucellosis* antar domba dengan imigrasi terdiri dari lima subpopulasi, yaitu subpopulasi *susceptible* ( $S$ ), *exposed* ( $E$ ), *infected* ( $I$ ), *vaccinated* ( $V$ ), dan subpopulasi bakteri *Brucella* di lingkungan ( $W$ ).  $S(t)$ ,  $E(t)$ ,  $I(t)$ ,  $V(t)$ , dan  $W(t)$  bernilai positif karena menyatakan kepadatan populasi pada waktu  $t$ . Model matematika penyakit *Brucellosis* antar domba dengan imigrasi dapat digambarkan dalam diagram kompartemen berikut.





**Gambar 2.5** Gambar diagram kompartemen model matematika penyakit *Brucellosis* pada domba dengan imigrasi.

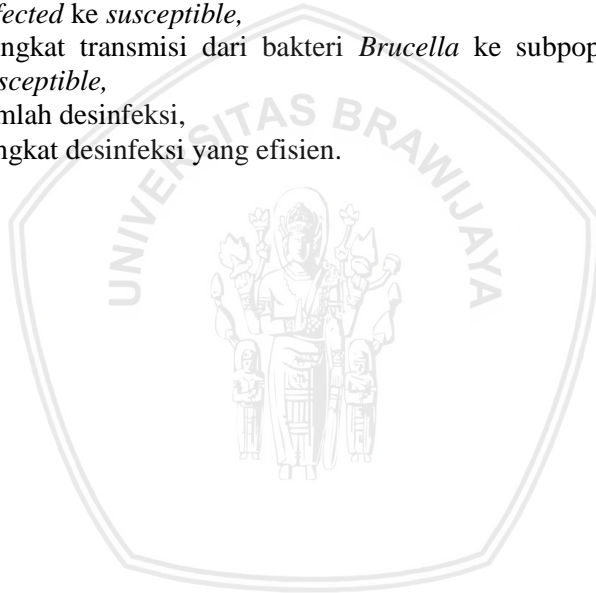
Berdasarkan Gambar 2.5 diperoleh sistem sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dt} &= A + b(S + V) + \delta V - (d + r)S - \beta S(E + I) - \beta_1 SW, \\
 \frac{dE}{dt} &= \beta S(E + I) + \beta_1 SW - (d + m)E, \\
 \frac{dI}{dt} &= mE - (d + \alpha)I, \\
 \frac{dV}{dt} &= rS - (\delta + d)V, \\
 \frac{dW}{dt} &= k(I + E) - (\eta\tau + \epsilon)W,
 \end{aligned}
 \tag{2.16}$$

dengan

- $S(t)$  : Banyaknya individu *susceptible* pada waktu  $t$ ,
- $E(t)$  : Banyaknya individu *exposed* pada waktu  $t$ ,
- $I(t)$  : Banyaknya individu *infected* pada waktu  $t$ ,
- $V(t)$  : Banyaknya individu *vaccinated* pada waktu  $t$ ,
- $W(t)$  : Banyaknya populasi bakteri *Brucella* di lingkungan pada waktu  $t$ ,
- $A$  : Tingkat imigrasi domba,
- $b$  : Tingkat kelahiran domba,

- $d$  : Tingkat kematian alami domba,  
 $\delta$  : Tingkat domba kehilangan kekebalan setelah vaksinasi,  
 $r$  : Tingkat vaksinasi domba,  
 $m$  : Tingkat transmisi domba dari subpopulasi *exposed* ke *infected*,  
 $\alpha$  : Tingkat kematian karena *Brucellosis*,  
 $k$  : Tingkat penguraian dari domba yang telah mati karena *Brucellosis* pada subpopulasi *exposed* dan *infected* di lingkungan,  
 $\varepsilon$  : Tingkat kematian alami bakteri *Brucella* pada lingkungan,  
 $\beta$  : Tingkat transmisi domba dari subpopulasi *exposed* dan *infected* ke *susceptible*,  
 $\beta_1$  : Tingkat transmisi dari bakteri *Brucella* ke subpopulasi *susceptible*,  
 $\eta$  : Jumlah desinfeksi,  
 $\tau$  : Tingkat desinfeksi yang efisien.





## BAB III PEMBAHASAN

### 3.1 Titik Kesetimbangan

Berdasarkan Definisi (2.2.3), titik kesetimbangan sistem persamaan (2.16) diperoleh jika  $\frac{dS}{dt} = \frac{dE}{dt} = \frac{dI}{dt} = \frac{dV}{dt} = \frac{dW}{dt} = 0$ , yaitu

$$\frac{dS}{dt} = A + b(S + V) + \delta V - (d + r)S - \beta S(E + I) - \beta_1 SW = 0, \quad (3.1a)$$

$$\frac{dE}{dt} = \beta S(E + I) + \beta_1 SW - (d + m)E = 0, \quad (3.1b)$$

$$\frac{dI}{dt} = mE - (d + \alpha)I = 0, \quad (3.1c)$$

$$\frac{dV}{dt} = rS - (\delta + d)V = 0, \quad (3.1d)$$

$$\frac{dW}{dt} = k(I + E) - (\eta\tau + \varepsilon)W = 0. \quad (3.1e)$$

Berdasarkan persamaan (3.1a) sampai (3.1e) dapat diperoleh dua jenis titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik. Titik kesetimbangan bebas penyakit diperoleh jika nilai  $I = 0$  dan  $E = 0$ , sedangkan untuk titik kesetimbangan endemik diperoleh jika  $I \neq 0$  dan  $E \neq 0$ .

Pada persamaan (3.1e), jika disubstitusikan nilai  $I = 0$  dan  $E = 0$ , maka diperoleh nilai  $W = 0$ . Kemudian, nilai  $I, E$ , dan  $W$  disubstitusikan ke dalam persamaan (3.1a), sehingga diperoleh

$$V = \frac{(d+r-b)S-A}{(b+\delta)}. \quad (3.2)$$

Selanjutnya, persamaan (3.2) dapat disubstitusikan ke dalam persamaan (3.1d), maka diperoleh

$$S = \frac{A(\delta+d)}{(d-b)(\delta+d+r)}. \quad (3.3)$$

Persamaan (3.3) dapat disubstitusikan ke dalam persamaan (3.2), sehingga diperoleh

$$V = \frac{Ar}{(d-b)(\delta+d+r)}.$$

Berdasarkan uraian tersebut diperoleh titik  $P^0 = (S^0, E^0, I^0, V^0, W^0) = \left( \frac{A(\delta+d)}{(d-b)(\delta+d+r)}, 0, 0, \frac{Ar}{(d-b)(\delta+d+r)}, 0 \right)$  yang disebut titik kesetimbangan bebas penyakit karena tidak ada penyakit pada populasi.

Titik kesetimbangan endemik sistem persamaan (2.16) diperoleh dengan menyelesaikan persamaan (3.1a) sampai (3.1e) jika  $I \neq 0$  dan  $E \neq 0$ . Dari persamaan (3.1c) diperoleh

$$I^* = \frac{mE^*}{d+\alpha}. \quad (3.4)$$

Dari persamaan (3.1d) diperoleh

$$V^* = \frac{rS^*}{\delta+d}. \quad (3.5)$$

Kemudian, persamaan (3.4) disubstitusikan ke dalam persamaan (3.1e) dan diperoleh

$$W^* = \frac{kE^*(d+m+\alpha)}{(d+\alpha)(\eta\tau+\varepsilon)}. \quad (3.6)$$

Persamaan (3.4) dan (3.6) disubstitusikan ke dalam persamaan (3.1a), sehingga diperoleh

$$S^* = \frac{(d+m)(d+\alpha)}{(d+m+\alpha)} \left( \frac{1}{\beta} + \frac{\eta\tau+\varepsilon}{\beta_1 k} \right). \quad (3.7)$$

Kemudian, titik  $S^*$  dapat disubstitusikan ke dalam persamaan (3.6), sehingga diperoleh

$$V^* = \frac{r \frac{(d+m)(d+\alpha)}{(d+m+\alpha)} \left( \frac{1}{\beta} + \frac{\eta\tau+\varepsilon}{\beta_1 k} \right)}{\delta+d}. \quad (3.8)$$

Agar diperoleh titik  $E^*$ , persamaan (3.4), (3.6), (3.7), dan (3.8) dapat disubstitusikan ke dalam persamaan (3.1a), sehingga diperoleh

$$E^* = \frac{(d+r+\delta)(d-b)(d+\alpha)}{(d+\delta)(d+m+\alpha)} \left( \frac{1}{\beta} + \frac{\eta\tau+\varepsilon}{\beta_1 k} \right) \left( B \left( \frac{\beta_1 k}{(\eta\tau+\varepsilon)} + \beta \right) - 1 \right)$$

dengan

$$B = \frac{A(d+\delta)(d+m+\alpha)}{(d-b)(d+r+\delta)(d+\alpha)(d+m)}.$$

Berdasarkan uraian tersebut diperoleh titik  $P^* = (S^*, E^*, I^*, V^*, W^*)$  yang disebut titik kesetimbangan endemik.

