

**ANALISIS DINAMIK MODEL DINAMIKA PELANGGAN  
DENGAN KEBIJAKAN PEMASARAN**

**SKRIPSI**

oleh  
**NORANIZA BAHROTUL ILMI**  
**145090401111016**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS BRAWIJAYA  
MALANG  
2018**



**ANALISIS DINAMIK MODEL DINAMIKA PELANGGAN  
DENGAN KEBIJAKAN PEMASARAN**

**SKRIPSI**

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana  
Matematika

oleh  
**NORANIZA BAHROTUL ILMI**  
**145090401111016**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS BRAWIJAYA  
MALANG  
2018**



**LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI**

**ANALISIS DINAMIK MODEL DINAMIKA PELANGGAN  
DENGAN KEBIJAKAN PEMASARAN**

oleh  
**NORANIZA BAHROTUL ILMI**  
**145090401111016**

**Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji  
pada tanggal 26 Februari 2018 dan dinyatakan memenuhi syarat  
untuk memperoleh gelar Sarjana Matematika**

**Pembimbing**

**Dr. Isnani Darti, S.Si., M.Si**  
**NIP. 197312162002122001**

**Mengetahui,**  
**Ketua Jurusan Matematika**  
**Fakultas MIPA Universitas Brawijaya**

**Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si, M.Si, Ph.D.**  
**NIP. 197509082000031003**



## LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Noraniza Bahrotul Ilmi  
NIM : 145090401111016  
Jurusan : Matematika  
Penulis skripsi berjudul : Analisis Dinamik Model Dinamika  
Pelanggan dengan Kebijakan  
Pemasaran

dengan ini menyatakan bahwa:

1. Skripsi ini adalah hasil pemikiran saya, bukan hasil menjiplak dari tulisan orang lain. Rujukan-rujukan yang tercantum pada Daftar Pustaka hanya digunakan sebagai acuan.
2. Apabila di kemudian hari skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala akibat hukum dari keadaan tersebut.

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 26 Februari 2018  
yang menyatakan,

Noraniza Bahrotul Ilmi  
145090401111016





# ANALISIS DINAMIK MODEL DINAMIKA PELANGGAN DENGAN KEBIJAKAN PEMASARAN

## ABSTRAK

Pada skripsi ini dibahas tentang analisis dinamik model dinamika pelanggan yang dikaji dalam dua kasus yaitu *static social network* dan *word of mouth*. *Static social network* adalah kondisi ketika tidak terjadi transisi antara *Customer* dan *Referral*, sedangkan *word of mouth* adalah kondisi ketika semua usaha pemasaran berhubungan dengan *Referral*. Analisis dinamik yang dilakukan meliputi penentuan titik kesetimbangan dan analisis kestabilan lokal titik kesetimbangan. Hasil analisis dinamik menunjukkan bahwa model dinamika pelanggan memiliki paling banyak tiga titik kesetimbangan. Model dinamika pelanggan untuk kasus *static social network* memiliki satu titik kesetimbangan yang bersifat stabil asimtotik lokal, sedangkan pada kasus *word of mouth* terdapat dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas pelanggan dan titik kesetimbangan dengan pelanggan. Kestabilan titik kesetimbangan ditentukan oleh angka reproduksi dasar yaitu  $\tau$ . Jika  $\tau \leq 1$  titik kesetimbangan bebas pelanggan stabil lokal. Jika  $\tau > 1$ , maka titik kesetimbangan bebas pelanggan bersifat tak stabil sedangkan titik kesetimbangan dengan pelanggan bersifat stabil asimtotik lokal. Simulasi numerik yang dilakukan mendukung hasil analisis dinamik yang diperoleh.

**Kata kunci:** model dinamika pelanggan, kestabilan titik kesetimbangan, *static social network*, *word of mouth*.



# DYNAMICAL ANALYSIS OF CUSTOMER DYNAMIC MODEL BASED ON MARKETING POLICY

## ABSTRACT

This final project discusses about dynamical analysis of customer dynamic model based on marketing policy studied in two cases, static social network and word of mouth. Static social network is a condition when there is no transition between Referral and Customer. Word of mouth is a situation where all marketing efforts are related to Referral. Dynamical analysis is performed by finding the equilibria and analyzing the stability of equilibria. Dynamical analysis shows that customer dynamic model has up to three equilibrium solutions. In case static social network has one equilibrium that locally asymptotically stable, while in word of mouth case there are two equilibrium, namely customer free equilibrium and an equilibrium with customer. The stability of equilibria is determined by the basic reproduction number  $\tau$ . Customer free equilibrium is locally stable if  $\tau \leq 1$ , on the other hand if  $\tau > 1$  the customer free equilibrium becomes unstable and the equilibrium with customer is locally asymptotically stable. Numerical simulations are carried out to illustrate the theoretical result.

**Keywords:** customer dynamic model, local stability, static social network, word of mouth.



## KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul **ANALISIS DINAMIK MODEL DINAMIKA PELANGGAN DENGAN KEBIJAKAN PEMASARAN** dengan baik dan lancar. Shalawat dan salam selalu tercurahkan kepada Rasulullah SAW sebagai suri teladan bagi penulis.

Skripsi ini tidak dapat diselesaikan dengan baik tanpa bantuan, bimbingan, dan motivasi dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada

1. Dr. Isnani Darti, S.Si., M.Si selaku dosen pembimbing atas segala bimbingan, motivasi, dan saran yang diberikan.
2. Dra. Trisilowati, M.Sc., Ph.D dan Drs. Imam Nurhadi Purwanto, MT selaku dosen penguji, atas segala kritik dan saran yang diberikan untuk perbaikan skripsi ini.
3. Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si., M.Si., Ph.D. selaku Dosen Pembimbing Akademik yang selalu memberikan motivasi kepada penulis untuk menyelesaikan skripsi tepat waktu.
4. Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si., M.Si., Ph.D. selaku Ketua Jurusan Matematika, Dr. Isnani Darti, M.Si. selaku Ketua Program Studi Matematika, Pak Syahroni serta seluruh staff Tata Usaha Jurusan Matematika atas segala bantuan yang diberikan.
5. Ayah (Rohim), Ibu (Siti Nurani), adik (Muhammad Ulinnuha Aljawwad) dan keluarga tercinta yang selalu mendoakan dan memberikan dukungan moril serta materiil.
6. Mega Rahmawati Lestari, Rica Uswatun Chasanah, Rizqiyatul Ula, Purwaningtias Aprianti, Avin Maulana, dan Mohammad Handri Tuloli yang telah memberikan kritik, saran, serta motivasi selama pengerjaan skripsi ini.
7. Teman-teman Matematika 2014 dan Keluarga besar HIMAMASTA yang mendukung serta mendoakan kelancaran pengerjaan skripsi ini.
8. Semua pihak yang dapat penulis sebutkan satu persatu.

Semoga Allah SWT memberikan anugerah dan barokah-Nya kepada semua pihak yang telah membantu menyelesaikan skripsi ini. Sebagai manusia yang tidak luput dari kesalahan, penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih terdapat kekurangan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran. Kritik dan saran dapat dikirim melalui email [noraniza.bahrotul@gmail.com](mailto:noraniza.bahrotul@gmail.com), untuk perbaikan di masa yang akan datang.

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi berbagai pihak, serta menjadi sumber inspirasi untuk penulisan skripsi selanjutnya.

Malang, 26 Februari 2018

Penulis



## DAFTAR ISI

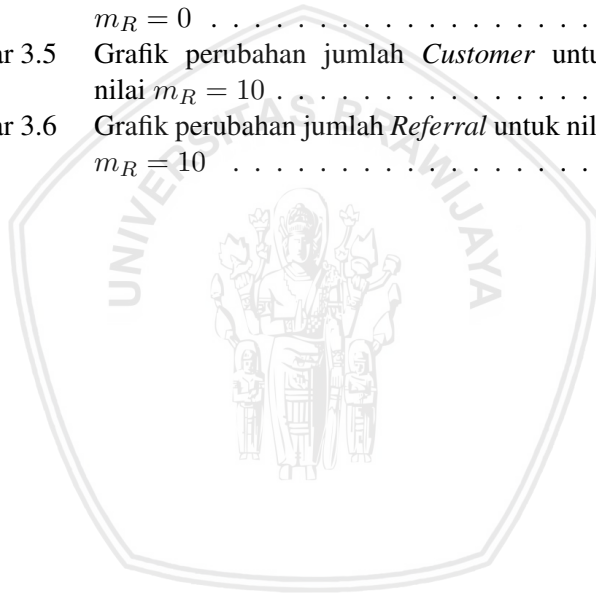
	Halaman
<b>JUDUL</b> . . . . .	i
<b>LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI</b> . . . . .	iii
<b>LEMBAR PERNYATAAN</b> . . . . .	v
<b>ABSTRAK</b> . . . . .	vii
<b>ABSTRACT</b> . . . . .	ix
<b>KATA PENGANTAR</b> . . . . .	xi
<b>DAFTAR ISI</b> . . . . .	xii
<b>DAFTAR GAMBAR</b> . . . . .	xv
<b>DAFTAR LAMPIRAN</b> . . . . .	xvii
<b>BAB I PENDAHULUAN</b> . . . . .	1
1.1 Latar Belakang . . . . .	1
1.2 Rumusan Masalah . . . . .	3
1.3 Tujuan . . . . .	3
<b>BAB II DASAR TEORI</b> . . . . .	5
2.1 Persamaan Diferensial . . . . .	5
2.2 Sistem Dinamik . . . . .	6
2.3 Sistem Otonomus . . . . .	7
2.3.1 Sistem otonomus linear . . . . .	7
2.3.2 Sistem otonomus nonlinear . . . . .	8
2.4 Bentuk-bentuk pemasaran . . . . .	10
2.5 Model Dinamika Pelanggan . . . . .	11
<b>BAB III PEMBAHASAN</b> . . . . .	13
3.1 Titik Kesetimbangan . . . . .	13
3.2 Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan <i>Static Social Network</i> . . . . .	15
3.3 Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan <i>Word of Mouth</i> . . . . .	21
3.4 Simulasi Numerik . . . . .	26
3.4.1 Simulasi numerik untuk sistem awal dengan nilai $m_R$ dan $m$ yang berbeda . . . . .	27
3.4.2 Simulasi numerik untuk sistem awal, <i>static social network</i> , dan <i>word of mouth</i> . . . . .	29
<b>BAB IV PENUTUP</b> . . . . .	33
4.1 Kesimpulan . . . . .	33
4.2 Saran . . . . .	33
<b>DAFTAR PUSTAKA</b> . . . . .	35





