IDEAL *I*- PRIMA

SKRIPSI

Oleh:

HARUN MEGA PRATAMA
(145090400111008)

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2018

repository.ub.ac.id
UNIVERSITAS BRAWIJAYA

IDEAL *I*- PRIMA

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Matematika

SKRIPSI

Oleh:
HARUN MEGA PRATAMA
145090400111008

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2018

repository.ub.ac.id
UNIVERSITAS BRAWIJAYA

repository.ub.ac.id

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

IDEAL *I*- PRIMA

Oleh:
HARUN MEGA PRATAMA
145090400111008

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji
pada tanggal 17 Juli 2018
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Matematika

Pembimbing

Dra. Ari Andari, MS
NIP. 196105161987012001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si.,M.Si, Ph.D.
NIP. 197509082000031003

UNIVERSITAS BRAWIJAYA

repository.ub.ac.id

UNIVERSITAS BRAWIJAYA

repository.ub.ac.id

LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	**:**	**Harun Mega Pratama**
NIM	**:**	**145090400111008**
Penulis Skripsi berjudul	**:**	**Ideal *I*- Prima**

dengan ini menyatakan bahwa:

1. **Isi Skripsi yang saya buat adalah benar-benar karya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain, selain nama-nama yang termasuk di isi dan tertulis di Daftar Pustaka dalam Skripsi ini.**
2. **Apabila di kemudian hari ternyata Skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala risiko yang akan saya terima. Demikian pernyataan ini dibuat dengan penuh kesadaran.**

Malang, 17 Juli 2018
yang menyatakan,

<u>Harun Mega Pratama</u>
NIM 145090400111008

UNIVERSITAS BRAWIJAYA

IDEAL *I*- PRIMA

ABSTRAK

Pada skripsi ini, diperkenalkan perluasan baru dari ideal prima lemah yang disebut ideal I- prima. Misalkan R adalah ring komutatif dengan elemen satuan dan I adalah ideal dari R. Ideal sejati P dari R disebut ideal I- prima jika untuk setiap $a, b \in R$ dengan $ab \in P - IP$, maka berlaku $a \in P$ atau $b \in P$. Akan disajikan beberapa sifat dari ideal I- prima dan mempelajari bentuknya. Selain itu, akan disajikan kondisi di mana ideal I- prima menjadi ideal prima atau ideal prima lemah dan mengkontruksikan ideal I- prima dalam ring yang terdekomposisi.

Kata kunci: *ideal prima, ideal prima lemah, almost prime ideal, radikal dari ideal, ideal I-prima.*

repository.ub.ac.id
UNIVERSITAS BRAWIJAYA

repository.ub.ac.id

UNIVERSITAS BRAWIJAYA

I-PRIME IDEALS

ABSTRACT

In this essay, we introduce a new generalization of weakly prime ideals called I-prime ideal. Suppose R is a commutative ring with identity and I a fixed ideal of R. A proper ideal P of R is I-prime ideal if for all $a, b \in R$ with $ab \in P - IP$ implies $a \in P$ or $b \in P$. We give some characterizations of I-prime ideal and study some of its properties. Moreover, we give conditions under which I-prime ideal becomes prime ideal or weakly prime ideal and we construct the view of I-prime ideal in decomposite rings.

Keywords: *prime ideal, weakly prime ideal, almost prime ideal, radical of the ideal, I- prime ideal.*

repository.ub.ac.id
UNIVERSITAS BRAWIJAYA

repository.ub.ac.id
UNIVERSITAS BRAWIJAYA

repository.ub.ac.id

KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul **IDEAL *I*- PRIMA** dengan baik dan lancar. Shalawat serta salam selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW sebagai suri teladan bagi penulis.

Skripsi ini tidak dapat diselesaikan dengan baik tanpa bantuan, bimbingan, dan motivasi dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terimakasih kepada:

1. Dra. Ari Andari, MS., selaku dosen pembimbing skripsi yang tidak pernah lelah memberikan bimbingan, nasehat, kritik dan kesabaran saran serta selalu memotivasi penulis.
2. Dr. Noor Hidayat, M.Si., dan Drs. Bambang Sugandi, M.Si., selaku dosen penguji skripsi atas segala kritik dan saran untuk perbaikan skripsi ini.
3. Dr. Isnani Darti, S.Si., M.Si., selaku dosen penasihat akademik sekaligus Ketua Program Studi S1 Matematika yang selalu memberikan motivasi kepada penulis untuk menyelesaikan skripsi ini tepat waktu.
4. Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si., M.Si., Ph. D. selaku Ketua Jurusan Matematika atas segala bantuan yang diberikan.
5. Segenap dosen dan staf Jurusan Matematika atas ilmu dan pengalaman yang sangat bermanfaat bagi penulis.
6. Ayah (Alm. Maryanto), Ibu (Yanie Sutrisnawati), Kakak (A. Haris Mashabi), dan Adik-adik (Hanif Nur M., Hasna Atta S.), serta seluruh keluarga besar atas segala doa, bantuan, dukungan, dan semangat yang tiada henti diberikan selama ini kepada penulis.
7. Sahabat-sahabat seperjuangan serta seluruh teman-teman Keluarga Besar Matematika 2014 atas segala bantuan dan motivasinya.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA

8. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Semoga Allah SWT senantiasa memberikan anugerah dan barokah-Nya kepada semua pihak yang telah membantu menyelesaikan skripsi ini. Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih terdapat kekurangan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran yang bersifat membangun. Kritik dan saran yang diberikan dapat disampaikan melalui email ke alamat harunmgpratama@gmail.com. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi berbagai pihak, serta menjadi inspirasi bagi penulis skripsi selanjutnya.

Malang, 17 Juli 2018

Penulis

repository.ub.ac.id
UNIVERSITAS BRAWIJAYA

DAFTAR ISI

Halaman

repository.ub.ac.id
UNIVERSITAS BRAWIJAYA

repository.ub.ac.id

UNIVERSITAS BRAWIJAYA

DAFTAR TABEL

repository.ub.ac.id

UNIVERSITAS BRAWIJAYA

DAFTAR SIMBOL

Simbol	**Keterangan**
$\in$	Anggota atau elemen
$\notin$	Bukan anggota atau bukan elemen
$\mathbb{N}$	Himpunan bilangan asli
$\mathbb{Z}$	Himpunan bilangan bulat
$\mathbb{R}$	Himpunan bilangan real
$\mathbb{Z}_n$	Himpunan bilangan modulo n
$\bar{0}$	Bilangan modulo 0
$\subseteq$	Himpunan bagian
$\nsubseteq$	Bukan himpunan bagian
$\cap$	Irisan
$\cup$	Gabungan
e	Elemen satuan
a^{-1}	Elemen invers dari a
$\sqrt{\ }$	Radikal
R/I	Ring faktor

repository.ub.ac.id
UNIVERSITAS BRAWIJAYA

repository.ub.ac.id

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Ilmu aljabar merupakan salah satu bidang ilmu matematika yang telah berkembang sampai saat ini, karena banyak ilmuwan yang masih mengembangkan ilmu aljabar yang telah ada sebelumnya. Salah satu ilmu yang dipelajari dalam aljabar adalah struktur aljabar.

Struktur aljabar adalah suatu himpunan tidak kosong yang disertai dengan satu atau lebih operasi biner pada himpunannya. Ada beberapa macam struktur aljabar yang telah dipelajari misalkan grup, ring dan ideal, modul serta lain sebagainya. Dalam skripsi ini dibahas hal yang berkaitan dengan ring dan ideal. Ring merupakan suatu struktur aljabar dengan disertai dua operasi biner, misalkan operasi penjumlahan dan pergandaan yang memenuhi beberapa aksioma.

Di dalam ring terdapat suatu konsep atau teori yaitu ideal. Ideal merupakan suatu himpunan bagian dari ring yang merupakan subring terhadap operasi biner yang sama dengan ring dan pergandaan antara elemen di ring dan elemen di ideal. Ideal dalam ring memiliki beragam jenis di antaranya adalah ideal pokok, ideal prima serta lain sebagainya. Bahkan, terdapat perluasan baru dari ideal prima lemah yaitu ideal I- prima.

Pada tahun 2003, Anderson dan Smith telah membahas dan mempelajari tentang ideal prima lemah dan keterkaitan ideal prima lemah dengan ideal prima. Dan juga Anderson dan Smith menambahkan bahwa untuk setiap ideal prima adalah ideal prima lemah. Pada tahun 2005, Bhatwadekar dan Sharma membahas *almost prime ideal* pada daerah integral dan menambahkan bahwa ideal prima lemah adalah *almost prime ideal* serta ideal idempoten adalah *almost prime ideal*.

Berdasarkan artikel yang berhubungan tersebut, dalam skripsi ini dibahas sifat-sifat yang berkaitan dengan ideal I- prima yang merupakan kaji ulang dari artikel yang ditulis oleh Akray (2016).

UNIVERSITAS BRAWIJAYA

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dijelaskan sebelumnya, rumusan masalah yang dibahas pada makalah ini adalah bagaimana sifat-sifat yang berkaitan dengan ideal I- prima.

1.3 Tujuan Masalah

Berdasarkan rumusan masalah yang telah dijelaskan sebelumnya pada makalah ini, maka tujuan yang dibahas pada makalah ini adalah membahas sifat-sifat yang berkaitan dengan ideal I- prima.

repository.ub.ac.id
UNIVERSITAS BRAWIJAYA

repository.ub.ac.id

BAB II
DASAR TEORI

Pada bab ini diberikan beberapa subbab yang menjelaskan definisi beserta contoh mengenai teori-teori yang digunakan pada pembahasan skripsi ini. Teori-teori tersebut meliputi himpunan, pemetaan dan operasi biner, grup, ring, serta ideal.

2.1 Himpunan

Berikut diberikan definisi himpunan bagian yang dikutip dari Khoirunnisa (2014), serta operasi pada himpunan menurut Arifin (2000).

Definisi 2.1.1 (Himpunan Bagian)
Misalkan A dan B adalah himpunan-himpunan yang tidak kosong. Dikatakan A himpunan bagian dari B, dinotasikan $A \subseteq B$, jika setiap anggota di A juga merupakan anggota di B.

Contoh 2.1.2
Diberikan himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dan himpunan bilangan real $\mathbb{R}$. Karena untuk setiap anggota di dalam $\mathbb{Z}$ juga merupakan anggota di dalam $\mathbb{R}$, maka $\mathbb{Z}$ merupakan himpunan bagian dari $\mathbb{R}$.

Definisi 2.1.3 (Operasi pada Himpunan)
Misalkan X adalah suatu himpunan dan diberikan himpunan A dan B, yaitu himpunan bagian dari X. Dapat dibentuk suatu himpunan baru sebagai berikut:

i) Irisan himpunan A dan B :
$A \cap B = \{x | x \in A \text{ dan } x \in B\}$.

ii) Gabungan himpunan A dan B :
$A \cup B = \{x | x \in A \text{ atau } x \in B\}$.

iii) Selisih himpunan A dan B :
$A - B = \{x | x \in A \text{ dan } x \notin B\}$.

iv) Hasil kali kartesian himpunan A dan B :
$A \times B = \{(x, y) | x \in A \text{ dan } y \in B\}$.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA

Contoh 2.1.4
Diberikan himpunan-himpunan berikut:
$A = \{a, b, c, d\}$ dan $B = \{x, y, d\}$,
dengan himpunan semesta $S = \{a, b, c, d, x, y\}$.
Tentukan irisan dari A dan B, gabungan dari A dan B, selisih himpunan A dan B, dan hasil kartesian dari kedua himpunan A dan B.
Bukti.
Dengan diketahui himpunan masing-masing, maka dapat diperoleh bahwa :

- Irisan $A \cap B = \{d\}$,
- Gabungan $A \cup B = \{a, b, c, d, x, y\}$,
- Selisih $A - B = \{a, b, c\}$,
- Selisih $B - A = \{x, y\}$,
- Hasil kali kartesian $A \times B = \{(a, x), (a, y), (a, d), (b, x), (b, y), (b, d), (c, x), (c, y), (c, d), (d, x), (d, y), (d, d)\}$.

2.2 Pemetaan dan Operasi Biner

Berikut penjelasan mengenai pemetaan dan struktur aljabar beserta contohnya menurut Mas'oed (2013), serta operasi biner beserta contohnya menurut Setiawan (2014).

Definisi 2.2.1 (Relasi)
Misalkan A dan B himpunan tak kosong. Jika R adalah himpunan bagian dari $A \times B$, maka R disebut relasi dari A ke B.

Definisi 2.2.2 (Pemetaan)
Misalkan A dan B himpunan tak kosong. Relasi f dari A ke B disebut pemetaan dari A ke B jika setiap $a \in A$ terdapat tepat tunggal $b \in B$, sedemikian sehingga $(a, b) \in f$.
Pemetaan f dari A ke B ditulis secara matematis sebagai berikut.

$$\begin{aligned} f:\ & A \longrightarrow B \\ & a \longmapsto f(a) = b. \end{aligned}$$

Dengan kata lain, jika $a_1 = a_2$ maka $f(a_1) = f(a_2)$ untuk setiap $a_1, a_2 \in A$.

Definisi 2.2.3 (Operasi Biner)
Misalkan A adalah himpunan tidak kosong. Suatu operasi biner $(*)$ pada A adalah pemetaan dari $A \times A$ ke A.
Secara matematis dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} * : A \times A &\longrightarrow A \\ (x, y) &\longmapsto *(x, y) = x * y. \end{aligned}$$

Contoh 2.2.4
Diberikan operasi # dengan didefinisikan $x\#y = x + 2y$ dan $x, y \in \mathbb{N}$. Akan ditunjukkan bahwa operasi # pada $\mathbb{N}$ merupakan operasi biner.
Bukti.
Didefinisikan $x\#y = x + 2y$. Jika ambil sembarang $x, y \in \mathbb{N}$, maka jelas bahwa $x + 2y$ masih merupakan bilangan bulat positif. Jika $x > 0$ dan $y > 0$, maka $x + 2y > 0$. Diperoleh hasil dari $x + 2y$ merupakan bilangan positif. Sehingga operasi # pada $\mathbb{N}$ merupakan operasi biner.

Contoh 2.2.5
Diberikan suatu himpunan yang tak kosong $S = \{a, b, c\}$. Didefinisikan operasi $*$ di mana $x * y = x$ untuk setiap $x, y \in S$. Akan ditunjukkan operasi $*$ pada himpunan S merupakan operasi biner.
Bukti.

Tabel 2.1 Operasi Biner $(*)$ dengan $x * y = x$

$*$		y		
		a	b	c
x	a	a	a	a
	b	b	b	b
	c	c	c	c

Berdasarkan Tabel 2.1 dapat dilihat bahwa operasi $*$ pada S merupakan operasi biner karena hasil dari operasi $*$ berada dalam himpunan S.

Definisi 2.2.6 (Struktur Aljabar)
Struktur aljabar adalah ilmu yang mempelajari suatu himpunan tak kosong dengan satu atau lebih operasi biner yang diberlakukan pada sistem aljabar tersebut.

Contoh 2.2.7
Diberikan himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ yang disertai dengan operasi penjumlahan $(+)$. Jelas $\mathbb{Z}$ memenuhi sifat tertutup terhadap operasi penjumlahan, di mana untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$ berlaku $a + b \in \mathbb{Z}$. Jadi $\mathbb{Z}$ merupakan struktur aljabar.

2.3 Grup

Berikut diberikan definisi dan contoh yang berkaitan dengan grup sebagai pengantar pada dasar teori selanjutnya yang dikutip dari Andari (2015) dan Jacobson (1951).

Definisi 2.3.1 (Semigrup)
Misalkan S adalah suatu himpunan tak kosong yang dilengkapi satu operasi biner $(*)$. $(S,*)$ disebut semigrup jika memenuhi aksioma:

i) Tertutup, yaitu untuk setiap $a, b \in S$, berlaku $a * b \in S$,
ii) Assosiatif, yaitu untuk setiap $a, b, c \in S$, berlaku
$a * (b * c) = (a * b) * c$.

Contoh 2.3.2
Diberikan $\mathbb{N}$ himpunan bilangan asli yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan. Akan ditunjukkan bahwa $(\mathbb{N}, +)$ merupakan semigrup.
Bukti.

1. Tertutup
   Ambil sembarang $a, b \in \mathbb{N}$, berlaku $a + b \in \mathbb{N}$.
2. Assosiatif
   Ambil sembarang $a, b, c \in \mathbb{N}$, berlaku
   $$\begin{aligned} a + (b + c) &= a + b + c \\ &= (a + b) + c \end{aligned}$$

Jadi $(\mathbb{N}, +)$ adalah semigrup.

Contoh 2.3.3

Diberikan himpunan $M(\mathbb{N}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{N} \right\}$ yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan. Akan ditunjukkan bahwa $(M(\mathbb{N}), +)$ merupakan semigrup.

Bukti.

Akan ditunjukkan bahwa $(M(\mathbb{N}), +)$ memenuhi aksioma berikut:

1. Tertutup

   Ambil $A = \begin{bmatrix} m & n \\ o & p \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} \in M(\mathbb{N})$ di mana $m, n, o, p, w, x, y, z \in \mathbb{N}$, berlaku

   $$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} m & n \\ o & p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} m + w & n + x \\ o + y & p + z \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

   Karena $m + w, n + x, o + y, p + z \in \mathbb{N}$, maka $A + B \in M(\mathbb{N})$.

