

**ANALISIS DINAMIK MODEL INFEKSI HIV
ANTARA WANITA PEKERJA SEKS DAN PRIA DEWASA**

SKRIPSI

oleh:

MEGA RACHMAWATI LESTARI

145090400111015



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2018**

**ANALISIS DINAMIK MODEL INFEKSI HIV
ANTARA WANITA PEKERJA SEKS DAN PRIA DEWASA**

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Matematika

oleh:
MEGA RACHMAWATI LESTARI
145090400111015



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2018**



LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

ANALISIS DINAMIK MODEL INFEKSI HIV ANTARA WANITA PEKERJA SEKS DAN PRIA DEWASA

oleh:
MEGA RACHMAWATI LESTARI
145090400111015

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji pada
tanggal 14 Februari 2018 dan dinyatakan memenuhi syarat untuk
memperoleh gelar Sarjana Matematika

Pembimbing

Dr. Isnani Darti, S.Si., M.Si.
NIP. 197312162002122001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si., M.Si., Ph.D.
NIP. 197509082000031003



LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Mega Rachmawati Lestari
NIM : 145090400111015
Jurusan : Matematika
Penulis skripsi berjudul : Analisis Dinamik Model Infeksi HIV
antara Wanita Pekerja Seks dan Pria
Dewasa

dengan ini menyatakan bahwa:

1. skripsi ini adalah hasil pemikiran saya, bukan hasil menjiplak dari tulisan orang lain. Rujukan-rujukan yang tercantum pada Daftar Pustaka hanya digunakan sebagai acuan.
2. apabila di kemudian hari skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala akibat hukum dari keadaan tersebut.

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 14 Februari 2018
yang menyatakan,

Mega Rachmawati Lestari
145090400111015



ANALISIS DINAMIK MODEL INFEKSI HIV ANTARA WANITA PEKERJA SEKS DAN PRIA DEWASA

ABSTRAK

Pada skripsi ini dibahas model infeksi HIV antara wanita pekerja seks dan pria dewasa. Analisis dinamik pada model dilakukan dengan menentukan titik kesetimbangan dan kestabilan titik kesetimbangan. Pada model yang dibahas terdapat dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik. Titik kesetimbangan bebas penyakit selalu eksis, sedangkan titik kesetimbangan endemik eksis jika angka reproduksi dasar $R_0 > 1$. Analisis kestabilan menunjukkan bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit stabil asimtotik global jika $R_0 < 1$, sedangkan jika $R_0 > 1$ titik kesetimbangan endemik stabil asimtotik global. Hasil simulasi numerik menunjukkan hasil yang sesuai dengan hasil analisis analitiknya.

Kata kunci: HIV, kestabilan titik kesetimbangan, angka reproduksi dasar, stabil asimtotik global.



DYNAMICS ANALYSIS OF HIV INFECTION MODEL AMONG FEMALE SEX WORKERS AND SENIOR MALE

ABSTRACT

This final project concern with an HIV infection model among female sex workers and senior male clients. Dynamical analysis of this model is done by determining the equilibrium point and stability of the equilibrium point. There are two equilibrium points, namely disease free equilibrium point and endemic equilibrium point. The disease free equilibrium point always exist, while the endemic equilibrium exist when basic reproduction number $R_0 > 1$. Stability analysis shows that the disease free equilibrium point is global asymptotically stable if $R_0 < 1$, while if $R_0 > 1$ the endemic equilibrium point will be global asymptotically stable. Numerical solutions agree with the analytical results.

Key words: HIV, stability of equilibrium point, basic reproduction number, global stability.



KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadirat Allah SWT yang memberikan rahmat-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul Analisis Dinamik Model Infeksi HIV antara Wanita Pekerja seks dan Pria Dewasa ini dengan baik. Penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Dr. Isnani Darti, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing dan Ketua Program Studi Matematika atas bimbingan, arahan, dan saran yang telah diberikan selama penyusunan skripsi ini.
2. Nur Shofianah, S.Si., M.Si., Ph.D. dan Drs. Marsudi, MS. selaku Dosen Penguji, atas segala kritik dan saran yang telah diberikan untuk perbaikan skripsi ini.
3. Dr. Sobri Abusini, MT. selaku Dosen Penasihat Akademik yang selalu memberikan motivasi kepada penulis untuk menyelesaikan skripsi ini tepat waktu.
4. Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si., M.Si., Ph.D. selaku Ketua Jurusan Matematika atas segala bantuan yang diberikan.
5. Ibu dan Bapak Dosen Program Studi Matematika yang telah memberikan ilmunya kepada penulis dan karyawan Jurusan Matematika atas segala bantuan yang diberikan.
6. Papa (A. R. Hidayat), Mama (Siti Syarifah), kakak-kakak (Bunga Ichsan Lestari dan Ambar Suci Lestari), dan adik (Maisa Haifa Lestari) yang selalu memberi semangat dan doa.
7. Noraniza Bahrotul Ilmi, Rizqiyatul Ula, Rica Uswatun Hasanah, Ardhi Sanjaya, Khoirunisa, dan Purwaningtias Aprianti atas ilmu, kritik, dan saran dalam penulisan skripsi ini.
8. Keluarga Besar Matematika 2014 dan teman-teman CCLUB atas kebersamaannya selama masa perkuliahan.
9. Semua pihak yang penulis tidak dapat sebutkan satu persatu.

Penulis menyadari sepenuhnya bahwa skripsi ini tidak lepas dari adanya kekurangan atau pun kesalahan. Oleh karena itu, demi perbaikan di masa yang akan datang, kritik dan saran para pembaca

repository.ub.ac.id

dapat disampaikan melalui email [megarahmalestari@gmail.com](mailto:megarahmelestari@gmail.com).
Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak yang membutuhkan.