## DAFTAR GAMBAR

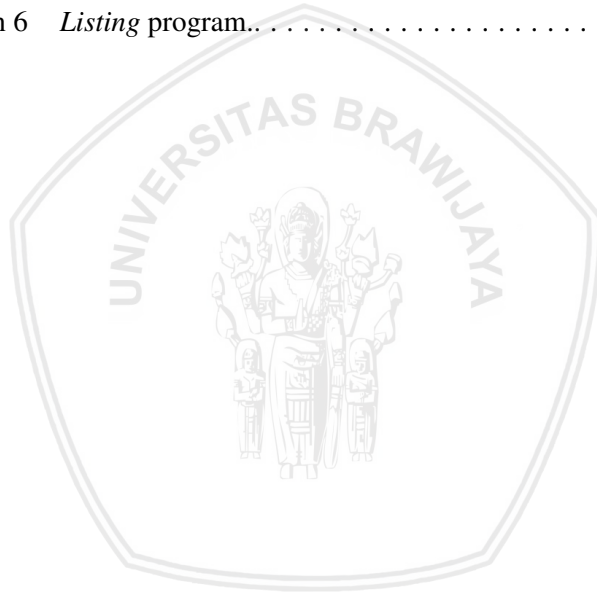
Gambar 2.1	Diagram kompartemen model dinamika pelanggan . . . . .	11
Gambar 3.1	Grafik perubahan jumlah <i>Customer</i> dengan nilai $m$ dan $m_R$ yang berbeda . . . . .	28
Gambar 3.2	Grafik perubahan jumlah <i>Referral</i> dengan nilai $m$ dan $m_R$ yang berbeda . . . . .	28
Gambar 3.3	Grafik perubahan jumlah <i>Customer</i> untuk $m_R = 0$ . . . . .	30
Gambar 3.4	Grafik perubahan jumlah <i>Referral</i> untuk $m_R = 0$ . . . . .	30
Gambar 3.5	Grafik perubahan jumlah <i>Customer</i> untuk nilai $m_R = 10$ . . . . .	31
Gambar 3.6	Grafik perubahan jumlah <i>Referral</i> untuk nilai $m_R = 10$ . . . . .	31





## DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1	Solusi umum sistem (3.2). . . . .	37
Lampiran 2	Titik kesetimbangan model dinamika pelanggan. . . . .	40
Lampiran 3	Perhitungan persamaan (3.21). . . . .	42
Lampiran 4	Analisis kestabilan lokal titik kesetimbangan <i>Static Social Network</i> . . . . .	45
Lampiran 5	Analisis kestabilan lokal titik kesetimbangan <i>Word of Mouth</i> . . . . .	47
Lampiran 6	<i>Listing program</i> . . . . .	51





# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Banyak orang menduga bahwa pemasaran hanya tentang penjualan dan periklanan. Padahal, penjualan dan periklanan hanya dua dari banyak fungsi pemasaran. Pemasaran adalah suatu proses sosial dan manajerial yang membuat individu dan kelompok memperoleh apa yang mereka butuhkan serta inginkan lewat penciptaan dan pertukaran produk serta nilai dengan orang lain. Dalam proses pertukaran ini penjual harus mencari pembeli, mengenali kebutuhan mereka, merancang produk dan jasa dengan baik, menetapkan harga, mempromosikannya, menyimpan serta mengirimkannya. Oleh karena itu, dalam proses ini perusahaan membutuhkan adanya manajemen pemasaran (Kotler dan Armstrong, 1997).

Manajemen pemasaran menjadi sarana pemasar untuk mencapai tujuan organisasi mereka. Inti dari proses ini adalah mengelola tingkat, waktu yang tepat, dan komposisi dari permintaan dengan mempertahankan pelanggan yang sudah ada dan menarik pelanggan baru. Hal ini dapat dicapai dengan mengembangkan program pemasaran melalui proses analisis, perencanaan, implementasi, dan pengendalian. Jika proses ini dilakukan dengan tepat maka akan terbentuk hubungan jangka panjang yang menguntungkan dengan pelanggan. Perusahaan mendapatkan hasil dari hubungan ini dengan menangkap nilai dari pelanggan (Kotler dan Armstrong, 1997).

*Customer value* atau nilai pelanggan dapat diartikan sebagai kualitas yang diterima oleh pelanggan terhadap harga yang dibayar untuk suatu produk. Nilai pelanggan dapat digunakan dalam pertimbangan manajemen perusahaan. Dengan menerapkan strategi manajemen, diharapkan setiap pembeli loyal terhadap produk atau jasa yang disediakan. Terdapat empat komponen nilai keterlibatan pelanggan dengan perusahaan, yaitu *Customer Lifetime Value* (CLV), *Customer Influencer Value* (CIV), *Customer Referral Value* (CRV), dan *Customer Knowledge Value* (CKV). CLV adalah nilai pelanggan dari suatu perusahaan yang didasarkan pada nilai sekarang dari

keuntungan masa depan yang diharapkan sepanjang pembelian seumur hidup. CIV adalah nilai yang mencakup perilaku pelanggan untuk memengaruhi pelanggan lain, yaitu meningkatkan perolehan, retensi, dan *share wallet* melalui *word of mouth*. CRV adalah pola rekomendasi pelanggan terkait dengan perolehan pelanggan baru karena prakarsa perusahaan yang memberi penghargaan atas rekomendasi yang diajukan kepada pelanggan lain. CKV yaitu nilai tambah perusahaan oleh umpan balik dari pelanggan. Komponen-komponen ini saling berhubungan (Kumar, dkk.,2010).

Pada tahun 2008, Lin menganalisis kestabilan sistem peralihan kompartemen ekonomi dengan subsistem kompartemen. Selanjutnya, pada tahun yang sama Kiss dan Bichler menguji model jaringan nyata, jaringan simulasi, dan model difusi untuk memprediksi pengaruh antar pelanggan berdasarkan posisi mereka dalam jaringan. Tramontana (2010) merumuskan model makroekonomi pada perusahaan yang mungkin bangkrut kapanpun mereka tidak mampu membayar kembali hutang mereka. Artzrouni dan Tramontana (2014) membahas tentang bagaimana sebuah negara dapat terlepas dari perangkap hutang yang dirumuskan dengan model persamaan diferensial.

Silva, dkk, (2016) merumuskan model kompartemen untuk menggambarkan dinamika jumlah pelanggan di perusahaan tertentu. Transisi antar kompartemen dimodelkan dengan parameter yang bergantung pada jaringan sosial dan kebijakan pemasaran perusahaan. Model dinamika pelanggan ini adalah model matematika pertama dalam bidang pemasaran. Pada skripsi ini dikaji kembali analisis dinamik model Silva, dkk. (2016). Analisis dinamik yang dilakukan pada model meliputi penentuan titik kesetimbangan dan penerapan analisis dinamik pada model dinamika pelanggan dengan laju kejadian tertentu. Selanjutnya dilakukan simulasi numerik untuk mendukung hasil analisis dinamik.

## 1.2 Rumusan Masalah

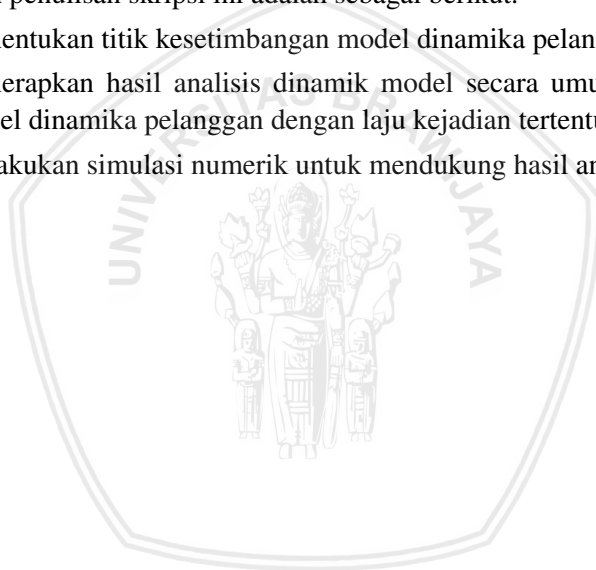
Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, pokok permasalahan yang dikaji dalam skripsi ini adalah sebagai berikut.

1. Bagaimana titik kesetimbangan model dinamika pelanggan?
2. Bagaimana hasil analisis dinamik model tersebut jika diaplikasikan pada model dinamika pelanggan dengan laju kejadian tertentu?
3. Bagaimana hasil simulasi numerik model?

## 1.3 Tujuan

Tujuan penulisan skripsi ini adalah sebagai berikut.

1. Menentukan titik kesetimbangan model dinamika pelanggan.
2. Menerapkan hasil analisis dinamik model secara umum pada model dinamika pelanggan dengan laju kejadian tertentu.
3. Melakukan simulasi numerik untuk mendukung hasil analitik.







## BAB II DASAR TEORI

### 2.1 Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat turunan satu atau lebih fungsi yang tidak diketahui. Berdasarkan jumlah variabel bebasnya, persamaan diferensial dapat dibedakan menjadi dua, yaitu persamaan diferensial biasa (PDB) dan persamaan diferensial parsial (PDP). PDB adalah persamaan diferensial yang fungsinya hanya bergantung pada satu variabel bebas, sedangkan PDP adalah persamaan diferensial yang fungsinya bergantung pada lebih dari satu variabel bebas. Secara umum, persamaan diferensial biasa orde  $n$  adalah suatu persamaan yang dapat ditulis dalam bentuk

$$F\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \dots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right) = \frac{d^n x}{dt^n}, \quad (2.1)$$

dengan  $x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \dots, \frac{d^n x}{dt^n}$  adalah fungsi dari  $t$ .

Ada dua jenis persamaan diferensial biasa, yaitu linear dan nonlinear. Persamaan diferensial biasa orde  $n$  (2.1) dengan variabel bebas  $t$  dan variabel tak bebas  $x$  dikatakan linear jika memenuhi

$$a_n(t) \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_1(t) \frac{dx}{dt} + a_0(t)x = F(t),$$

dengan  $a_n(t), a_{n-1}(t), \dots, a_0(t)$ , dan  $F(t)$  hanya bergantung pada variabel bebas  $t$ . Persamaan diferensial biasa nonlinear adalah persamaan diferensial biasa yang variabel tak bebas atau derajat turunannya lebih dari satu atau memuat perkalian antara variabel tak bebas dengan turunannya.

Misalkan terdapat  $n$  persamaan diferensial biasa dengan  $n$  fungsi yang tidak diketahui dan  $n \geq 2, n \in \mathbb{Z}$ . Bentuk umum sistem persamaan diferensial biasa linear dengan koefisien konstan berdimensi  $n$  adalah

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t), \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t), \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Persamaan (2.2) dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + f_i(t),$$

dengan  $a_{ij}$  adalah konstanta real dan  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ .

(Finizio dan Ladas, 1982)

## 2.2 Sistem Dinamik

Sistem dinamik adalah suatu sistem yang dapat diketahui kondisinya di masa yang akan datang jika diberikan kondisi di masa sekarang atau masa lampau. Sistem dinamik dibagi menjadi dua yaitu sistem dinamik diskret dan sistem dinamik kontinu. Perbedaan keduanya terletak pada persamaan yang digunakan. Sistem dinamik kontinu menggunakan persamaan diferensial, sedangkan sistem dinamik diskret menggunakan persamaan beda (Nagle,dkk.,2012).

## 2.3 Sistem Otonomus

Sistem otonomus merupakan sistem dinamik yang secara eksplisit tidak bergantung pada waktu. Bentuk umum sistem otonomus berdimensi  $n$  sebagai berikut

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n).\end{aligned}\tag{2.3}$$

Titik  $\vec{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  merupakan titik kesetimbangan sistem (2.3) jika

$$f_i(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = 0, i = 1, 2, \dots, n.$$

(Finizio dan Ladas, 1982)

### 2.3.1 Sistem otonomus linear

Sistem otonomus linear dengan  $n$  persamaan

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n, \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n, \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n,\end{aligned}\tag{2.4}$$

dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x},$$

dengan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ dan } \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Jika  $\det(A) \neq 0$ , maka titik  $\vec{x}^* = \vec{0}$  adalah satu-satunya titik kesetimbangan sistem (2.4). Kestabilan titik kesetimbangan sistem (2.4) dapat ditentukan melalui nilai eigen matriks  $A$ .