2. Assosiatif

   Ambil $A = \begin{bmatrix} m & n \\ o & p \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix} \in M(\mathbb{N})$ di mana $m, n, o, p, w, x, y, z, r, s, t, u \in \mathbb{N}$, berlaku

   $$\begin{aligned} A + (B + C) &= \begin{bmatrix} m & n \\ o & p \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} m & n \\ o & p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w + r & x + s \\ y + t & z + u \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} m + w + r & n + x + s \\ o + y + t & p + z + u \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} m + w & n + x \\ o + y & p + z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix} \\ &= \left(\begin{bmatrix} m & n \\ o & p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix} \\ &= (A + B) + C. \end{aligned}$$

Jadi $(M(\mathbb{N}), +)$ adalah semigrup.

Contoh 2.3.4

Diberikan himpunan $\mathbb{Z}_6$ yang dilengkapi dengan operasi pergandaan. Akan ditunjukkan bahwa $(\mathbb{Z}_6, \cdot)$ merupakan semigrup.

repository.ub.ac.id
UNIVERSITAS BRAWIJAYA

Bukti.

Tabel 2.2 Operasi Pergandaan pada $\mathbb{Z}_6$

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Berdasarkan Tabel 2.2 dapat diperoleh bahwa $(\mathbb{Z}_6,\cdot)$ memenuhi sifat:

a. Tertutup

Ambil $\bar{a} = a + 6k_1, \bar{b} = b + 6k_2 \in \mathbb{Z}_6$, berlaku

$$\begin{aligned}\bar{a} \cdot \bar{b} &= (a + 6k_1) \cdot (b + 6k_2)\\ &= (a \cdot b) + 6(k_1 \cdot k_2)\\ &= c + 6k \in \mathbb{Z}_6 \text{ karena } c = a \cdot b \text{ dan } k = k_1 \cdot k_2.\end{aligned}$$

b. Assosiatif

Ambil $\bar{a} = a + 6k_1, \bar{b} = b + 6k_2, \bar{c} = c + 6k_3 \in \mathbb{Z}_6$, berlaku

$$\begin{aligned}\bar{a} \cdot (\bar{b} \cdot \bar{c}) &= (a + 6k_1) \cdot [(b + 6k_2) \cdot (c + 6k_3)]\\ &= (a + 6k_1) \cdot \big((b \cdot c) + 6(k_2 \cdot k_3)\big)\\ &= (a \cdot b \cdot c) + 6(k_1 \cdot k_2 \cdot k_3)\\ &= \big((a \cdot b) + 6(k_1 \cdot k_2)\big) \cdot (c + 6k_3)\\ &= [(a + 6k_1) \cdot (b + 6k_2)] \cdot (c + 6k_3)\\ &= (\bar{a} \cdot \bar{b}) \cdot \bar{c}.\end{aligned}$$

Jadi $(\mathbb{Z}_6,\cdot)$ adalah semigrup.

Definisi 2.3.5 (Grup)

Misalkan G adalah suatu himpunan yang tak kosong yang dilengkapi operasi biner $(*)$. $(G,*)$ disebut grup jika memenuhi aksioma:

i) Tertutup

untuk setiap $a, b \in G$, berlaku $a * b \in G$,

ii) Assosiatif

untuk setiap $a, b, c \in G$, berlaku $(a * b) * c = a * (b * c)$,

iii) Mempunyai elemen satuan

terdapat $e \in G$, untuk setiap $a \in G$ sehingga $e * a = a * e = a$,

repository.ub.ac.id
UNIVERSITAS BRAWIJAYA

iv) Setiap elemen mempunyai invers
untuk setiap $a \in G$, terdapat $a^{-1} \in G$ sedemikian sehingga
$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.

Contoh 2.3.6
Diberikan himpunan $\mathbb{Z}_6$ yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan. Akan ditunjukkan bahwa $(\mathbb{Z}_6, +)$ merupakan grup.
Bukti.

Tabel 2.3 Operasi Penjumlahan pada $\mathbb{Z}_6$

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$

Berdasarkan Tabel 2.3 dapat diperoleh bahwa $(\mathbb{Z}_6, +)$ memenuhi sifat:

a. Tertutup
Ambil $\bar{a} = a + 6k_1, \bar{b} = b + 6k_2 \in \mathbb{Z}_6$, berlaku
$$\begin{aligned}\bar{a} + \bar{b} &= (a + 6k_1) + (b + 6k_2)\\ &= (a + b) + 6(k_1 + k_2)\\ &= c + 6k \in \mathbb{Z}_6 \text{ dengan } c = a + b \text{ dan } k = k_1 + k_2.\end{aligned}$$

b. Assosiatif
Ambil $\bar{a} = a + 6k_1, \bar{b} = b + 6k_2, \bar{c} = c + 6k_3 \in \mathbb{Z}_6$, berlaku
$$\begin{aligned}\bar{a} + \left(\bar{b} + \bar{c}\right) &= (a + 6k_1) + [(b + 6k_2) + (c + 6k_3)]\\ &= (a + 6k_1) + \left((b + c) + 6(k_2 + k_3)\right)\\ &= (a + b + c) + 6(k_1 + k_2 + k_3)\\ &= \left((a + b) + 6(k_1 + k_2)\right) + (c + 6k_3)\\ &= [(a + 6k_1) + (b + 6k_2)] + (c + 6k_3)\\ &= \left(\bar{a} + \bar{b}\right) + \bar{c}.\end{aligned}$$

c. Mempunyai elemen satuan
terdapat $e = \bar{0} \in \mathbb{Z}_6$, untuk setiap $\bar{a} \in \mathbb{Z}_6$, berlaku
$\bar{a} + \bar{0} = \bar{0} + \bar{a} = \bar{a}$.

d. Setiap elemen mempunyai invers sebagai berikut :

repository.ub.ac.id
UNIVERSITAS BRAWIJAYA

invers dari $\overline{0}$ adalah $\overline{0} \in \mathbb{Z}_6$, karena $\overline{0} + \overline{0} = \overline{0}$
invers dari $\overline{1}$ adalah $\overline{5} \in \mathbb{Z}_6$, karena $\overline{1} + \overline{5} = \overline{0}$
invers dari $\overline{2}$ adalah $\overline{4} \in \mathbb{Z}_6$, karena $\overline{2} + \overline{4} = \overline{0}$
invers dari $\overline{3}$ adalah $\overline{3} \in \mathbb{Z}_6$, karena $\overline{3} + \overline{3} = \overline{0}$
invers dari $\overline{4}$ adalah $\overline{2} \in \mathbb{Z}_6$, karena $\overline{4} + \overline{2} = \overline{0}$
invers dari $\overline{5}$ adalah $\overline{1} \in \mathbb{Z}_6$, karena $\overline{5} + \overline{1} = \overline{0}$.

Jadi $(\mathbb{Z}_6, +)$ adalah grup.

Definisi 2.3.7 (Grup Komutatif)
Misalkan $(G,*)$ adalah grup. $(G,*)$ disebut grup komutatif jika memenuhi hukum komutatif, yaitu untuk setiap $a, b \in G$ berlaku $a * b = b * a$.

Contoh 2.3.8
Diberikan himpunan $\mathbb{Z}_6$ yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan. Berdasarkan Contoh 2.3.6, $(\mathbb{Z}_6, +)$ adalah grup. Akan ditunjukkan bahwa $(\mathbb{Z}_6, +)$ adalah grup komutatif.
Bukti.
Ambil $\bar{a} = a + 6k_1$ dan $\bar{b} = b + 6k_2$. Sehingga

$$\begin{aligned}\bar{a} + \bar{b} &= (a + 6k_1) + (b + 6k_2)\\ &= (a + b) + 6(k_1 + k_2)\\ &= (b + a) + 6(k_2 + k_1)\\ &= (b + 6k_2) + (a + 6k_1)\\ &= \bar{b} + \bar{a}.\end{aligned}$$

Jadi $(\mathbb{Z}_6, +)$ adalah grup komutatif.

Definisi 2.3.9 (Subgrup)
Misalkan G dengan operasi $(*)$ merupakan grup. H adalah himpunan bagian dalam G. Jika H dengan operasi $(*)$ merupakan grup, maka H merupakan subgrup dari grup G.

Contoh 2.3.10
Berdasarkan Contoh 2.3.6, $(\mathbb{Z}_6, +)$ adalah grup. Subgrup-subgrup dari $(\mathbb{Z}_6, +)$ adalah $\{\overline{0}\}, \{\overline{0}, \overline{3}\}, \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\}, \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\}$.

Definisi 2.3.11 (Koset)
Misalkan G adalah grup, $a \in G$, dan $H = \{h_1, h_2, h_3, h_4, \dots\}$ merupakan subgrup.
Maka terhadap operasi pergandaan

$aH = \{ah_1, ah_2, ah_3, ah_4, \dots\}$ disebut koset kiri relatif terhadap subgrup H.

$Ha = \{h_1a, h_2a, h_3a, h_4a, \dots\}$ disebut koset kanan relatif terhadap subgrup H.

Sedangkan terhadap operasi penjumlahan

$a + H = \{a + h_1, a + h_2, a + h_3, a + h_4, \dots\}$ disebut koset kiri relatif terhadap subgrup H.

$H + a = \{h_1 + a, h_2 + a, h_3 + a, h_4 + a, \dots\}$ disebut koset kanan relatif terhadap subgrup H.

Contoh 2.3.12
Diberikan himpunan $\mathbb{Z}_6$ yang dilengkapi operasi penjumlahan. Berdasarkan Contoh 2.3.6, $(\mathbb{Z}_6, +)$ adalah grup. $K = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$ merupakan subgrup dari $\mathbb{Z}_6$. Akan ditentukan banyaknya koset di $\mathbb{Z}_6$ relatif terhadap K.
Bukti.
$\bar{0} + K = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} = K$
$\bar{1} + K = \{\bar{1} + \bar{0}, \bar{1} + \bar{2}, \bar{1} + \bar{4}\} = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}\}$
$\bar{2} + K = \{\bar{2} + \bar{0}, \bar{2} + \bar{2}, \bar{2} + \bar{4}\} = \{\bar{2}, \bar{4}, \bar{0}\} = K$
$\bar{3} + K = \{\bar{3} + \bar{0}, \bar{3} + \bar{2}, \bar{3} + \bar{4}\} = \{\bar{3}, \bar{5}, \bar{1}\} = \bar{1} + K$
$\bar{4} + K = \{\bar{4} + \bar{0}, \bar{4} + \bar{2}, \bar{4} + \bar{4}\} = \{\bar{4}, \bar{0}, \bar{2}\} = K$
$\bar{5} + K = \{\bar{5} + \bar{0}, \bar{5} + \bar{2}, \bar{5} + \bar{4}\} = \{\bar{5}, \bar{1}, \bar{3}\} = \bar{1} + K$
Sehingga banyaknya koset ada 2, yaitu K dan $1 + K$.

2.4 Ring dan Ideal

Berikut ditunjukkan definisi dan contoh yang berkaitan dengan ring sebagai pengantar pada dasar teori selanjutnya yang dikutip dalam Andari (2014), Anderson (2003), Cremona (2012), Jabbar (2011), Kaplansky (1974), Mas'oed (2013) dan Pal (2017).

repository.ub.ac.id
UNIVERSITAS BRAWIJAYA

Definisi 2.4.1 (Ring)
Misalkan R adalah suatu himpunan tak kosong yang dilengkapi dua operasi biner misalkan terhadap penjumlahan $(+)$ dan pergandaan $(\cdot)$. $(R, +, \cdot)$ disebut ring jika memenuhi:
a) $(R, +)$ adalah grup komutatif,
b) $(R, \cdot)$ adalah semigrup,
c) Berlaku hukum distributif, yaitu untuk setiap $a, b, c \in R$ berlaku
   i) $a(b + c) = ab + ac$,
   ii) $(a + b)c = ac + bc$.

Contoh 2.4.2
Diberikan himpunan $\mathbb{Z}_7$ yang dilengkapi operasi penjumlahan dan pergandaan. Akan ditunjukkan bahwa $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ merupakan ring.
Bukti.

Tabel 2.4 Operasi Penjumlahan pada $\mathbb{Z}_7$

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{6}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$

1. Berdasarkan Tabel 2.4 dapat dilihat bahwa $(\mathbb{Z}_7, +)$ memenuhi sifat:
   a. Tertutup
      Ambil $\bar{a} = a + 7k_1, \bar{b} = b + 7k_2 \in \mathbb{Z}_7$, berlaku
      $$\begin{aligned} \bar{a} + \bar{b} &= (a + 7k_1) + (b + 7k_2) \\ &= (a + b) + 7(k_1 + k_2) \\ &= c + 7k \in \mathbb{Z}_7 \text{ dengan } c = a + b \text{ dan } k = k_1 + k_2. \end{aligned}$$
   b. Assosiatif
      Ambil $\bar{a} = a + 7k_1, \bar{b} = b + 7k_2, \bar{c} = c + 7k_3 \in \mathbb{Z}_7$, berlaku

repository.ub.ac.id
UNIVERSITAS BRAWIJAYA

$$
\begin{aligned}
\bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) &= (a + 7k_1) + [(b + 7k_2) + (c + 7k_3)] \\
&= (a + 7k_1) + \big((b + c) + 7(k_2 + k_3)\big) \\
&= (a + b + c) + 7(k_1 + k_2 + k_3) \\
&= \big((a + b) + 7(k_1 + k_2)\big) + (c + 7k_3) \\
&= [(a + 7k_1) + (b + 7k_2)] + (c + 7k_3) \\
&= (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c}.
\end{aligned}
$$

c. Mempunyai elemen satuan
Terdapat $e = \bar{0} \in \mathbb{Z}_7$, untuk setiap $\bar{a} \in \mathbb{Z}_7$, berlaku $\bar{a} + \bar{0} = \bar{0} + \bar{a} = \bar{a}$.

d. Setiap elemen mempunyai invers sebagai berikut :
invers dari $\bar{0}$ adalah $\bar{0} \in \mathbb{Z}_7$, karena $\bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$
invers dari $\bar{1}$ adalah $\bar{6} \in \mathbb{Z}_7$, karena $\bar{1} + \bar{6} = \bar{0}$
invers dari $\bar{2}$ adalah $\bar{5} \in \mathbb{Z}_7$, karena $\bar{2} + \bar{5} = \bar{0}$
invers dari $\bar{3}$ adalah $\bar{4} \in \mathbb{Z}_7$, karena $\bar{3} + \bar{4} = \bar{0}$
invers dari $\bar{4}$ adalah $\bar{3} \in \mathbb{Z}_7$, karena $\bar{4} + \bar{3} = \bar{0}$
invers dari $\bar{5}$ adalah $\bar{2} \in \mathbb{Z}_7$, karena $\bar{5} + \bar{2} = \bar{0}$
invers dari $\bar{6}$ adalah $\bar{1} \in \mathbb{Z}_7$, karena $\bar{6} + \bar{1} = \bar{0}$

e. Komutatif
Ambil $\bar{a} = a + 7k_1$ dan $\bar{b} = b + 7k_2$. Sehingga

$$
\begin{aligned}
\bar{a} + \bar{b} &= (a + 7k_1) + (b + 7k_2) \\
&= (a + b) + 7(k_1 + k_2) \\
&= (b + a) + 7(k_2 + k_1) \\
&= (b + 7k_2) + (a + 7k_1) \\
&= \bar{b} + \bar{a}.
\end{aligned}
$$

Sehingga $(\mathbb{Z}_7, +)$ merupakan grup komutatif.

Tabel 2.5 Operasi Pergandaan pada $\mathbb{Z}_7$

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{5}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

repository.ub.ac.id
UNIVERSITAS BRAWIJAYA

2. Berdasarkan Tabel 2.5 dapat dilihat bahwa $(\mathbb{Z}_7,\cdot)$ memenuhi sifat:
   a. Tertutup
      Ambil $\bar{a} = a + k_1, \bar{b} = b + k_2 \in \mathbb{Z}_7$, berlaku
      $$\begin{aligned}\bar{a}\cdot\bar{b} &= (a + k_1)\cdot(b + k_2)\\ &= (a\cdot b) + 7(k_1\cdot k_2)\\ &= c + 7k \in \mathbb{Z}_7 \text{ karena } c = a\cdot b \text{ dan } k = k_1\cdot k_2.\end{aligned}$$
   b. Assosiatif
      Ambil $\bar{a} = a + 7k_1, \bar{b} = b + 7k_2, \bar{c} = c + 7k_3 \in \mathbb{Z}_7$, berlaku
      $$\begin{aligned}\bar{a}\cdot(\bar{b}\cdot\bar{c}) &= (a + 7k_1)\cdot[(b + 7k_2)\cdot(c + 7k_3)]\\ &= (a + 7k_1)\cdot\big((b\cdot c) + 7(k_2\cdot k_3)\big)\\ &= (a\cdot b\cdot c) + 7(k_1\cdot k_2\cdot k_3)\\ &= \big((a\cdot b) + 7(k_1\cdot k_2)\big)\cdot(c + 7k_3)\\ &= [(a + 7k_1)\cdot(b + 7k_2)]\cdot(c + 7k_3)\\ &= (\bar{a}\cdot\bar{b})\cdot\bar{c}.\end{aligned}$$
   Sehingga $(\mathbb{Z}_7,\cdot)$ merupakan semigrup.
3. Berlaku sifat distributif
   Ambil $\bar{a} = a + 7k_1, \bar{b} = b + 7k_2, \bar{c} = c + 7k_3 \in \mathbb{Z}_7$, berlaku
   $$\begin{aligned}\bar{a}\cdot(\bar{b} + \bar{c}) &= (a + 7k_1)\cdot[(b + 7k_2) + (c + 7k_3)]\\ &= (a + 7k_1)\cdot\big((b + c) + 7(k_2 + k_3)\big)\\ &= \big((a\cdot b) + 7(k_1\cdot k_2)\big) + \big((a\cdot c) + 7(k_1\cdot k_3)\big)\\ &= (a + 7k_1)\cdot(b + 7k_2) + (a + 7k_1)\cdot(c + 7k_3)\\ &= (\bar{a}\cdot\bar{b}) + (\bar{a}\cdot\bar{c}).\end{aligned}$$
   $$\begin{aligned}(\bar{a} + \bar{b})\cdot\bar{c} &= [(a + 7k_1) + (b + 7k_2)]\cdot(c + 7k_3)\\ &= \big((a + b) + 7(k_1 + k_2)\big)\cdot(c + 7k_3)\cdot\\ &= \big((a\cdot c) + 7(k_1\cdot k_3)\big) + \big((b\cdot c) + 7(k_2\cdot k_3)\big)\\ &= (a + 7k_1)\cdot(c + 7k_3) + (b + 7k_2)\cdot(c + 7k_3)\\ &= (\bar{a}\cdot\bar{c}) + (\bar{b}\cdot\bar{c}).\end{aligned}$$

Jadi $(\mathbb{Z}_7, +,\cdot)$ adalah ring.