Malang, 14 Februari 2018

Penulis





DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI	iii
HALAMAN PERNYATAAN	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR GAMBAR	xv
DAFTAR TABEL	xvii
DAFTAR LAMPIRAN	xix
I PENDAHULUAN	1
1.1. Latar Belakang	1
1.2. Rumusan Masalah	2
1.3. Batasan Masalah	3
1.4. Tujuan	3
II DASAR TEORI	5
2.1. Sistem Persamaan Diferensial Biasa	5
2.2. Sistem Dinamik	5
2.3. Sistem Otonomus	6
2.3.1. Sistem otonomus linear	7
2.3.2. Sistem otonomus nonlinear	7
2.4. Kriteria Routh-Hurwitz	9
2.5. Kestabilan Global	10
2.6. Angka Reproduksi Dasar	10
III HASIL DAN PEMBAHASAN	11
3.1. Konstruksi Model	11
3.1.1. Laju perubahan subpopulasi individu rentan	13
3.1.2. Laju perubahan subpopulasi individu terinfeksi yang tidak terdiagnosis HIV-positif	14
3.1.3. Laju perubahan subpopulasi individu yang terdiagnosis HIV-positif	15

3.2.	Analisis Dinamik Model	17
3.2.1.	Titik kesetimbangan bebas penyakit	17
3.2.2.	Titik kesetimbangan endemik	20
3.3.	Solusi Numerik	29
3.3.1.	Simulasi numerik untuk $R_0 < 1$	29
3.3.2.	Simulasi numerik untuk $R_0 > 1$	30
IV	PENUTUP	33
4.1.	Kesimpulan	33
4.2.	Saran	33
DAFTAR PUSTAKA		35





DAFTAR GAMBAR

3.1	Diagram kompartemen model infeksi HIV antara wanita pekerja seks dan pria dewasa	12
3.2	Potret fase untuk $R_0 < 1$	30
3.3	Potret fase untuk $R_0 > 1$	31







DAFTAR TABEL

3.1	Tabel 3.1 Nilai parameter untuk $R_0 < 1$	29
3.2	Tabel 3.2 Nilai parameter untuk $R_0 > 1$	30







DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1 Analisis kestabilan lokal titik kesetimbangan bebas penyakit	37
Lampiran 2 Analisis kestabilan global titik kesetimbangan bebas penyakit	41
Lampiran 3 Titik kesetimbangan endemik	42
Lampiran 4 Analisis kestabilan global titik kesetimbangan endemik	44
Lampiran 5 <i>Listing</i> program	53







BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Acquired Immune Deficiency Syndrome (AIDS) adalah sekumpulan gejala dan infeksi yang timbul karena rusaknya sistem kekebalan tubuh manusia akibat infeksi *Human Immunodeficiency Virus* (HIV). Menurut WHO (*World Health Organization*), kasus HIV di dunia pada tahun 2012 mencapai 2,3 juta kasus, sebanyak 1,6 juta penderita meninggal karena AIDS (*Acquired Immunodeficiency Syndrome*) dan 647.000 penderita berusia di bawah 15 tahun (UNAIDS, 2013).

Human Immunodeficiency Virus (HIV) dapat ditularkan melalui tiga cara, yaitu secara vertikal (dari ibu ke anak), secara transeksual (homoseksual maupun heteroseksual), dan secara horizontal yaitu kontak antar darah (pemakaian jarum suntik bersama-sama secara bergantian, tato tindik, transfusi darah, transplantasi organ, dan lain-lain) (Neferi, 2016).

Meningkatnya jumlah kasus HIV melanda dunia didorong oleh adanya industri seks komersial. Meskipun tingkat penggunaan kondom meningkat, seks tanpa pelindung tetap umum terjadi pada pekerja seks komersial dan klien mereka. Pekerja seks sering kali bersedia melakukan hubungan seks tanpa kondom jika klien mereka membayar ekstra (Yang, dkk., 2017).

Model matematika merupakan suatu alat yang dapat mempermudah penyelesaian masalah dalam kehidupan nyata. Masalah-masalah tersebut dapat dibentuk ke dalam model matematika dengan adanya asumsi-asumsi tertentu. Sebagai contoh, model matematika telah diterapkan untuk mempelajari strategi pencegahan dan pengendalian penyebaran HIV/AIDS pada populasi tertentu. Pada tahun 2006, Bacaer, dkk. mengkonstruksi model matematika HIV/AIDS di kalangan pengguna narkoba suntik dan pekerja seks. Model tersebut terdapat tiga kompartemen, yaitu rentan (S), terinfeksi HIV tetapi tidak terinfeksi AIDS (I), individu dengan AIDS sepenuhnya (A). Diasumsikan individu AIDS tidak berinteraksi dengan orang lain, adanya kematian alami, dan penyebaran HIV hanya melalui kontak secara acak. Naresh dan Sharma (2011) mengkonstruksi model epidemi HIV dengan penularan secara vertikal dari ibu ke anak. Pada model tersebut

terdapat tiga kompartemen yaitu individu rentan (S), individu terinfeksi HIV-positif (I), dan individu yang terinfeksi AIDS (A). Selanjutnya, Huo dan Chen (2015) mengkonstruksi model matematis HIV menjadi dua tahap yaitu individu yang terinfeksi HIV-positif pada tahap asimtomatis dan individu yang terinfeksi HIV-positif pada saat simptomatis. Model tersebut terdiri dari enam kompartemen, yaitu individu rentan (S), individu terinfeksi HIV-positif pada tahap asimtomatis (H), individu terinfeksi HIV-positif pada tahap simptomatis tidak menerima perawatan (P), individu yang terinfeksi AIDS yang tidak tertular dan tidak melakukan perawatan (A), individu yang menerima pengobatan ARV (T), dan individu yang mengubah kebiasaan seksual mereka untuk mempertahankan hidupnya (R).

Berdasarkan penelitian-penelitian sebelumnya, Yang, dkk. (2017) mengkonstruksi model infeksi HIV antara wanita pekerja seks dan pria dewasa. Model tersebut terdiri dari dua populasi, yaitu wanita pekerja seks dan pria dewasa. Pada wanita pekerja seks terdapat tiga subpopulasi, yaitu individu rentan (S_f), individu terinfeksi yang tidak terdiagnosis HIV-positif (I_f), dan individu yang terdiagnosis HIV-positif (D_f). Sedangkan pada pria dewasa terdapat dua subpopulasi, yaitu individu rentan (S_m) dan individu terinfeksi yang tidak terdiagnosis HIV-positif (I_m). Semua yang masuk ke dalam populasi wanita pekerja seks dan pria dewasa masing-masing diasumsikan rentan. Skripsi ini mengkaji ulang model infeksi HIV yang dibahas oleh Yang, dkk. (2017). Analisis dinamik yang dilakukan pada model meliputi penentuan titik kesetimbangan, penentuan kestabilan lokal dan global. Selanjutnya juga dilakukan simulasi numerik untuk mendukung hasil analisis dinamik yang diperoleh.