**Teorema 2.3.1** Titik kesetimbangan  $\vec{x}^* = \vec{0}$  sistem (2.4) bersifat

1. stabil, jika semua nilai eigen matriks  $A$  memiliki bagian real tak positif,
2. stabil asimtotik, jika semua nilai eigen matriks  $A$  memiliki bagian real negatif,
3. tak stabil, jika terdapat nilai eigen matriks  $A$  yang memiliki bagian real positif.

(Finizio dan Ladas, 1982)

### 2.3.2 Sistem otonomus nonlinear

Perhatikan sistem otonomus nonlinear dengan  $n$  persamaan sebagai berikut

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(\vec{x}), i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.5)$$

dengan  $f_i$  merupakan fungsi nonlinear. Misal  $\vec{x}^*$  adalah titik kesetimbangan sistem (2.5) dan  $f_i$  mempunyai turunan parsial kontinu di titik kesetimbangan  $\vec{x}^*$ . Deret Taylor fungsi  $f_i$  di sekitar  $\vec{x}^*$  adalah

$$f_i(\vec{x}) = f_i(\vec{x}^*) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(\vec{x}^*)}{\partial x_j} (x_j - x_j^*) + \eta_i(\vec{x}), i = 1, 2, \dots, n \quad (2.6)$$

$\eta_i(\vec{x})$  adalah suku sisa yang memenuhi sifat

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^*} \frac{\eta_i(\vec{x})}{\|\vec{w}\|} = 0, i = 1, 2, \dots, n,$$

dengan  $\vec{w} = (x_1 - x_1^*, x_2 - x_2^*, \dots, x_n - x_n^*)^T$ .

Berdasarkan persamaan (2.6) dan mengingat bahwa  $f_i = 0$  serta  $\frac{dx_i}{dt} = \frac{d(x_i - x_i^*)}{dt}$  maka sistem (2.5) dapat ditulis sebagai

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 - x_1^* \\ \vdots \\ x_n - x_n^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - x_1^* \\ \vdots \\ x_n - x_n^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ \eta_n(\vec{x}) \end{bmatrix},$$

atau

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = J\vec{w} + \vec{\eta}, \quad (2.7)$$

dengan

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

disebut matriks Jacobi. Jika  $\vec{x}$  berada dekat dengan  $\vec{x}^*$ , maka  $\vec{\eta}$  bernilai kecil. Akibatnya  $\vec{\eta} \rightarrow 0$  dan  $\vec{\eta}$  dapat diabaikan, sehingga sistem (2.5) menjadi

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = J\vec{w}. \quad (2.8)$$

Jika  $\vec{x} = \vec{x}^*$ , diperoleh  $(w_1^*, w_2^*, \dots, w_n^*) = (0, 0, \dots, 0)$ , sehingga titik kesetimbangan sistem (2.6) adalah  $\vec{w}^* = \vec{0}$ . Proses penghampiran sistem nonlinear (2.5) oleh sistem linear (2.8) dinamakan proses linearisasi.

**Teorema 2.3.2** Titik kesetimbangan sistem otonomus nonlinear bersifat

1. stabil asimtotik, jika titik kesetimbangan sistem hasil linearisasi bersifat stabil asimtotik,
2. tidak stabil, jika titik kesetimbangan sistem hasil linearisasi bersifat tidak stabil.

(Boyce dan DiPrima, 2012)

## 2.4 Bentuk-bentuk pemasaran

Menurut Kotler dan Keller (2009) terdapat tiga bentuk pemasaran yaitu pemasaran langsung (*direct marketing*), (*word of mouth*), dan penjualan personal.

Pemasaran langsung adalah sistem pemasaran interaktif yang menggunakan satu atau lebih media untuk memengaruhi pelanggan tanpa menggunakan perantara pemasaran. Pemasar langsung dapat menggunakan sejumlah saluran untuk menjangkau calon pelanggan, seperti surat langsung, pemasaran katalog, telemarketing, kios, situs web, TV interaktif, dan peralatan bergerak (*mobile*). Pemasaran langsung dapat menjangkau calon pelanggan pada saat yang tepat. Pemasar langsung dapat mengukur respon terhadap iklan mereka agar dapat ditentukan bentuk iklan yang paling menguntungkan.

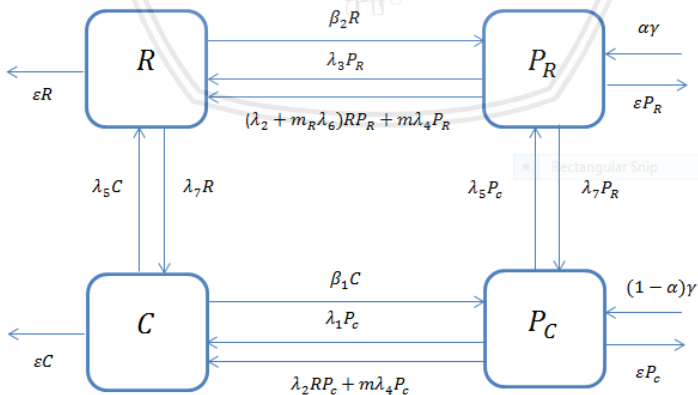
*Word of mouth* merupakan proses komunikasi yang berupa pemberian rekomendasi baik secara individu maupun kelompok terhadap suatu produk atau jasa yang bertujuan untuk memberikan informasi secara personal. Dua bentuk *word of mouth* yang terkenal adalah pemasaran *buzz* dan pemasaran *viral*. Pemasaran *buzz* menghasilkan ketertarikan, menciptakan publisitas, dan mengekspresikan informasi baru yang berhubungan dengan merek melalui sarana yang tak terduga. Pemasaran *viral* adalah bentuk lain dari *word of mouth* atau berita dari satu klik *mouse* ke klik berikutnya (*word of mouse*) yang mendorong konsumen menceritakan produk dan jasa yang dikembangkan perusahaan kepada orang lain secara *online*.

Penjualan personal adalah cara untuk memperkenalkan dan menarik minat konsumen terhadap produk yang ditawarkan secara tatap muka. Penjualan personal merupakan alat promosi secara lisan, baik kepada seorang maupun lebih calon pembeli dengan maksud untuk menciptakan transaksi pembelian yang saling menguntungkan bagi kedua belah pihak. Komunikasi yang dilakukan kedua belah pihak bersifat interaktif atau komunikasi dua arah sehingga penjual dapat langsung memperoleh tanggapan sebagai umpan balik tentang keinginan dan pendapat konsumen. Penyampaian berita atau proses komunikasi dapat dilakukan dengan fleksibel karena dapat disesuaikan dengan situasi yang ada.

(Kotler dan Keller, 2009)

## 2.5 Model Dinamika Pelanggan

Model dinamika pelanggan menurut Silva, dkk. (2016) terdiri dari empat subpopulasi yaitu subpopulasi *Customer* ( $C$ ), *Referral* ( $R$ ), *Potensial customer* ( $P_C$ ), dan *Potensial referral* ( $P_R$ ). Menurut Kotler (1997) *Customer* adalah semua individu yang membeli atau memperoleh barang atau jasa untuk dikonsumsi pribadi. Menurut Kumar (2010) *Referral* adalah pelanggan baru yang melakukan transaksi dengan perusahaan karena adanya pengaruh dari pelanggan saat ini. Seseorang yang menjadi *Referral* dapat memengaruhi pelanggan lainnya untuk menjadi *Referral* maupun *Customer*. Biasanya perusahaan memberikan komisi atas usaha tersebut. *Potensial customer* adalah semua individu yang berpotensi menjadi *Customer*, sedangkan *Potensial referral* adalah semua individu yang berpotensi menjadi *Referral*. Individu *central* adalah individu yang dimungkinkan memperoleh informasi lebih dari perusahaan dibandingkan dengan individu *non central*. Pemasaran tanpa pembeda adalah salah satu strategi pemasaran tanpa membedakan target pasar tertentu. Perusahaan yang menggunakan strategi pemasaran ini hanya menawarkan satu macam produk dan mencakup seluruh pasar. Pelanggan yang dimaksud pada skripsi ini adalah *Customer* dan *Referral*.  $C(t)$ ,  $R(t)$ ,  $P_C(t)$ , dan  $P_R(t)$  bernilai positif karena menyatakan kepadatan populasi. Model dinamika pelanggan tersebut dapat digambarkan dalam diagram kompartemen berikut.



Gambar 2.1: Diagram kompartemen model dinamika pelanggan

Berdasarkan Gambar (2.1) diperoleh sistem sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 C' &= \lambda_7 R - (\varepsilon + \beta_1 + \lambda_5)C + (\lambda_1 + m\lambda_4)P_C + \lambda_2 R P_C, \\
 R' &= \lambda_5 C - (\varepsilon + \beta_2 + \lambda_7)R + (\lambda_3 + m\lambda_4)P_R + (\lambda_2 + m_R\lambda_6)R P_R, \\
 P'_C &= (1 - \alpha)\gamma + \beta_1 C + \lambda_7 P_R - (\varepsilon + \lambda_5 + \lambda_1 + m\lambda_4)P_C - \lambda_2 R P_C, \\
 P'_R &= \alpha\gamma + \beta_2 R + \lambda_5 P_C - (\varepsilon + \lambda_7 + \lambda_3 + m\lambda_4)P_R \\
 &\quad - (\lambda_2 + m_R\lambda_6)R P_R,
 \end{aligned}
 \tag{2.9}$$

dengan

$R(t)$  : banyaknya *Referral* pada waktu  $t$ ,

$C(t)$  : banyaknya *Customer* pada waktu  $t$ ,

$P_C(t)$ : banyaknya *Potensial customer* pada waktu  $t$ ,

$P_R(t)$ : banyaknya *Potensial referral* pada waktu  $t$ ,

$\lambda_1$  : laju perubahan  $P_C$  menjadi  $C$ ,

$\lambda_2$  : efek tarikan *Referral*,

$\lambda_3$  : laju perubahan  $P_R$  menjadi  $R$ ,

$m$  : biaya pemasaran tanpa pembeda,

$\lambda_4$  : efek tarikan akibat pemasaran tanpa pembeda,

$m_R$  : biaya pemasaran *Referral*,

$\lambda_6$  : efek tarikan akibat arahan dari *Referral*,

$\lambda_5$  : laju perubahan *non central* menjadi *central* dalam jaringan sosial,

$\lambda_7$  : laju perubahan *central* menjadi *non central* dalam jaringan sosial,

$\beta_1$  : laju berkurangnya jumlah *Customer*,

$\beta_2$  : laju berkurangnya jumlah *Referral*,

$\varepsilon$  : laju berkurangnya pelanggan maupun potensial pelanggan per tahun,

$\gamma$  : tingkat rekrutmen pelanggan maupun potensial pelanggan per tahun,

$\alpha$  : tingkat rekrutmen *Referral* per tahun.



### BAB III PEMBAHASAN

Pada bab ini ditentukan titik kesetimbangan model dinamika pelanggan secara umum. Setelah ditentukan titik kesetimbangannya, kemudian dilakukan analisis dinamik model dinamika pelanggan yang dikaji dalam dua kasus. Kasus yang pertama adalah *static social network* dan kasus kedua adalah *word of mouth*. Analisis dinamik yang dilakukan meliputi penentuan titik kesetimbangan dan kestabilan lokal titik kesetimbangan. Pada bagian akhir dilakukan beberapa simulasi numerik untuk mendukung hasil analisis yang telah diperoleh.