Contoh 2.4.3
Diberikan himpunan $\mathbb{Z}_6$ yang dilengkapi operasi penjumlahan dan pergandaan. Akan ditunjukkan bahwa $(\mathbb{Z}_6, +,\cdot)$ adalah ring.
Bukti.
1. Berdasarkan Contoh 2.3.8, $(\mathbb{Z}_6, +)$ merupakan grup komutatif.

repository.ub.ac.id
UNIVERSITAS BRAWIJAYA

2. Berdasarkan Contoh 2.3.4, $(\mathbb{Z}_6,\cdot)$ merupakan semigrup.
3. Berlaku sifat distributif

Ambil $\bar{a} = a + 6k_1, \bar{b} = b + 6k_2, \bar{c} = c + 6k_3 \in \mathbb{Z}_7$, berlaku

$$\begin{aligned}
\bar{a}\cdot(\bar{b}+\bar{c}) &= (a+6k_1)\cdot[(b+6k_2)+(c+6k_3)] \\
&= (a+6k_1)\cdot\big((b+c)+6(k_2+k_3)\big) \\
&= \big((a\cdot b)+6(k_1\cdot k_2)\big)+\big((a\cdot c)+6(k_1\cdot k_3)\big) \\
&= (a+6k_1)\cdot(b+6k_2)+(a+6k_1)\cdot(c+6k_3) \\
&= (\bar{a}\cdot\bar{b})+(\bar{a}\cdot\bar{c}).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\bar{a}+\bar{b})\cdot\bar{c} &= [(a+6k_1)+(b+6k_2)]\cdot(c+6k_3) \\
&= \big((a+b)+6(k_1+k_2)\big)\cdot(c+6k_3) \\
&= \big((a\cdot c)+6(k_1\cdot k_3)\big)+\big((b\cdot c)+6(k_2\cdot k_3)\big) \\
&= (a+6k_1)\cdot(c+6k_3)+(b+6k_2)\cdot(c+6k_3) \\
&= (\bar{a}\cdot\bar{c})+(\bar{b}\cdot\bar{c}).
\end{aligned}$$

Jadi $(\mathbb{Z}_6,+,\cdot)$ merupakan ring.

Contoh 2.4.4

Diberikan himpunan matriks $M(\mathbb{Z})_{2\times 2} = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a,b,c,d \in \mathbb{Z}\right\}$ yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan dan pergandaan. Akan ditunjukkan bahwa $(M(\mathbb{Z})_{2\times 2},+,\cdot)$ merupakan ring.

Bukti.

1. $(M(\mathbb{Z})_{2\times 2},+)$ memenuhi sifat:
   a. Tertutup

   Ambil $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} \in M(\mathbb{Z})_{2\times 2}$, berlaku

   $$\begin{aligned}
   A+B &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} \\
   &= \begin{bmatrix} a+w & b+x \\ c+y & d+z \end{bmatrix} \in M(\mathbb{Z})_{2\times 2}.
   \end{aligned}$$

   b. Assosiatif

   $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} k & l \\ m & n \end{bmatrix} \in M(\mathbb{Z})_{2\times 2}$, berlaku

   $$\begin{aligned}
   A+(B+C) &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & l \\ m & n \end{bmatrix}\right) \\
   &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w+k & x+l \\ y+m & z+n \end{bmatrix}
   \end{aligned}$$

repository.ub.ac.id
UNIVERSITAS BRAWIJAYA

$$= \begin{bmatrix} a+w+k & b+x+l \\ c+y+m & d+z+n \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a+w & b+x \\ c+y & d+z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & l \\ m & n \end{bmatrix}$$
$$= \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} k & l \\ m & n \end{bmatrix}$$
$$= (A+B)+C.$$

c. Mempunyai elemen satuan

Terdapat $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M(\mathbb{Z})_{2\times 2}$, untuk setiap $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ sedemikian sehingga

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

d. Setiap elemen mempunyai invers

untuk setiap $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, terdapat invers dari A yaitu $-A = \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix}$, sedemikian sehingga

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix}.$$

Sehingga $(M(\mathbb{Z})_{2\times 2}, +)$ merupakan grup.

2. $(M(\mathbb{Z})_{2\times 2}, \cdot)$ memenuhi sifat:

a. Tertutup

Ambil $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} \in M(\mathbb{Z})_{2\times 2}$, berlaku

$$AB = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} aw+by & ax+bz \\ cw+dy & cx+dz \end{bmatrix} \in M(\mathbb{Z})_{2\times 2}.$$

b. Assosiatif

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} k & l \\ m & n \end{bmatrix} \in M(\mathbb{Z})_{2\times 2}$, berlaku

$$A(BC) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k & l \\ m & n \end{bmatrix} \right)$$
$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} wk+xm & wl+xn \\ yk+zm & yl+zn \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} awk+axm+byk+bzm & awl+axn+byl+bzn \\ cwk+cxm+dyk+dzm & cwl+cxn+dyl+dzn \end{bmatrix}$$

repository.ub.ac.id
UNIVERSITAS BRAWIJAYA

$$= \begin{bmatrix} aw+by & ax+bz \\ cw+dy & cx+dz \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k & l \\ m & n \end{bmatrix}$$
$$= \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} k & l \\ m & n \end{bmatrix}$$
$$= (AB)C.$$

Sehingga $(M(\mathbb{Z})_{2\times 2},\cdot)$ merupakan semigrup.

3. Berlaku hukum distributif.

Ambil $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} k & l \\ m & n \end{bmatrix} \in M(\mathbb{Z})_{2\times 2}$, berlaku

$$A \cdot (B + C) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & l \\ m & n \end{bmatrix} \right)$$
$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w+k & x+l \\ y+m & z+n \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} aw+ak+by+bm & ax+al+bz+bn \\ cw+ck+dy+dm & cx+cl+dz+dn \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} aw+by & ax+bz \\ cw+dy & cx+dz \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ak+bm & al+bn \\ ck+dm & cl+dn \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k & l \\ m & n \end{bmatrix}$$
$$= AB + AC.$$

$$(A + B) \cdot C = \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} k & l \\ m & n \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a+w & b+x \\ c+y & d+z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k & l \\ m & n \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} ak+wk+bm+xm & al+wl+bn+xn \\ ck+yk+dm+zm & cl+yl+dn+zn \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} ak+bm & al+bn \\ ck+dm & cl+dn \end{bmatrix} \begin{bmatrix} wk+xm & wl+xn \\ yk+zm & yl+zn \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k & l \\ m & n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k & l \\ m & n \end{bmatrix}$$
$$= AC + BC.$$

Jadi $(M(\mathbb{Z})_{2\times 2}, +,\cdot)$ adalah ring.

Definisi 2.4.5 (Ring Komutatif)

Misalkan $(R, +,\cdot)$ adalah sebuah ring. $(R, +,\cdot)$ disebut ring komutatif jika R memenuhi hukum komutatif terhadap operasi pergandaan, yaitu untuk setiap $a, b \in R$ berlaku $a \cdot b = b \cdot a$.

repository.ub.ac.id
UNIVERSITAS BRAWIJAYA

Definisi 2.4.6 (Ring dengan Elemen Satuan)
Misalkan $(R,+,\cdot)$ adalah sebuah ring. $(R,+,\cdot)$ disebut ring dengan elemen satuan jika terhadap operasi pergandaan, terdapat $e \in R$ untuk setiap $a \in R$ berlaku $a \cdot e = e \cdot a = a$.

Contoh 2.4.7
Diberikan himpunan $\mathbb{Z}_6$ yang dilengkapi operasi penjumlahan dan pergandaan. Berdasarkan Contoh 2.4.3, $(\mathbb{Z}_6,+,\cdot)$ adalah ring. Akan ditunjukkan $\mathbb{Z}_6$ adalah ring komutatif dengan elemen satuan.
Bukti.
Akan ditunjukkan $\mathbb{Z}_6$ memenuhi hukum komutatif terhadap pergandaan dan mempunyai elemen satuan terhadap pergandaan.
1. Komutatif terhadap operasi pergandaan
   Ambil $\bar{a} = a + 6k_1,\ \bar{b} = b + 6k_2 \in \mathbb{Z}_6$, berlaku
$$\begin{aligned}\bar{a} \cdot \bar{b} &= (a + 6k_1) \cdot (b + 6k_2)\\ &= (a \cdot b) + 6(k_1 \cdot k_2)\\ &= (b \cdot a) + 6(k_2 \cdot k_1)\\ &= (b + 6k_2) \cdot (a + 6k_1)\\ &= \bar{b} \cdot \bar{a}.\end{aligned}$$
2. Mempunyai elemen satuan terhadap operasi pergandaan
   Terdapat $e = \bar{1} \in \mathbb{Z}_6$ untuk setiap $\bar{a} \in \mathbb{Z}_6$, sehingga berlaku $\bar{a} \cdot \bar{1} = \bar{1} \cdot \bar{a} = \bar{a}$.

Jadi $\mathbb{Z}_6$ adalah ring komutatif dengan elemen satuan.

Contoh 2.4.8
Diberikan himpunan $\mathbb{Z}_7$ yang dilengkapi operasi penjumlahan dan pergandaan. Berdasarkan Contoh 2.4.2, $(\mathbb{Z}_7,+,\cdot)$ adalah ring. Akan ditunjukkan bahwa $\mathbb{Z}_7$ merupakan ring komutatif dengan elemen satuan.
Bukti.
Akan ditunjukkan $\mathbb{Z}_7$ memenuhi hukum komutatif terhadap pergandaan dan mempunyai elemen satuan terhadap pergandaan.
1. Komutatif terhadap operasi pergandaan
   Ambil $\bar{a} = a + 7k_1,\ \bar{b} = b + 7k_2 \in \mathbb{Z}_7$, berlaku
$$\begin{aligned}\bar{a} \cdot \bar{b} &= (a + 7k_1) \cdot (b + 7k_2)\\ &= (a \cdot b) + 7(k_1 \cdot k_2)\\ &= (b \cdot a) + 7(k_2 \cdot k_1)\end{aligned}$$

repository.ub.ac.id
UNIVERSITAS BRAWIJAYA

$$= (b + 7k_2) \cdot (a + 7k_1)$$
$$= \bar{b} \cdot \bar{a}$$

2. Mempunyai elemen satuan terhadap operasi pergandaan
   Terdapat $e = \bar{1} \in \mathbb{Z}_7$ untuk setiap $\bar{a} \in \mathbb{Z}_7$, sehingga berlaku $\bar{a} \cdot \bar{1} = \bar{1} \cdot \bar{a} = \bar{a}$.

Jadi $\mathbb{Z}_7$ adalah ring komutatif dengan elemen satuan.

Definisi 2.4.9 (Pembagi Nol)
Jika $(R, +,\cdot)$ adalah ring, suatu unsur $0 \neq a \in R$ disebut pembagi nol bila ada unsur yang $0 \neq b \in R$ sedemikian sehingga $ab = 0$.

Contoh 2.4.10
Diberikan himpunan $\mathbb{Z}_6$ yang dilengkapi operasi penjumlahan dan pergandaan. Berdasarkan Contoh 2.4.3, $(\mathbb{Z}_6, +,\cdot)$ adalah ring. Akan ditunjukkan elemen-elemen pembagi nol di $\mathbb{Z}_6$.
Bukti.
Berdasarkan Tabel 2.2, dapat dilihat bahwa terdapat elemen selain nol yang merupakan pembagi nol, yaitu $\bar{2}, \bar{3}$, dan $\bar{4}$. Dikarenakan,
$\bar{2} \in \mathbb{Z}_6$ terdapat $\bar{3} \in \mathbb{Z}_6$, sedemikian sehingga $\bar{2} \cdot \bar{3} = \bar{0}$.
$\bar{3} \in \mathbb{Z}_6$ terdapat $\bar{2} \in \mathbb{Z}_6$, sedemikian sehingga $\bar{3} \cdot \bar{2} = \bar{0}$.
$\bar{4} \in \mathbb{Z}_6$ terdapat $\bar{3} \in \mathbb{Z}_6$, sedemikian sehingga $\bar{4} \cdot \bar{3} = \bar{0}$.

Definisi 2.4.11 (Daerah Integral)
Suatu daerah integritas/ daerah integral $(D, +,\cdot)$ adalah suatu sistem yang memenuhi :

i) $(D, +)$ merupakan grup komutatif.
ii) $(D,\cdot)$ memenuhi semigrup komutatif dengan elemen satuan yang tidak memuat pembagi nol.
iii) Berlaku hukum distributif.

Jadi $(D, +,\cdot)$ disebut daerah integral jika $(D, +,\cdot)$ adalah ring komutatif dengan elemen satuan dan tidak memuat pembagi nol.

repository.ub.ac.id
UNIVERSITAS BRAWIJAYA

Contoh 2.4.12

Diberikan himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan dan pergandaan. Akan ditunjukkan bahwa $(\mathbb{Z}, + \cdot)$ adalah daerah integral.

Bukti.

1. Pada $(\mathbb{Z}, +)$ memenuhi sifat :
   a. Tertutup
      Ambil $a, b \in \mathbb{Z}$, berlaku $a + b = c \in \mathbb{Z}$.
   b. Assosiatif
      Ambil $a, b, c \in \mathbb{Z}$, berlaku
      $$a + (b + c) = a + b + c$$
      $$= (a + b) + c.$$
   c. Mempunyai elemen satuan
      Terdapat $e = 0 \in \mathbb{Z}$, untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$, berlaku
      $a + 0 = 0 + a = a.$
   d. Setiap elemen mempunyai invers
      Setiap $a \in \mathbb{Z}$, terdapat $-a \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga
      $a + (-a) = (-a) + a = 0.$
   e. Komutatif
      Ambil $a, b \in \mathbb{Z}$, sehingga berlaku $a + b = b + a.$

   Sehingga $(\mathbb{Z}, +)$ merupakan grup komutatif.
2. Pada $(\mathbb{Z}, \cdot)$ memenuhi sifat :
   a. Tertutup
      Ambil $a, b \in \mathbb{Z}$, berlaku $a \cdot b = c \in \mathbb{Z}$.
   b. Assosiatif
      Ambil $a, b, c \in \mathbb{Z}$, berlaku
      $$a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$$
      $$= (a \cdot b) \cdot c.$$
   c. Komutatif
      Ambil $a, b \in \mathbb{Z}$, sehingga berlaku $a \cdot b = b \cdot a.$
   d. Mempunyai elemen satuan
      Terdapat $e = 1 \in \mathbb{Z}$, untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$, berlaku
      $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a.$
   e. Tidak memuat pembagi nol
      Elemen pada himpunan bilangan bulat tidak memuat pembagi nol, dikarenakan jika ambil sembarang $a \neq 0$, $a \in \mathbb{Z}$ dan terdapat $b \in \mathbb{Z}$ dengan $b \neq 0$, maka $ab \neq 0$.

repository.ub.ac.id
UNIVERSITAS BRAWIJAYA

3. Berlaku sifat distributif
   Ambil $a, b, c \in \mathbb{Z}$, berlaku
   $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$.
   $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$.

Jadi $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ adalah daerah integral.

Definisi 2.4.13 (*Multiplicative subset*)
Misalkan S adalah himpunan bagian dari ring R. S disebut *multiplicative subset* (atau himpunan bagian tertutup terhadap pergandaan) jika elemen satuan terhadap pergandaan anggota dari S, elemen satuan terhadap penjumlahan bukan anggota dari S, dan untuk suatu $a, b \in S$ berlaku $ab \in S$.