### 3.2 Angka Reproduksi Dasar

Angka reproduksi dasar ditentukan dengan metode *next generation matrix*. Metode *next generation matrix* didefinisikan sebagai  $K = FV^{-1}$ . Langkah awal untuk memperoleh nilai pendekatan angka reproduksi dasar ( $R_0$ ), yaitu dengan membentuk matriks Jacobi dari  $F$  dan  $V$ . Komponen pembentuk matriks  $F$  dan  $V$  terdiri dari subpopulasi individu yang terinfeksi, yaitu subpopulasi individu terpapar dan subpopulasi individu terinfeksi.

Matriks  $F$  adalah matriks yang terbentuk dari komponen  $\mathcal{F}$ . Komponen  $\mathcal{F}$  dinotasikan sebagai  $(f_1, f_2, f_3)$ .  $\mathcal{F}$  menyatakan laju dari munculnya infeksi baru yang masuk pada masing-masing kompartemen dan bernilai positif. Matriks  $V$  adalah matriks yang terbentuk dari komponen  $\mathcal{V}$ . Komponen  $\mathcal{V}$  dinotasikan dengan  $(v_1, v_2, v_3)$ .  $\mathcal{V}$  menyatakan laju transfer masuk atau keluar dari kompartemen satu ke lainnya. Jika transfer masuk maka  $\mathcal{V}$  bernilai negatif, namun jika tranfer keluar maka  $\mathcal{V}$  bernilai positif.

Berdasarkan komponen matriks  $F$  dan  $V$  dapat dibentuk matriks Jacobi  $F$  dan  $V$  dari titik kesetimbangan bebas penyakit  $P^0 = (S^0, E^0, I^0, V^0, W^0) = (\frac{A(\delta+d)}{(d-b)(\delta+d+r)}, 0, 0, \frac{Ar}{(d-b)(\delta+d+r)}, 0)$ . Matriks Jacobi  $F$  dan  $V$  dapat diperoleh dengan penurunan terhadap masing-masing subpopulasi sebagai berikut

$$F = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{dE} & \frac{df_1}{dI} & \frac{df_1}{dW} \\ \frac{df_2}{dE} & \frac{df_2}{dI} & \frac{df_2}{dW} \\ \frac{df_3}{dE} & \frac{df_3}{dI} & \frac{df_3}{dW} \end{bmatrix} \text{ dengan } \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta S(I + E) + \beta_1 SW \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dan

$$V = \begin{bmatrix} \frac{dV_1}{dE} & \frac{dV_1}{dI} & \frac{dV_1}{dW} \\ \frac{dV_2}{dE} & \frac{dV_2}{dI} & \frac{dV_2}{dW} \\ \frac{dV_3}{dE} & \frac{dV_3}{dI} & \frac{dV_3}{dW} \end{bmatrix} \text{ dengan } \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (d+m)E \\ -mE + (d+\alpha)I \\ -k(E+I) + (\eta\tau + \varepsilon)W \end{bmatrix},$$

sehingga diperoleh matriks  $F$  dan  $V$  sebagai berikut

$$F = \begin{bmatrix} \beta S^0 & \beta S^0 & \beta_1 S^0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ dan } V = \begin{bmatrix} (d+m) & 0 & 0 \\ -m & (d+\alpha) & 0 \\ -k & -k & (\eta\tau + \varepsilon) \end{bmatrix},$$

dengan mensubstitusikan titik kesetimbangan bebas penyakit  $P^0 = (S^0, E^0, I^0, V^0, W^0) = \left( \frac{A(\delta+d)}{(d-b)(\delta+d+r)}, 0, 0, \frac{Ar}{(d-b)(\delta+d+r)}, 0 \right)$  maka diperoleh

$$F = \begin{bmatrix} \frac{\beta A(\delta+d)}{(d-b)(\delta+d+r)} & \frac{\beta A(\delta+d)}{(d-b)(\delta+d+r)} & \frac{\beta_1 A(\delta+d)}{(d-b)(\delta+d+r)} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ dan } V = \begin{bmatrix} (d+m) & 0 & 0 \\ -m & (d+\alpha) & 0 \\ -k & -k & (\eta\tau + \varepsilon) \end{bmatrix}. \tag{3.9}$$

Sebelum menentukan *next generation matrix*, terlebih dahulu ditentukan invers matriks  $V$ , yaitu

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(d+m)} & 0 & 0 \\ \frac{m}{(d+m)(d+\alpha)} & \frac{1}{(d+\alpha)} & 0 \\ \frac{k(d+m+\alpha)}{(d+m)(d+\alpha)(\eta\tau+\varepsilon)} & \frac{k}{(d+\alpha)(\eta\tau+\varepsilon)} & \frac{1}{(\eta\tau+\varepsilon)} \end{bmatrix}.$$

Berdasarkan matriks  $F$  dan  $V^{-1}$ , kemudian dibentuk *next generation matrix* ( $K = FV^{-1}$ ), yaitu

$$K = \begin{bmatrix} \frac{\beta S^0}{(d+m)} + \frac{m\beta S^0}{(d+m)(d+\alpha)} + \frac{k\beta_1(d+m+\alpha)S^0}{(d+m)(d+\alpha)(\eta\tau+\varepsilon)} & \frac{\beta S^0}{(d+\alpha)} + \frac{k\beta S^0}{(d+\alpha)(\eta\tau+\varepsilon)} & \frac{\beta_1 S^0}{(\eta\tau+\varepsilon)} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

dengan

$$S^0 = \frac{A(\delta+d)}{(d-b)(\delta+d+r)}.$$

Selanjutnya ditentukan nilai eigen dari matriks  $K$ , yaitu

$$|K - \lambda I| = 0,$$

dan diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut

$$\left( \left( \frac{\beta S^0}{(d+m)} + \frac{m\beta S^0}{(d+m)(d+\alpha)} + \frac{k\beta_1(d+m+\alpha)S^0}{(d+m)(d+\alpha)(\eta\tau+\varepsilon)} \right) - \lambda \right) \lambda^2 = 0,$$

dengan

$$S^0 = \frac{A(\delta+d)}{(d-b)(\delta+d+r)}.$$

Diperoleh akar persamaan karakteristiknya yaitu

$$\lambda_1 = \frac{A(\delta+d)(d+m+\alpha)}{(d+m)(d+\alpha)(d-b)(\delta+d+r)} \left( \beta + \frac{\beta_1}{(\eta\tau+\varepsilon)} \right) \text{ dan } \lambda_{2,3} = 0.$$

Angka reproduksi dasar  $R_0$  adalah maksimum modulus nilai eigen (*spectral radius*) dari *next generation matrix*  $K$ , yaitu

$$\begin{aligned} R_0 &= \rho(K) = \max\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}, \\ &= \max\left\{ \frac{A(\delta+d)(d+m+\alpha)}{(d+m)(d+\alpha)(d-b)(\delta+d+r)} \left( \beta + \frac{\beta_1}{(\eta\tau+\varepsilon)} \right), 0, 0 \right\}, \end{aligned}$$

dengan demikian  $R_0$  adalah

$$R_0 = \frac{A(\delta+d)(d+m+\alpha)}{(d+m)(d+\alpha)(d-b)(\delta+d+r)} \left( \beta + \frac{\beta_1}{(\eta\tau+\varepsilon)} \right).$$

### 3.3 Syarat Eksistensi Titik Kesetimbangan Endemik

Titik kesetimbangan endemik pada persamaan (2.16) dapat dinyatakan dalam  $R_0$  sebagai berikut

$$S^* = \frac{A(\delta+d)}{R_0(d-b)(\delta+d+r)},$$



$$E^* = \frac{(d+r+\delta)(d-b)(d+\alpha)}{(d+\delta)(d+m+\alpha)} \left( \frac{1}{\beta} + \frac{(\eta\tau+\varepsilon)}{\beta_1 k} \right) (R_0 - 1),$$

$$I^* = \frac{m(d+r+\delta)(d-b)}{(d+\delta)(d+m+\alpha)} \left( \frac{1}{\beta} + \frac{(\eta\tau+\varepsilon)}{\beta_1 k} \right) (R_0 - 1),$$

$$V^* = \frac{Ar}{R_0(d-b)(\delta+d+r)},$$

$$W^* = \frac{k(d+r+\delta)(d-b)}{(d+\delta)(\eta\tau+\varepsilon)} \left( \frac{1}{\beta} + \frac{(\eta\tau+\varepsilon)}{\beta_1 k} \right) (R_0 - 1).$$

Oleh karena itu, eksistensi titik kesetimbangan endemik  $P^* = (S^*, E^*, I^*, V^*, W^*)$  dapat ditentukan berdasarkan  $R_0$ . Jika  $R_0 < 1$ , maka diperoleh  $E^*, I^*, W^* < 0$ , sehingga titik kesetimbangan endemik tidak eksis. Jika  $R_0 = 1$ , maka diperoleh  $S^* = \frac{A(\delta+d)}{(d-b)(\delta+d+r)}$ ,  $V^* = \frac{Ar}{(d-b)(\delta+d+r)}$  dan  $E^* = I^* = W^* = 0$ , sehingga titik kesetimbangan endemik sama dengan titik kesetimbangan bebas penyakit. Oleh karena itu, jika  $R_0 = 1$  maka titik kesetimbangan endemik tidak eksis. Jika  $R_0 > 1$ , maka  $S^*, E^*, I^*, V^*$ , dan  $W^*$  bernilai positif, sehingga titik kesetimbangan endemik eksis.