1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, pokok permasalahan yang dikaji pada skripsi ini sebagai berikut.

1. Bagaimana konstruksi model infeksi HIV antara wanita pekerja seks dan pria dewasa?
2. Bagaimana titik kesetimbangan dan kestabilan titik kesetimbangan model tersebut?
3. Bagaimana hasil simulasi numerik dan interpretasi solusi model tersebut?

1.3. Batasan Masalah

Batasan masalah dalam model infeksi HIV antara wanita pekerja seks dan pria dewasa adalah.

1. Kompartemen AIDS tidak dipertimbangkan.
2. Tidak terjadi penularan secara vertikal.
3. Interaksi hanya dilakukan antara wanita pekerja seks dan pria dewasa.
4. Tidak adanya kematian alami.

1.4. Tujuan

Tujuan yang ingin diperoleh pada skripsi ini sebagai berikut.

1. Mengkontruksi model infeksi HIV antara wanita pekerja seks dan pria dewasa.
2. Menentukan titik kesetimbangan dan kestabilan titik kesetimbangan model tersebut.
3. Menginterpretasikan hasil simulasi numerik model tersebut.





BAB II

DASAR TEORI

2.1. Sistem Persamaan Diferensial Biasa

Sistem persamaan diferensial biasa berdimensi n adalah suatu sistem yang terdiri dari n persamaan diferensial biasa dan n fungsi yang tidak diketahui dengan $n \geq 2, n \in \mathbb{Z}$.

Bentuk umum sistem persamaan diferensial orde satu berdimensi n sebagai berikut

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= F_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \frac{dx_2}{dt} &= F_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= F_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n),\end{aligned}$$

dengan F_i adalah fungsi yang bergantung pada variabel x_i, \dots, x_n untuk $i = 1, 2, \dots, n$,

(Boyce dan DiPrima, 2012).

2.2. Sistem Dinamik

Sistem dinamik merupakan suatu sistem yang selalu berubah dan dapat diketahui kondisi di masa yang akan datang bergantung pada kondisi saat ini atau di masa lalu (Palm, 2014).

Sistem dinamik dibedakan menjadi dua, yaitu sistem dinamik diskret dengan bentuk umum

$$\vec{x}_{t+1} = \vec{f}(\vec{x}_t), t \in \mathbb{Z} \text{ atau } \mathbb{N}, \vec{x} \in \mathbb{R}^n$$

dan sistem dinamik kontinu dengan bentuk umum

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}, t), t \in \mathbb{R}, \vec{x} \in \mathbb{R}^n,$$

(Arrowsmith dan Place, 1994).

2.3. Sistem Otonomus

Sistem otonomus merupakan suatu sistem persamaan diferensial biasa yang secara eksplisit tidak bergantung pada t . Bentuk umum sistem otonomus adalah

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)\end{aligned}\tag{2.1}$$

Titik $\vec{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ merupakan titik kesetimbangan sistem (2.1) jika

$$f_i(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

(Boyce dan DiPrima, 2012).

Definisi 2.3.1 (Kestabilan Titik Kesetimbangan)

Titik kesetimbangan $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ pada sistem (2.4) bersifat

1. stabil, jika untuk $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap sistem $\vec{x} = \vec{x}(t)$ yang memenuhi

$$\|\vec{x}(0) - \vec{x}^*\| < \delta,$$

maka

$$\|\vec{x}(t) - \vec{x}^*\| < \varepsilon, \forall t > 0$$

2. stabil asimtotik, jika stabil dan $\exists \delta_0 > 0$ sedemikian sehingga untuk solusi sistem $\vec{x} = \vec{x}(t)$ yang memenuhi

$$\|\vec{x}(t) - \vec{x}^*\| < \delta_0,$$

maka

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{x}(t) = \vec{x}^*,$$

3. tidak stabil, apabila tidak memenuhi kriteria pertama,

(Boyce dan DiPrima, 2012).

2.3.1. Sistem otonomus linear

Sistem otonomus linear dengan n persamaan

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n, \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n, \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n,\end{aligned}\tag{2.2}$$

dapat dinyatakan dalam bentuk lain

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x},$$

dengan $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$ dan $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$.

Jika $\det(A) \neq 0$, maka $\vec{x} = 0$ adalah satu-satunya titik kesetimbangan sistem (2.2). Kestabilan titik kesetimbangan sistem (2.2) dapat ditentukan melalui nilai eigen matriks A .

Teorema 2.1 Titik kesetimbangan $\vec{x} = 0$ sistem (2.2) bersifat

1. stabil, jika dan hanya jika matriks A memiliki nilai eigen bilangan riil tak positif,
2. stabil asimtotik, jika dan hanya jika matriks A memiliki nilai eigen bilangan riil negatif,
3. tak stabil, jika dan hanya jika nilai matriks A memiliki nilai eigen bilangan riil positif,

(Finizio dan Ladas, 1982).

2.3.2. Sistem otonomus nonlinear

Sistem otonomus nonlinear dengan n persamaan

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(\vec{x}), \quad i = 1, 2, \dots, n,\tag{2.3}$$

dengan f_i merupakan fungsi nonlinear. Misalkan \vec{x}^* adalah titik kesetimbangan sistem (2.3). Jika asumsikan fungsi f_i mempunyai turunan yang kontinu dititik \vec{x}^* , maka deret Taylor fungsi f_i di sekitar \vec{x}^* adalah

$$f_i(\vec{x}) = f_i(\vec{x}^*) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(\vec{x}^*)}{\partial x_j} (x_j - x_j^*) + \eta_i(\vec{x}^*),$$

dengan $\eta_i(\vec{x}^*)$ adalah suku sisa yang memenuhi sifat berikut

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^*} \frac{\eta_i(\vec{x})}{\|\vec{w}\|} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

dimana $\vec{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n) = (\vec{x} - \vec{x}^*)$ dengan catatan bahwa $f_i(\vec{x}) = 0$ untuk $i = 0, 1, \dots, n$ dan

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = \frac{d(\vec{x} - \vec{x}^*)}{dt} = \frac{d\vec{x}}{dt}.$$