Contoh 2.4.14
Diberikan himpunan $\mathbb{Z}$ yang dilengkapi operasi penjumlahan dan pergandaan. Berdasarkan Contoh 2.4.12, $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ adalah ring. Akan ditunjukkan bahwa $\mathbb{N}$ adalah *multiplicative subset* $\mathbb{Z}$.
Bukti.
$1 \in \mathbb{N}$, $0 \notin \mathbb{N}$.
Ambil $1 \in \mathbb{N}$ dan $2 \in \mathbb{N}$, sehingga $1 \cdot 2 = 2 \in \mathbb{N}$.
Ambil $1 \in \mathbb{N}$ dan $3 \in \mathbb{N}$, sehingga $1 \cdot 3 = 3 \in \mathbb{N}$.
Dengan cara yang sama berlaku untuk suatu $a, b \in S$. Sehingga $\mathbb{N} = \{1,2,3,4, \dots\}$ merupakan *multiplicative subset* $\mathbb{Z}$.

Definisi 2.4.15 (Ideal)
Misalkan R merupakan ring, I adalah himpunan bagian tak kosong dari R.
I disebut ideal kiri jika dan hanya jika dipenuhi:
i) Untuk setiap $a, b \in I, a - b \in I$,
ii) Untuk setiap $a \in I,\ r \in R,\ ra \in I$.

I disebut ideal kanan jika dan hanya jika dipenuhi:
i) Untuk setiap $a, b \in I, a - b \in I$,
ii) Untuk setiap $a \in I,\ r \in R,\ ar \in I$.

Jika untuk setiap $a \in I,\ r \in R$ berlaku $ar \in I$ dan $ra \in I$ maka I disebut ideal dua sisi.

repository.ub.ac.id
UNIVERSITAS BRAWIJAYA

Contoh 2.4.16

Diberikan himpunan matriks $M(\mathbb{Z})_{2\times2} = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a,b,c,d \in \mathbb{Z}\right\}$ yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan dan pergandaan. Berdasarkan Contoh 2.4.4, $(M(\mathbb{Z})_{2\times2},+,\cdot)$ merupakan ring. $P = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ merupakan himpunan bagian dari $M(\mathbb{Z})_{2\times2}$. Akan ditunjukkan P adalah ideal dari $M(\mathbb{Z})_{2\times2}$.

Bukti.

Akan ditunjukkan bahwa P ideal dari $M(\mathbb{Z})_{2\times2}$.

1. Ambil $A = \begin{bmatrix} m & k \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} n & l \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in P$, berlaku

   $$A - B = \begin{bmatrix} m & k \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} n & l \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m-n & k-l \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in P.$$

2. Ambil $A = \begin{bmatrix} m & k \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in P,\ X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M(\mathbb{Z})_{2\times2}$, berlaku

   $$AX = \begin{bmatrix} m & k \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ma+ck & mb+kd \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in P.$$

   $$XA = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m & k \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} am & ak \\ cm & dk \end{bmatrix} \notin P.$$

$AX \in P$, tetapi $XA \notin P$. Sehingga P bukan merupakan ideal dua sisi, tetapi P merupakan ideal kanan dari $M(\mathbb{Z})_{2\times2}$.

Contoh 2.4.17

Diberikan himpunan $\mathbb{Z}_6$ yang dilengkapi operasi penjumlahan dan pergandaan. Berdasarkan Contoh 2.4.7, $(\mathbb{Z}_6,+,\cdot)$ adalah ring komutatif dengan elemen satuan. $K = \{\bar{0},\bar{2},\bar{4}\}$ merupakan himpunan bagian dari $\mathbb{Z}_6$. Akan ditunjukkan K adalah ideal dari $\mathbb{Z}_6$.

Bukti.

Akan ditunjukkan bahwa K ideal dari $\mathbb{Z}_6$.

1. Untuk setiap $a,b \in K$ berlaku $a - b \in K$. Hal ini dapat dilihat pada Tabel 2.6 berikut:

Tabel 2.6 Operasi Pengurangan pada K

$-$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$

repository.ub.ac.id
UNIVERSITAS BRAWIJAYA

2. Untuk setiap $a \in K,\ r \in \mathbb{Z}_6$ berlaku $ar \in K$ dan $ra \in K$. Hal ini dapat dilihat pada Tabel 2.7 berikut:

Tabel 2.7 Hasil dari ar dan ra dengan $a \in K,\ r \in \mathbb{Z}_6$

a	r	ar	ra
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$
	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{4}$
	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$
	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{4}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{4}$
	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$
	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
	$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{4}$
	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$

Jadi, terbukti bahwa K adalah ideal di $\mathbb{Z}_6$.

Definisi 2.4.18 (Ideal Sejati)
Ideal sejati dari ring R adalah ideal selain $\{0\}$ dan R itu sendiri.

Contoh 2.4.19
Diberikan ring $(\mathbb{Z}, + \cdot)$. Akan ditentukan ideal sejati dan ideal tak sejati.
Bukti.
Ideal-ideal sejati di ring $\mathbb{Z}$ adalah $n\mathbb{Z}$, dengan $n = 2,3,4, \dots, m$. Sedangkan $n\mathbb{Z}$ dengan $n = 0,1$ merupakan ideal tak sejati.

repository.ub.ac.id
UNIVERSITAS BRAWIJAYA

repository.ub.ac.id

Definisi 2.4.20 (Ideal Pokok)
Diketahui R ring komutatif dengan elemen satuan dan $x \in R$. Jika didefinisikan $\langle x \rangle = \{ rx \mid r \in R \}$, maka $\langle x \rangle$ disebut ideal dalam R dan dinamakan ideal pokok (*principal ideal*) yang dibangun oleh x.

Contoh 2.4.21
Diberikan himpunan $\mathbb{Z}$ yang dilengkapi operasi penjumlahan dan pergandaan. Berdasarkan Contoh 2.4.12, $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ adalah ring komutatif dengan elemen satuan. Akan ditunjukkan $2\mathbb{Z}$ merupakan ideal pokok di $\mathbb{Z}$.
Bukti.
Himpunan $2\mathbb{Z} = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\} = \{a.2 | a \in \mathbb{Z}\} = \langle 2 \rangle$ yaitu himpunan bilangan genap merupakan ideal dalam $\mathbb{Z}$ yang dibangun oleh 2. Sehingga $2\mathbb{Z}$ merupakan ideal pokok di $\mathbb{Z}$. Secara umum untuk $b \in \mathbb{Z}$ maka $\langle b \rangle = \{ab | \, a \in \mathbb{Z}\} = b\mathbb{Z}$ adalah ideal yang dibangun oleh elemen b.

Definisi 2.4.22 (Ring Faktor)
Misalkan R adalah ring, I adalah ideal di R. R/I adalah himpunan semua koset-koset dari I di R. Didefinisikan :

$$(a + I) + (b + I) = (a + b) + I$$
$$(a + I)(b + I) = (ab) + I$$
$$-(a + I) = -a + I, \text{ dengan } a, b \in R.$$

Dengan operasi seperti diatas maka $(R/I, +, \cdot)$ merupakan ring yang disebut ring faktor atau quotient ring.

Contoh 2.4.23
Diberikan himpunan $\mathbb{Z}_6$ yang dilengkapi operasi penjumlahan dan pergandaan. Berdasarkan Contoh 2.4.3, $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ adalah ring. Diberikan $K = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\}$ adalah ideal pada $\mathbb{Z}_6$. Akan dtunjukkan $\mathbb{Z}_6/K$ merupakan ring faktor.
Bukti.
Berdasarkan Contoh 2.3.10, semua koset dari K pada $\mathbb{Z}_6$ adalah K dan $\overline{1} + K$.
Selanjutnya akan ditunjukkan $(\mathbb{Z}_6/K, +, \cdot)$ merupakan ring faktor.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA

Tabel 2.8 Operasi Penjumlahan dan Pergandaan pada $\mathbb{Z}_6/K$

$+$	K	$\bar{1}+K$
K	K	$\bar{1}+K$
$\bar{1}+K$	$\bar{1}+K$	K

$\cdot$	K	$\bar{1}+K$
K	K	K
$\bar{1}+K$	K	$\bar{1}+K$

1. Berdasarkan Tabel 2.8 dapat dilihat bahwa $(\mathbb{Z}_6/K,+)$ memenuhi sifat :
   a. Tertutup
   Ambil $x=\bar{a}+K, y=\bar{b}+K \in \mathbb{Z}_6/K$, berlaku
   $$\begin{aligned} x+y &= (\bar{a}+K)+(\bar{b}+K) \\ &= (\bar{a}+\bar{b})+K \\ &= \bar{d}+K \in \mathbb{Z}_6/K, \text{ dengan } \bar{a}+\bar{b}=\bar{d}\in\mathbb{Z}_6. \end{aligned}$$
   b. Assosiatif
   Ambil $x=\bar{a}+K, y=\bar{b}+K, z=\bar{c}+K \in \mathbb{Z}_6/K$, berlaku
   $$\begin{aligned} x+(y+z) &= (\bar{a}+K)+\left[(\bar{b}+K)+(\bar{c}+K)\right] \\ &= (\bar{a}+K)+\left((\bar{b}+\bar{c})+K\right) \\ &= (\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})+K \\ &= \left((\bar{a}+\bar{b})+K\right)+(\bar{c}+K) \\ &= \left[(\bar{a}+K)+(\bar{b}+K)\right]+(\bar{c}+K) \\ &= (x+y)+z. \end{aligned}$$
   c. Mempunyai elemen satuan
   Terdapat $e=K\in\mathbb{Z}_6/K$, untuk setiap $\bar{a}+K\in\mathbb{Z}_6/K$, $(\bar{a}+K)+K=K+(\bar{a}+K)=\bar{a}+K$.
   d. Setiap elemen mempunyai invers sebagai berikut
   invers dari K adalah $K\in\mathbb{Z}_6/K$, karena $K+K=K$,
   invers dari $\bar{1}+K$ adalah $\bar{1}+K\in\mathbb{Z}_6/K$, karena $(\bar{1}+K)+(\bar{1}+K)=(\bar{1}+\bar{1})+K=K$.
   e. Komutatif terhadap operasi penjumlahan pada $\mathbb{Z}_6/K$.
   untuk setiap $\bar{a}+K,\bar{b}+K\in\mathbb{Z}_6/K$, berlaku
   $$\begin{aligned} (\bar{a}+K)+(\bar{b}+K) &= (\bar{a}+\bar{b})+K \\ &= (\bar{b}+\bar{a})+K \\ &= (\bar{b}+K)+(\bar{a}+K). \end{aligned}$$
   Sehingga $(\mathbb{Z}_6/K,+)$ merupakan grup komutatif.
2. Berdasarkan Tabel 2.8 dapat dilihat bahwa $(\mathbb{Z}_6/K,\cdot)$ memenuhi sifat :

repository.ub.ac.id
UNIVERSITAS BRAWIJAYA

a. Tertutup

Ambil $x = \bar{a} + K, y = \bar{b} + K \in \mathbb{Z}_6/K$, berlaku

$$x \cdot y = (\bar{a} + K) \cdot (\bar{b} + K)$$
$$= (\bar{a} \cdot \bar{b}) + K$$
$$= \bar{d} + K \in \mathbb{Z}_6/K, \text{ dengan } \bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{d} \in \mathbb{Z}_6.$$

b. Assosiatif

Ambil $x = \bar{a} + K, y = \bar{b} + K, z = \bar{c} + K \in \mathbb{Z}_6/K$, berlaku

$$x \cdot (y \cdot z) = (\bar{a} + K) \cdot [(\bar{b} + K) \cdot (\bar{c} + K)]$$
$$= (\bar{a} + K) \cdot \left((\bar{b} \cdot \bar{c}) + K\right)$$
$$= (\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}) + K$$
$$= \left((\bar{a} \cdot \bar{b}) + K\right) \cdot (\bar{c} + K)$$
$$= [(\bar{a} + K) \cdot (\bar{b} + K)] \cdot (\bar{c} + K)$$
$$= (x \cdot y) \cdot z.$$

Sehingga $(\mathbb{Z}_6/K, \cdot)$ merupakan semigrup.

3. Berlaku sifat distributif pergandaan terhadap penjumlahan pada $\mathbb{Z}_6/K$.

Ambil $x = \bar{a} + K, y = \bar{b} + K, z = \bar{c} + K \in \mathbb{Z}_6/K$, berlaku

$$x(y + z) = (\bar{a} + K)[(\bar{b} + K) + (\bar{c} + K)]$$
$$= (\bar{a} + K)\left((\bar{b} + \bar{c}) + K\right)$$
$$= \left((\bar{a} \cdot \bar{b}) + K\right) + \left((\bar{a} \cdot \bar{c}) + K\right)$$
$$= (\bar{a} + K)(\bar{b} + K) + (\bar{a} + K)(\bar{c} + K)$$
$$= xy + xz, \text{ dan}$$

$$(x + y)z = [(\bar{a} + K) + (\bar{b} + K)](\bar{c} + K)$$
$$= \left((\bar{a} + \bar{b}) + K\right)(\bar{c} + K)$$
$$= \left((\bar{a} \cdot \bar{c}) + K\right) + \left((\bar{b} \cdot \bar{c}) + K\right)$$
$$= (\bar{a} + K)(\bar{c} + K) + (\bar{b} + K)(\bar{c} + K)$$
$$= xz + yz.$$

Jadi $(\mathbb{Z}_6/K, +, \cdot)$ merupakan ring faktor.

repository.ub.ac.id
UNIVERSITAS BRAWIJAYA

Definisi 2.4.24 (Ideal Prima)
Misalkan R adalah ring komutatif dan P adalah ideal sejati dari R. P disebut ideal prima dari R jika untuk setiap $a, b \in R$ dengan $ab \in P$, maka $a \in P$ atau $b \in P$.

Kontraposisi dari Definisi 2.4.22 diperoleh jika untuk suatu $a, b \in R$ dengan $a \notin P$ dan $b \notin P$, maka $ab \notin P$.

Contoh 2.4.25
Diberikan himpunan $\mathbb{Z}_6$ yang dilengkapi operasi penjumlahan dan pergandaan. Berdasarkan Contoh 2.4.7, $(\mathbb{Z}_6, +,\cdot)$ adalah ring komutatif dengan elemen satuan. $K = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$ adalah ideal sejati dari $\mathbb{Z}_6$. Akan ditunjukkan bahwa K adalah ideal prima.
Bukti.
Akan ditunjukkan menggunakan kontraposisi melalui Tabel 2.9.

Tabel 2.9 Operasi Pergandaan pada $\mathbb{Z}_6 - K$

$\cdot$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$

Berdasarkan Tabel 2.9, secara kontraposisi berlaku bahwa untuk suatu $a, b \in \mathbb{Z}_6$ dengan $a \notin K$ dan $b \notin K$, maka $ab \notin K$. Jadi K adalah ideal prima dari $\mathbb{Z}_6$.

Contoh 2.4.26
Diberikan himpunan $\mathbb{Z}$ yang dilengkapi operasi penjumlahan dan pergandaan. Berdasarkan Contoh 2.4.12, $(\mathbb{Z}, +,\cdot)$ merupakan ring komutatif dengan elemen satuan. Diberikan ideal $K = 2\mathbb{Z}$. Akan ditunjukkan bahwa K adalah ideal prima.
Bukti.
Diketahui ideal $K = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\}$,
Ambil $0,2 \in \mathbb{Z}$ dengan $0 \cdot 2 = 0 \in K$ maka $0 \in K$atau $2 \in K$.
Ambil $1,2 \in \mathbb{Z}$ dengan $1 \cdot 2 = 2 \in K$ maka $1 \notin K$ atau $2 \in K$.
Ambil $2,2 \in \mathbb{Z}$ dengan $2 \cdot 2 = 4 \in K$ maka $2 \in K$ atau $2 \in K$.

repository.ub.ac.id
UNIVERSITAS BRAWIJAYA

Ambil $-1,2 \in \mathbb{Z}$ dengan $(-1) \cdot 2 = -2 \in K$ maka $-1 \notin K$ atau $2 \in K$.
Ambil $-2,2 \in \mathbb{Z}$ dengan $(-2) \cdot 2 = -4 \in K$ maka $-2 \in K$ atau $2 \in K$.
Karena berlaku untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$ dengan $ab \in K$, maka $a \in K$ atau $b \in K$. Jadi K adalah ideal prima.

Definisi 2.4.27 (Ideal Prima Lemah)
Misalkan R adalah ring komutatif dan P adalah ideal sejati dari R. P disebut ideal prima lemah dari R jika untuk setiap $a, b \in R$ dengan $0 \neq ab \in P$, maka $a \in P$ atau $b \in P$.

Kontraposisi dari Definisi 2.4.25 diperoleh jika untuk suatu $a, b \in R$ dengan $a \notin P$ dan $b \notin P$, maka $ab \notin P$ atau $ab = 0$.

Contoh 2.4.28
Diberikan himpunan $\mathbb{Z}_6$ yang dilengkapi operasi penjumlahan dan pergandaan. Berdasarkan Contoh 2.4.7, $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ adalah ring komutatif dengan elemen satuan. $K = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\}$ adalah ideal sejati dari $\mathbb{Z}_6$. Akan ditunjukkan bahwa K adalah ideal prima lemah.
Bukti.
Akan ditunjukkan menggunakan pada Tabel 2.9. Berdasarkan Tabel 2.9, secara kontraposisi berlaku bahwa untuk suatu $a, b \in \mathbb{Z}_6$ dengan $a \notin K$ dan $b \notin K$, maka $ab \notin K$ atau $ab = 0$. Jadi K adalah ideal prima lemah dari $\mathbb{Z}_6$.