#### 3.1 Titik Kesetimbangan

Titik kesetimbangan sistem (2.9) diperoleh ketika

$$\frac{dC}{dt} = \frac{dR}{dt} = \frac{dP_C}{dt} = \frac{dP_R}{dt} = 0,$$

dengan menjumlahkan  $R'$  dan  $P'_R$  serta  $C'$  dan  $P'_C$  pada sistem (2.9) diperoleh

$$\begin{aligned} (R + P_R)' &= \alpha\gamma - (\varepsilon + \lambda_7)(R + P_R) + \lambda_5(C + P_C), \\ (C + P_C)' &= (1 - \alpha)\gamma - (\varepsilon + \lambda_5)(C + P_C) + \lambda_7(R + P_R), \end{aligned} \quad (3.1)$$

Misal  $X = (R + P_R)$  dan  $Y = (C + P_C)$  maka sistem (3.1) dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned} X' &= \alpha\gamma - (\varepsilon + \lambda_7)X + \lambda_5Y, \\ Y' &= (1 - \alpha)\gamma + \lambda_7X - (\varepsilon + \lambda_5)Y. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Berdasarkan Lampiran 1 diperoleh solusi umum untuk sistem (3.2) sebagai berikut

$$\begin{aligned} X &= \frac{\gamma(\alpha\varepsilon + \lambda_5)}{\varepsilon(\varepsilon + \lambda_5 + \lambda_7)} + c_1 e^{-(\varepsilon + \lambda_5 + \lambda_7)t} + c_2 e^{-\varepsilon t}, \\ Y &= \frac{\gamma((1 - \alpha)\varepsilon + \lambda_7)}{\varepsilon(\varepsilon + \lambda_5 + \lambda_7)} - c_1 e^{-(\varepsilon + \lambda_5 + \lambda_7)t} + \lambda_7/\lambda_5 c_2 e^{-\varepsilon t}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

sehingga

$$\begin{aligned} P_R &= \frac{\gamma(\alpha\varepsilon + \lambda_5)}{\varepsilon(\varepsilon + \lambda_5 + \lambda_7)} + \theta_1(t) - R(t), \\ P_C &= \frac{\gamma((1-\alpha)\varepsilon + \lambda_7)}{\varepsilon(\varepsilon + \lambda_5 + \lambda_7)} + \theta_2(t) - C(t), \end{aligned} \quad (3.4)$$

dengan  $\theta_i(t) \rightarrow 0$  saat  $t \rightarrow \infty$  untuk  $i = 1, 2$ . Selanjutnya dengan mensubstitusikan  $P_R$  dan  $P_C$  pada sistem (3.4) ke persamaan  $C'$  dan  $R'$  pada sistem (2.9) diperoleh

$$\begin{aligned} C' &= \lambda_7 R - (\varepsilon + \beta_1 + \lambda_5)C + (\lambda_1 + m\lambda_4 + \lambda_2 R)(q - C), \\ R' &= \lambda_5 C - (\varepsilon + \beta_2 + \lambda_7)R + (\lambda_3 + m\lambda_4 + (\lambda_2 + m_R\lambda_6)R)(p - R). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Berdasarkan definisi titik kesetimbangan maka

$$\lambda_7 R - (\varepsilon + \beta_1 + \lambda_5)C + (\lambda_1 + m\lambda_4 + \lambda_2 R)(q - C) = 0, \quad (3.6a)$$

$$\lambda_5 C - (\varepsilon + \beta_2 + \lambda_7)R + (\lambda_3 + m\lambda_4 + (\lambda_2 + m_R\lambda_6)R)(p - R) = 0, \quad (3.6b)$$

dengan  $p = \frac{\gamma(\alpha\varepsilon + \lambda_5)}{\varepsilon(\varepsilon + \lambda_5 + \lambda_7)}$  dan  $q = \frac{\gamma((1-\alpha)\varepsilon + \lambda_7)}{\varepsilon(\varepsilon + \lambda_5 + \lambda_7)}$ .

Dari persamaan (3.6b) diperoleh nilai  $C$ , yaitu

$$C = \frac{(\varepsilon + \beta_2 + \lambda_7)R - (\lambda_3 + m\lambda_4 + (\lambda_2 + m_R\lambda_6)R)(p - R)}{\lambda_5}. \quad (3.7)$$

Misalkan  $u = \varepsilon + \beta_1 + \lambda_5 + \lambda_1 + m\lambda_4$  dan  $v = \varepsilon + \beta_2 + \lambda_7 + \lambda_3 + m\lambda_4$ , dengan mensubstitusikan (3.7) ke persamaan (3.6a) diperoleh persamaan polinomial sebagai berikut

$$aR^3 + bR^2 + cR + d = 0, \quad (3.8)$$

dengan

$$\begin{aligned} a &= -\lambda_2(\lambda_2 + m_R\lambda_6), \\ b &= \lambda_2(\lambda_2 + m_R\lambda_6)p - u(\lambda_2 + m_R\lambda_6) - \lambda_2v, \\ c &= \lambda_2(\lambda_3 + m\lambda_4)p + u(\lambda_2 + m_R\lambda_6)p + (\lambda_7 + \lambda_2q)\lambda_5 - uv, \\ d &= (\lambda_3 + m\lambda_4)pu + (\lambda_1 + m\lambda_4)q\lambda_5. \end{aligned}$$

Detail perhitungan untuk persamaan (3.8) dapat dilihat pada Lampiran 2.

Berdasarkan uraian sebelumnya, titik kesetimbangan model dinamika pelangan dapat dinyatakan dalam Teorema 3.1 berikut.

**Teorema 3.1** (Titik kesetimbangan) Misal  $\varepsilon > 0$ ,  $\lambda_5 > 0$ , maka

1. sistem (2.9) memiliki paling banyak tiga titik kesetimbangan  $(R^*, C^*, P_R^*, P_C^*)$ . Komponen pertama  $R^*$  selalu merupakan solusi nonnegatif dari persamaan

$$aR^3 + bR^2 + cR + d = 0, \quad (3.9)$$

dengan

$$\begin{aligned} a &= -\lambda_2(\lambda_2 + m_R\lambda_6), \\ b &= \lambda_2(\lambda_2 + m_R\lambda_6)p - u(\lambda_2 + m_R\lambda_6) - \lambda_2v, \\ c &= \lambda_2(\lambda_3 + m\lambda_4)p + u(\lambda_2 + m_R\lambda_6)p + (\lambda_7 + \lambda_2q)\lambda_5 - uv, \\ d &= (\lambda_3 + m\lambda_4)pu + (\lambda_1 + m\lambda_4)q\lambda_5. \end{aligned}$$

2. solusi titik kesetimbangan  $(R^*, C^*, P_R^*, P_C^*)$  diperoleh dengan cara berikut:  $R^*$  adalah solusi nonnegatif dari (3.9),  $P_R^* = p - R^*$ ,  $P_C^* = q - C^*$ , dan

$$C^* = \frac{(\varepsilon + \beta_2 + \lambda_7)R^* - (\lambda_3 + m\lambda_4 + (\lambda_2 + m_R\lambda_6)R^*)(p - R^*)}{\lambda_5}. \quad (3.10)$$

### 3.2 Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan *Static Social Network*

*Static social network* adalah kondisi ketika tidak ada transisi antara *Referral* dan *Customer*. Oleh karena tidak terjadi transisi *Referral* dengan *Customer* dan hanya ada transisi *Potensial referral* dengan *Referral* maupun *Potensial customer* dengan *Customer*, maka diasumsikan bahwa  $\lambda_3 + m\lambda_4 \neq 0$ ,  $\lambda_1 + m\lambda_4 \neq 0$ ,  $\lambda_5 = \lambda_7 = 0$ . Berdasarkan asumsi tersebut maka sistem (2.9) menjadi

$$C' = -(\varepsilon + \beta_1)C + (\lambda_1 + m\lambda_4)P_C + \lambda_2RP_C, \quad (3.11a)$$

$$R' = -(\varepsilon + \beta_2)R + (\lambda_3 + m\lambda_4)P_R + (\lambda_2 + m_R\lambda_6)RP_R, \quad (3.11b)$$

$$P_C' = (1 - \alpha)\gamma + \beta_1C + -(\varepsilon + \lambda_1 + m\lambda_4)P_C - \lambda_2RP_C, \quad (3.11c)$$

$$P_R' = \alpha\gamma + \beta_2R - (\varepsilon + \lambda_3 + m\lambda_4)P_R - (\lambda_2 + m_R\lambda_6)RP_R, \quad (3.11d)$$

Selanjutnya ditentukan titik kesetimbangan model dinamika pelanggan untuk kasus ini. Titik kesetimbangan sistem (3.11) diperoleh ketika

$$\frac{dC}{dt} = \frac{dR}{dt} = \frac{dP_C}{dt} = \frac{dP_R}{dt} = 0,$$

dengan menjumlahkan persamaan (3.11b) dan (3.11d) serta (3.11a) dan (3.11c) maka diperoleh sistem dua dimensi sebagai berikut

$$(R + P_R)' = \alpha\gamma - \varepsilon(R + P_R), \quad (3.12a)$$

$$(C + P_c)' = (1 - \alpha)\gamma - \varepsilon(C + P_C). \quad (3.12b)$$

Jika dimisalkan  $(R + P_R) = X$ , maka persamaan (3.12a) menjadi

$$\frac{dX}{dt} = \alpha\gamma - \varepsilon X \quad (3.13)$$

$$\mu(t) \frac{dX}{dt} + \varepsilon\mu(t)X = \alpha\gamma\mu(t).$$

Oleh karena

$$\frac{d}{dt}[\mu(t)X] = \mu(t) \frac{dX}{dt} + \frac{d\mu(t)}{dt} X, \quad (3.14)$$

sehingga dapat ditentukan nilai  $\mu(t)$ , yaitu

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = \varepsilon\mu(t),$$

$$\int \frac{d\mu(t)}{\mu(t)} = \int \varepsilon dt,$$

$$\ln |\mu(t)| = \varepsilon t + c,$$

$$\mu(t) = ce^{\varepsilon t}.$$

dengan mensubstitusikan  $\mu(t)$  ke persamaan (3.13) diperoleh

$$ce^{\varepsilon t} \frac{dX}{dt} + c\varepsilon e^{\varepsilon t} X = \alpha\gamma e^{\varepsilon t}.$$

Berdasarkan persamaan (3.14), dapat ditentukan nilai  $X$  sebagai berikut

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(e^{\varepsilon t} X) &= \alpha\gamma e^{\varepsilon t}, \\ e^{\varepsilon t} X &= \alpha\gamma \int e^{\varepsilon t} dt, \\ e^{\varepsilon t} X &= \alpha\gamma \frac{1}{\varepsilon} e^{\varepsilon t} + c, \\ X &= \frac{\alpha\gamma}{\varepsilon} + c_1 e^{-\varepsilon t},\end{aligned}$$

atau

$$R(t) + P_R(t) = \frac{\alpha\gamma}{\varepsilon} + c_1 e^{-\varepsilon t}. \quad (3.15)$$

Jika dimisalkan bahwa  $(C + P_C) = Y$ , maka persamaan (3.12b) menjadi

$$\begin{aligned}\frac{dY}{dt} &= (1 - \alpha)\gamma - \varepsilon Y \\ \mu(t) \frac{dY}{dt} + \varepsilon \mu(t) Y &= (1 - \alpha)\gamma \mu(t).\end{aligned} \quad (3.16)$$