Oleh karena itu, (2.3) dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x}_i^*) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{x}_i^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\vec{x}_i^*) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\vec{x}_i^*) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \eta_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ \eta_n(\vec{x}) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

dengan

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x}_i^*) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{x}_i^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\vec{x}_i^*) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\vec{x}_i^*) \end{bmatrix},$$

disebut matriks Jacobi. Jika \vec{x} berada dekat dengan \vec{x}^* , maka $\vec{\eta}$ bernilai kecil, sehingga $\vec{\eta}$ dapat diabaikan dan sistem (2.4) menjadi

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = J\vec{w}. \quad (2.5)$$

Jika $\vec{x} = \vec{x}^*$, maka diperoleh $(w_1, w_2, \dots, w_n) = (0, 0, \dots, 0)$ yang merupakan titik kesetimbangan sistem (2.5). Proses menghampiri persamaan (2.3) dengan sistem (2.5) dinamakan proses linearisasi. Sifat kestabilan titik kesetimbangan sistem nonlinear dapat ditentukan dengan melihat sistem kestabilan $\vec{w} = \vec{0}$ sistem hasil linearisasi (2.5). Namun, perlu diperhatikan bahwa proses tersebut bergantung pada asumsi bahwa \vec{x} berada dekat \vec{x}^* . Oleh karena itu,

sifat kestabilan titik kesetimbangan yang diperoleh melalui linearisasi tidak bersifat global melainkan lokal (Boyce dan DiPrima, 2012).

Sifat titik kesetimbangan sistem nonlinear (2.3) dibedakan menjadi dua, yaitu:

1. stabil asimtotik, jika titik kesetimbangan hasil linearisasi (2.5) bersifat stabil asimtotik,
2. tidak stabil, jika titik kesetimbangan hasil linearisasi (2.5) bersifat tidak stabil,

(Finizio dan Ladas, 1982).

2.4. Kriteria Routh-Hurwitz

Persamaan karakteristik untuk memperoleh nilai eigen adalah

$$|\lambda I - J| = 0, \quad (2.6)$$

dengan nilai eigen λ matriks Jacobi J . Bentuk umum persamaan (2.6),

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_n = 0, \quad (2.7)$$

dengan koefisien a_i , $i = 1, \dots, n$ merupakan konstanta riil dan $a_n \neq 0$. Kestabilan titik kesetimbangan sistem (2.3) dapat ditentukan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz, tanpa menentukan nilai eigen terlebih dahulu.

Akar-akar persamaan karakteristik mempunyai bagian riil negatif jika $a_n > 0$ dan

$$D_1 = |a_1| > 0, D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} > 0, D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ 1 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0,$$

$$D_k = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & a_{2k-1} \\ 1 & a_2 & a_4 & \dots & a_{2k-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & a_{2k-3} \\ 0 & 1 & a_2 & \dots & a_{2k-4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_k \end{vmatrix} > 0, k = 0, 2, \dots, n.$$

Untuk $n = 3$ persamaan (2.7) menjadi

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0. \quad (2.8)$$

Akar-akar persamaan (2.8) bernilai negatif jika dan hanya jika $a_1 > 0$, $a_3 > 0$, $a_1a_2 - a_3 > 0$ (Murray 2002).

2.5. Kestabilan Global

Definisi 2.5.1 Misalkan \vec{x}^* adalah titik kesetimbangan persamaan diferensial $\frac{d\vec{x}}{dt} = f(\vec{x})$. Suatu fungsi $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ disebut fungsi Lyapunov lemah untuk \vec{x}^* jika terdapat persekitaran $W \subseteq \mathbb{R}^n$ pada \vec{x}^* yang memenuhi kondisi:

1. $L(\vec{x}^*) = 0$ dan $L(\vec{x}) > 0, \forall \vec{x} \neq \vec{x}^* \in W$,
2. $L(\vec{x}) \leq 0, \forall \vec{x} \in W$

Definisi 2.5.2 Fungsi L disebut fungsi Lyapunov kuat untuk \vec{x}^* jika terdapat suatu persekitaran W pada \vec{x}^* yang memenuhi kondisi (1) pada Definisi 2.5.1 dan $L(\vec{x}) < 0, \forall \vec{x} \neq \vec{x}^*$ dengan $\vec{x} \in W$.

Teorema 2.2 Misalkan \vec{x}^* adalah titik kesetimbangan persamaan diferensial $\frac{d\vec{x}}{dt} = f(\vec{x})$. Titik kesetimbangan \vec{x}^* bersifat:

1. stabil global jika terdapat suatu fungsi Lyapunov lemah untuk \vec{x}^* ,
2. stabil asimtotik global jika terdapat suatu fungsi Lyapunov kuat untuk \vec{x}^* ,

(Robinson, 2004).

2.6. Angka Reproduksi Dasar

Angka reproduksi dasar pada model epidemi dapat dinyatakan rata-rata banyaknya individu infeksi sekunder akibat tertular individu infeksi primer yang berlangsung di dalam populasi *Susceptible*. Jika $R_0 < 1$, maka titik kesetimbangan bebas penyakit stabil asimtotik lokal, setiap individu terinfeksi menyebabkan rata-rata kurang dari satu individu terinfeksi baru, dan tidak terjadi penyebaran penyakit. Sedangkan jika $R_0 > 1$, maka titik kesetimbangan bebas penyakit tidak stabil, setiap individu terinfeksi menyebabkan rata-rata lebih dari satu individu terinfeksi baru, dan terjadi penyebaran penyakit (Driessche dan Watmough, 2002).



BAB III

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas analisis kestabilan model infeksi HIV antara wanita pekerja seks dan pria dewasa. Pembahasan pada skripsi ini adalah penentuan titik kesetimbangan dan penentuan jenis kestabilan titik kesetimbangan. Pada langkah terakhir dilakukan simulasi numerik model infeksi HIV antara wanita pekerja seks dan pria dewasa.