Contoh 2.4.29
Diberikan himpunan $\mathbb{Z}$ yang dilengkapi operasi penjumlahan dan pergandaan. Berdasarkan Contoh 2.4.12, $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ merupakan ring komutatif dengan elemen satuan. Diberikan ideal $K = 2\mathbb{Z}$. Akan ditunjukkan bahwa K adalah ideal prima lemah.
Bukti.
Diketahui ideal $K = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\}$,
Ambil $1,3 \in \mathbb{Z}$ dengan $1 \notin K$ dan $3 \notin K$, maka $1 \cdot 3 = 3 \notin K$ atau $3 \neq 0$.

repository.ub.ac.id
UNIVERSITAS BRAWIJAYA

Ambil $3,5 \in \mathbb{Z}$ dengan $3 \notin K$ dan $5 \notin K$, maka $3 \cdot 5 = 15 \notin K$ atau $15 \neq 0$.
Ambil $7,9 \in \mathbb{Z}$ dengan $7 \notin K$ dan $9 \notin K$, maka $7 \cdot 9 = 63 \notin K$ atau $63 \neq 0$.
Ambil $(-1), 3 \in \mathbb{Z}$ dengan $(-1) \notin K$ dan $3 \notin K$, maka $(-1) \cdot 3 = -3 \notin K$ atau $-3 \neq 0$.
Karena berlaku untuk suatu $a, b \in \mathbb{Z}$ dengan $a \notin K$ dan $b \notin K$, maka $ab \notin K$ atau $ab = 0$. Jadi K adalah ideal prima lemah.

Definisi 2.4.30 (Ideal 0- Prima)
Misalkan R adalah ring komutatif dan P adalah ideal sejati dari R. P disebut ideal 0- prima dari R jika untuk setiap $a, b \in R$ dengan $ab \in P - 0 \cdot P = P - 0$, maka $a \in P$ atau $b \in P$.

Lemma 2.4.31
Setiap ideal prima merupakan ideal prima lemah.
Bukti.
Berdasarkan Definisi 2.4.24 dan Definisi 2.4.27, berlaku setiap ideal prima merupakan ideal prima lemah. Hal ini dikarenakan, dengan menggunakan kontraposisi dari ideal prima diperoleh satu kemungkinan yaitu $ab \notin P$, sedangkan pada ideal prima lemah diperoleh dua kemungkinan yaitu $ab \notin P$ atau $ab = \{0\}$.
Oleh karena itu, jelas bahwa setiap ideal prima merupakan ideal prima lemah tetapi ideal prima lemah belum tentu merupakan suatu ideal prima. Jadi terbukti bahwa setiap ideal prima merupakan ideal prima lemah.

Definisi 2.4.32 (Ideal Idempoten)
Misalkan R adalah ring komutatif dan I adalah ideal dari R. I disebut ideal idempoten jika $I^2 = I$.

Contoh 2.4.33
Diberikan himpunan $\mathbb{Z}_6$ yang dilengkapi operasi penjumlahan dan pergandaan. Berdasarkan Contoh 2.4.7, $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ adalah ring komutatif. $K = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$ adalah ideal dari $\mathbb{Z}_6$. Akan ditunjukkan bahwa K adalah ideal idempoten.

repository.ub.ac.id
UNIVERSITAS BRAWIJAYA

Bukti.
$K^2 = K \cdot K = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} \cdot \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$.
Sehingga $K^2 = K$. Jadi K adalah ideal idempoten.

Definisi 2.4.34 (Kondisi Rantai Naik)
Misalkan $(R, +, \cdot)$ adalah ring komutatif dan ideal pada R berhingga n. Ideal pada R memenuhi kondisi rantai naik jika
$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \cdots \subseteq I_n = I_{n+1} = I_{n+2} = \cdots = I_{n+m} = R,$$
dengan terdapat $m \in \mathbb{N}$.

Definisi 2.4.35 (Ring Noetherian)
Misalkan $(R, +, \cdot)$ adalah ring komutatif. R disebut ring Noetherian jika setiap ideal pada R memenuhi kondisi rantai naik.

Contoh 2.4.36
Diberikan himpunan $\mathbb{Z}$ yang dilengkapi operasi penjumlahan dan pergandaan. Berdasarkan Contoh 2.4.12, $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ adalah ring komutatif. Akan ditunjukkan bahwa $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ adalah ring Noetherian.
Bukti.
Ambil ideal dari $\mathbb{Z}$ sebagai berikut:
$I_1 = 16\mathbb{Z}$ $\quad$ $I_2 = 8\mathbb{Z}$ $\quad$ $I_3 = 4\mathbb{Z}$
$I_4 = 2\mathbb{Z}$ $\quad$ $I_5 = \mathbb{Z}$
Akan ditunjukkan bahwa $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ adalah ring Noetherian, maka perlu dibuktikan bahwa ideal di $\mathbb{Z}$ memenuhi kondisi rantai naik.
Himpunan I_1, I_2, I_3, I_4, dan I_5 adalah ideal dari $\mathbb{Z}$ yang membentuk rantai naik
$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq I_4 \subseteq I_5,$$
dan $I_5 = I_6 = \cdots = I_{5+m}$. Jadi $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ adalah ring Noetherian.

Contoh 2.4.37
Diberikan himpunan $\mathbb{Z}_6$ yang dilengkapi operasi penjumlahan dan pergandaan. Berdasarkan Contoh 2.4.7, $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ adalah ring komutatif. Akan ditunjukkan bahwa $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ adalah ring Noetherian.
Bukti.
Ideal-ideal dari ring $\mathbb{Z}_6$ sebagai berikut:
$I_0 = \{\bar{0}\}$

repository.ub.ac.id
UNIVERSITAS BRAWIJAYA

$I_1 = \{\bar{0}, \bar{3}\}$
$I_2 = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$
$I_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$

Akan ditunjukkan bahwa $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ adalah ring Noetherian, maka perlu dibuktikan bahwa ideal dari $\mathbb{Z}_6$ memenuhi kondisi rantai naik.

Himpunan I_0, I_1, dan I_3 adalah ideal dari $\mathbb{Z}_6$ yang membentuk rantai naik

$$I_0 \subseteq I_1 \subseteq I_3,$$

dan himpunan I_0, I_2,dan I_3 adalah ideal dari $\mathbb{Z}_6$ yang membentuk rantai naik

$$I_0 \subseteq I_2 \subseteq I_3,$$

dan $I_n = I_{n+1} = \cdots = I_{n+m}$. Jadi $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ adalah ring Noetherian.

repository.ub.ac.id
UNIVERSITAS BRAWIJAYA

repository.ub.ac.id
UNIVERSITAS BRAWIJAYA

BAB III
PEMBAHASAN

Pada bab ini, diberikan beberapa definisi, lemma dan teorema yang menjelaskan hubungan atau sifat dari ideal I- prima dengan menggunakan beberapa artikel yang ditulis oleh Akray (2016), Bhatwadekar (2005), Jabbar (2011) dan Verschelde (2014).

3.1 Ideal *I*- prima

Definisi 3.1.1 (*Almost Prime Ideal*)
Misalkan $(R,+,\cdot)$ adalah daerah integral dan I ideal sejati dari R. I disebut *almost prime ideal* jika untuk setiap $a,b \in R$ dengan $ab \in I - I^2$, maka berlaku $a \in I$ atau $b \in I$.

Contoh 3.1.2
Diberikan himpunan $\mathbb{Z}$ yang dilengkapi operasi penjumlahan dan pergandaan. Berdasarkan Contoh 2.4.12, $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ adalah daerah integral. $I = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\}$ adalah ideal sejati dari $\mathbb{Z}$. Akan ditunjukkan bahwa I adalah *almost prime ideal*.
Bukti.
Diketahui $I = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\}$, maka

$$\begin{aligned} I^2 = I \cdot I &= \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\} \cdot \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\} \\ &= \{0, \pm 4, \pm 8, \pm 12, \pm 16, \dots\}. \end{aligned}$$

Sehingga, $I - I^2 = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\} - \{0, \pm 4, \pm 8, \pm 12, \pm 16, \dots\}$
$= \{\pm 2, \pm 6, \pm 10, \pm 14, \dots\}$.
Ambil $1,2 \in \mathbb{Z}$ dengan $2 = 1 \cdot 2 \in I - I^2$, maka $1 \notin I$ atau $2 \in I$.
Ambil $(-1), 2 \in \mathbb{Z}$ dengan $-2 = (-1) \cdot 2 \in I - I^2$, maka $-1 \notin I$ atau $2 \in I$.
Ambil $2,3 \in \mathbb{Z}$ dengan $6 = 2 \cdot 3 \in I - I^2$, maka $2 \in I$ atau $3 \notin I$.
Ambil $(-1), 6 \in \mathbb{Z}$ dengan $-6 = (-1) \cdot 6 \in I - I^2$, maka $-1 \notin I$ atau $6 \in I$.
Dengan cara yang sama, berlaku untuk setiap $a,b \in \mathbb{Z}$ dengan $ab \in I - I^2$, maka $a \in I$ atau $b \in I$. Jadi I adalah *almost prime ideal.*

repository.ub.ac.id
UNIVERSITAS BRAWIJAYA

Definisi 3.1.3 (n-*Almost Prime Ideal*)
Misalkan $(R, +, \cdot)$ adalah daerah integral dan I ideal sejati dari R. I disebut n-*almost prime ideal* jika untuk setiap $a, b \in R$ dengan $ab \in I - I^n$, maka berlaku $a \in I$ atau $b \in I$ dengan $n > 2$.

Contoh 3.1.4
Diberikan himpunan $\mathbb{Z}$ yang dilengkapi operasi penjumlahan dan pergandaan. Berdasarkan Contoh 2.4.12, $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ adalah daerah integral. $I = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\}$ adalah ideal sejati dari $\mathbb{Z}$. Akan ditunjukkan bahwa I adalah 3-*almost prime ideal*.
Bukti.
Diketahui $I = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\}$, maka

$$\begin{aligned} I^3 = I^2 \cdot I &= \{0, \pm 4, \pm 8, \pm 12, \pm 16, \dots\} \cdot \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\} \\ &= \{0, \pm 8, \pm 16, \pm 32, \dots\}. \end{aligned}$$

Sehingga, $I - I^3 = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\} - \{0, \pm 8, \pm 16, \pm 32, \dots\}$
$= \{\pm 2, \pm 4, \pm 6, \pm 10, \pm 12, \pm 14, \dots\}$
Ambil $1,2 \in \mathbb{Z}$ dengan $2 = 1 \cdot 2 \in I - I^3$, maka $2 \in I$ atau $1 \notin I$.
Ambil $(-1), 2 \in \mathbb{Z}$ dengan $-2 = (-1) \cdot 2 \in I - I^3$, maka $-1 \notin I$ atau $2 \in I$.
Ambil $2,2 \in \mathbb{Z}$ dengan $4 = 2 \cdot 2 \in I - I^3$, maka $2 \in I$ atau $2 \in I$.
Ambil $(-4), 6 \in \mathbb{Z}$ dengan $-4 = -4 \cdot 1 \in I - I^3$, maka $-4 \in I$ atau $1 \notin I$.
Ambil $2,3 \in \mathbb{Z}$ dengan $6 = 2 \cdot 3 \in I - I^3$, maka $2 \in I$ atau $3 \notin I$.
Ambil $(-1), 6 \in \mathbb{Z}$ dengan $-6 = (-1) \cdot 6 \in I - I^3$, maka $-1 \notin I$ atau $6 \in I$.
Dengan cara yang sama, berlaku untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$ dengan $ab \in I - I^3$, maka $a \in I$ atau $b \in I$. Jadi I adalah 3-*almost prime ideal*.

Definisi 3.1.5 (Radikal dari Ideal)
Misalkan R adalah ring dan X adalah ideal dari R. Radikal dari ideal X yang dinotasikan $\sqrt{X}$ adalah

$$\{p \in R | p^k \in X, \text{untuk suatu } k \in \mathbb{N}\}.$$

Jika $X = \sqrt{X}$, maka ideal X dikatakan radikal.

Contoh 3.1.6

Diberikan himpunan $\mathbb{Z}_6$ yang dilengkapi operasi penjumlahan dan pergandaan. Berdasarkan Contoh 2.4.3, $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ adalah ring. $X = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$ adalah ideal sejati dari $\mathbb{Z}_6$. Akan ditunjukkan radikal dari suatu ideal X.

Bukti.

Ambil $\bar{0} \in \mathbb{Z}_6$, maka $\bar{0}^1 \in X$.
Ambil $\bar{1} \in \mathbb{Z}_6$, maka $\bar{1}^k \notin X$ untuk setiap $k \in \mathbb{N}$.
Ambil $\bar{2} \in \mathbb{Z}_6$, maka $\bar{2}^3 \in X$.
Ambil $\bar{3} \in \mathbb{Z}_6$, maka $\bar{3}^k \notin X$ untuk setiap $k \in \mathbb{N}$.
Ambil $\bar{4} \in \mathbb{Z}_6$, maka $\bar{4}^2 \in X$.
Ambil $\bar{5} \in \mathbb{Z}_6$, maka $\bar{5}^k \notin X$ untuk setiap $k \in \mathbb{N}$.
Sehingga diperoleh $\sqrt{X} = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$. Karena $\sqrt{X} = X$, maka ideal X disebut radikal.

Definisi 3.1.7 (Ideal *I*- prima)

Misalkan $(R, +, \cdot)$ adalah ring komutatif dengan elemen satuan dan I adalah ideal dari R. Didefinisikan P ideal sejati dari R. P merupakan ideal I- prima jika untuk setiap $a, b \in R$ dengan $ab \in P - IP$ maka berlaku $a \in P$ atau $b \in P$.

Kontraposisi dari Definisi 3.1.7 diperoleh jika untuk suatu $a, b \in R$ dengan $a \notin P$ dan $b \notin P$, maka $ab \notin P - IP$.

Contoh 3.1.8

Diberikan himpunan $\mathbb{Z}_6$ yang dilengkapi operasi penjumlahan dan pergandaan. Berdasarkan Contoh 2.4.7, $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ adalah ring komutatif dengan elemen satuan. $I = \{\bar{0}, \bar{3}\}$ adalah ideal dari $\mathbb{Z}_6$ dan $P = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$. Akan ditunjukkan bahwa P adalah ideal I- prima.

Bukti.

Diketahui $I = \{\bar{0}, \bar{3}\} = \langle \bar{3} \rangle$ dan $P = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$,
maka
$$\begin{aligned} P - IP &= \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} - \langle \bar{3} \rangle \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} \\ &= \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} - \{\bar{0}\} \\ &= \{\bar{2}, \bar{4}\}. \end{aligned}$$

repository.ub.ac.id
UNIVERSITAS BRAWIJAYA

Berdasarkan Tabel 2.9, berlaku bahwa untuk suatu $a, b \in \mathbb{Z}_6$ dengan $a \notin P$ dan $b \notin P$, maka $ab \notin P - IP$. Jadi P adalah ideal I- prima dari $\mathbb{Z}_6$.

Contoh 3.1.9

Diberikan himpunan $\mathbb{Z}$ yang dilengkapi operasi penjumlahan dan pergandaan. Berdasarkan Contoh 2.4.12, $(\mathbb{Z}, +,\cdot)$ merupakan ring komutatif dengan elemen satuan. $I = \{0, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \dots\}$ adalah ideal dari $\mathbb{Z}$ dan $K = 2\mathbb{Z}$. Akan ditunjukkan bahwa K adalah ideal I- prima.

Bukti.

Diketahui $I = \{0, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \dots\} = \langle 3 \rangle$ dan $K = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\}$,

maka $K - IK = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\} - \langle 3 \rangle \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\}$
$= \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\} - \{0, \pm 6, \pm 12, \pm 18, \dots\}$
$= \{\pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 10, \dots\}$.

Ambil $1,2 \in \mathbb{Z}$ dengan $1 \cdot 2 = 2 \in K - IK$ maka $1 \notin K$ atau $2 \in K$.
Ambil $2,2 \in \mathbb{Z}$ dengan $2 \cdot 2 = 4 \in K - IK$ maka $2 \in K$ atau $2 \in K$.
Ambil $-1,2 \in \mathbb{Z}$ dengan $(-1) \cdot 2 = -2 \in K - IK$ maka $-1 \notin K$ atau $2 \in K$.
Ambil $-2,2 \in \mathbb{Z}$ dengan $(-2) \cdot 2 = -4 \in K - IK$ maka $-2 \in K$ atau $2 \in K$.
Jadi K adalah ideal I- prima.

Contoh 3.1.10

Diberikan himpunan $\mathbb{Z}_{12}$ yang dilengkapi operasi penjumlahan dan pergandaan. $(\mathbb{Z}_{12}, +,\cdot)$ adalah ring komutatif dengan elemen satuan. $I = K = \langle \bar{4} \rangle = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\}$ adalah ideal dari $\mathbb{Z}_{12}$. Akan ditunjukkan bahwa P adalah ideal I- prima.

Bukti.