Jadi, jika  $R_0 \leq 1$  maka hanya terdapat titik kesetimbangan bebas penyakit, sedangkan jika  $R_0 > 1$  terdapat dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik.

### 3.4 Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan

Analisis kestabilan titik kesetimbangan yang akan ditentukan yaitu analisis kestabilan lokal dan analisis kestabilan global dari masing-masing titik kesetimbangan.

#### 3.4.1 Analisis kestabilan lokal titik kesetimbangan bebas penyakit

Analisis kestabilan lokal titik kesetimbangan bebas penyakit diperoleh dengan melakukan linearisasi sistem persamaan (2.16). Berdasarkan proses linearisasi model (2.16) diperoleh matriks Jacobi untuk titik kesetimbangan bebas penyakit sebagai berikut.

$$J(P^0) = \begin{bmatrix} \beta S^0 & \beta S^0 & \beta_1 S^0 & 0 & 0 \\ m & -(d + \alpha) & 0 & 0 & 0 \\ k & k & -(\eta\tau + \varepsilon) & 0 & 0 \\ -\beta S^0 & -\beta S^0 & \beta_1 S^0 & b - (d + r) & \delta \\ 0 & 0 & 0 & r & b - (d + \delta) \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

Pada analisis kestabilan lokal titik kesetimbangan bebas penyakit digunakan metode matriks partisi. Jadi, dari matriks Jacobi  $J(P^0)$  akan dipartisi menjadi matriks  $M$ ,  $J_3$ ,  $J_4$ , dan matriks  $N$ . Didefinisikan sebuah matriks  $M = F - V$ , dengan nilai matriks  $F$  dan  $V$  sesuai matriks (3.9) dan matriks  $J_3 = -F$ , sehingga diperoleh matriks partisi dari matriks Jacobi  $J(P^0)$  sebagai berikut

$$J(P^0) = \begin{bmatrix} M & N \\ J_3 & J_4 \end{bmatrix},$$

dengan

$$M = \begin{bmatrix} \beta S^0 - (d + m) & \beta S^0 & \beta_1 S^0 \\ m & -(d + \alpha) & 0 \\ k & k & -(\eta\tau + \varepsilon) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\beta A(\delta + d)}{(d-b)(\delta + d + r)} - (d + m) & \frac{\beta A(\delta + d)}{(d-b)(\delta + d + r)} & \frac{\beta_1 A(\delta + d)}{(d-b)(\delta + d + r)} \\ m & -(d + \alpha) & 0 \\ k & k & -(\eta\tau + \varepsilon) \end{bmatrix},$$

$$J_3 = \begin{bmatrix} \frac{-\beta A(\delta + d)}{(d-b)(\delta + d + r)} & \frac{-\beta A(\delta + d)}{(d-b)(\delta + d + r)} & \frac{-\beta_1 A(\delta + d)}{(d-b)(\delta + d + r)} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$J_4 = \begin{bmatrix} b - (d + r) & \delta \\ r & b - (d + \delta) \end{bmatrix}, \text{ dan } N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Kemudian, nilai eigen dari matriks Jacobi  $J(P^0)$  dapat ditentukan dengan menggunakan matriks partisi, yaitu

$$\det(J(P^0) - \lambda I) = \det(M - \lambda I) = \det(J_4 - \lambda I), \quad (3.11)$$

sehingga kestabilan lokal bebas penyakit dari matriks Jacobi  $J(P^0)$  dapat dilihat dengan cara menentukan tanda nilai eigen dari matriks  $M$  dan matriks  $J_4$ , yaitu

$$|M - \lambda I| = \begin{vmatrix} \left[ \frac{\beta A(\delta+d)}{(d-b)(\delta+d+r)} - (d+m) \right] & \frac{\beta A(\delta+d)}{(d-b)(\delta+d+r)} & \frac{\beta_1 A(\delta+d)}{(d-b)(\delta+d+r)} \\ m & -(d+\alpha) & 0 \\ k & k & -(\eta\tau + \varepsilon) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$= \begin{vmatrix} \left[ \frac{\beta A(\delta+d)}{(d-b)(\delta+d+r)} - (d+m) - \lambda \right] & \frac{\beta A(\delta+d)}{(d-b)(\delta+d+r)} & \frac{\beta_1 A(\delta+d)}{(d-b)(\delta+d+r)} \\ m & -(d+\alpha) - \lambda & 0 \\ k & k & -(\eta\tau + \varepsilon) - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

dan diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut

$$\lambda^3 + A_1\lambda^2 + A_2\lambda + A_3 = 0,$$

dengan

$$A_1 = \left( (d+m) + (d+\alpha) + (\eta\tau + \varepsilon) - \frac{\beta A(\delta+d)}{(d-b)(\delta+d+r)} \right),$$

$$A_2 = \left( (d+\alpha)(\eta\tau + \varepsilon) + (d+m)(\eta\tau + \varepsilon) + (d+m)(d+\alpha) - \frac{m\beta A(\delta+d)}{(d-b)(\delta+d+r)} - \frac{k\beta_1 A(\delta+d)}{(d-b)(\delta+d+r)} - \frac{\beta A(\delta+d)(\eta\tau + \varepsilon)}{(d-b)(\delta+d+r)} - \frac{\beta A(\delta+d)(d+\alpha)}{(d-b)(\delta+d+r)} \right),$$

$$A_3 = \left( (d+m)(d+\alpha)(\eta\tau + \varepsilon) - \frac{\beta A(\delta+d)(d+\alpha)(\eta\tau + \varepsilon)}{(d-b)(\delta+d+r)} - \frac{m\beta A(\delta+d)(\eta\tau + \varepsilon)}{(d-b)(\delta+d+r)} - \frac{k\beta_1 A(\delta+d)(d+\alpha)}{(d-b)(\delta+d+r)} - \frac{m\beta_1 A(\delta+d)}{(d-b)(\delta+d+r)} \right).$$

Oleh karena persamaan karakteristik yang diperoleh cukup rumit, maka untuk menentukan tanda nilai eigennya digunakan kriteria *Routh-Hurwitz*, seperti sebagai berikut

1.  $A_1 > 0$ ,
2.  $A_3 > 0$
3.  $A_1A_2 - A_3 > 0$ ,

Untuk perhitungan  $A_1 > 0$ ,  $A_3 > 0$ , dan  $A_1A_2 - A_3 > 0$  ditunjukkan pada Lampiran 1. Jika  $R_0 < 1$  maka kondisi (1), (2), dan (3) terpenuhi, sehingga jelas  $\det(M - \lambda I) < 0$ .

Selanjutnya ditentukan nilai eigen dari matriks  $J_4$  sebagai berikut

$$|J_4 - \lambda I| = \left| \begin{bmatrix} b - (d+r) & \delta \\ r & b - (d+\delta) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$= \left| \begin{bmatrix} b - (d+r) - \lambda & \delta \\ r & b - (d+\delta) - \lambda \end{bmatrix} \right| = 0,$$

sehingga diperoleh persamaan karakteristik berikut

$$\lambda^2 + [(d+r) - b + (d+\delta) - b]\lambda + [b(b - (d+\delta) - (d+r)) + (d+r)(d+\delta) - \delta r] = 0,$$

dan diperoleh

$$\lambda_1 = b - d \text{ dan } \lambda_2 = b - d - r - \delta,$$

Berdasarkan definisi matriks partisi (3.11), maka jelas  $\det(J(P^0) - \lambda I) < 0$ . Oleh karena  $\det(J(P^0) - \lambda I) < 0$  maka titik kesetimbangan bebas penyakit  $P^0$  stabil asimtotik.

### 3.4.2 Analisis Kestabilan Global

Analisis kestabilan global titik kesetimbangan ditentukan dengan menggunakan fungsi Lyapunov.