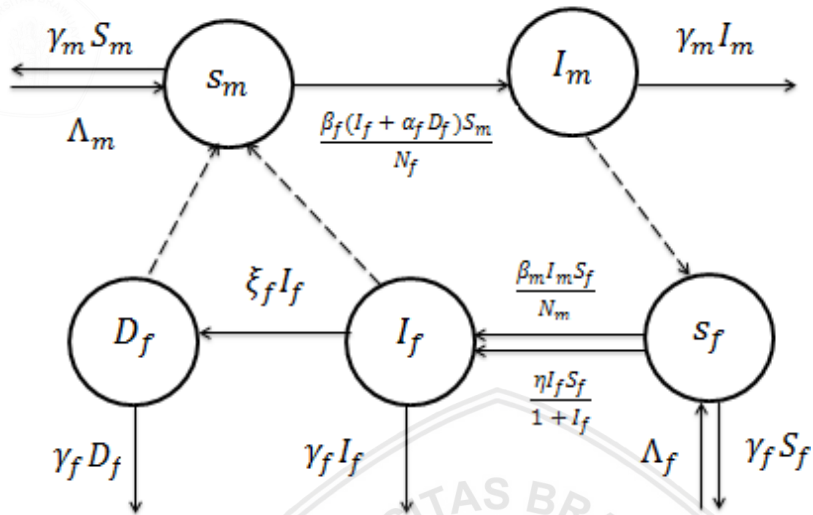
3.1. Konstruksi Model

Model yang dibahas pada skripsi ini adalah model infeksi HIV antara wanita pekerja seks dan pria dewasa yang terdapat pada Yang, dkk. (2017). Model tersebut terdiri dari dua populasi, yaitu wanita pekerja seks dan pria dewasa. Pada wanita pekerja seks terdapat tiga subpopulasi, yaitu individu rentan (S_f), individu terinfeksi yang tidak terdiagnosis HIV-positif (I_f), dan individu yang terdiagnosis HIV-positif (D_f). Sedangkan pada pria dewasa terdapat dua subpopulasi, yaitu individu rentan (S_m) dan individu terinfeksi yang tidak terdiagnosis HIV-positif (I_m). Total populasi (N) dapat dinyatakan sebagai

$$N = N_m + N_f \quad (3.1)$$

dimana $N_m = S_m + I_m$ dan $N_f = S_f + I_f + D_f$ dengan N_m dan N_f adalah total populasi pada pria dewasa dan total populasi wanita pekerja seks.

Model infeksi HIV antara wanita pekerja seks dan pria dewasa dapat digambarkan dalam diagram kompartemen seperti yang diperlihatkan pada Gambar 3.1.



Gambar 3.1 Diagram kompartemen model infeksi HIV antara wanita pekerja seks dan pria dewasa

Model infeksi HIV antara wanita pekerja seks dengan pria dewasa seperti diberikan pada Gambar 3.1. Terdapat sembilan parameter yang mempengaruhi laju perubahan subpopulasi, yaitu $\Lambda_m, \gamma_m, \beta_f, \alpha_f, \gamma_f, \Lambda_f, \eta, \beta_m,$ dan ξ_f . Parameter Λ_m menginterpretasikan laju rekutmen pada populasi pria dewasa. Parameter γ_m menginterpretasikan laju perpindahan pada populasi pria dewasa, β_f menginterpretasikan laju penularan secara transmisi transeksual dan horizontal di antara wanita pekerja seks, α_f menginterpretasikan faktor resiko wanita pekerja seks yang didiagnosis terinfeksi HIV-positif, γ_f menginterpretasikan laju perpindahan pada wanita pekerja seks, Λ_f menginterpretasikan laju rekutmen pada populasi wanita pekerja seks, η menginterpretasikan laju infeksi maksimum yang terinfeksi dari faktor lain, β_m menginterpretasikan laju penularan secara transmisi transeksual dan horizontal di antara pria dewasa, dan ξ_f menginterpretasikan laju diagnosis HIV-positif di antara wanita pekerja seks.

3.1.1. Laju perubahan subpopulasi individu rentan

Adanya rekrutmen pada pria dewasa mengakibatkan bertambahnya jumlah individu pada subpopulasi S_m dengan laju sebesar Λ_m atau dapat dinyatakan Λ_m .

Penularan HIV terjadi secara transeksual dan horizontal dipengaruhi dengan adanya faktor resiko wanita pekerja seks yang didiagnosis terinfeksi HIV-positif. Laju penularan dinyatakan dalam parameter β_f . Laju perubahan kepadatan subpopulasi S_m pada waktu t berbanding lurus dengan berkurangnya individu rentan pada pria dewasa yang berinteraksi tidak langsung dengan subpopulasi I_f dan D_f dapat dinyatakan $-\frac{\beta_f(I_f + \alpha_f D_f)S_m}{N_f}$.

Banyaknya subpopulasi S_m dapat berkurang karena adanya perpindahan dengan laju sebesar γ_m dapat dinyatakan $-\gamma_m S_m$. Dengan demikian, laju perubahan subpopulasi S_m per satuan waktu t dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\frac{dS_m}{dt} = \Lambda_m - \frac{\beta_f(I_f + \alpha_f D_f)S_m}{N_f} - \gamma_m S_m. \quad (3.2)$$

Pada populasi wanita pekerja seks, adanya rekrutmen pada wanita pekerja seks mengakibatkan bertambahnya jumlah individu pada subpopulasi S_f dengan laju sebesar Λ_f atau dapat dinyatakan Λ_f .

Penularan HIV terjadi secara transeksual dan horizontal pada pria dewasa dengan laju penularan dinyatakan dalam parameter β_m . Laju perubahan kepadatan subpopulasi S_f pada waktu t berbanding lurus dengan berkurangnya individu terinfeksi yang tidak terdiagnosis HIV-positif dapat dinyatakan $-\frac{\beta_m I_m S_f}{N_m}$.

Laju berkurangnya jumlah subpopulasi S_f yang disebabkan oleh terinfeksi faktor lain dapat dinyatakan dalam parameter η . Laju perubahan kepadatan subpopulasi S_f pada waktu t berbanding lurus dengan berkurangnya subpopulasi I_f atau dapat dinyatakan $-\frac{\eta I_f S_f}{1 + I_f}$.

Banyaknya subpopulasi S_f dapat berkurang karena adanya perpindahan dengan laju sebesar γ_f dapat dinyatakan $-\gamma_f S_f$. Dengan demikian, laju perubahan subpopulasi S_f per satuan waktu t dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\frac{dS_f}{dt} = \Lambda_f - \frac{\beta_m I_m S_f}{N_m} - \frac{\eta I_f S_f}{1 + I_f} - \gamma_f S_f. \quad (3.3)$$

3.1.2. Laju perubahan subpopulasi individu terinfeksi yang tidak terdiagnosis HIV-positif

Penularan HIV terjadi secara transeksual dan horizontal pada wanita pekerja seks dengan adanya faktor resiko wanita pekerja seks yang didagnosis HIV-positif. Laju penularan dinyatakan dalam parameter β_f . Laju perubahan kepadatan subpopulasi S_m pada waktu t berbanding lurus dengan bertambahnya individu rentan pada pria dewasa yang berinteraksi tidak langsung dengan subpopulasi I_f dan D_f dapat dinyatakan $\frac{\beta_f(I_f + \alpha_f D_f)S_m}{N_f}$.