Diketahui $I = \langle \bar{4} \rangle = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\}$ dan $K = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\}$,

maka $K - IK = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\} - \langle \bar{4} \rangle \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\}$
$= \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\} - \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\}$
$= \emptyset$.

repository.ub.ac.id
UNIVERSITAS BRAWIJAYA

repository.ub.ac.id

Tabel 3.1 Operasi Pergandaan pada $\mathbb{Z}_{12} - K$

$\cdot$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{10}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$	$\overline{10}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{9}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{9}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{9}$
$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{10}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{6}$	$\overline{11}$	$\overline{9}$	$\overline{2}$	$\overline{7}$
$\overline{6}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$
$\overline{7}$	$\overline{7}$	$\overline{2}$	$\overline{9}$	$\overline{11}$	$\overline{6}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$	$\overline{10}$	$\overline{5}$
$\overline{9}$	$\overline{9}$	$\overline{6}$	$\overline{3}$	$\overline{9}$	$\overline{6}$	$\overline{3}$	$\overline{9}$	$\overline{6}$	$\overline{3}$
$\overline{10}$	$\overline{10}$	$\overline{8}$	$\overline{6}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{10}$	$\overline{6}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{11}$	$\overline{11}$	$\overline{10}$	$\overline{9}$	$\overline{7}$	$\overline{6}$	$\overline{5}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

Berdasarkan Tabel 3.1, secara kontraposisi berlaku bahwa untuk suatu $a, b \in \mathbb{Z}_{12}$ dengan $a \notin K$ dan $b \notin K$, maka $ab \notin K - IK$. Jadi K adalah ideal I- prima dari $\mathbb{Z}_{12}$.

Akan tetapi, ideal K bukan merupakan ideal prima maupun ideal prima lemah. Hal ini dikarenakan terdapat $\overline{2} \notin K$ dan $\overline{2} \notin K$, sehingga $\overline{2} \cdot \overline{2} = \overline{4} \in K$ ataupun juga $\overline{4} \neq \overline{0}$.

3.2 Sifat-Sifat yang Berkaitan dengan Ideal *I*- prima

Lemma 3.2.1

Misalkan $(R, +, \cdot)$ adalah ring komutatif dengan elemen satuan. I ideal dari R dan P ideal sejati dari R. P adalah ideal I- prima jika dan hanya jika P/IP adalah ideal prima lemah pada R/IP.

Bukti.

($\Rightarrow$) Diketahui P adalah ideal I- prima pada R.

Akan ditunjukkan bahwa P/IP adalah ideal prima lemah pada R/IP.

Ambil $a, b \in R$ dengan

$0 \neq ab + IP = (a + IP)(b + IP) \in P/IP$. R/IP merupakan ring faktor dengan R adalah ring dan IP adalah ideal dari R. Jika diketahui $ab \in P - IP$, maka $a \in P$ atau $b \in P$. Karena $a \in P$, maka berlaku juga $a + IP \in P/IP$ dan juga karena $b \in P$, maka berlaku juga $b + IP \in P/IP$.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA

Karena $0 \neq ab + IP = (a + IP)(b + IP) \in P/IP$, maka berlaku $a + IP \in P/IP$ atau $b + IP \in P/IP$. Jadi, P/IP adalah ideal prima lemah pada R/IP.

($\Leftarrow$) Diketahui bahwa P/IP adalah ideal prima lemah pada R/IP. Akan ditunjukkan bahwa P adalah ideal I- prima.

Ambil $r, s \in R$ dengan $rs \in P - IP$. P/IP merupakan ideal prima lemah dari R/IP sehingga $0 \neq rs + IP = (r + IP)(s + IP) \in P/IP$, maka $r + IP \in P/IP$ atau $s + IP \in P/IP$. Karena P/IP merupakan ideal dari R/IP, sehingga $IP \subseteq P$, maka $IP \subseteq R$. Jika $r + IP \in P/IP$, maka $r \in P$ dan jika $s + IP \in P/IP$, maka $s \in P$.

Sehingga $rs \in P - IP$, berlaku $r \in P$ atau $s \in P$. Jadi, P adalah ideal I- prima pada R.

Contoh 3.2.2

Diberikan himpunan $\mathbb{Z}_6$ yang dilengkapi operasi penjumlahan dan pergandaan. Berdasarkan Contoh 2.4.7, $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ adalah ring komutatif dengan elemen satuan. $I = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$ adalah ideal dari $\mathbb{Z}_6$ dan $P = \{\bar{0}, \bar{3}\}$.

Bukti.

Berdasarkan Contoh 3.1.8, P adalah ideal I- prima.

Akan ditunjukkan P/IP adalah ideal prima lemah pada $\mathbb{Z}_6/IP$.

$\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$, $P = \{\bar{0}, \bar{3}\}$ dan $IP = \langle \bar{3} \rangle \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} = \{\bar{0}\}$.

Sehingga koset-koset dari P relatif IP adalah IP dan $\bar{3} + IP$.

Sedangkan koset-koset dari $\mathbb{Z}_6$ relatif IP adalah $IP, \bar{1} + IP, \bar{2} + IP, \bar{3} + IP, \bar{4} + IP$, dan $\bar{5} + IP$.

Ambil $\bar{1} + IP, \bar{4} + IP \in \mathbb{Z}_6/IP$ jika $\bar{1} + IP \notin P/IP$ dan $\bar{4} + IP \notin P/IP$, maka $(\bar{1} + IP)(\bar{4} + IP) = \bar{4} + IP \notin P/IP$ atau $\bar{4} + IP \neq IP$.

Ambil $\bar{2} + IP, \bar{5} + IP \in \mathbb{Z}_6/IP$ jika $\bar{2} + IP \notin P/IP$ dan $\bar{5} + IP \notin P/IP$, maka $(\bar{2} + IP)(\bar{5} + IP) = \bar{4} + IP \notin P/IP$ atau $\bar{4} + IP \neq IP$.

Ambil $\bar{5} + IP \in \mathbb{Z}_6/IP$ jika $\bar{5} + IP \notin P/IP$, maka $(\bar{5} + IP)(\bar{5} + IP) = \bar{1} + IP \notin P/IP$ atau $\bar{1} + IP \neq IP$.

Sehingga P/IP adalah ideal prima lemah pada $\mathbb{Z}_6/IP$.

repository.ub.ac.id
UNIVERSITAS BRAWIJAYA

Jadi, jika P adalah ideal I- prima, maka P/IP adalah ideal prima lemah pada $\mathbb{Z}_6/IP$.

Teorema 3.2.3

1. Misalkan R adalah ring komutatif dengan elemen satuan. I dan J adalah ideal dari R dengan $I \subseteq J$. Jika P adalah ideal I- prima dari R, maka P adalah ideal J- prima.
2. Misalkan R adalah ring komutatif dengan elemen satuan. Jika P adalah ideal I- prima yang bukan ideal prima, maka $P^2 \subseteq IP$. Secara kontraposisi jika $P^2 \nsubseteq IP$, maka P merupakan ideal prima.

Bukti.

1. Diketahui $I \subseteq J$ dan P adalah ideal I- prima dari R.
   Akan ditunjukkan P adalah ideal J- prima dari R.
   Misalkan $x \in IP$ dengan $x = ab$, $a \in I$ dan $b \in P$. Karena $I \subseteq J$, berarti $a \in J$. Sehingga $x = ab$ dengan $a \in J$ dan $b \in P$, berlaku $x \in JP$.
   P ideal I- prima, maka $ab \in P - IP$ berlaku $a \in P$ atau $b \in P$. $ab \in P - JP$, dikarenakan $ab \in P - IP$ maka $a \in P$ atau $b \in P$.
   Sehingga $ab \in P - JP$, dikarenakan $ab \in P - IP$ maka $a \in P$ atau $b \in P$. Jadi P adalah ideal J- prima dari R.
2. Andaikan bahwa $P^2 \nsubseteq IP$, akan ditunjukkan bahwa P adalah ideal prima. Misalkan $ab \in P$ untuk $a, b \in R$.
   Jika $ab \notin IP$, maka P adalah ideal I- prima sehingga $ab \in P - IP$ berlaku $a \in P$ atau $b \in P$. Jadi, diasumsikan bahwa $ab \in IP$.
   Andaikan bahwa $aP \nsubseteq IP$, sedemikian sehingga $ax \notin IP$ untuk suatu $x \in P$. Sehingga $a(x + b) \in P - IP$, maka berlaku $a \in P$ atau $x + b \in P$ mengakibatkan $a \in P$ atau $b \in P$. Jadi, dapat diasumsikan bahwa $aP \subseteq IP$ sehingga sama untuk asumsi $bP \subseteq IP$.
   Karena $P^2 \nsubseteq IP$, terdapat $y, z \in P$ dengan $yz \notin IP$. Maka $(a + y)(b + z) \in P - IP$. Jadi P ideal I- prima dengan mengakibatkan $a + y \in P$ atau $b + z \in P$, sedemikian sehingga $a \in P$ atau $b \in P$. Jadi, P adalah ideal prima.

Contoh 3.2.4
Diberikan himpunan $\mathbb{Z}_6$ yang dilengkapi operasi penjumlahan dan pergandaan. Berdasarkan Contoh 2.4.7, $(\mathbb{Z}_6, +,\cdot)$ adalah ring komutatif dengan elemen satuan. Diberikan ideal $I \subseteq J$ dan $P = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$.
Bukti.
Karena $I \subseteq J$, maka ambil sembarang ideal $I = \langle \bar{3} \rangle = \{\bar{0}, \bar{3}\}$ dan $J = \langle \bar{1} \rangle = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$ pada $\mathbb{Z}_6$.
Berdasarkan Contoh 3.1.8, P adalah ideal I- prima.
Akan ditunjukkan bahwa P adalah ideal J- prima.

$$\begin{aligned} P - JP &= \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} - \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}\{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} \\ &= \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} - \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} \\ &= \emptyset. \end{aligned}$$

Karena diperoleh bahwa $P - JP = \emptyset \subseteq P - IP$, maka P adalah ideal J- prima.

Contoh 3.2.5
Diberikan himpunan $\mathbb{Z}_6$ yang dilengkapi operasi penjumlahan dan pergandaan. Berdasarkan Contoh 2.4.7, $(\mathbb{Z}_6, +,\cdot)$ adalah ring komutatif dengan elemen satuan. Diberikan ideal $I = \langle \bar{3} \rangle$ dan $P = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$. Akan ditunjukkan jika $P^2 \nsubseteq IP$, maka P adalah ideal prima.
Bukti.
Berdasarkan Contoh 3.1.8, P merupakan ideal I- prima.
Berdasarkan Teorema 3.2.3 (2) secara kontraposisi jika $P^2 \nsubseteq IP$, maka P adalah ideal prima.
$P^2 = PP = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}\{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$
$IP = \{\bar{0}, \bar{3}\}\{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} = \{\bar{0}\}$.
Sehingga $P^2 = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} \supseteq IP$, maka $P^2 \nsubseteq IP$.
Akan ditunjukkan bahwa P merupakan ideal prima. Berdasarkan Contoh 2.4.23 P merupakan ideal prima.
Jadi terbukti jika $P^2 \nsubseteq IP$, maka P merupakan ideal prima.

Contoh 3.2.6
Diberikan himpunan $\mathbb{Z}_{12}$ yang dilengkapi operasi penjumlahan dan pergandaan. $(\mathbb{Z}_{12}, +,\cdot)$ adalah ring komutatif dengan elemen satuan.

$I = K = \langle \bar{4} \rangle = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\}$ adalah ideal dari $\mathbb{Z}_{12}$. Akan ditunjukkan bahwa $K^2 \subseteq IK$.

Bukti.

Berdasarkan Contoh 3.1.10, K merupakan ideal I- prima yang bukan ideal prima. Akan ditunjukkan $K^2 \subseteq IK$.

$K^2 = KK = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\}\{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\} = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\}$

$IK = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\}\{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\} = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\}$.

Karena $K^2 = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} \supseteq IK$, maka $K^2 \subseteq IK$.

Teorema 3.2.7

Misalkan R adalah ring komutatif dengan elemen satuan. Jika P adalah ideal dari R, maka $P^2, P^3, \dots, P^n$ merupakan ideal.

Bukti.

Diketahui P merupakan ideal, maka untuk setiap $k, l \in P$ berlaku $k - l \in P$ dan untuk setiap $k \in P$, $r \in R$ berlaku $kr \in P$.

Akan ditunjukkan bahwa $P^2, P^3 \dots, P^n$ merupakan ideal.

Misalkan $P^2 = P \cdot P = \{aa | a \in P\}$. Ambil $x, y \in P^2$ di mana $x = aa$ dan $y = aa$ dengan $a \in P$.

P^2 merupakan ideal jika memenuhi :

i) Untuk setiap $x, y \in P^2$, berlaku $x - y \in P^2$.

$$x - y = (aa) - (aa)$$
$$= a(a - a)$$

$a \in P$ dan karena P merupakan ideal, berlaku $a - a \in P$.

Sehingga $x - y \in P \cdot P = P^2$.

ii) Untuk setiap $x \in P^2$ dan $r \in R$, berlaku $rx, xr \in P^2$.

$$rx = r(aa)$$
$$= (ra)a \text{ di mana } ra \in P \text{ dan } a \in P$$

$rx \in P \cdot P = P^2$. Begitu juga dengan $xr \in P^2$.

Sehingga P^2 merupakan ideal dan berlaku juga hingga P^n.

Teorema 3.2.8

Misalkan R adalah ring komutatif dengan elemen satuan. Jika P adalah ideal dari R, maka $\cap_{i=1}^{n} P^i = P \cap P^2 \cap \dots \cap P^n$ merupakan ideal dari R.

repository.ub.ac.id
UNIVERSITAS BRAWIJAYA

Bukti.

Diketahui P merupakan ideal, maka untuk setiap $k, l \in P$ berlaku $k - l \in P$ dan untuk setiap $k \in P, r \in R$ berlaku $kr \in P$. Berdasarkan Teorema 3.2.7 jika P adalah ideal dari R, maka $P^2, P^3, \dots, P^n$ merupakan ideal.

Akan ditunjukkan $\cap_{i=1}^{n} P^i$ merupakan ideal.

i) Ambil sembarang $a, b \in \cap_{i=1}^{n} P^i = P \cap P^2 \cap \dots \cap P^n$, berarti $a, b \in P \wedge a, b \in P^2 \wedge \dots \wedge a, b \in P^n$.
   Karena $P, P^2, \dots, P^n$ merupakan ideal, maka $a - b \in P \wedge a - b \in P^2 \wedge \dots \wedge a - b \in P^n$. Sehingga $a - b \in P \cap P^2 \cap \dots \cap P^n = \cap_{i=1}^{n} P^i$.

ii) Ambil $r \in R$ dan $a \in \cap_{i=1}^{n} P^i = P \cap P^2 \cap \dots \cap P^n$, berarti $a \in P \wedge a \in P^2 \wedge \dots \wedge a \in P^n$.
   Karena $P, P^2, \dots, P^n$ merupakan ideal, maka $ra \in P \wedge ra \in P^2 \wedge \dots \wedge ra \in P^n$. Sehingga $ra \in P \cap P^2 \cap \dots \cap P^n = \cap_{i=1}^{n} P^i$.
   Berlaku juga untuk $ar \in \cap_{i=1}^{n} P^i$.

Jadi $\cap_{i=1}^{n} P^i$ merupakan ideal.

Definisi 3.2.9

Misalkan $(R, +, \cdot)$ adalah ring komutatif dengan elemen satuan. Didefinisikan P ideal sejati dari R. P merupakan ideal $\cap_{i=1}^{\infty} P^i$- prima jika untuk setiap $a, b \in R$ dengan $ab \in P - \left(\cap_{i=1}^{\infty} P^i\right)P$ maka berlaku $a \in P$ atau $b \in P$.

Contoh 3.2.10

Diberikan himpunan $\mathbb{Z}$ yang dilengkapi operasi penjumlahan dan pergandaan. Berdasarkan Contoh 2.4.12, $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ merupakan ring komutatif dengan elemen satuan. $P = 2\mathbb{Z}$ adalah ideal dari $\mathbb{Z}$. Akan ditunjukkan bahwa P adalah ideal $\cap_{i=1}^{3} P^i$- prima.

Bukti.

Diketahui $P = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\}$ dan

$\cap_{i=1}^{3} P^i = \{0, \pm 8, \pm 16, \pm 24, \dots\} = \langle 8 \rangle$.

maka $P - \cap_{i=1}^{3} P^i P = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\} - \langle 8 \rangle \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\}$

$$= \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\} - \{0, \pm 16, \pm 32, \pm 48, \dots\}$$
$$= \{\pm 2, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 10, \pm 12, \pm 14, \pm 18, \dots\}.$$

repository.ub.ac.id
UNIVERSITAS BRAWIJAYA

Ambil $1,2 \in \mathbb{Z}$ dengan $1 \cdot 2 = 2 \in K - IK$ maka $1 \notin K$ atau $2 \in K$.
Ambil $2,2 \in \mathbb{Z}$ dengan $2 \cdot 2 = 4 \in K - IK$ maka $2 \in K$ atau $2 \in K$.
Ambil $-1,2 \in \mathbb{Z}$ dengan $(-1) \cdot 2 = -2 \in K - IK$ maka $-1 \notin K$ atau $2 \in K$.
Ambil $-2,2 \in \mathbb{Z}$ dengan $(-2) \cdot 2 = -4 \in K - IK$ maka $-2 \in K$ atau $2 \in K$.
Jadi K adalah ideal $\cap_{i=1}^{3} P^i$- prima.