Oleh karena

$$\frac{d}{dt}[\mu(t)Y] = \mu(t) \frac{dY}{dt} + \frac{d\mu(t)}{dt} Y, \quad (3.17)$$

sehingga dapat ditentukan nilai  $\mu(t)$  sebagai berikut

$$\begin{aligned}\frac{d\mu(t)}{dt} &= \varepsilon \mu(t), \\ \int \frac{d\mu(t)}{\mu(t)} &= \int \varepsilon dt, \\ \ln |\mu(t)| &= \varepsilon t + c, \\ \mu(t) &= c e^{\varepsilon t}.\end{aligned}$$

dengan mensubstitusikan  $\mu(t)$  ke persamaan (3.16) diperoleh

$$c e^{\varepsilon t} \frac{dY}{dt} + c \varepsilon e^{\varepsilon t} Y = (1 - \alpha)\gamma e^{\varepsilon t},$$

dengan menggunakan persamaan (3.17), dapat ditentukan nilai  $Y$  sebagai berikut

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(e^{\varepsilon t}Y) &= (1 - \alpha)\gamma e^{\varepsilon t}, \\ e^{\varepsilon t}Y &= (1 - \alpha)\gamma \int e^{\varepsilon t} dt, \\ e^{\varepsilon t}Y &= (1 - \alpha)\gamma \frac{1}{\varepsilon} e^{\varepsilon t} + c, \\ Y &= \frac{(1 - \alpha)\gamma}{\varepsilon} + c_2 e^{-\varepsilon t},\end{aligned}$$

atau

$$C(t) + P_C(t) = \frac{(1 - \alpha)\gamma}{\varepsilon} + c_2 e^{-\varepsilon t}. \quad (3.18)$$

Jika  $(R^*, C^*, P_R^*, P_C^*)$  adalah titik kesetimbangan maka persamaan (3.15) dan (3.18) menjadi

$$\begin{aligned}P_R^* &= \frac{\alpha\gamma}{\varepsilon} - R^*, \\ P_C^* &= \frac{(1 - \alpha)\gamma}{\varepsilon} - C^*.\end{aligned} \quad (3.19)$$

Selanjutnya dengan mensubstitusikan  $P_R^*$  dan  $P_C^*$  pada sistem (3.19) ke persamaan (3.11a) dan (3.11b) diperoleh

$$-(\varepsilon + \beta_1)C^* + (\lambda_1 + m\lambda_4 + \lambda_2 R^*) \left( \frac{(1 - \alpha)\gamma}{\varepsilon} - C^* \right) = 0, \quad (3.20a)$$

$$-(\varepsilon + \beta_2)R^* + (\lambda_3 + m\lambda_4 + (\lambda_2 + m_R\lambda_6)R^*) \left( \frac{\alpha\gamma}{\varepsilon} - R^* \right) = 0. \quad (3.20b)$$

Dari persamaan (3.20a) diperoleh

$$C^* = \frac{(1 - \alpha)\gamma}{\varepsilon} \left( \frac{\lambda_1 + m\lambda_4 + \lambda_2 R^*}{\varepsilon + \beta_1 + \lambda_1 + m\lambda_4 + \lambda_2 R^*} \right).$$

Selanjutnya dengan menggunakan persamaan (3.20b) dan dibagi dengan  $-(\lambda_2 + m_R\lambda_6)$  diperoleh

$$R^{*2} + (2\theta - \frac{\alpha\gamma}{\varepsilon})R^* - \frac{\alpha\gamma(m\lambda_4 + \lambda_3)}{\varepsilon(\lambda_2 + m_R\lambda_6)} = 0, \quad (3.21)$$

dengan  $\theta = \frac{\lambda_3 + m\lambda_4 + \beta_2 + \varepsilon}{2(\lambda_2 + m_R\lambda_6)}$ . Berdasarkan Lampiran 3 diperoleh nilai  $R^*$  sebagai berikut

$$R^* = \frac{\alpha\gamma}{2\varepsilon} - \theta + \sqrt{\left(\theta + \frac{\alpha\gamma}{2\varepsilon}\right)^2 - \frac{\alpha\gamma(\varepsilon + \beta_2)}{\varepsilon(\lambda_2 + m_R\lambda_6)}},$$

dengan mensubstitusi  $C^*$  dan  $R^*$  ke sistem (3.19) diperoleh

$$\begin{aligned} P_C^* &= \frac{\gamma(1-\alpha)}{\varepsilon} - \left( \frac{(1-\alpha)\gamma}{\varepsilon} \left( \frac{\lambda_1 + m\lambda_4 + \lambda_2 R^*}{\varepsilon + \beta_1 + \lambda_1 + m\lambda_4 + \lambda_2 R^*} \right) \right), \\ &= \frac{\gamma(1-\alpha)(\varepsilon + \beta_1 + \lambda_1 + m\lambda_4 + \lambda_2 R^*)}{\varepsilon(\varepsilon + \beta_1 + \lambda_1 + m\lambda_4 + \lambda_2 R^*)}, \\ &\quad - \frac{(1-\alpha)\gamma(\lambda_1 + m\lambda_4 + \lambda_2 R^*)}{\varepsilon(\varepsilon + \beta_1 + \lambda_1 + m\lambda_4 + \lambda_2 R^*)}, \\ &= \frac{-\alpha\gamma\beta_1 - \alpha\gamma\varepsilon + \gamma\beta_1 + \gamma\varepsilon}{\varepsilon(\varepsilon + \beta_1 + \lambda_1 + m\lambda_4 + \lambda_2 R^*)}, \\ &= \frac{-\gamma(\varepsilon + \beta_1)(\alpha - 1)}{\varepsilon(\varepsilon + \beta_1 + \lambda_1 + m\lambda_4 + \lambda_2 R^*)}, \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} P_R^* &= \frac{\alpha\gamma}{\varepsilon} - \left( \frac{\alpha\gamma}{2\varepsilon} - \theta + \sqrt{\left(\theta + \frac{\alpha\gamma}{2\varepsilon}\right)^2 - \frac{\alpha\gamma(\varepsilon + \beta_2)}{\varepsilon(\lambda_2 + m_R\lambda_6)}} \right), \\ &= \frac{\alpha\gamma}{2\varepsilon} + \theta - \sqrt{\left(\theta + \frac{\alpha\gamma}{2\varepsilon}\right)^2 - \frac{\alpha\gamma(\varepsilon + \beta_2)}{\varepsilon(\lambda_2 + m_R\lambda_6)}}. \end{aligned}$$

Berdasarkan perhitungan sebelumnya maka  $(C^*, R^*, P_C^*, P_R^*)$  adalah titik kesetimbangan untuk sistem (3.11).

Setelah ditentukan titik kesetimbangan sistem (3.11), selanjutnya dilakukan analisis kestabilan titik kesetimbangan sistem (3.11). Berdasarkan sistem (3.11) diketahui bahwa sistem tersebut merupakan sistem nonlinear. Oleh karena itu, kestabilan titik kesetimbangan diperoleh dengan melakukan linearisasi sistem (3.11) sehingga diperoleh matriks Jacobi sebagai berikut

$$J = \begin{bmatrix} -\varepsilon - \beta_1 & \lambda_2 P_C^* & \lambda_1 + m\lambda_4 + \lambda_2 R^* & 0 \\ 0 & -\varepsilon - A & 0 & B \\ \beta_1 & -\lambda_2 P_C^* & -\varepsilon - \lambda_1 - m\lambda_4 - \lambda_2 R^* & 0 \\ 0 & A & 0 & -\varepsilon - B \end{bmatrix}, \quad (3.22)$$

dengan  $A = \beta_2 - (\lambda_2 + m_R \lambda_6) P_R^*$  dan  $B = \lambda_3 + m \lambda_4 + (\lambda_2 + m_R \lambda_6) R^*$ .

Selanjutnya dengan menggunakan persamaan  $|J - rI| = 0$

$$\begin{vmatrix} -\varepsilon - \beta_1 - r & \lambda_2 P_C^* & j_{13} & 0 \\ 0 & -\varepsilon - A - r & 0 & B \\ \beta_1 & -\lambda_2 P_C^* & j_{33} & 0 \\ 0 & A & 0 & -\varepsilon - B - r \end{vmatrix} = 0, \quad (3.23)$$

dengan,

$$j_{13} = \lambda_1 + m \lambda_4 + \lambda_2 R^*,$$

$$j_{33} = -\varepsilon - \lambda_1 - m \lambda_4 - \lambda_2 R^* - r.$$

Berdasarkan Lampiran 4 diperoleh persamaan karakteristik untuk matriks Jacobi  $J$  yaitu

$$-(\varepsilon + r)^2 (R^* \lambda_2 + m \lambda_4 + \lambda_1 + \varepsilon + \beta_1 + r)(A + B + \varepsilon + r) = 0, \quad (3.24)$$

sehingga diperoleh nilai eigen matriks  $J$  sebagai berikut  $r_{1,2} = -\varepsilon$ ,

$$r_3 = -(R^* \lambda_2 + m \lambda_4 + \lambda_1 + \varepsilon + \beta_1),$$

$$r_4 = -(A + B + \varepsilon).$$

Oleh karena semua nilai eigen matriks  $J$  bernilai negatif, maka berdasarkan Teorema 2.3.2, titik kesetimbangan untuk kasus ini bersifat stabil asimtotik.

Berdasarkan uraian sebelumnya model dinamika pelanggan untuk kasus *static social network* dapat dinyatakan dalam Teorema 3.2 berikut.

**Teorema 3.2** (*Static social network*) Misal  $\varepsilon > 0$ ,  $\lambda_2 > 0$ ,  $\lambda_3 + m \lambda_4 \neq 0$ ,  $\lambda_1 + m \lambda_4 \neq 0$ , dan  $\lambda_5 = \lambda_7 = 0$  terdapat solusi titik kesetimbangan  $(R^*, C^*, P_R^*, P_C^*)$  yang stabil asimtotik lokal dan didefinisikan oleh

$$R^* = \frac{\alpha \gamma}{2\varepsilon} - \theta + \sqrt{\left(\theta + \frac{\alpha \gamma}{2\varepsilon}\right)^2 - \frac{\alpha \gamma (\varepsilon + \beta_2)}{\varepsilon (\lambda_2 + m_R \lambda_6)}}. \quad (3.25)$$

$$C^* = \frac{(1 - \alpha) \gamma}{\varepsilon} \left( \frac{\lambda_1 + m \lambda_4 + \lambda_2 R^*}{\varepsilon + \beta_1 + \lambda_1 + m \lambda_4 + \lambda_2 R^*} \right),$$

$$P_R^* = \frac{\alpha \gamma}{\varepsilon} - R^* \text{ dan } P_C^* = \frac{\gamma(1 - \alpha)}{\varepsilon} - C^*, \text{ dengan}$$

$$\theta = \frac{\lambda_3 + m \lambda_4 + \beta_2 + \varepsilon}{2(\lambda_2 + m_R \lambda_6)}. \quad (3.26)$$



### 3.3 Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan *Word of Mouth*

*Word of mouth* adalah kondisi ketika semua usaha pemasaran berhubungan dengan *Referral*. Pada kasus ini diasumsikan bahwa  $\lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_7 = 0$ . Berdasarkan asumsi tersebut maka sistem (2.9) menjadi

$$C' = -(\varepsilon + \beta_1)C + \lambda_2 R P_C, \quad (3.27a)$$

$$R' = -(\varepsilon + \beta_2)R + (\lambda_2 + m_R \lambda_6) R P_R, \quad (3.27b)$$

$$P_C' = (1 - \alpha)\gamma + \beta_1 C - \varepsilon P_C - \lambda_2 R P_C, \quad (3.27c)$$

$$P_R' = \alpha\gamma + \beta_2 R - \varepsilon P_R - (\lambda_2 + m_R \lambda_6) R P_R. \quad (3.27d)$$

Selanjutnya ditentukan titik kesetimbangan sistem (3.27). Titik kesetimbangan sistem diperoleh jika

$$\frac{dC}{dt} = \frac{dR}{dt} = \frac{dP_C}{dt} = \frac{dP_R}{dt} = 0.$$

dari persamaan (3.27b) diperoleh

$$((\lambda_2 + m_R \lambda_6) P_R^* - \varepsilon - \beta_2) R^* = 0, \quad (3.28)$$

sehingga terdapat dua kemungkinan yaitu  $R^* = 0$  atau  $((\lambda_2 + m_R \lambda_6) P_R^* - \varepsilon - \beta_2) = 0$ .