#### 3.4.2.1 Analisis kestabilan global titik kesetimbangan bebas penyakit

Didefinisikan fungsi Lyapunov

$$\mathcal{L}_1 = S - S^0 - S^0 \ln \frac{S}{S^0} + V - V^0 - V^0 \ln \frac{V}{V^0} + E + M_1 I + N_1 W,$$

dengan

$$M_1 = \frac{S^0}{(d+\alpha)} \left( \beta + \frac{\beta_1 k}{(\eta\tau - \epsilon)} \right) \text{ dan } N_1 = \frac{\beta_1 S^0}{(\eta\tau - \epsilon)}.$$

Selanjutnya, untuk memeriksa apakah fungsi tersebut merupakan fungsi Lyapunov kuat atau lemah untuk  $P^0$ , perlu diperiksa apakah fungsi  $\mathcal{L}_1$  tersebut memenuhi kondisi 1 pada Definisi 2.3.1. Jelas bahwa  $\mathcal{L}_1(P^0) = \mathcal{L}_1(S^0, E^0, I^0, V^0, W^0) = 0$  dan  $\mathcal{L}_1(S, E, I, V, W) > 0, \forall (S, E, I, V, W) \neq (S^0, E^0, I^0, V^0, W^0)$ . Oleh karena itu,  $\mathcal{L}_1$  memenuhi kondisi 1 pada Definisi 2.3.1.

Selanjutnya akan diperiksa apakah  $\mathcal{L}_1$  memenuhi Definisi 2.3.2, yaitu  $\mathcal{L}'_1(S, E, I, V, W) < 0, \forall (S, E, I, V, W) \neq (S^0, E^0, I^0, V^0, W^0)$ . Dari fungsi Lyapunov  $\mathcal{L}_1$ , diperoleh turunannya sebagai berikut

$$\mathcal{L}'_1 = \left(1 - \frac{S^0}{S}\right) S' + \left(1 - \frac{V^0}{V}\right) V' + E' + \frac{S^0}{(d+\alpha)} \left( \beta + \frac{\beta_1 k}{(\eta\tau - \epsilon)} \right) I' - \frac{\beta_1 S^0}{(\eta\tau - \epsilon)} W'. \quad (3.12)$$

Kemudian, substitusikan sistem persamaan (2.16) kedalam persamaan (3.12), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_1 = & \left(1 - \frac{S^0}{S}\right) (A + b(S + V) + \delta V - (d + r)S - \beta S(E + I) - \beta_1 SW) \\ & + \left(1 - \frac{V^0}{V}\right) ((rS - (\delta + d)V) + (\beta S(E + I) + \beta_1 SW - (d + m)E) \\ & + \frac{S^0}{(d + \alpha)} \left(\beta + \frac{\beta_1 k}{(\eta\tau - \varepsilon)}\right) (mE - (d + \alpha)I) \\ & + \frac{\beta_1 S^0}{(\eta\tau - \varepsilon)} (k(E + I) - (\eta\tau - \varepsilon)W) = B + C, \end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned} B = & (d - b)V^0 \left(2 - \frac{S^0}{S} - \frac{S}{S^0}\right) + (b + \delta)V^0 \left(2 - \frac{S^0 V}{S V^0} - \frac{S V^0}{S^0 V}\right) \\ & + (d - b)V^0 \left(3 - \frac{S^0}{S} - \frac{V}{V^0} - \frac{S V^0}{S^0 V}\right) \leq 0. \end{aligned}$$

dan

$$C = (d + m)(R_0 - 1)E.$$

Berdasarkan perhitungan  $\mathcal{L}'_1$  yang diberikan pada Lampiran 2 diperoleh

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_1 = & (d - b)V^0 \left(2 - \frac{S^0}{S} - \frac{S}{S^0}\right) + (b + \delta)V^0 \left(2 - \frac{S^0 V}{S V^0} - \frac{S V^0}{S^0 V}\right) \\ & + (d - b)V^0 \left(3 - \frac{S^0}{S} - \frac{V}{V^0} - \frac{S V^0}{S^0 V}\right) + (d + m)(R_0 - 1)E. \end{aligned}$$

$\mathcal{L}'_1 = 0$  terpenuhi jika dan hanya jika  $S = S^0$ ,  $E = E^0$ ,  $I = I^0$ ,  $V = V^0$ ,  $W = W^0$  dan  $R_0 = 1$ , sedangkan  $\mathcal{L}'_1 < 0$  terpenuhi jika dan hanya jika  $S \neq S^0$ ,  $E \neq E^0$ ,  $I \neq I^0$ ,  $V \neq V^0$ ,  $W \neq W^0$  dan  $R_0 < 1$ . Titik kesetimbangan bebas penyakit stabil asimtotik global ketika  $\mathcal{L}'_1 < 0$  dan bukan di titik kesetimbangan bebas penyakitnya. Jadi, jelas bahwa  $\mathcal{L}_1$  memenuhi Definisi 2.3.2, yaitu  $\mathcal{L}'_1(S, E, I, V, W) < 0$ ,  $\forall (S, E, I, V, W) \neq (S^0, E^0, I^0, V^0, W^0)$  sesuai dengan pembuktian pada Lampiran 2.

#### 2.4.2.2 Analisis kestabilan global titik kesetimbangan endemik

Sebelum dilakukan analisis kestabilan global titik kesetimbangan endemik, sistem persamaan (2.16) ditransformasikan menjadi sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} = & S \left( \frac{A}{S^*} \left( \frac{S^*}{S} - 1 \right) + \frac{(b + \delta)V^*}{S^*} \left( \frac{S^* V}{S V^*} - 1 \right) - \beta_1 W^* \left( \frac{W}{W^*} - 1 \right) - \right. \\ & \left. \beta \left( E^* \left( \frac{E}{E^*} - 1 \right) + I^* \left( \frac{I}{I^*} - 1 \right) \right) \right), \end{aligned}$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{ES^*}{E^*} \left( \beta E^* \left( \frac{S}{S^*} - 1 \right) + \beta I^* \left( \frac{S I E^*}{S^* I^* E} - 1 \right) + \beta_1 W^* \left( \frac{S W E^*}{S^* W^* E} - 1 \right) \right),$$

$$\begin{aligned}\frac{dI}{dt} &= \frac{mE^*I}{I^*} \left( \frac{EI^*}{E^*I} - 1 \right), \\ \frac{dV}{dt} &= \frac{rS^*V}{V^*} \left( \frac{SV^*}{S^*V} - 1 \right), \\ \frac{dW}{dt} &= \frac{kW}{W^*} \left( E^* \left( \frac{EW^*}{E^*W} - 1 \right) + I^* \left( \frac{IW^*}{I^*W} - 1 \right) \right).\end{aligned}\quad (3.13)$$

Didefinisikan fungsi Lyapunov

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_2 &= S - S^* - S^* \ln \frac{S}{S^*} + V - V^* - V^* \ln \frac{V}{V^*} + E - E^* - E^* \ln \frac{E}{E^*} \\ &\quad + M_2 \left( I - I^* - I^* \ln \frac{I}{I^*} \right) + N_2 \left( W - W^* - W^* \ln \frac{W}{W^*} \right).\end{aligned}$$

dengan

$$M_2 = \frac{S^* I^* (\beta(E^* + I^*) + \beta_1 W^*)}{mE^*(E^* + I^*)} \text{ dan } N_2 = \frac{\beta_1 S^* W^*}{k(E^* + I^*)}.$$

Selanjutnya, untuk memeriksa apakah fungsi tersebut merupakan fungsi Lyapunov kuat atau lemah untuk  $P^*$ , perlu diperiksa apakah fungsi  $\mathcal{L}_2$  tersebut memenuhi kondisi 1 pada Definisi 2.3.1, yaitu  $\mathcal{L}(\vec{x}^*) = 0$  dan  $\mathcal{L}(\vec{x}) > 0, \forall \vec{x} \neq \vec{x}^* \in \mathcal{W}$ .