Akibat 3.2.11
Jika P adalah ideal I- prima dari R dengan $IP \subseteq P^3$, maka P adalah ideal $\cap_{i=1}^{\infty} P^i$- prima.
Bukti.
Jika P adalah ideal prima, maka P adalah ideal $\cap_{i=1}^{\infty} P^i$- prima. Diasumsikan bahwa P bukan ideal prima dan dari Teorema 3.2.3 diketahui bahwa $P^2 \subseteq IP$ dan yang diketahui $IP \subseteq P^3$, sedemikian sehingga $P^2 \subseteq IP \subseteq P^3$. Sehingga berlaku $IP = P^n$ untuk setiap $n \geq 2$.
Misalkan $i = 1$ dan 2, menurut Teorema 3.2.8 $\cap_{i=1}^{2} P^i = P \cap P^2$ merupakan ideal dan $\left(\cap_{i=1}^{2} P^i\right)P = P^2P = P^3 = IP$. Karena P adalah ideal I- prima, maka P adalah ideal $\cap_{i=1}^{\infty} P^i$- prima.

Contoh 3.2.12
Diberikan himpunan $\mathbb{Z}_6$ yang dilengkapi operasi penjumlahan dan pergandaan. Berdasarkan Contoh 2.4.7, $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ adalah ring komutatif dengan elemen satuan. Akan ditunjukkan bahwa $IP \subseteq P^3$ dengan ideal $I = \langle\bar{3}\rangle$ dan ideal $P = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$ adalah ideal $\cap_{i=1}^{\infty} P^i$- prima.
Bukti.
$P^3 = P^2P = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}\{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$
$IP = \{\bar{0}, \bar{3}\}\{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} = \{\bar{0}\}$.
Karena $IP = \{\bar{0}, \bar{3}\}\{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} = \{\bar{0}\} \subseteq P^3$, maka P adalah ideal $\cap_{i=1}^{\infty} P^i$- prima.

repository.ub.ac.id
UNIVERSITAS BRAWIJAYA

Teorema 3.2.13

1. Jika R dan S adalah ring komutatif dan P adalah ideal 0- prima dari R, maka $P \times S$ adalah ideal I- prima dari $R \times S$ untuk setiap ideal I dari $R \times S$ dengan $\bigcap_{i=1}^{\infty}(P \times S)^i \subseteq I(P \times S) \subseteq P \times S$.
2. Misalkan P adalah ideal sejati yang dibangun berhingga dari ring komutatif R. Diasumsikan P adalah ideal I- prima dengan $IP \subseteq P^3$, maka berlaku P adalah ideal 0- prima atau $P^2 \neq 0$ adalah ideal idempoten dan R terdekomposisi sebagai $T \times S$ dengan $S = P^2$ dan $P = J \times S$ dengan J adalah ideal 0- prima. Selanjutnya P adalah ideal I- prima untuk $\bigcap_{i=1}^{\infty} P^i \subseteq IP \subseteq P$.

Bukti.

1. Diketahui R dan S adalah ring komutatif. P adalah ideal 0- prima (ideal prima lemah) dari R. Berdasarkan Lemma 2.4.29 dapat diasumsikan bahwa $P \times S$ merupakan ideal 0- prima jika dan hanya jika $P \times S$ adalah ideal prima. Akan tetapi, $P \times S$ adalah ideal I- prima untuk setiap ideal I dengan $\bigcap_{i=1}^{\infty}(P \times S)^i \subseteq I(P \times S)$. Jika P adalah ideal prima, maka $P \times S$ adalah ideal prima dan juga merupakan ideal I- prima untuk setiap ideal I. Diasumsikan bahwa P adalah bukan ideal prima dan juga $P^2 = P$, maka $P = 0 = P^2$ dan $(P \times S)^2 = 0 \times S$. Hal ini dikarenakan, $\bigcap_{i=1}^{\infty}(P \times S)^i = \bigcap_{i=1}^{\infty} P^i \times S = 0 \times S$. Sehingga diperoleh $P \times S - \bigcap_{i=1}^{\infty}(P \times S)^i = P \times S - 0 \times S = (P - 0) \times S$.
   Karena P adalah ideal prima lemah, maka $P \times S$ adalah ideal $\bigcap_{i=1}^{\infty}(P \times S)^i$- prima dan juga karena $\bigcap_{i=1}^{\infty}(P \times S)^i \subseteq I(P \times S)$, maka $P \times S$ adalah ideal I- prima.
2. Jika P adalah ideal prima, maka P adalah ideal 0- prima. Jadi dapat diasumsikan menurut Teorema 3.2.3 bahwa P adalah bukan ideal prima maka $P^2 \subseteq IP$ dan juga pada asumsi bahwa P adalah ideal I- prima dengan $IP \subseteq P^3$, sedemikian sehingga $P^2 \subseteq IP \subseteq P^3$. Jadi $P^2 = P^3$. Oleh karena itu P^2 adalah ideal idempotent karena jika P^2 dibangun berhingga, maka $P^2 = \langle e \rangle$ untuk suatu $e \in R$.
   Misalkan $P^2 = 0$, maka $IP \subseteq P^3 = 0$. Jadi $IP = 0$ dan oleh karena itu P adalah ideal 0- prima. Jadi diasumsikan $P^2 \neq 0$. Ambil sembarang $S = P^2 = Re$ dan $T = R(1 - e)$, jadi R terdekomposisi sebagai $T \times S$ di mana $S = P^2$.

repository.ub.ac.id
UNIVERSITAS BRAWIJAYA

Misalkan $J = P(1-e)$, maka $P = J \times S$ dengan $J^2 = \left(P(1-e)\right)^2 = P^2(1-e)^2 = \langle e \rangle (1-e) = 0$. Akan ditunjukkan bahwa J adalah ideal 0- prima. Misalkan $ab \in J^2 - 0$, maka $(a,1)(b,1) = (ab,1) \in J \times S - (J \times S)^2$ $= J \times S - 0 \times S \subseteq P - IP$ dan karena $IP \subseteq P^3$, sehingga diperoleh $IP \subseteq P^3 = (J \times S)^3 = 0 \times S$. Oleh karena itu diperoleh $(a,1) \in P$ atau $(b,1) \in P$, maka $a \in J$ atau $b \in J$. Jadi J adalah ideal 0- prima (ideal prima lemah).

Contoh 3.2.14

Diberikan $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ dan $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ merupakan ring komutatif.
Didefinisikan :

$$\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_3 = \left\{ \left(\bar{a}, \bar{b}\right) \middle| \bar{a} \in \mathbb{Z}_6, \bar{b} \in \mathbb{Z}_3 \right\}.$$

$I = \{(\bar{0},\bar{0}), (\bar{2},\bar{0}), (\bar{4},\bar{0})\}$ adalah ideal dari $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_3$ dan $K = \{\bar{0},\bar{2},\bar{4}\}$ adalah ideal sejati dari $\mathbb{Z}_6$.
Dengan didefinisikan :

$$\left(\bar{a},\bar{b}\right) + \left(\bar{c},\bar{d}\right) = \left(\bar{a}+\bar{c}, \bar{b}+\bar{d}\right) \text{ dan}$$
$$\left(\bar{a},\bar{b}\right)\left(\bar{c},\bar{d}\right) = \left(\bar{a}\bar{c}, \bar{b}\bar{d}\right) \text{ dengan } \bar{a},\bar{c} \in \mathbb{Z}_6 \text{ dan } \bar{b},\bar{d} \in \mathbb{Z}_3.$$

Bukti.

Berdasarkan Contoh 2.4.28, K adalah ideal prima lemah dari $\mathbb{Z}_6$.
Diketahui $K = \{\bar{0},\bar{2},\bar{4}\}$, maka elemen-elemen dari himpunan $K \times \mathbb{Z}_3 = \{(\bar{0},\bar{0}), (\bar{2},\bar{0}), (\bar{4},\bar{0}), (\bar{0},\bar{1}), (\bar{2},\bar{1}), (\bar{4},\bar{1}), (\bar{0},\bar{2}), (\bar{2},\bar{2}),$ $(\bar{4},\bar{2})\}$. Akan ditunjukkan $K \times \mathbb{Z}_3$ ideal dari $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_3$.

1. Untuk setiap $\left(\bar{a},\bar{b}\right), \left(\bar{c},\bar{d}\right) \in K \times \mathbb{Z}_3$ berlaku $\left(\bar{a}-\bar{c}, \bar{b}-\bar{d}\right) \in K \times \mathbb{Z}_3$ dengan $\bar{a}-\bar{c} \in K$ dan $\bar{b}-\bar{d} \in \mathbb{Z}_3$.
2. Untuk setiap $\left(\bar{a},\bar{b}\right) \in K \times \mathbb{Z}_3$ dan $(\bar{x},\bar{y}) \in \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_3$ berlaku $\left(\bar{a},\bar{b}\right)(\bar{x},\bar{y}) = \left(\bar{a}\bar{x}, \bar{b}\bar{y}\right) \in K \times \mathbb{Z}_3$ dan
$(\bar{x},\bar{y})\left(\bar{a},\bar{b}\right) = \left(\bar{x}\bar{a}, \bar{y}\bar{b}\right) \in K \times \mathbb{Z}_3$.

Jadi, $K \times \mathbb{Z}_3$ adalah ideal dari $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_3$.
Berikutnya, akan ditunjukkan bahwa $K \times \mathbb{Z}_3$ merupakan ideal I- prima.

$$\begin{aligned} K \times \mathbb{Z}_3 - I(K \times \mathbb{Z}_3) = {} & \{(\bar{0},\bar{0}), (\bar{2},\bar{0}), (\bar{4},\bar{0}), (\bar{0},\bar{1}), (\bar{2},\bar{1}), (\bar{4},\bar{1}), \\ & (\bar{0},\bar{2}), (\bar{2},\bar{2}), (\bar{4},\bar{2})\} - \{(\bar{0},\bar{0}), (\bar{2},\bar{0}), (\bar{4},\bar{0})\}\{(\bar{0},\bar{0}), \\ & (\bar{2},\bar{0}), (\bar{4},\bar{0}), (\bar{0},\bar{1}), (\bar{2},\bar{1}), (\bar{4},\bar{1}), (\bar{0},\bar{2}), (\bar{2},\bar{2}), (\bar{4},\bar{2})\} \end{aligned}$$

repository.ub.ac.id
UNIVERSITAS BRAWIJAYA

$$= \{(\bar{0},\bar{0}),(\bar{2},\bar{0}),(\bar{4},\bar{0}),(\bar{0},\bar{1}),(\bar{2},\bar{1}),(\bar{4},\bar{1}),$$
$$(\bar{0},\bar{2}),(\bar{2},\bar{2}),(\bar{4},\bar{2})\} - \{(\bar{0},\bar{0}),(\bar{2},\bar{0}),(\bar{4},\bar{0})\}$$
$$K \times \mathbb{Z}_3 - I(K \times \mathbb{Z}_3) = \{(\bar{0},\bar{1}),(\bar{2},\bar{1}),(\bar{4},\bar{1}),(\bar{0},\bar{2}),(\bar{2},\bar{2}),(\bar{4},\bar{2})\}.$$

Tabel 3.2 Operasi Pergandaan pada $(\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_3) - (K \times \mathbb{Z}_3)$

$\cdot$	$(\bar{1},\bar{0})$	$(\bar{3},\bar{0})$	$(\bar{5},\bar{0})$	$(\bar{1},\bar{1})$	$(\bar{3},\bar{1})$	$(\bar{5},\bar{1})$	$(\bar{1},\bar{2})$	$(\bar{3},\bar{2})$	$(\bar{5},\bar{2})$
$(\bar{1},\bar{0})$	$(\bar{1},\bar{0})$	$(\bar{3},\bar{0})$	$(\bar{5},\bar{0})$	$(\bar{1},\bar{0})$	$(\bar{3},\bar{0})$	$(\bar{5},\bar{0})$	$(\bar{1},\bar{0})$	$(\bar{3},\bar{0})$	$(\bar{5},\bar{0})$
$(\bar{3},\bar{0})$	$(\bar{3},\bar{0})$	$(\bar{3},\bar{0})$	$(\bar{3},\bar{0})$	$(\bar{3},\bar{0})$	$(\bar{3},\bar{0})$	$(\bar{3},\bar{0})$	$(\bar{3},\bar{0})$	$(\bar{3},\bar{0})$	$(\bar{3},\bar{0})$
$(\bar{5},\bar{0})$	$(\bar{5},\bar{0})$	$(\bar{3},\bar{0})$	$(\bar{1},\bar{0})$	$(\bar{5},\bar{0})$	$(\bar{3},\bar{0})$	$(\bar{1},\bar{0})$	$(\bar{5},\bar{0})$	$(\bar{3},\bar{0})$	$(\bar{1},\bar{0})$
$(\bar{1},\bar{1})$	$(\bar{1},\bar{0})$	$(\bar{3},\bar{0})$	$(\bar{5},\bar{0})$	$(\bar{1},\bar{1})$	$(\bar{3},\bar{1})$	$(\bar{5},\bar{1})$	$(\bar{1},\bar{2})$	$(\bar{3},\bar{2})$	$(\bar{5},\bar{2})$
$(\bar{3},\bar{1})$	$(\bar{3},\bar{0})$	$(\bar{3},\bar{0})$	$(\bar{3},\bar{0})$	$(\bar{3},\bar{1})$	$(\bar{3},\bar{1})$	$(\bar{3},\bar{1})$	$(\bar{3},\bar{2})$	$(\bar{3},\bar{2})$	$(\bar{3},\bar{2})$
$(\bar{5},\bar{1})$	$(\bar{5},\bar{0})$	$(\bar{3},\bar{0})$	$(\bar{1},\bar{0})$	$(\bar{5},\bar{1})$	$(\bar{3},\bar{1})$	$(\bar{1},\bar{1})$	$(\bar{5},\bar{2})$	$(\bar{3},\bar{2})$	$(\bar{1},\bar{2})$
$(\bar{1},\bar{2})$	$(\bar{1},\bar{0})$	$(\bar{3},\bar{0})$	$(\bar{5},\bar{0})$	$(\bar{1},\bar{2})$	$(\bar{3},\bar{2})$	$(\bar{5},\bar{2})$	$(\bar{1},\bar{1})$	$(\bar{3},\bar{1})$	$(\bar{5},\bar{1})$
$(\bar{3},\bar{2})$	$(\bar{3},\bar{0})$	$(\bar{3},\bar{0})$	$(\bar{3},\bar{0})$	$(\bar{3},\bar{2})$	$(\bar{3},\bar{2})$	$(\bar{3},\bar{2})$	$(\bar{3},\bar{1})$	$(\bar{3},\bar{1})$	$(\bar{3},\bar{1})$
$(\bar{5},\bar{2})$	$(\bar{5},\bar{0})$	$(\bar{3},\bar{0})$	$(\bar{1},\bar{0})$	$(\bar{5},\bar{2})$	$(\bar{3},\bar{2})$	$(\bar{1},\bar{2})$	$(\bar{5},\bar{1})$	$(\bar{3},\bar{1})$	$(\bar{1},\bar{1})$

Berdasarkan Tabel 3.2, secara kontraposisi berlaku bahwa untuk suatu $(\bar{a},\bar{b}),(\bar{c},\bar{d}) \in \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_3$ dengan $(\bar{a},\bar{b}) \notin K \times \mathbb{Z}_3$ dan $(\bar{c},\bar{d}) \notin K \times \mathbb{Z}_3$, maka $(\bar{a},\bar{b}),(\bar{c},\bar{d}) \notin K \times \mathbb{Z}_3 - I(K \times \mathbb{Z}_3)$. Jadi $K \times \mathbb{Z}_3$ adalah ideal I- prima dari $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_3$.

Akibat 3.2.15

Misalkan R adalah daerah integral Noetherian. Ideal sejati P dari R adalah ideal prima jika dan hanya jika P adalah ideal P^2- prima.

Bukti.

($\Longrightarrow$) Diketahui P adalah ideal prima dari R.

Akan ditunjukkan P adalah ideal P^2- prima.

Ambil $a, b \in R$ dengan $ab \in P - P^2P$. Diketahui bahwa P ideal prima, maka $ab \in P$ berlaku $a \in P$ atau $b \in P$. Karena R adalah daerah integral Noetherian, maka ideal pada R berhingga banyak. Karena $ab \in P - P^2P$, maka $ab \notin P^2P$ tetapi $ab \in P$. Karena P adalah ideal prima dan $ab \in P$, maka berlaku $a \in P$

atau $b \in P$. Sehingga $ab \in P - P^2P$ berlaku $a \in P$ atau $b \in P$. Jadi P merupakan ideal P^2- prima.

($\Leftarrow$) Diketahui P adalah ideal P^2- prima.

Akan ditunjukkan P adalah ideal prima dari R.

Ambil $a, b \in R$ dengan $ab \in P$. Diketahui P ideal P^2- prima, maka $ab \in P - P^2P$ berlaku $a \in P$ atau $b \in P$. Karena $ab \in P - P^2P$, maka $ab \in P$ dan $ab \notin P^2P$.

Karena $ab \in P$ dengan berlaku $a \in P$ atau $b \in P$. Jadi P adalah ideal prima dari R.

Contoh 3.2.16

Diberikan himpunan $\mathbb{Z}$ yang dilengkapi operasi penjumlahan dan pergandaan. Berdasarkan Contoh 2.4.12 dan Contoh 2.4.36, $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ merupakan daerah integral Noetherian. Akan ditunjukkan bahwa $K = 2\mathbb{Z}$ merupakan ideal K^2- prima.