Banyaknya subpopulasi I_m dapat berkurang karena adanya perpindahan dengan laju sebesar γ_m dapat dinyatakan $-\gamma_m I_m$. Dengan demikian, laju perubahan subpopulasi I_m per satuan waktu t dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\frac{dI_m}{dt} = \frac{\beta_f(I_f + \alpha_f D_f)S_m}{N_f} - \gamma_m I_m. \quad (3.4)$$

Pada populasi wanita pekerja seks, subpopulasi I_m dan S_f berinteraksi secara tidak langsung dengan laju perubahan kepadatan subpopulasi individu rentan pada wanita pekerja seks berbanding lurus dengan bertambahnya individu terinfeksi yang tidak terdiagnosis HIV-positif pada pria dewasa sehingga dapat dinyatakan $\frac{\beta_m I_m S_f}{N_m}$.

Laju bertambahnya jumlah subpopulasi I_f yang disebabkan oleh terinfeksi faktor lain dapat dinyatakan dalam parameter η . Laju perubahan kepadatan subpopulasi I_f pada waktu t berbanding lurus dengan bertambahnya jumlah subpopulasi I_f karena kontak dengan supopulasi S_f atau dapat dinyatakan $\frac{\eta I_f S_f}{1 + I_f}$.

Banyaknya subpopulasi I_f dapat berkurang karena adanya perpindahan dengan laju sebesar γ_f dapat dinyatakan $-\gamma_f I_f$. Jumlah individu pada subpopulasi I_f dapat berkurang seiring perpindahan individu terinfeksi yang tidak terdiagnosis menjadi individu terdiagnosis. Laju perpindahan tersebut dinyatakan dalam parameter ξ_f atau dapat dinyatakan sebagai $-\xi_f I_f$.

Dengan demikian, laju perubahan subpopulasi I_f per satuan waktu t dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\frac{dI_f}{dt} = \frac{\beta_m I_m S_f}{N_m} + \frac{\eta I_f S_f}{1 + I_f} - \gamma_f I_f - \xi_f I_f. \quad (3.5)$$

3.1.3. Laju perubahan subpopulasi individu yang terdiagnosis HIV-positif

Interaksi langsung yang terjadi antara subpopulasi I_f dan D_f mengakibatkan laju perpindahan kepadatan subpopulasi I_f yang didiagnosis HIV-positif pada wanita pekerja seks berbanding lurus dengan bertambahnya laju sebesar ξ_f atau dapat dinyatakan $\xi_f I_f$.

Banyaknya subpopulasi D_f dapat berkurang karena adanya perpindahan dengan laju sebesar γ_f dapat dinyatakan $-\gamma_f D_f$. Dengan demikian, laju perubahan subpopulasi D_f per satuan waktu t dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\frac{dD_f}{dt} = \xi_f I_f - \gamma_f D_f. \quad (3.6)$$

Berdasarkan persamaan (3.2)-(3.6) diperoleh model infeksi HIV antara wanita pekerja seks dan pria dewasa sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{dS_m}{dt} &= \Lambda_m - \frac{\beta_f(I_f + \alpha_f D_f)S_m}{N_f} - \gamma_m S_m, \\ \frac{dI_m}{dt} &= \frac{\beta_f(I_f + \alpha_f D_f)S_m}{N_f} - \gamma_m I_m, \\ \frac{dS_f}{dt} &= \Lambda_f - \frac{\beta_m I_m S_f}{N_m} - \frac{\eta I_f S_f}{1 + I_f} - \gamma_f S_f, \\ \frac{dI_f}{dt} &= \frac{\beta_m I_m S_f}{N_m} + \frac{\eta I_f S_f}{1 + I_f} - \gamma_f I_f - \xi_f I_f, \\ \frac{dD_f}{dt} &= \xi_f I_f - \gamma_f D_f. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Total anggota populasi didefinisikan pada persamaan (3.1) sehingga dapat ditulis

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dN_m}{dt} + \frac{dN_f}{dt}$$

dimana

$$\begin{aligned} \frac{dN_m}{dt} &= \frac{dS_m}{dt} + \frac{dI_m}{dt} \\ &= \Lambda_m - \gamma_m(S_m + I_m) \\ &= \Lambda_m - \gamma_m N_m \end{aligned} \quad (3.8)$$

dan

$$\begin{aligned}\frac{dN_f}{dt} &= \frac{dS_f}{dt} + \frac{dI_f}{dt} + \frac{dD_f}{dt} \\ &= \Lambda_f - \gamma_f(S_f + I_f + D_f) \\ &= \Lambda_f - \gamma_f N_f.\end{aligned}\tag{3.9}$$

Jadi, total populasi bergantung pada t .

Selanjutnya, dari persamaan (3.8) jika populasi terbebas dari penyakit maka dapat ditulis

$$\frac{dN_m}{dt} + \gamma_m N_m = \Lambda_m,\tag{3.10}$$

penyelesaian persamaan (3.10) adalah

$$N_m(t) = \frac{\Lambda_m}{\gamma_m} + C e^{-\gamma_m t}$$

dan dari persamaan (3.9) dapat ditulis

$$\frac{dN_f}{dt} + \gamma_f N_f = \Lambda_f,\tag{3.11}$$

penyelesaian persamaan (3.11) adalah

$$N_f(t) = \frac{\Lambda_f}{\gamma_f} + C e^{-\gamma_f t}.$$

Jika t membesar maka diperoleh $\lim_{t \rightarrow \infty} N_m(t) = \frac{\Lambda_m}{\gamma_m}$ dan $\lim_{t \rightarrow \infty} N_f(t) = \frac{\Lambda_f}{\gamma_f}$. Jadi dapat dijelaskan jumlah populasi wanita pekerja seks dalam jangka yang panjang menuju kapasitas $\frac{\Lambda_m}{\gamma_m}$ dan jumlah populasi pria dewasa $\frac{\Lambda_f}{\gamma_f}$. Selanjutnya, pada skripsi ini diasumsikan bahwa jumlah populasi wanita pekerja seks $N_m \leq \frac{\Lambda_m}{\gamma_m}$ dan jumlah pria dewasa $N_f \leq \frac{\Lambda_f}{\gamma_f}$, untuk setiap $t \geq 0$.