- Pembuktian  $\mathcal{L}_2(P^*) = 0$   

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_2(P^*) &= \mathcal{L}(S^*, E^*, I^*, V^*, W^*) \\ &= S^* - S^* - S^* \ln \frac{S^*}{S^*} + f(S) + E^* - E^* - E^* \ln \frac{E^*}{E^*} \\ &\quad + \frac{S^* I^* (\beta(E^* + I^*) + \beta_1 W^*)}{mE^*(E^* + I^*)} \left( I^* - I^* - I^* \ln \frac{I^*}{I^*} \right) \\ &\quad + \frac{\beta_1 S^* W^*}{k(E^* + I^*)} \left( W^* - W^* - W^* \ln \frac{W^*}{W^*} \right) = 0.\end{aligned}$$

- Pembuktian  $\mathcal{L}_2(S, E, I, V, W) > 0$

Misal  $f(S) = S - S^* - S^* \ln \frac{S}{S^*}$  dan  $S$  terdefinisi pada domain  $S \in \mathbb{R}^+$ . Turunan pertama  $f(S)$  terhadap  $S$ , yaitu

$$f'(S) = 1 - \frac{S^*}{S}, \text{ dengan } S \in (0, \infty).$$

Titik stationer  $f(S)$  diperoleh ketika  $f'(S) = 0$ . Nilai  $x$  yang memenuhi  $f'(S) = 0$  adalah ketika  $S = S^*$ , sehingga  $f'(S^*) = 0$ . Jika  $S \in (0, S^*)$  maka berlaku  $f'(S) < 0$ . Dilain pihak, jika  $S \in (S^*, \infty)$  maka berlaku  $f'(S) > 0$ . Oleh karena itu,  $f(S)$  monoton turun pada selang  $(0, S^*)$  dan monoton naik pada selang  $(S^*, \infty)$ .

Berdasarkan uraian tersebut, jelas bahwa  $(S^*, 0)$  merupakan titik minimum  $f(S)$ . Oleh karena 0 merupakan nilai minimum  $f(S)$  maka pasti berlaku  $f(S) > 0$  untuk  $S \neq S^* \in \mathcal{W}$ . Hal ini juga berlaku untuk membuktikan  $f(E) = E - E^* - E^* \ln \frac{E}{E^*}$ ,  $f(V) = V -$

$V^* - V^* \ln \frac{V}{V^*}$ ,  $f(I) = \frac{S^* I^* (\beta(E^* + I^*) + \beta_1 W^*)}{mE^*(E^* + I^*)} \left( I - I^* - I^* \ln \frac{I}{I^*} \right)$ , dan  $f(W) = \frac{\beta_1 S^* W^*}{k(E^* + I^*)} \left( W - W^* - W^* \ln \frac{W}{W^*} \right)$ . Jadi terbukti bahwa  $\mathcal{L}_2(S, E, I, V, W) > 0$ .

Berikutnya akan diperiksa apakah  $\mathcal{L}_2$  memenuhi Definisi 2.3.2, yaitu  $\mathcal{L}'_2(S, E, I, V, W) < 0$ ,  $\forall (S, E, I, V, W) \neq (S^*, E^*, I^*, V^*, W^*)$ . Dari fungsi Lyapunov  $\mathcal{L}_2$ , diperoleh turunannya sebagai berikut

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_2 &= \left(1 - \frac{S^*}{S}\right) S' + \left(1 - \frac{V^*}{V}\right) V' + \left(1 - \frac{E^*}{E}\right) E' + M_2 \left(1 - \frac{I^*}{I}\right) I' \\ &\quad + N_2 \left(1 - \frac{W^*}{W}\right) W', \\ &= \left(\frac{S-S^*}{S}\right) S' + \left(\frac{V-V^*}{V}\right) V' + \left(\frac{E-E^*}{E}\right) E' \\ &\quad + \frac{S^* I^* (\beta(E^* + I^*) + \beta_1 W^*)}{mE^*(E^* + I^*)} \left(\frac{I-I^*}{I}\right) I' + \frac{\beta_1 S^* W^*}{k(E^* + I^*)} \left(\frac{W-W^*}{W}\right) W'. \end{aligned}$$

Kemudian, persamaan pada sistem (3.13) disubstitusikan ke dalam persamaan  $\mathcal{L}'_2$ , sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_2 &= (S - S^*) \left[ \frac{A}{S^*} \left( \frac{S^*}{S} - 1 \right) + \frac{(b+\delta)V^*}{S^*} \left( \frac{S^*V}{SV^*} - 1 \right) - \beta_1 W^* \left( \frac{W}{W^*} - 1 \right) - \right. \\ &\quad \left. \beta \left( E^* \left( \frac{E}{E^*} - 1 \right) + I^* \left( \frac{I}{I^*} - 1 \right) \right) + (V - V^*) \left[ \frac{rS^*}{V^*} \left( \frac{SV^*}{S^*V} - 1 \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + (E - E^*) \left[ \frac{S^*}{E^*} \left( \beta E^* \left( \frac{S}{S^*} - 1 \right) + \beta I^* \left( \frac{SIE^*}{S^* I^* E} - 1 \right) + \beta_1 W^* \left( \frac{SWE^*}{S^* W^* E} - 1 \right) \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{S^* I^* (\beta(E^* + I^*) + \beta_1 W^*)}{mE^*(E^* + I^*)} (I - I^*) \left[ \frac{mE^*}{I^*} \left( \frac{EI^*}{E^* I} - 1 \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{\beta_1 S^* W^*}{k(E^* + I^*)} (W - W^*) \left[ \frac{k}{W^*} \left( E^* \left( \frac{EW^*}{E^* W} - 1 \right) + I^* \left( \frac{IW^*}{I^* W} - 1 \right) \right) \right] \right] \\ &= B' + C', \end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned} B' &= (b + \delta)V^* \left( 2 - \frac{S^*V}{SV^*} - \frac{SV^*}{S^*V} \right) + (d - b)V^* \left( 3 - \frac{S^*}{S} - \frac{V}{V^*} - \frac{SV^*}{S^*V} \right) \\ &\quad + ((d - b)S^* + \beta S^*(E^* + I^*) + \beta_1 S^* W^*) \left( 2 - \frac{S^*}{S} - \frac{S}{S^*} \right), \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} C' &= \beta S^* I^* \left( 3 + \frac{S^*}{S} - \frac{I^* E}{IE^*} - \frac{SIE^*}{S^* I^* E} \right) + \frac{\beta_1 S^* E^* W^*}{(E^* + I^*)} \left( 3 - \frac{S^*}{S} - \frac{EW^*}{E^* W} - \frac{SWE^*}{S^* W^* E} \right) \\ &\quad + \frac{\beta_1 S^* I^* W^*}{(E^* + I^*)} \left( 4 + \frac{S^*}{S} - \frac{I^* E}{IE^*} - \frac{IW^*}{I^* W} - \frac{SWE^*}{S^* W^* E} \right) \\ &\quad - (\beta S^* I^* + \beta_1 S^* W^*) \left( 2 - \frac{S^*}{S} - \frac{S}{S^*} \right). \end{aligned}$$

Berdasarkan perhitungan  $\mathcal{L}'_2$  yang diberikan pada Lampiran 3 diperoleh

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_2 = & (b + \delta)V^* \left( 2 - \frac{S^*V}{SV^*} - \frac{SV^*}{S^*V} \right) + \frac{\beta_1 S^* I^* W^*}{(E^* + I^*)} \\ & \left( 4 - \frac{S^*}{S} - \frac{I^*E}{IE^*} - \frac{IW^*}{I^*W} - \frac{SWE^*}{S^*W^*E} \right) + \beta S^* I^* \left( 3 - \frac{S^*}{S} - \frac{I^*E}{IE^*} - \frac{SIE^*}{S^*I^*E} \right) \\ & + \frac{\beta_1 S^* E^* W^*}{(E^* + I^*)} \left( 3 - \frac{S^*}{S} - \frac{EW^*}{E^*W} - \frac{SWE^*}{S^*W^*E} \right) + (\beta S^* E^* + (d - b)S^*) \\ & \left( 2 - \frac{S^*}{S} - \frac{S}{S^*} \right) + (d - b)V^* \left( 3 - \frac{S^*}{S} - \frac{V}{V^*} - \frac{SV^*}{S^*V} \right). \end{aligned}$$

$\mathcal{L}'_2 = 0$  terpenuhi jika dan hanya jika  $S = S^*, E = E^*, I = I^*, V = V^*$ , dan  $W = W^*$ , sedangkan  $\mathcal{L}'_2 < 0$  terpenuhi jika dan hanya jika  $S \neq S^*, E \neq E^*, I \neq I^*, V \neq V^*$ , dan  $W \neq W^*$ . Titik kesetimbangan endemik stabil asimtotik global ketika  $\mathcal{L}'_2 < 0$  dan bukan di titik kesetimbangan endemiknya. Jadi, jelas bahwa  $\mathcal{L}_2$  memenuhi Definisi 2.3.2, yaitu  $\mathcal{L}'_2(S, E, I, V, W) < 0, \forall (S, E, I, V, W) \neq (S^*, E^*, I^*, V^*, W^*)$  sesuai dengan pembuktian pada Lampiran 3. Hasil analisis kestabilan titik kesetimbangan sistem persamaan (2.16) dirangkum pada Tabel 3.1.