Dari persamaan (3.27a), (3.27c), dan (3.27d) untuk  $R^* = 0$  diperoleh

$$\begin{aligned} C^* &= 0, \\ P_C^* &= \frac{(1 - \alpha)\gamma}{\varepsilon}, \\ P_R^* &= \frac{\alpha\gamma}{\varepsilon}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

sedangkan untuk  $((\lambda_2 + m_R \lambda_6) P_R^* - \varepsilon - \beta_2) = 0$  diperoleh

$$P_R^* = \frac{\varepsilon + \beta_2}{\lambda_2 + m_R \lambda_6}.$$

Dari persamaan (3.27d) diperoleh

$$\begin{aligned} \alpha\gamma + \beta_2 R^* - (\varepsilon(\lambda_2 + m_R \lambda_6) R^*) P_R^* &= 0, \\ \alpha\gamma + \beta_2 R^* - (\varepsilon(\lambda_2 + m_R \lambda_6) R^*) \frac{\varepsilon + \beta_2}{\lambda_2 + m_R \lambda_6} &= 0, \\ \alpha\gamma(\lambda_2 + m_R \lambda_6) - \varepsilon(\varepsilon + \beta_2) &= (\lambda_2 + m_R \lambda_6) \varepsilon R^*, \end{aligned} \quad (3.30)$$

sehingga

$$\begin{aligned} R^* &= \frac{\alpha\gamma(\lambda_2 + m_R\lambda_6) - \varepsilon(\varepsilon + \beta_2)}{\varepsilon(\lambda_2 + m_R\lambda_6)}, \\ &= \frac{\alpha\gamma}{\varepsilon} \left( 1 - \frac{\varepsilon(\varepsilon + \beta_2)}{\alpha\gamma(\lambda_2 + m_R\lambda_6)} \right). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Misalkan  $\tau = \frac{\alpha\gamma(\lambda_2 + m_R\lambda_6)}{\varepsilon(\varepsilon + \beta_2)}$ , persamaan (3.31) menjadi

$$R^* = \frac{\alpha\gamma}{\varepsilon} \left( 1 - \frac{1}{\tau} \right). \quad (3.32)$$

Dari persamaan (3.27a) diperoleh

$$\begin{aligned} -(\varepsilon + \beta_1)C^* + \lambda_2 R^* P_C^* &= 0, \\ \lambda_2 R^* P_C^* &= (\varepsilon + \beta_1)C^*, \\ C^* &= \frac{\lambda_2 R^* P_C^*}{(\varepsilon + \beta_1)}, \\ P_C^* &= \frac{(\varepsilon + \beta_1)C^*}{\lambda_2 R^*}, \end{aligned} \quad (3.33)$$

dengan mensubstitusikan  $C^*$  (3.33) ke persamaan (3.27c) diperoleh

$$\begin{aligned} (1 - \alpha)\gamma + \beta_1 C^* - (\varepsilon + \lambda_2 R^*) P_C^* &= 0, \\ (1 - \alpha)\gamma - (\varepsilon + \lambda_2 R^*) P_C^* &= -\beta_1 C^*, \\ \frac{-(1 - \alpha)\gamma + (\varepsilon + \lambda_2 R^*) P_C^*}{\beta_1} &= C^*, \\ \frac{-(1 - \alpha)\gamma + (\varepsilon + \lambda_2 R^*) P_C^*}{\beta_1} &= \frac{\lambda_2 R^* P_C^*}{(\varepsilon + \beta_1)}, \\ (-(1 - \alpha)\gamma) + (\varepsilon + \lambda_2 R^*) P_C^* (\varepsilon + \beta_1) &= \lambda_2 R^* P_C^* \beta_1, \\ -\gamma\alpha - \gamma\beta_1 + \alpha\gamma\varepsilon + \alpha\gamma\beta_1 + \varepsilon^2 P_C^* \\ + \varepsilon\beta_1 P_C^* + \lambda_2 R^* \varepsilon P_C^* + \lambda_2 R^* \beta_1 P_C^* &= \lambda_2 R^* P_C^* \beta_1, \end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned} P_C^* &= \frac{-\gamma(\varepsilon + \beta_1)(1 - \alpha)}{-\varepsilon(\varepsilon + \beta_1 + \lambda_2 R^*)}, \\ &= \frac{\gamma(\varepsilon + \beta_1)(1 - \alpha)}{\varepsilon(\varepsilon + \beta_1 + \lambda_2 R^*)}, \\ &= \frac{\gamma(\varepsilon + \beta_1)(1 - \alpha)}{\varepsilon(\varepsilon + \beta_1 + \frac{\lambda_2 \alpha \gamma (1 - \frac{1}{\tau})}{\varepsilon})}, \end{aligned} \quad (3.34)$$

dan berdasarkan persamaan (3.27c) diperoleh

$$P_C^* = \frac{(1 - \alpha)\gamma + \beta_1 C^*}{(\varepsilon + \lambda_2 R^*)}. \quad (3.35)$$

Selanjutnya dengan mensubstitusikan  $P_C^*$  (3.33) ke persamaan (3.35) diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{(1 - \alpha)\gamma + \beta_1 C^*}{(\varepsilon + \lambda_2 R^*)} &= \frac{(\varepsilon + \beta_1)C^*}{\lambda_2 R^*}, \\ ((1 - \alpha)\gamma + \beta_1 C^*)\lambda_2 R^* &= (\varepsilon + \beta_1)(\varepsilon + \lambda_2 R^*)C^*, \\ C^* &= \frac{(1 - \alpha)\gamma\lambda_2 \frac{\alpha\gamma}{\varepsilon} (1 - \frac{1}{\tau})}{(\varepsilon^2 + \varepsilon\lambda_2 R^* + \varepsilon\beta_1)}, \\ &= \frac{\alpha(1 - \alpha)\lambda_2\gamma^2(1 - \frac{1}{\tau})}{\varepsilon^2(\varepsilon + \beta_1 + \lambda_2 R^*)}, \\ &= \frac{\alpha(1 - \alpha)\lambda_2\gamma^2(1 - \frac{1}{\tau})}{\varepsilon^2(\varepsilon + \beta_1 + \frac{\lambda_2\alpha\gamma(1 - \frac{1}{\tau})}{\varepsilon})}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Berdasarkan uraian yang diberikan sebelumnya, diperoleh dua hal berikut:

1. titik kesetimbangan untuk  $R^* = 0$  yang disebut titik kesetimbangan bebas pelanggan yaitu

$$(C_1^*, R_1^*, P_{C,1}^*, P_{R,1}^*) = \left(0, 0, \frac{\gamma(1 - \alpha)}{\varepsilon}, \frac{\gamma\alpha}{\varepsilon}\right),$$

2. titik kesetimbangan untuk  $((\lambda_2 + m_R\lambda_6)P_R^* - \varepsilon - \beta_2) = 0$  yang disebut titik kesetimbangan dengan pelanggan yaitu

$$\begin{aligned} (C_2^*, R_2^*, P_{C,2}^*, P_{R,2}^*) &= \left( \frac{\alpha(1 - \alpha)\lambda_2\gamma^2(1 - \frac{1}{\tau})}{\varepsilon^2(\varepsilon + \beta_1 + \frac{\lambda_2\alpha\gamma(1 - \frac{1}{\tau})}{\varepsilon})}, \frac{\alpha\gamma}{\varepsilon}(1 - \frac{1}{\tau}), \right. \\ &\quad \left. \frac{\gamma(\varepsilon + \beta_1)(1 - \alpha)}{\varepsilon(\varepsilon + \beta_1 + \frac{\lambda_2\alpha\gamma(1 - \frac{1}{\tau})}{\varepsilon})}, \frac{\varepsilon + \beta_2}{\lambda_2 + m_R\lambda_6} \right). \end{aligned}$$

Selanjutnya ditentukan kestabilan lokal titik kesetimbangan untuk kasus *word of mouth*. Berdasarkan sistem (3.27) diketahui bahwa sistem tersebut merupakan sistem nonlinear. Oleh karena itu, kestabilan titik kesetimbangan diperoleh dengan melakukan linearisasi sistem (3.27). Berdasarkan solusi titik kesetimbangan sistem (3.27) diperoleh matriks Jacobi sebagai berikut

$$J = \begin{bmatrix} -\varepsilon - \beta_1 & \lambda_2 P_C^* & \lambda_2 R^* & 0 \\ 0 & (\lambda_2 + m_R \lambda_6) P_R^* & 0 & (\lambda_2 + m_R \lambda_6) R^* \\ \beta_1 & -\lambda_2 R^* & -\varepsilon - \lambda_2 R^* & 0 \\ 0 & j_{42} & 0 & j_{44} \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

dengan

$$j_{42} = \beta_2 - (\lambda_2 + m_R \lambda_6) P_R^*,$$

$$j_{44} = -\varepsilon - (\lambda_2 + m_R \lambda_6) R^*.$$

Untuk titik kesetimbangan  $(C_1^*, R_1^*, P_{C,1}^*, P_{R,1}^*)$  diperoleh,

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} -\varepsilon - \beta_1 & \lambda_2(1 - \alpha)\frac{\gamma}{\varepsilon} & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon - \beta_2 + (\lambda_2 + m_R \lambda_6)\frac{\gamma\alpha}{\varepsilon} & 0 & 0 \\ \beta_1 & -\lambda_2(1 - \alpha)\frac{\gamma}{\varepsilon} & -\varepsilon & 0 \\ 0 & \beta_2 - (\lambda_2 + m_R \lambda_6)\frac{\gamma\alpha}{\varepsilon} & 0 & -\varepsilon \end{bmatrix}, \quad (3.38)$$

Selanjutnya dengan menggunakan persamaan  $|J(E_0) - rI| = 0$

$$\begin{vmatrix} -\varepsilon - \beta_1 - r & \lambda_2(1 - \alpha)\frac{\gamma}{\varepsilon} & 0 & 0 \\ 0 & j_{22} & 0 & 0 \\ \beta_1 & -\lambda_2(1 - \alpha)\frac{\gamma}{\varepsilon} & -\varepsilon - r & 0 \\ 0 & j_{42} & 0 & -\varepsilon - r \end{vmatrix} = 0, \quad (3.39)$$

dengan

$$j_{22} = -\varepsilon - \beta_2 + (\lambda_2 + m_R \lambda_6)\frac{\gamma\alpha}{\varepsilon} - r,$$

$$j_{42} = \beta_2 - (\lambda_2 + m_R \lambda_6)\frac{\gamma\alpha}{\varepsilon},$$

diperoleh persamaan karakteristik,

$$\frac{(-\varepsilon^2 + (-\beta_2 - r)\varepsilon + (\lambda_2 + m_R \lambda_6)\alpha\gamma)(r + \varepsilon + \beta_1)(r + \varepsilon)^2}{\varepsilon} = 0. \quad (3.40)$$

Berdasarkan persamaan (3.40) diperoleh nilai eigen sebagai berikut,

$$r_{1,2} = -\varepsilon,$$

$$r_3 = -\beta_1 - \varepsilon,$$

$$r_4 = \frac{\alpha\gamma(\lambda_2 + m_R\lambda_6)}{\varepsilon} - (\beta_2 + \varepsilon).$$

Jika  $r_4 \leq 0$  maka  $\tau \leq 1$  dan jika  $r_4 > 0$  maka  $\tau > 1$ . Berdasarkan syarat tersebut maka titik kesetimbangan  $(C_1^*, R_1^*, P_{C,1}^*, P_{R,1}^*)$  bersifat stabil lokal jika  $\tau \leq 1$  dan tak stabil jika  $\tau > 1$ .