Bukti.

Berdasarkan Contoh 2.4.24, K merupakan ideal prima.

Akan ditunjukkan bahwa K merupakan ideal K^2- prima.

Diketahui $K = 2\mathbb{Z} = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\}$, maka

$$\begin{aligned} K^2 &= \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\}\{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\} \\ &= \{0, \pm 4, \pm 8, \pm 12, \pm 16, \dots\}, \text{ sedemikian sehingga} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K - K^2K &= \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\} \\ &\quad - \{0, \pm 4, \pm 8, \pm 12, \pm 16, \dots\}\{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\} \\ &= \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\} - \{0, \pm 8, \pm 16, \pm 32, \dots\} \\ &= \{\pm 2, \pm 4, \pm 6, \pm 10, \pm 12, \pm 14, \dots\}. \end{aligned}$$

Ambil $0,1 \in \mathbb{Z}$ dengan $0 \cdot 1 = 0 \in K - K^2K$ maka $0 \in K$ atau $1 \notin K$.
Ambil $1,2 \in \mathbb{Z}$ dengan $1 \cdot 2 = 2 \in K - K^2K$ maka $1 \notin K$ atau $2 \in K$.
Ambil $2,2 \in \mathbb{Z}$ dengan $2 \cdot 2 = 4 \in K - K^2K$ maka $2 \in K$ atau $2 \in K$.
Ambil $-1,2 \in \mathbb{Z}$ dengan $(-1) \cdot 2 = -2 \in K - K^2K$ maka $-1 \notin K$ atau $2 \in K$.

Jadi K juga merupakan ideal K^2- prima.

Definisi 3.2.17

Misalkan R adalah ring komutatif dengan elemen satuan. P adalah ideal sejati dari R dan $x \in R$, maka didefinisikan

$$(P : x) = \{y \in R | xy \in P\}.$$

repository.ub.ac.id
UNIVERSITAS BRAWIJAYA

Teorema 3.2.18
Misalkan I adalah ideal dari R dan P adalah ideal sejati dari R. Maka pernyataan berikut ekuivalen:
(1) P adalah ideal I- prima.
(2) Untuk $x \in R - P,\ (P : x) = P \cup (IP : x)$.
(3) Untuk $x \in R - P,\ (P : x) = P$ atau $(P : x) = (IP : x)$.
(4) Untuk ideal J dan K dari R, $JK \subseteq P$ dan $JK \nsubseteq IP$ akibatnya $J \subseteq P$ atau $K \subseteq P$.

Bukti.

(1) $\Longrightarrow$ (2)
Diketahui P adalah ideal I- prima.
Akan ditunjukkan untuk $x \in R - P,\ (P : x) = P \cup (IP : x)$.
Ambil $r \in R - P$ dan $s \in (P : r)$, sehingga $rs \in P$. Jika $rs \in P - IP$, maka $s \in P$ atau $r \in P$. Jika $rs \in IP$, maka $s \in (IP : r)$. Sehingga diperoleh $s \in (P : r) \subseteq P \cup (IP : r)$.
Ambil $r \in R - P$, dan $s \in P \cup (IP : r)$, sehingga $s \in P$ atau $rs \in IP$. Jika $rs \in P - IP$, maka $s \in P$ atau $r \in P$. Jika $rs \in P$, maka $s \in (P : r)$. Sehingga diperoleh $s \in P \cup (IP : r) \subseteq (P : r)$.

(2) $\Longrightarrow$ (3)
Jika suatu ideal adalah gabungan dari dua ideal, maka ideal itu sama dengan salah satunya.

(3) $\Longrightarrow$ (4)
Diketahui $x \in R - P,\ (P : x) = P$ atau $(P : x) = (IP : x)$.
Akan ditunjukkan J dan K adalah ideal dari R, $JK \subseteq P$ dan $JK \nsubseteq IP$ akibatnya $J \subseteq P$ atau $K \subseteq P$.
Misalkan J dan K ideal dari R dengan $JK \subseteq P$. Diasumsikan bahwa $J \nsubseteq P$ dan $J \nsubseteq P$, maka $JK \subseteq IP$. Andaikan $r \in J$. Pertama, misalkan $r \in P$ maka $rK \subseteq IP$ menunjukkan $K \subseteq (P : r)$. Sekarang $K \nsubseteq P$, jadi $(P : r) = (IP : r)$. Selanjutnya, misalkan $r \in J \cap P$. Ambil $s \in J - P$, maka $r + s \in J - P$. Jadi dengan kasus pertama $sK \subseteq IP$ dan jadi $(r + s)K \subseteq IP$. Misalkan $t \in K$, maka $rt = (r + s)t - st \in IP$. Jadi $rK \subseteq IP$, karena $JK \subseteq IP$.

(4) $\Longrightarrow$ (1)
Misalkan $rs \in P - IP$, maka $(r)(s) \subseteq P$ tetapi $(r)(s) \nsubseteq IP$. Jadi $(r) \subseteq P$ atau $(s) \subseteq P$, yang artinya $r \in P$ atau $s \in P$. Sehingga jika $rs \in P - IP$ berlaku $r \in P$ atau $s \in P$, maka P adalah ideal I- prima.

Contoh 3.2.19
Diberikan himpunan $\mathbb{Z}_{12}$ yang dilengkapi operasi penjumlahan dan pergandaan. $(\mathbb{Z}_{12},+,\cdot)$ adalah ring komutatif dengan elemen satuan. Diberikan ideal-ideal dari $\mathbb{Z}_{12}$ yaitu $P=\{\bar{0},\bar{2},\bar{4},\bar{6},\bar{8},\overline{10}\}$, $I=\{\bar{0},\bar{4},\bar{8}\}$, $J=\{\bar{0},\bar{3},\bar{6},\bar{9}\}$, dan $K=\{\bar{0},\bar{6}\}$.
Bukti.
Berdasarkan yang diketahui, dapat ditentukan bahwa
$JK=\{\bar{0},\bar{3},\bar{6},\bar{9}\}\{\bar{0},\bar{6}\}=\{\bar{0},\bar{6}\}\subseteq P$, sedangkan
$IP=\{\bar{0},\bar{4},\bar{8}\}\{\bar{0},\bar{2},\bar{4},\bar{6},\bar{8},\overline{10}\}=\{\bar{0},\bar{4},\bar{8}\}\nsupseteq JK$.
Karena $JK\subseteq P$ dan $JK\nsubseteq IP$ dengan mengakibatkan $J\nsubseteq P$ atau $K\subseteq P$, maka P adalah ideal I- prima.
Selanjutnya, akan ditunjukkan P adalah ideal I- prima.

$$\begin{aligned}P-IP&=\{\bar{0},\bar{2},\bar{4},\bar{6},\bar{8},\overline{10}\}-\{\bar{0},\bar{4},\bar{8}\}\{\bar{0},\bar{2},\bar{4},\bar{6},\bar{8},\overline{10}\}\\&=\{\bar{0},\bar{2},\bar{4},\bar{6},\bar{8},\overline{10}\}-\{\bar{0},\bar{4},\bar{8}\}\\&=\{\bar{2},\bar{6},\overline{10}\}.\end{aligned}$$

Tabel 3.3 Operasi Pergandaan pada $\mathbb{Z}_{12}-P$

$\cdot$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$	$\bar{7}$	$\bar{9}$	$\overline{11}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$	$\bar{7}$	$\bar{9}$	$\overline{11}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{9}$	$\bar{3}$	$\bar{9}$	$\bar{3}$	$\bar{9}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\overline{11}$	$\bar{9}$	$\bar{7}$
$\bar{7}$	$\bar{7}$	$\bar{9}$	$\overline{11}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$
$\bar{9}$	$\bar{9}$	$\bar{3}$	$\bar{9}$	$\bar{3}$	$\bar{9}$	$\bar{3}$
$\overline{11}$	$\overline{11}$	$\bar{9}$	$\bar{7}$	$\bar{5}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$

Berdasarkan Tabel 3.3, secara kontraposisi berlaku bahwa untuk suatu $a,b\in\mathbb{Z}_{12}$ dengan $a\notin P$ dan $b\notin P$, maka $ab\notin P-IP$. Jadi P adalah ideal I- prima dari $\mathbb{Z}_{12}$.

Akibat 3.2.20
Misalkan P adalah ideal I- prima dari R. Jika P bukan ideal prima dari R, maka $P\sqrt{IP}\subseteq IP$.
Bukti.
Ambil $r\in\sqrt{IP}=\{a\in R|a^k\in IP$ untuk suatu $k\in\mathbb{N}\}$. Diketahui P adalah ideal I- prima. Jika $r\in P$, maka $rP\subseteq P^2\subseteq IP$ seperti pada Teorema 3.2.3. Sehingga diasumsikan bahwa $r\notin P$. Menurut Teorema 3.2.18, berlaku $(P:r)=P$ atau $(P:r)=(IP:r)$. Karena

repository.ub.ac.id
UNIVERSITAS BRAWIJAYA

$(P : r) = P$, maka $P \subseteq (P : r)$, dengan diberikan $rP \subseteq IP$. Sehingga asumsikan bahwa $(P : r) = (IP : r)$. Misalkan $r^n \in IP$, tetapi $r^{n-1} \notin IP$. Karena $(P : r) = (IP : r)$, maka $r^n \in P$ sedemikian sehingga $r^{n-1} \in (P : r) = P$. Dengan demikian $r^{n-1} \in P - IP$, jadi $r \in P$ adalah kontradiksi. Karena pernyataan salah, sehingga terbukti jika P bukan ideal prima dari R, maka $P\sqrt{IP} \subseteq IP$.

Definisi 3.2.21
Misalkan R adalah ring komutatif dengan elemen satuan. Jika S adalah *multiplicative closed subset* dari R dan $x \in R$, maka didefinisikan

$$S^{-1} = \{x \in R | x \cdot u = e, \text{ untuk suatu } u \in S\}.$$

Contoh 3.2.22
Diberikan himpunan $\mathbb{Z}_7$ yang dilengkapi operasi penjumlahan dan pergandaan. Berdasarkan Contoh 2.4.8, $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ adalah ring komutatif dengan elemen satuan. Diberikan S himpunan bagian dari $\mathbb{Z}_7$ dengan $S = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{5}\}$. Akan ditunjukkan anggota dari S^{-1}.
Bukti.
$S^{-1} = \{x \in R | x \cdot u = e,$ untuk suatu $u \in S\}$. Sehingga diperoleh anggota-anggota dari himpunan $S^{-1} = \{\bar{1}, \bar{4}, \bar{5}\}$.

Jika S adalah *multiplicative closed subset* dari ring komutatif dengan elemen satuan R dan P adalah ideal prima dari R dengan $P \cap S = \emptyset$, maka $S^{-1}P$ adalah ideal prima dari $S^{-1}R$ dan $S^{-1}P \cap R = P$.

Perhatikan bahwa untuk ideal J dari R dengan $J \subseteq P$, $I(P/J) = (IP + J)/J$. Jika P adalah ideal prima, maka begitu juga dengan P/J. Akan diperluas hasil ini menjadi ideal I- prima dalam Proposisi 3.2.23.

Proposisi 3.2.23
Misalkan R adalah ring dan I ideal dari R. Misalkan P adalah ideal I- prima dari R. Maka pernyataan berikut berlaku:

1. Jika J adalah ideal dari R dengan $J \subseteq P$, maka P/J adalah ideal I- prima dari R/J.

repository.ub.ac.id
UNIVERSITAS BRAWIJAYA

2. Diasumsikan S adalah *multiplicative closed subset* dari R dengan $P \cap S = \emptyset$. Sehingga $S^{-1}P$ adalah ideal $S^{-1}I$- prima dari $S^{-1}R$. Dan jika $S^{-1}P \neq S^{-1}(IP)$, maka $S^{-1}P \cap R = P$.

Bukti.

1. Ambil sembarang $x, y \in R$ dengan $\bar{x}\bar{y} \in P/J - I(P/J) = P/J - IP/J = P/J - (IP + J)/J$, sehingga $xy \in P - (IP + J) = P - IP - J$. Dengan diketahui bahwa $xy \in P - IP - J$, maka $xy \in P - IP$ dan $xy \notin J$. Karena $xy \in P - IP$ dan P adalah ideal I- prima, maka berlaku $x \in P$ atau $y \in P$.
   Karena $x \in P$, maka $\bar{x} \in P/J$ dengan $\bar{x} = x + J$ atau $y \in P$, maka $\bar{y} \in P/J$ dengan $\bar{y} = y + J$. Jadi P/J adalah ideal I- prima dari R/J.
2. Ambil $\frac{a}{s}\frac{b}{t} \in S^{-1}P - S^{-1}I \cdot S^{-1}P \subseteq S^{-1}P - S^{-1}(IP) = S^{-1}(P - IP)$. Jadi $\frac{1}{s}, \frac{1}{t} \in S^{-1}$ dan $abk \in P - IP$ untuk suatu $k \in S$. Karena P adalah ideal I- prima, sehingga berlaku $a \in P$ atau $bk \in P$. Jadi $\frac{a}{s} \in S^{-1}P$ atau $\frac{bk}{t} \in S^{-1}P$. Sehingga $S^{-1}P$ adalah ideal $S^{-1}I$- prima dari $S^{-1}R$.
   Ambil sembarang $a \in S^{-1}P \cap R$, sehingga terdapat $u \in S$ dengan $au \in P$. Jika $au \notin IP$, maka $au \in P - IP$ sehingga $a \in P$. Jika $au \in IP$, maka $a \in S^{-1}(IP) \cap R$. Sedemikian sehingga $S^{-1}P \cap R \subseteq P \cup (S^{-1}(IP) \cap R)$. Oleh karena itu $S^{-1}P \cap R = P$ atau $S^{-1}P \cap R = S^{-1}(IP) \cap R$.

repository.ub.ac.id
UNIVERSITAS BRAWIJAYA

repository.ub.ac.id

UNIVERSITAS BRAWIJAYA

BAB IV
PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang telah dipaparkan, dapat disimpulkan bahwa :

1. Misalkan $(R, +, \cdot)$ ring komutatif dengan elemen satuan. I ideal dari R dan P ideal sejati dari R. P adalah ideal I- prima jika dan hanya jika P/IP adalah ideal prima lemah pada R/IP.
2. Misalkan R adalah ring dan I ideal dari R. Misalkan P adalah ideal I- prima dari R. Maka pernyataan berikut berlaku:
   i. Jika J adalah ideal dari R dengan $J \subseteq P$, maka P/J adalah ideal I- prima dari R/J.
   ii. Diasumsikan S adalah *multiplicative closed subset* dari R dengan $P \cap S = \emptyset$. Sehingga $S^{-1}P$ adalah ideal $S^{-1}I$- prima dari $S^{-1}R$. Dan jika $S^{-1}P \neq S^{-1}(IP)$, maka $S^{-1}P \cap R = P$.

4.2 Saran

Pada skripsi ini dibahas sifat yang berkaitan dengan ideal I- prima, tetapi penulis tidak membahas hubungan antara ideal I- prima dengan ideal-ideal yang lain. Untuk penelitian selanjutnya, penulis menyarankan untuk mengkaji hubungan antara ideal I- prima dengan ideal-ideal yang lain.

repository.ub.ac.id
UNIVERSITAS BRAWIJAYA

DAFTAR PUSTAKA

Akray, I. 2016. *I-Prime Ideals.* Erbil. University of Soran Kurdistan.

Andari, A. 2014. *Ring, Field, dan Daerah Integral*. Malang. University of Brawijaya Press.

Andari, A. 2015. *Teori Grup*. Malang. University of Brawijaya Press.

Anderson, D. and E. Smith. 2003. *Weakly Prime ideals*, Houston J. Math, 29, 831-840.

Arifin, A. 2000. *Aljabar*. Bandung. Penerbit ITB.

Bhatwadekar, S. M. dan P. K. Sharma. 2005. *Unique Factorization and Birth of Almost Primes*, Comm. Algebra, 33, 43–49.

Cremona, J. 2012. *Commutative Algebra*. https://warwick.ac.uk/fac/sci/maths/people/staff/fbouyer/commutative_algebra.pdf/ tanggal akses 1 Maret 2018.

Jabbar, A. K. dan C. A. Ahmed. 2011. *On Almost Primary Ideals*. Kurdistan. Sulaimani University.

Jacobson, N. 1951. *Lectures in Abstract Algebra*. New Haven. D Van Nostrand Company, INC.

Kaplansky, I. 1974. *Commutative Rings* (Revised Edition). Chicago. University of Chicago Press.

Khairunnisa, A. 2014. *Matematika Dasar*. Jakarta. PT Raja Grafindo Persada.

Mas'oed, F. 2013. *Struktur Aljabar*. Palembang. Akademia.

Pal, A. 2017. *Notes For Commutative Algebra*. wwwf.imperial.ac.uk/~apal4/commalgnotes.pdf/ tanggal akses 10 Februari 2018.

Setiawan, A. 2014. *Dasar-Dasar Aljabar Modern : Teori Grup dan Teori Ring.* Salatiga. Trisara Grafika.

Verschelde, J. 2014. *Manipulation of Ideals*. UIC, Dept of Math, Stat and CS.

repository.ub.ac.id
UNIVERSITAS BRAWIJAYA