**Tabel 3.1 Syarat eksistensi dan kestabilan titik kesetimbangan sistem (2.16)**

Titik Kesetimbangan	Syarat Eksistensi	Kestabilan	Syarat Kestabilan
$P^0$	Tidak ada	Stabil asimtotik lokal	$R_0 < 1$
		Stabil asimtotik global	$R_0 \leq 1$
$P^*$	$R_0 > 1$	Stabil asimtotik lokal	
		Stabil asimtotik global	$B' + C' < 0$

### 2.5 Simulasi Numerik

Pada subbab ini disajikan solusi numerik model transmisi penyakit *Brucellosis* antar domba dengan adanya imigrasi dimana disajikan adanya peningkatan atau penurunan jumlah individu setiap subpopulasi persatuan waktunya. Metode Runge Kutta orde empat digunakan untuk menyimulasikan hasil analisis.



### 2.5.2 Simulasi numerik untuk titik kesetimbangan bebas penyakit

Simulasi numerik untuk titik kesetimbangan bebas penyakit menggunakan 3 nilai awal, yaitu

1.  $(S^0, E^0, I^0, V^0, W^0) = (550, 100, 15, 130, 350)$ ,
2.  $(S^0, E^0, I^0, V^0, W^0) = (650, 150, 25, 400, 300)$ ,
3.  $(S^0, E^0, I^0, V^0, W^0) = (750, 75, 20, 250, 150)$ ,

serta digunakan nilai parameter-parameter yang diambil dari Gui Quan Sun dan Zi Ke Zhang (2014), yaitu  $A = 150$ ,  $b = 0.45$ ,  $d = 0.6$ ,  $r = 1$ ,  $\beta = 0.0007$ ,  $\beta_1 = 0.00048$ ,  $\delta = 0.4$ ,  $m = 1$ ,  $\alpha = 1$ ,  $k = 12$ ,  $\eta = 4$ ,  $\tau = 0.6$ , dan  $\varepsilon = 6$ . Untuk menganalisis kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit, dapat dilakukan dengan cara mensubstitusikan nilai parameter-parameter pada persamaan (3.10) sehingga didapatkan nilai eigen dan sifat kestabilannya, seperti yang ditunjukkan pada Tabel 3.2.

**Tabel 3.2 Sifat kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit**

Titik kesetimbangan	Nilai Eigen	Sifat kestabilan
$P^0 = (S^0, E^0, I^0, V^0, W^0)$ $= \left( \frac{(\delta + d)A}{(d - b)(\delta + d + r)}, 0, \right.$ $\left. 0, \frac{Ar}{(d - b)((\delta + d + r))}, 0 \right)$	$\lambda_1 = -0.2947$ $\lambda_2 = -2.2052$ $\lambda_3 = -0.1165$ $\lambda_4 = -2.2318$ $\lambda_5 = -8.4516$	Stabil Asimtotik

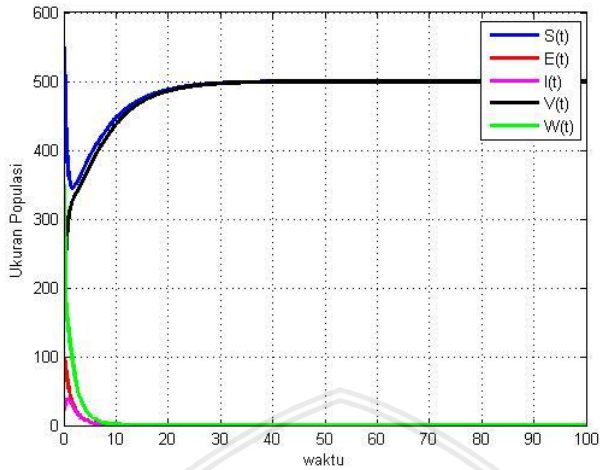
Berdasarkan parameter yang digunakan diperoleh angka reproduksi dasar untuk titik kesetimbangan bebas penyakit, yaitu

$$R_0 = \frac{A(\delta+d)(d+m+\alpha)}{(d+m)(d+\alpha)(d-b)(\delta+d+r)} \left( \beta + \frac{\beta_1}{(\eta\tau+\varepsilon)} \right) = 0.5413,$$

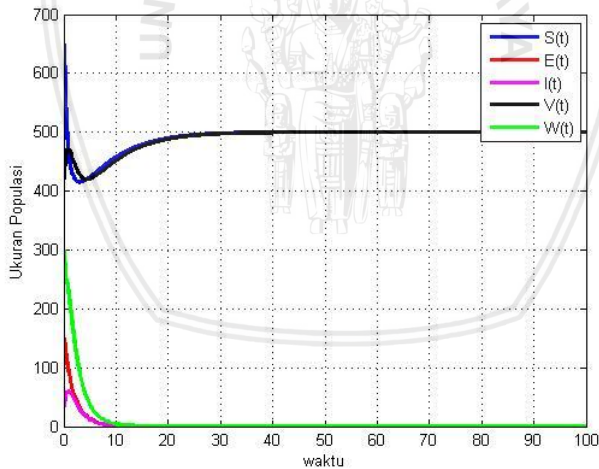
serta diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit, yaitu

$$P^0 = (S^0, E^0, I^0, V^0, W^0) = (500, 0, 0, 500, 0).$$

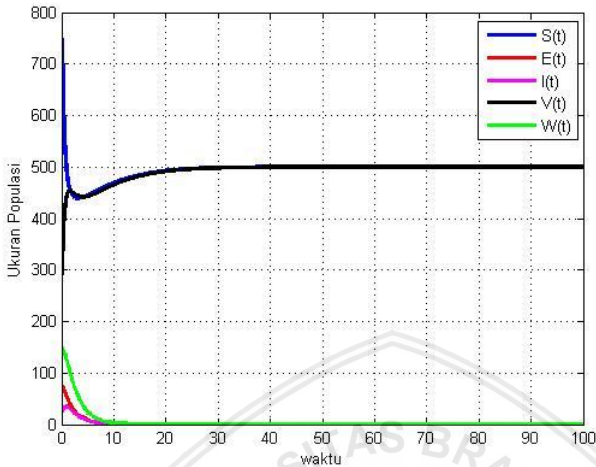
Hasil simulasi dengan menggunakan parameter-parameter di atas untuk masing-masing nilai awal terhadap satuan waktu dapat dilihat pada Gambar 3.1-Gambar 3.3.



**Gambar 3.1** Grafik jumlah populasi untuk  $R_0 < 1$  dengan nilai awal  $(S^0, E^0, I^0, V^0, W^0) = (550, 100, 15, 130, 350)$ .

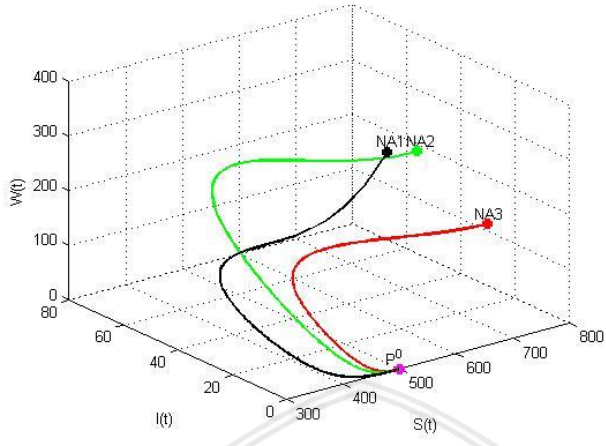


**Gambar 3.2** Grafik jumlah populasi untuk  $R_0 < 1$  dengan nilai awal  $(S^0, E^0, I^0, V^0, W^0) = (650, 150, 25, 400, 300)$ .

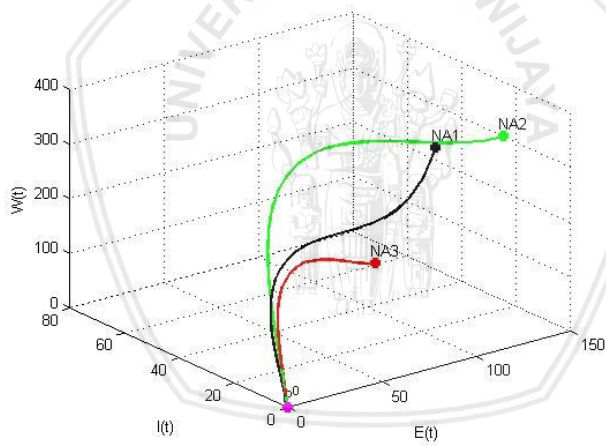


**Gambar 3.3** Grafik jumlah populasi untuk  $R_0 < 1$  dengan nilai awal  $(S^0, E^0, I^0, V^0, W^0) = (750, 75, 20, 250, 150)$ .