Untuk titik kesetimbangan  $(C_2^*, R_2^*, P_{C,2}^*, P_{R,2}^*)$  diperoleh matriks Jacobi,

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} -\varepsilon - \beta_1 & \lambda_2 P_{C,2}^* & \lambda_2 R_2^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda_2 + m_R\lambda_6)R_2^* \\ \beta_1 & -\lambda_2 P_{C,2}^* & -\varepsilon - \lambda_2 R_2^* & 0 \\ 0 & -\varepsilon & 0 & -\varepsilon - (\lambda_2 + m_R\lambda_6)R_2^* \end{bmatrix}. \quad (3.41)$$

Selanjutnya dengan menggunakan persamaan  $|J(E_1) - rI| = 0$

$$\begin{vmatrix} -\varepsilon - \beta_1 - r & \lambda_2 P_{C,2}^* & \lambda_2 R_2^* & 0 \\ 0 & -r & 0 & j_{24} \\ \beta_1 & -\lambda_2 P_{C,2}^* & j_{33} & 0 \\ 0 & -\varepsilon & 0 & j_{44} \end{vmatrix} = 0, \quad (3.42)$$

dengan,

$$j_{24} = (\lambda_2 + m_R\lambda_6)R_2^*,$$

$$j_{33} = -\varepsilon - \lambda_2 R_2^* - r,$$

$$j_{44} = -\varepsilon - (\lambda_2 + m_R\lambda_6)R_2^* - r.$$

diperoleh persamaan karakteristik untuk matriks Jacobi  $J(E_1)$  sebagai berikut,

$$(r + (m_R\lambda_6 + \lambda_2)R_2^*)(\varepsilon + r)^2(\lambda_2 R_2^* + \beta_1 + \varepsilon + r) = 0. \quad (3.43)$$

Dari persamaan (3.43) diperoleh nilai eigen

$$r_{1,2} = -\varepsilon,$$

$$r_3 = -(\beta_1 + \varepsilon + \lambda_2 R_2^*),$$

$$r_4 = -(\lambda_2 + m_R\lambda_6)R_2^*.$$

Oleh karena semua nilai eigen negatif, maka titik kesetimbangan  $(C_2^*, R_2^*, P_{C,2}^*, P_{R,2}^*)$  bersifat stabil asimtotik lokal. Detail perhitungan (3.40) dan (3.43) dapat dilihat pada Lampiran 5.

Berdasarkan uraian sebelumnya, model dinamika pelanggan untuk kasus *word of mouth* dapat dinyatakan dalam Teorema 3.3 berikut

**Teorema 3.3** (*Word of mouth*) Sistem (2.9) dengan  $\varepsilon > 0, \lambda_2 > 0$ , dan  $\lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_7 = 0$ ,

1. jika  $\tau \leq 1$  terdapat satu titik kesetimbangan yang stabil lokal

$$(C^*, R^*, P_C^*, P_R^*) = \left( 0, 0, \frac{\gamma(1-\alpha)}{\varepsilon}, \frac{\gamma\alpha}{\varepsilon} \right),$$

2. jika  $\tau > 1$  terdapat dua titik kesetimbangan. Titik kesetimbangan yang tak stabil

$$(C_1^*, R_1^*, P_{C,1}^*, P_{R,1}^*) = \left( 0, 0, \frac{\gamma(1-\alpha)}{\varepsilon}, \frac{\gamma\alpha}{\varepsilon} \right),$$

dan titik kesetimbangan yang stabil asimtotik lokal

$$(C_2^*, R_2^*, P_{C,2}^*, P_{R,2}^*) = \left( \frac{\alpha(1-\alpha)\lambda_2\gamma^2(1-\frac{1}{\tau})}{\varepsilon^2(\varepsilon + \beta_1 + \frac{\lambda_2\alpha\gamma(1-\frac{1}{\tau})}{\varepsilon})}, \frac{\alpha\gamma}{\varepsilon}(1-\frac{1}{\tau}), \frac{\gamma(\varepsilon + \beta_1)(1-\alpha)}{\varepsilon(\varepsilon + \beta_1 + \frac{\lambda_2\alpha\gamma(1-\frac{1}{\tau})}{\varepsilon})}, \frac{\varepsilon + \beta_2}{\lambda_2 + m_R\lambda_6} \right).$$

### 3.4 Simulasi Numerik

Pada subbab ini disajikan hasil simulasi numerik model dinamika pelanggan yang disimulasikan untuk dua jenis simulasi yang berbeda. Simulasi yang pertama adalah simulasi numerik untuk sistem awal (2.9) dengan nilai  $m_R$  dan  $m$  yang berbeda, sedangkan simulasi yang kedua adalah simulasi numerik model dinamika pelanggan untuk sistem awal, *static social network*, dan *word of mouth*. Simulasi numerik dilakukan dengan metode Runge Kutta Orde 4 menggunakan *software* MATLAB yang dapat dilihat pada Lampiran 6. Nilai parameter yang digunakan untuk simulasi ini dapat dilihat pada Tabel 3.1 berikut.

**Tabel 3.1: Nilai parameter yang digunakan untuk simulasi numerik**

Parameter	Nilai
$\alpha, \varepsilon$	0.01
$\gamma$	$\varepsilon N_0$
$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_6, \lambda_7$	0.0002
$\lambda_5$	$\lambda_7 R_0 / C_0$
$\beta_1, \beta_2$	0.18

Nilai awal yang digunakan adalah  $C_0 = 2200$ ,  $P_{C,0} = 22000$ ,  $R_0 = 20$ ,  $P_{R,0} = 200$ . Nilai  $\beta_1$  dan  $\beta_2$  berdasarkan asumsi yang biasa digunakan untuk tingkat *defection* pelanggan. Asumsi  $\lambda_5 C_0 = \lambda_7 R_0$  dan  $\lambda_5 P_{C,0} = \lambda_7 P_{R,0}$  digunakan untuk memastikan bahwa jaringan sosial yang mendasari belum memiliki kecenderungan awal untuk memperoleh keuntungan dari keempat kompartemen. Nilai parameter yang digunakan pada simulasi numerik ini berdasarkan Silva., dkk (2016).

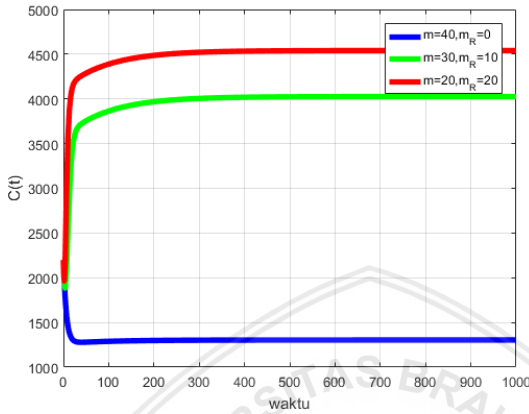
### 3.4.1 Simulasi numerik untuk sistem awal dengan nilai $m_R$ dan $m$ yang berbeda

Simulasi ini dilakukan dengan membandingkan tiga nilai  $m$  dan  $m_R$  yang berbeda. Total nilai  $m$  dan  $m_R$  yang digunakan adalah 40, dengan  $m$  menyatakan biaya untuk pemasaran tanpa pembeda sedangkan  $m_R$  menyatakan biaya pemasaran oleh *Referral*. Nilai parameter yang digunakan sesuai dengan nilai parameter yang ditunjukkan pada Tabel 3.1. Berdasarkan nilai parameter tersebut diperoleh titik kesetimbangan untuk sistem awal (2.9) sebagai berikut.

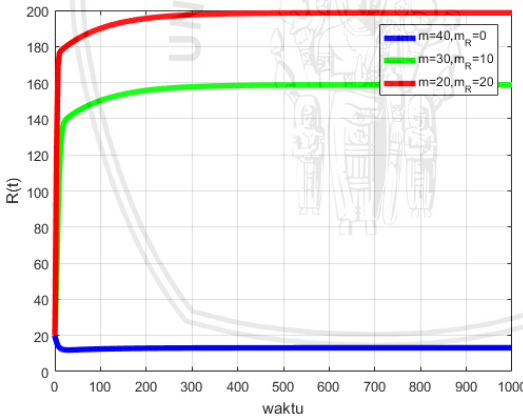
1. Untuk nilai  $m = 40$  dan  $m_R = 0$  diperoleh,  
 $(C^*, R^*, P_C^*, P_R^*) = (1303.5, 13.1391, 22873, 230.5812)$ ,
2. untuk nilai  $m = 30$  dan  $m_R = 10$  diperoleh,  
 $(C^*, R^*, P_C^*, P_R^*) = (4025.8, 158.7940, 210141, 84.8627)$ ,
3. untuk nilai  $m = 20$  dan  $m_R = 20$  diperoleh,  
 $(C^*, R^*, P_C^*, P_R^*) = (4540.6, 198.6713, 1963.6, 45.0491)$ .

Pada Gambar 3.1 dan 3.2 ditunjukkan grafik solusi *Customer* dan *Referral* sistem (2.9) dengan waktu  $t = 0$  sampai dengan  $t = 1000$ . Hasil simulasi numerik menunjukkan bahwa dengan nilai

awal yang diberikan, grafik solusi menuju titik kesetimbangan  $(C^*, R^*, P_C^*, P_R^*)$  yang berarti bahwa titik kesetimbangan  $(C^*, R^*, P_C^*, P_R^*)$  bersifat stabil asimtotik lokal.



Gambar 3.1: Grafik perubahan jumlah *Customer* dengan nilai  $m$  dan  $m_R$  yang berbeda



Gambar 3.2: Grafik perubahan jumlah *Referral* dengan nilai  $m$  dan  $m_R$  yang berbeda

Jumlah *Customer* maupun *Referral* pada Gambar 3.1 dan 3.2 tanpa adanya usaha dari *Referral* mengalami penurunan dan kemudian konstan seiring berjalannya waktu. Selanjutnya ketika nilai  $m_R = 10$  dan  $m = 30$ , jumlah *Customer* maupun *Referral* mengalami peningkatan dan kemudian konstan. Untuk nilai



$m = m_R = 20$  atau ketika usaha pemasaran tanpa pembeda sebanding dengan usaha *Referral*, jumlah *Customer* dan *Referral* mengalami peningkatan yang lebih besar dibandingkan ketika nilai  $m_R = 10$ . Hal ini dapat diartikan bahwa dengan adanya usaha dari *Referral* jumlah pelanggan mengalami peningkatan, sehingga usaha dari *Referral* memiliki peran penting untuk meningkatkan jumlah pelanggan pada suatu perusahaan.