Dari uraian yang diberikan, model (3.7) dapat direduksi

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{dI_m}{dt} &= \frac{\beta_f \gamma_f}{\Lambda_f} (I_f + \alpha_f D_f) \left(\frac{\Lambda_m}{\gamma_m} - I_m \right) - \gamma_m I_m, \\ \frac{dI_f}{dt} &= \left(\frac{\beta_m \gamma_m I_m}{\Lambda_m} + \frac{\eta I_f}{1 + I_f} \right) \left(\frac{\Lambda_f}{\gamma_f} - I_f - D_f \right) - (\gamma_f + \xi_f) I_f, \\ \frac{dD_f}{dt} &= \xi_f I_f - \gamma_f D_f,\end{aligned}\tag{3.12}$$

yang terdefinisi pada

$$\Gamma = \{(I_m, I_f, D_f) \in \mathbb{R}_+^3 : I_m \geq 0, I_f \geq 0, D_f \geq 0, I_m \leq \frac{\Lambda_m}{\gamma_m}, I_f + D_f \leq \frac{\Lambda_f}{\gamma_f}\}.$$

3.2. Analisis Dinamik Model

3.2.1. Titik kesetimbangan bebas penyakit

Titik kesetimbangan sistem (3.12) diperoleh dengan menyatakan

$$\frac{dI_m}{dt} = \frac{dI_f}{dt} = \frac{dD_f}{dt} = 0,$$

yaitu

$$\begin{aligned}\frac{\beta_f \gamma_f}{\Lambda_f} (I_f + \alpha_f D_f) \left(\frac{\Lambda_m}{\gamma_m} - I_m \right) - \gamma_m I_m &= 0, \\ \left(\frac{\beta_m \gamma_m I_m}{\Lambda_m} + \frac{\eta I_f}{1 + I_f} \right) \left(\frac{\Lambda_f}{\gamma_f} - I_f - D_f \right) - (\gamma_f + \xi_f) I_f &= 0, \\ \xi_f I_f - \gamma_f D_f &= 0.\end{aligned}\tag{3.13}$$

Dari persamaan (3.13) diperoleh dua kemungkinan, yaitu $I_m = 0, I_f = 0$ atau $I_m \neq 0, I_f \neq 0$. Jika $I_m = 0, I_f = 0$ maka diperoleh $D_f = 0$.

Berdasarkan uraian tersebut diperoleh titik kesetimbangan

$$E^0 = (I_m^0, I_f^0, D_f^0) = (0, 0, 0)$$

yang merupakan titik kesetimbangan bebas penyakit, berarti bahwa tidak ada individu terinfeksi yang berinteraksi pada kelas rentan.

3.2.1.1. Kestabilan lokal

Matriks Jacobi pada titik kesetimbangan E^0 adalah

$$J(E^0) = \begin{bmatrix} -\gamma_m & \frac{\beta_f \gamma_f \Lambda_m}{\Lambda_f \gamma_m} & \frac{\beta_f \gamma_f \Lambda_m \alpha_f}{\Lambda_f \gamma_m} \\ \frac{\beta_m \gamma_m \Lambda_f}{\Lambda_m \gamma_f} & \frac{\Lambda_f \eta}{\gamma_f} - \gamma_f - \xi_f & 0 \\ 0 & \xi_f & -\gamma_f \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

Persamaan karakteristik dari matriks (3.14) adalah

$$\begin{vmatrix} -\gamma_m - \lambda & \frac{\beta_f \gamma_f \Lambda_m}{\Lambda_f \gamma_m} & \frac{\beta_f \gamma_f \Lambda_m \alpha_f}{\Lambda_f \gamma_m} \\ \frac{\beta_m \gamma_m \Lambda_f}{\Lambda_m \gamma_f} & \frac{\Lambda_f \eta}{\gamma_f} - \gamma_f - \xi_f - \lambda & 0 \\ 0 & \xi_f & -\gamma_f - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (3.15)$$

Persamaan karakteristik (3.15) dijabarkan pada Lampiran 1, dan diperoleh

$$\lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0 \quad (3.16)$$

dengan

$$\begin{aligned} a_1 &= \xi_f + 2\gamma_f + \gamma_m - \frac{\eta \Lambda_f}{\gamma_f}, \\ a_2 &= -\beta_f \beta_m + \xi_f \gamma_f + \xi_f \gamma_m - \eta \Lambda_f + \gamma_f^2 + 2\gamma_f \gamma_m - \frac{\eta \Lambda_f \gamma_m}{\gamma_f}, \\ a_3 &= -\beta_f \beta_m \xi_f \alpha_f - \beta_f \beta_m \gamma_f - \eta \Lambda_f \gamma_m + \gamma_f^2 \gamma_m + \xi_f \gamma_f \gamma_m. \end{aligned}$$

Rincian penurunan persamaan karakteristik $J(E^0)$ seperti pada persamaan (3.16) dapat dilihat pada Lampiran 1. Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz, maka persamaan (3.16) memiliki bagian real negatif jika

- i. $a_3 > 0$
 $-\beta_f \beta_m \xi_f \alpha_f - \beta_f \beta_m \gamma_f - \eta \Lambda_f \gamma_m + \gamma_f^2 \gamma_m + \xi_f \gamma_f \gamma_m > 0$
- ii. $a_1 > 0$
 $\xi_f + 2\gamma_f + \gamma_m - \frac{\eta \Lambda_f}{\gamma_f} > 0$
- iii. $a_1 a_2 > a_3$
 $\left(-\beta_f \beta_m + \xi_f \gamma_f + \xi_f \gamma_m - \eta \Lambda_f + \gamma_f^2 + 2\gamma_f \gamma_m - \frac{\eta \Lambda_f \gamma_m}{\gamma_f}\right)$
 $\left(\xi_f + 2\gamma_f + \gamma_m - \frac{\eta \Lambda_f}{\gamma_f}\right) > -\beta_f \beta_m \xi_f \alpha_f - \beta_f \beta_m \gamma_f - \eta \Lambda_f \gamma_m$
 $+ \gamma_f^2 \gamma_m + \xi_f \gamma_f \gamma_m.$