Berdasarkan Gambar 3.1-Gambar 3.3 dapat diketahui bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit (*disease-free equilibrium*) bersifat stabil asimtotik untuk ketiga nilai awal yang digunakan. Oleh karena titik kesetimbangan bebas penyakit untuk populasi *exposed*, *infected*, dan populasi bakteri *Brucella* masing-masing sama dengan nol, sehingga tidak ada satupun domba yang dapat menularkan penyakit *Brucellosis*, tidak ada satupun domba yang mengalami sakit *Brucellosis*, serta tidak ada satupun bakteri *Brucella* yang bertransmisi ke lingkungan.



(b) Potret fase pada ruang SIW.



(a) Potret fase pada ruang EIW.

**Gambar 3.4** Grafik potret fase untuk  $R_0 < 1$ .

Pada Gambar 3.4 ditunjukkan potret fase untuk  $R_0 < 1$  pada ruang SIW dan EIW dengan tiga nilai awal yang berbeda seperti yang telah disebutkan sebelumnya. Hasil simulasi ini menunjukkan bahwa dengan beberapa nilai awal yang diberikan, orbit-orbit pada ruang SIW dan EIW menuju titik kesetimbangan bebas penyakit yaitu  $P^0$ . Artinya, ketika  $R_0 < 1$  titik kesetimbangan  $P^0$  bersifat stabil asimtotik global. Hal ini menunjukkan bahwa hasil simulasi numerik yang dilakukan sesuai dengan hasil analisis.

### 2.5.3 Simulasi numerik untuk titik kesetimbangan endemik

Simulasi numerik untuk titik kesetimbangan endemik menggunakan 3 nilai awal yang sama dengan titik kesetimbangan bebas penyakit, yaitu

1.  $(S^*, E^*, I^*, V^*, W^*) = (550, 100, 15, 130, 350)$ ,
2.  $(S^*, E^*, I^*, V^*, W^*) = (650, 150, 25, 400, 300)$ ,
3.  $(S^*, E^*, I^*, V^*, W^*) = (750, 75, 20, 250, 150)$ ,

serta digunakan nilai parameter-parameter yang diambil dari Gui Quan Sun dan Zi Ke Zhang (2014), yaitu  $A = 150$ ,  $b = 0.45$ ,  $d = 0.6$ ,  $r = 0.5$ ,  $\beta = 0.0007$ ,  $\beta_1 = 0.00048$ ,  $\delta = 0.4$ ,  $m = 1$ ,  $\alpha = 0.4$ ,  $k = 12$ ,  $\eta = 4$ ,  $\tau = 0.6$ , dan  $\varepsilon = 6$ . Untuk menganalisis kestabilan titik kesetimbangan endemik, dapat dilakukan dengan cara mensubstitusikan nilai parameter-parameter pada persamaan (3.10) sehingga didapatkan nilai eigen dan sifat kestabilannya, seperti yang ditunjukkan pada Tabel 3.3.

**Tabel 3.3 Sifat kestabilan titik kesetimbangan endemik**

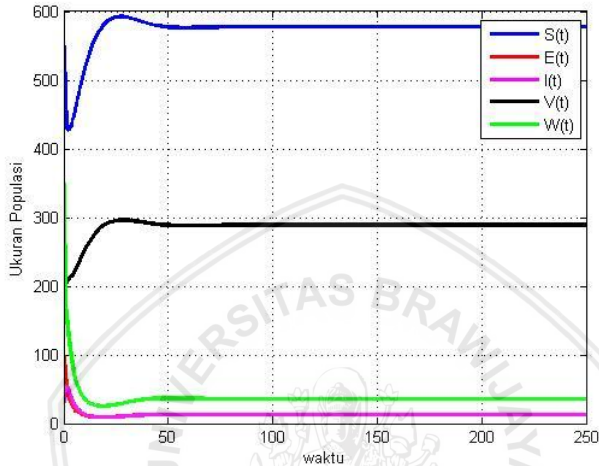
Titik kesetimbangan	Nilai Eigen	Sifat kestabilan
$P^* = (S^*, E^*, I^*, V^*, W^*)$	$\lambda_1 = -0.0251$ $\lambda_2 = -0.3457$ $\lambda_3 = -1.6716$ $\lambda_4 = -1.8273$ $\lambda_5 = -8.3562$	Stabil Asimtotik

Berdasarkan parameter yang digunakan diperoleh angka reproduksi dasar untuk titik kesetimbangan bebas penyakit, yaitu

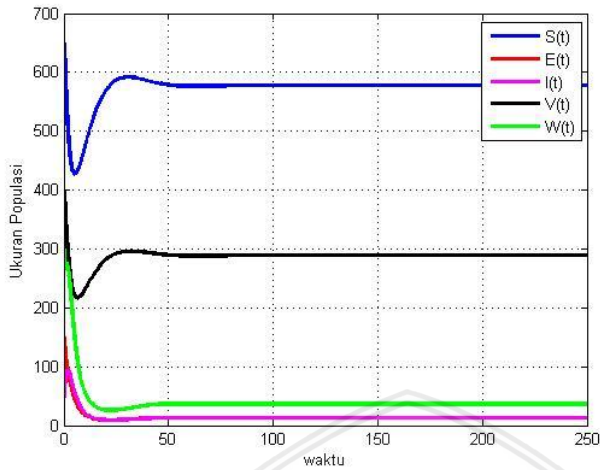
$$R_0 = \frac{A(\delta+d)(d+m+\alpha)}{(d+m)(d+\alpha)(d-b)(\delta+d+r)} \left( \beta + \frac{\beta_1}{(\eta\tau+\varepsilon)} \right) = 1.1547 ,$$

serta diperoleh titik kesetimbangan endemiknya, yaitu  $P^* = (S^*, E^*, I^*, V^*, W^*) = (577.3195876, 12.564433, 12.564433, 288.6597938, 35.89838003)$ .

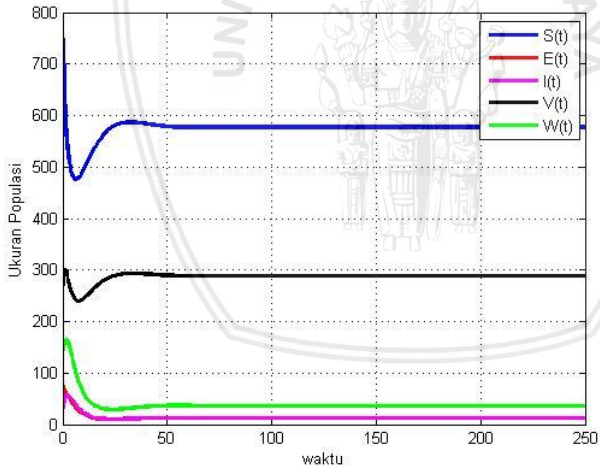
Hasil simulasi dengan menggunakan parameter-parameter yang ada untuk masing-masing nilai awal dapat dilihat pada Gambar 3.5-Gambar 3.7.



**Gambar 3.5** Grafik jumlah populasi untuk  $R_0 > 1$  dengan nilai awal  $(S^*, E^*, I^*, V^*, W^*) = (550, 100, 15, 130, 350)$ .

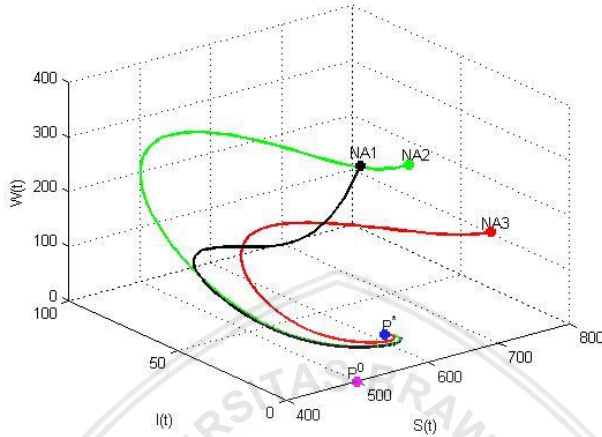


**Gambar 3.6** Grafik jumlah populasi untuk  $R_0 > 1$  dengan nilai awal  $(S^*, E^*, I^*, V^*, W^*) = (650, 150, 25, 400, 300)$ .

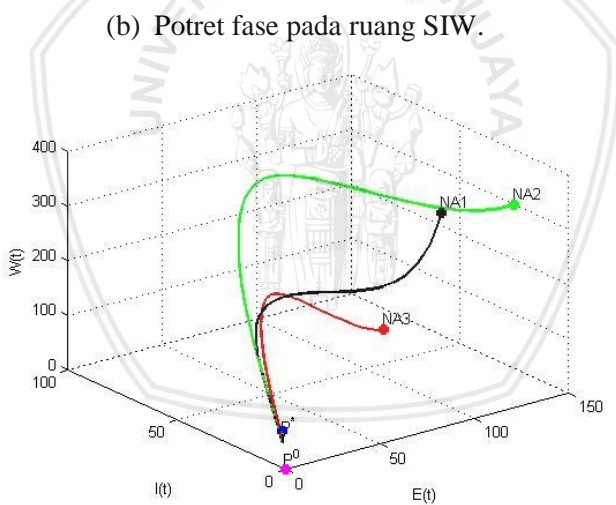


**Gambar 3.7** Grafik jumlah populasi untuk  $R_0 > 1$  dengan nilai awal  $(S^*, E^*, I^*, V^*, W^*) = (750, 75, 20, 250, 150)$ .