### 3.4.2 Simulasi numerik untuk sistem awal, *static social network*, dan *word of mouth*

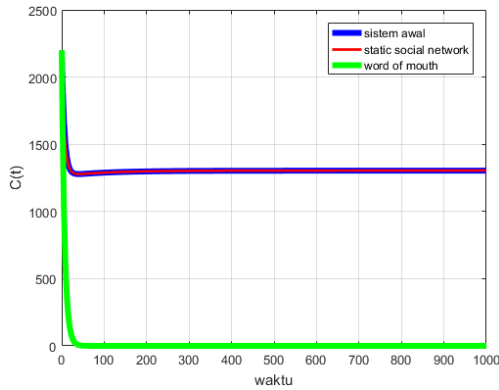
Simulasi ini dilakukan dengan membandingkan sistem awal (2.9), *static social network*, dan *word of mouth*. Berdasarkan nilai parameter pada Tabel 3.1 dengan nilai  $m = 40$  dan  $m_R = 0$  untuk sistem awal diperoleh titik kesetimbangan  $(C^*, R^*, P_C^*, P_R^*) = (1303.5, 13.1391, 22873, 230.5812)$ , untuk kasus *static social network* diperoleh titik kesetimbangan  $(C^*, R^*, P_C^*, P_R^*) = (1304.3, 13.1743, 22872, 231.0246)$ , dan untuk kasus *word of mouth* diperoleh,

$$\tau = \frac{\alpha\gamma(\lambda_2 + m_R\lambda_6)}{\varepsilon(\varepsilon + \beta_2)} = 0.2571 < 1,$$

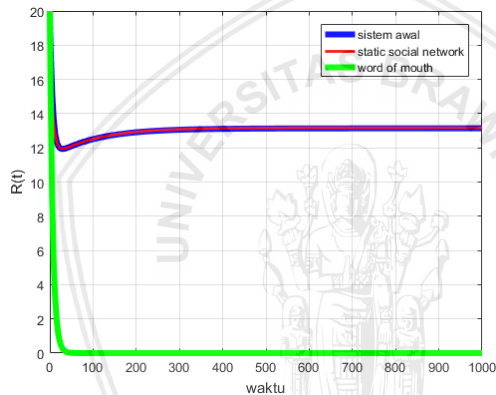
sehingga diperoleh titik kesetimbangan bebas pelanggan,

$$(C_{1}^*, R_{1}^*, P_{C,1}^*, P_{R,1}^*) = (0, 0, 24175.8, 244.2).$$

Grafik solusi dengan nilai awal (2200, 20, 22000, 200) untuk sistem awal menuju titik kesetimbangan  $(C^*, R^*, P_C^*, P_R^*)$  yang menunjukkan bahwa titik kesetimbangan  $(C^*, R^*, P_C^*, P_R^*)$  bersifat stabil asimtotik lokal. Grafik solusi untuk kasus *static social network* dengan nilai awal yang sama menuju titik kesetimbangan  $(C^*, R^*, P_C^*, P_R^*)$  yang berarti bahwa titik kesetimbangan  $(C^*, R^*, P_C^*, P_R^*)$  kasus *static social network* bersifat stabil asimtotik lokal. Grafik solusi kasus *word of mouth* untuk  $\tau < 1$  menuju di sekitar titik kesetimbangan bebas pelanggan  $(C_{1}^*, R_{1}^*, P_{C,1}^*, P_{R,1}^*)$ , sehingga titik kesetimbangan bebas pelanggan bersifat stabil lokal. Grafik perubahan jumlah pelanggan dengan nilai  $m_R = 0$  dapat dilihat pada Gambar 3.3 dan 3.4.



Gambar 3.3: Grafik perubahan jumlah *Customer* untuk  $m_R = 0$



Gambar 3.4: Grafik perubahan jumlah *Referral* untuk  $m_R = 0$

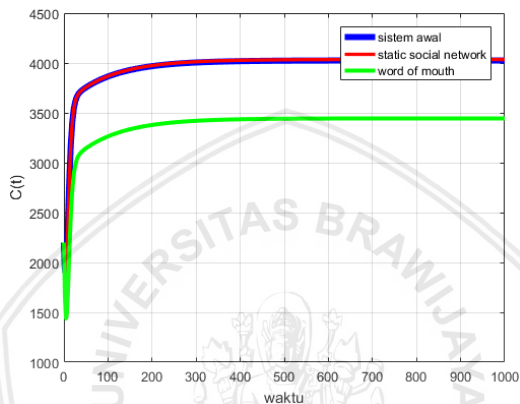
Simulasi numerik dengan nilai parameter seperti pada Tabel 3.1 dan nilai  $m = 30$  serta  $m_R = 10$  untuk sistem awal diperoleh titik kesetimbangan  $(C^*, R^*, P_C^*, P_R^*) = (4025.8, 158.7940, 21050, 84.9264)$ . Untuk kasus *static social network* diperoleh titik kesetimbangan  $(C^*, R^*, P_C^*, P_R^*) = (4035.2, 159.3362, 20141, 84.8627)$  dan untuk kasus *word of mouth* diperoleh,

$$\tau = \frac{\alpha\gamma(\lambda_2 + m_R\lambda_6)}{\varepsilon(\varepsilon + \beta_2)} = 2.8276 > 1,$$

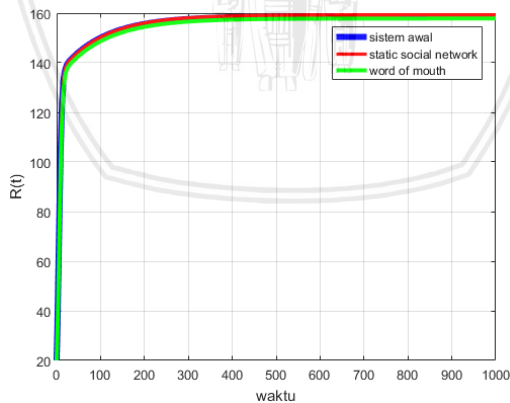
sehingga diperoleh titik kesetimbangan dengan pelanggan,

$$(C_{2,2}^*, R_{2,2}^*, P_{C,2}^*, P_{R,2}^*) = (3444.4, 157.8352, 20731, 86.3637).$$

Gambar 3.5 dan 3.6 dengan nilai awal yang sama menunjukkan bahwa grafik solusi untuk sistem awal dan kasus *static social network* menuju titik kesetimbangan  $(C^*, R^*, P_C^*, P_R^*)$ , sehingga titik kesetimbangan nilai awal dan *static social network* bersifat stabil asimtotik lokal. Grafik solusi kasus *word of mouth* untuk  $\tau > 1$  menuju titik kesetimbangan dengan pelanggan  $(C_2^*, R_2^*, P_{C,2}^*, P_{R,2}^*)$  yang menunjukkan bahwa titik kesetimbangan dengan pelanggan bersifat stabil asimtotik lokal.



Gambar 3.5: Grafik perubahan jumlah *Customer* untuk nilai  $m_R = 10$



Gambar 3.6: Grafik perubahan jumlah *Referral* untuk nilai  $m_R = 10$

Pada Gambar 3.3 dan 3.4 dapat dilihat bahwa jumlah pelanggan mengalami penurunan karena tidak ada usaha pemasaran yang dilakukan oleh *Referral*, sedangkan pada Gambar 3.5 dan 3.6 jumlah pelanggan mengalami peningkatan karena adanya usaha pemasaran oleh *Referral*. Hal ini dapat diartikan bahwa usaha pemasaran oleh *Referral* berpengaruh terhadap perubahan jumlah pelanggan pada suatu perusahaan.



## BAB IV PENUTUP

### 4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada bab sebelumnya, dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. Model dinamika pelanggan memiliki paling banyak tiga titik kesetimbangan.  $(C^*, R^*, P_C^*, P_R^*)$  adalah titik kesetimbangan model dinamika pelanggan dengan  $R^*$  merupakan solusi nonnegatif dari persamaan polinomial pangkat tiga.
2. Titik kesetimbangan  $(C^*, R^*, P_C^*, P_R^*)$  untuk kasus *static social network* bersifat stabil asimtotik lokal, sedangkan untuk kasus *word of mouth* terdapat dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas pelanggan  $(C_1^*, R_1^*, P_{C,1}^*, P_{R,1}^*)$  dan titik kesetimbangan dengan pelanggan  $(C_2^*, R_2^*, P_{C,2}^*, P_{R,2}^*)$ . Titik kesetimbangan bebas pelanggan bersifat stabil lokal saat  $\tau \leq 1$ , sedangkan saat  $\tau > 1$   $(C_1^*, R_1^*, P_{C,1}^*, P_{R,1}^*)$  bersifat tak stabil dan titik kesetimbangan dengan pelanggan  $(C_2^*, R_2^*, P_{C,2}^*, P_{R,2}^*)$  bersifat stabil asimtotik lokal.
3. Hasil simulasi numerik sesuai dengan hasil analitik. Hasil simulasi numerik menunjukkan bahwa usaha pemasaran oleh *Referral* memiliki peran penting untuk meningkatkan jumlah pelanggan dalam suatu perusahaan.

### 4.2 Saran

Pada skripsi ini hanya dibahas analisis dinamik model dinamika pelanggan dengan kondisi statis. Pada penelitian selanjutnya, dapat dilakukan analisis model dinamika pelanggan untuk kondisi dinamis.



## DAFTAR PUSTAKA

- Artzrouni, M. dan F. Tramontana. 2014. The Debt Trap: A Two-compartment Train Wreck and How to Avoid it. *Journal of Policy Modeling*. 36:241-256.
- Boyce, W. E. dan DiPrima, R. C. 2012. *Elementary Differential Equation*. Tenth Edition. John Wiley and Sons, Inc. United State of America.
- Finizio, N. dan G. Ladas. 1982. *An Introduction to Differential Equation*. Wadsworth Publishing Company Belmont. California.
- Kiss, C. dan M. Bichler. 2008. Identification of Influencers-Measuring Influence in Customer Networks. *Decision Support Systems*. 46:233-253.
- Kotler, P. dan G. Armstrong. 1997. *Dasar-dasar Pemasaran*. Edisi Bahasa Indonesia. Terjemahan Alexander Sindoro. Prenhallindo. Jakarta.
- Kotler, P. dan K. L. Keller. 2009. *Manajemen Pemasaran*. Edisi Ketiga Belas. Terjemahan Bob Sabran. Penerbit Erlangga. Jakarta.
- Kumar. V., L. Aksoy., B. Donkers., R. Venkatesan., T. Wiesel., dan S. Tillmanns. 2010. Undervalued or Overvalued Customers: Capturing Total Customer Engagement Value. *Journal of Service Research*. 13:297-310.
- Kumar. V., J. A. Petersen., dan R. P. Leone. 2010. Driving Profitability by Encouraging Customer Referrals: Who, When, and How. *Journal of Marketing*. 74:1-17.
- Lin, L. 2008. Stabilization Analysis for Economic Compartmental Switched System Based On Quadratic Lyapunov Function. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*. 2:1187-1197.

repository.ub.ac.id

Nagle, R. K., E. B. Saff., dan A. D. Snider. 2012. *Fundamentals of Differential Equations*. Eight Edition. Pearson Education, Inc. Boston.

Silva, C. M., S. Rosa., H. Alves., dan P. G. Carvalho. 2016. A Mathematical Model for the Customer Dynamics based on Marketing Policy. *Applied Mathematics and Computation*. 273:42-53.

Tramontana, F. 2010. Economics as A Compartmental System: A Simple Macroeconomic Example. *International Review of Economics*. 57:347-360.