Berdasarkan Gambar 3.5-Gambar 3.7 dapat diketahui bahwa titik kesetimbangan endemik (*endemic equilibrium*) bersifat stabil asimtotik untuk ketiga nilai awal yang digunakan.



(b) Potret fase pada ruang SIW.



(a) Potret fase pada ruang EIW.

**Gambar 3.8** Grafik potret fase untuk  $R_0 > 1$ .



Pada Gambar 3.8 ditunjukkan grafik potret fase untuk  $R_0 > 1$  pada ruang SIW dan EIW dengan tiga nilai awal yang berbeda seperti yang telah disebutkan sebelumnya. Hasil simulasi ini menunjukkan bahwa dengan beberapa nilai awal yang diberikan, orbit-orbit pada ruang SIW dan EIW menuju titik kesetimbangan endemik yaitu  $P^*$ . Artinya, jika  $R_0 > 1$  maka titik kesetimbangan  $P^*$  bersifat stabil asimtotik global, sehingga dapat diartikan penyakit *Brucellosis* bersifat endemik. Dalam hal ini setiap penderita dapat menularkan penyakit kepada lebih dari satu penderita baru sehingga pada akhirnya terjadi penyebaran penyakit yang meluas.



## BAB IV PENUTUP

### 1.1 Kesimpulan

Dari hasil pembahasan skripsi ini diperoleh kesimpulan sebagai berikut

1. Pada model transmisi penyakit *Brucellosis* pada domba dengan adanya imigrasi diperoleh dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit (*disease-free equilibrium*) dan titik kesetimbangan endemik (*endemic equilibrium*).
2. Analisis kestabilan lokal dari titik kesetimbangan ditentukan berdasarkan angka reproduksi dasar ( $R_0$ ). Titik kesetimbangan bebas penyakit pada model penyakit *Brucellosis* dengan imigrasi adalah stabil asimtotik ketika  $R_0 < 1$ . Titik kesetimbangan endemik stabil asimtotik ketika  $R_0 > 1$ . Analisis kestabilan global ditentukan dengan menggunakan fungsi Lyapunov dan diperoleh bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik bersifat stabil asimtotik.
3. Hasil simulasi numerik mendukung hasil yang diperoleh secara analitik.

### 1.2 Saran

Dalam skripsi ini hanya dibahas tentang analisis kestabilan lokal titik kesetimbangan bebas penyakit dan analisis kestabilan global titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemik secara analisis. Disarankan untuk penelitian selanjutnya dibahas secara analisis kestabilan lokal titik kesetimbangan endemik dari model transmisi penyakit *Brucellosis* pada domba dengan adanya imigrasi.

**DAFTAR PUSTAKA**

- Acha P. N, dan S, Boris. 2003. *Zoonoses and Communicable Disease Common to Man and Animals Volume 1: Bacterioses and Mycoses*. Edisi ketiga. Pan America. Washington.
- Aïnseba, B., C. Benosman, P. Magal. 2009. *A Model for Ovine Brucellosis Incorporating Direct and Indirect Transmission*. Université of Bordeaux. France.
- Alligood, K.T., T.D. Sauer, dan J.A.Yorke. 2000. *CHAOS: An Introduction to Dynamical System*. Springer-Verlag. New York.
- Arrowsmith, D.K., dan C.M. Place., 1990. *An Introduction Dynamical System*. Cambridge University. USA.
- Balai Besar Veteriner Wates. 2010. Laporan Tahunan 2010. BBVet Wates. [http://bbvetwates.ditjenpkh.pertanian.go.id/content/buletin/surveilans\\_brucellosis](http://bbvetwates.ditjenpkh.pertanian.go.id/content/buletin/surveilans_brucellosis). Diakses pada 10 Oktober 2017.
- Balai Besar Veteriner Maros. 2010. Laporan Tahunan 2010. BBVet Maros. <http://bbvet-maros.com/content/laporan-tahunan>. Diakses pada 10 Oktober 2017.
- Balai Penyidikan dan Pengujian Veteriner Regional III. 2010. Laporan Tahunan 2010. BPPV Regional III. <http://bvetlampung.ditjenpkh.pertanian.go.id/?s=brucellosis>. Diakses pada 10 Oktober 2017.
- Boyce, W. E. dan R. C. DiPrima. 2012. *Elementary Differential Equation and Boundary Value Problem*. John Willey and Sons Inc. New York.
- Brauer, F. dan C.C. Charlos. 2010. *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*. Second Edition. Springer-Verlag. New York.
- Corbel, M.J. dan W.J.B. Morgan. 1982. *Cassification of the Brucella: The Current Position*. Rev. Sci. Tech. Off. Int. Epiz 1(1):281-289.
- Crawford R.P, J.D Huber, B.S Adams. 1990. *Epidemiology and Surveillance*. In: Animal Brucellosis. Nielsen KH and JR Duncan (Eds.). Boca Raton (FL): CRC Press. pp. 131 – 151.

- Direktorat Kesehatan Hewan. 2004. Paper : *Kebijakan Pemerintah dalam Pemberantasan Brucellosis di Indonesia*. Disampaikan pada Pertemuan Evaluasi Pemberantasan *Brucellosis* dan Pengawasan Lalu Lintas Ternak. Jakarta.
- Direktorat Jenderal Peternakan. 1998. *Pedoman Teknis Pemberantasan Brucellosis di Indonesia*. Ditjennak Deptan. Jakarta.
- Doganay, M. dan B. Aygen. 2003. *Brucellosis in Human: an overview*. International journal of Infectious Disease 7:3.
- Driessche, V.D dan J. Watmough. 2001. *Reproduction Numbers and Sub-Threshold Endemic Equilibria for Compartmental Models of Disease Transmission*. Department of Mathematics and Statistics, University of New Brunswick. Canada.
- Finizio, N., dan G. Ladas. 1982. *Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern*. Alih bahasa oleh Widiarti Santoso. Erlangga. Jakarta.
- Gui Quan Sun dan Zi Ke Zhang. 2014. Global Gtability for a Sheep Brucellosis Model with Immigration. *Applied Mathematics and Computation*. 246: 336–345.
- Murray, J.D. 2002. *Mathematical Biology I: An Introduction*. Third Edition. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. New York.
- Nagle, R.K., E.B. Staff, dan A.D. Snider. 2012. *Fundamental of Differential Equation*. Eight Editon. Pearson Education, Inc. USA.
- Noor, S.M. 2006. *Brucellosis: Penyakit Zoonosis yang Belum Banyak Dikenal di Indonesia*. Wartazoa16 : 31-39.
- OIE. 2012. *Manual Standards for Diagnostic Test and Vaccines for Terrestrial Animals: Bovine Brucellosis*. World Organisation for Animal Health (OIE). France.
- Qiang Hou, Xiangdong Sun, Juan Zhang, Yongjun Liu, Youming Wang, Zhen Jin. 2013. Modeling the Transmission Dynamics of Sheep Brucellosis in Inner Mongolia Autonomous Region, China. *Mathematical Biosciences*. 242: 51–58.
- Qiang Hou, Xiangdong Sun, Youming Wang, Baoxu Huang ,Zhen Jin. 2014. Global Properties of a General Dynamic Model for Animal Diseases: A Case Study of Brucellosis and Tuberculosis Transmission. *Journal Mathematic and Application*. 414: 424–433.

- Rost, G. dan Wu Jianhong. 2008. *SEIR Epidemiological Model with Varying Infectivity and Infinite Delay*. Mathematical Biosciences and Engineering. 8(2): 389-402.
- Ming Tao Li, Gui Quan Sun, Yan Fang Wu, Juan Zhang, Zhen Jin. 2014. *Transmission Dynamics of a Multi-Group Brucellosis Model with Mixed Cross Infection in Public Farm*. Applied Mathematics and Computation. 237: 582–594.
- Widowati dan Sutimin. 2007. Buku Ajar: *Pemodelan Matematika*. Universitas Diponegoro. Semarang.
- World Health Organization. 2006. *Brucellosis in Humans and Animals*. WHO Library Cataloguing-in-Publication Data. WHO Press.
- Zinsstag, J., F.R.D. Orkhon, G.C. Ochir, M. Nansalma, J. Kolar, P. Vounatsou. 2005. A model of Animal-Human Brucellosis Transmission in Mongolia. *Preventive Veterinary Medicine*. 69: 77–95.