Rincian pembuktian kriteria Routh-Hurwitz dapat dilihat pada Lampiran 1. Agar titik kesetimbangan E^0 stabil, maka a_3 harus bernilai positif sehingga

$$a_3 = -\beta_f \beta_m \xi_f \alpha_f - \beta_f \beta_m \gamma_f - \eta \Lambda_f \gamma_m + \gamma_f^2 \gamma_m + \xi_f \gamma_f \gamma_m > 0.$$

Jika

$$-\eta \Lambda_f \gamma_m - \beta_f \beta_m (\gamma_f + \xi_f \alpha_f) + \gamma_f \gamma_m (\xi_f + \gamma_f) > 0$$

maka

$$\begin{aligned} -\eta \Lambda_f \gamma_m - \beta_f \beta_m (\gamma_f + \xi_f \alpha_f) &> -\gamma_f \gamma_m (\xi_f + \gamma_f) \\ \eta \Lambda_f \gamma_m + \beta_f \beta_m (\gamma_f + \xi_f \alpha_f) &< \gamma_f \gamma_m (\xi_f + \gamma_f) \\ \frac{\eta \Lambda_f \gamma_m + \beta_f \beta_m (\gamma_f + \xi_f \alpha_f)}{\gamma_f \gamma_m (\xi_f + \gamma_f)} &< 1. \end{aligned}$$

Misalkan

$$R_0 = \frac{\eta \Lambda_f \gamma_m + \beta_f \beta_m (\gamma_f + \xi_f \alpha_f)}{\gamma_f \gamma_m (\xi_f + \gamma_f)}.$$

Jika $R_0 < 1$ maka titik E^0 bersifat stabil asimtotik lokal.

3.2.1.2. Kestabilan Global

Pada subsubbab 3.2.1.1 telah diperlihatkan bahwa titik E^0 bersifat stabil asimtotik jika $R_0 < 1$. Dari persamaan (3.12) dapat dibentuk pertaksamaan

$$\begin{aligned} \frac{dI_m}{dt} &\leq \frac{\beta_f \gamma_f \Lambda_m}{\Lambda_f \gamma_m} I_f + \frac{\beta_f \gamma_f \Lambda_m \alpha_f}{\Lambda_f \gamma_m} D_f - \gamma_m I_m \\ \frac{dI_f}{dt} &\leq \frac{\beta_m \gamma_m \Lambda_f}{\Lambda_m \gamma_f} I_m + \frac{\eta \Lambda_f}{\gamma_f} I_f - (\gamma_f + \xi_f) I_f. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Untuk itu, titik kesetimbangan bebas penyakit ditentukan menggunakan fungsi Lyapunov $V : (I_m, I_f, D_f) \in \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}$ sebagai berikut

$$V(I_m, I_f, D_f) = \frac{\beta_m \Lambda_f}{\Lambda_m \gamma_f} I_m + I_f + \frac{\beta_m \beta_f \alpha_f}{\gamma_f \gamma_m} D_f$$

dengan $V \geq 0$ dan $V = 0$ jika dan hanya jika $I_m = I_f = D_f = 0$. Berdasarkan persamaan (3.17) dapat diperoleh

$$\begin{aligned}
 \frac{dV}{dt} &= \frac{\beta_m \Lambda_f}{\Lambda_m \gamma_f} \frac{dI_m}{dt} + \frac{dI_f}{dt} + \frac{\beta_m \beta_f \alpha_f}{\gamma_f \gamma_m} \frac{dD_f}{dt} \\
 &\leq \frac{\beta_m \Lambda_f}{\Lambda_m \gamma_f} \left(\frac{\beta_f \gamma_f}{\Lambda_f} \frac{\Lambda_m}{\gamma_m} I_f + \frac{\beta_f \gamma_f}{\Lambda_f} \frac{\Lambda_m}{\gamma_m} \alpha_f D_f - \gamma_m I_m \right) \\
 &\quad + \left[\frac{\beta_m \gamma_m}{\Lambda_m} \frac{\Lambda_f}{\gamma_f} I_m + \frac{\eta \Lambda_f}{\gamma_f} I_f - (\gamma_f + \xi_f) I_f \right] \\
 &\quad + \frac{\beta_m \beta_f \alpha_f}{\gamma_f \gamma_m} (\xi_f I_f - \gamma_f D_f) \\
 &= (\gamma_f + \xi_f) (R_0 - 1) I_f.
 \end{aligned}$$

Rincian perhitungan $\frac{dV}{dt}$ dapat dilihat pada Lampiran 2. Nilai $\frac{dV}{dt} < 0$ jika $R_0 < 1$. Dengan demikian, bahwa jika $R_0 < 1$ maka titik kesetimbangan bebas penyakit bersifat stabil asimtotik global.

3.2.2. Titik kesetimbangan endemik

Titik kesetimbangan endemik $E^* = (I_m^*, I_f^*, D_f^*)$ merupakan titik kesetimbangan dengan $I_m^* \neq 0$, $I_f^* \neq 0$, dan $D_f^* \neq 0$. Jika titik kesetimbangan E^* disubstitusikan ke sistem persamaan (3.12), maka diperoleh

$$\begin{aligned}
 \frac{\beta_f \gamma_f}{\Lambda_f} (I_f^* + \alpha_f D_f^*) \left(\frac{\Lambda_m}{\gamma_m} - I_m^* \right) - \gamma_f I_m^* &= 0, \\
 \left(\frac{\beta_m \gamma_m I_m^*}{\Lambda_m} + \frac{\eta I_f^*}{1 + I_f^*} \right) \left(\frac{\Lambda_f}{\gamma_f} - I_f^* - D_f^* \right) - (\gamma_f + \xi_f) I_f^* &= 0, \\
 \xi_f I_f^* - \gamma_f D_f^* &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Dengan menggunakan $p_m = \frac{\beta_m \gamma_m}{\Lambda_m}$, $p_f = \frac{\beta_f \alpha_f \gamma_f}{\Lambda_f} \left(1 + \frac{\alpha_f \xi_f}{\gamma_f} \right)$, $\hat{p}_f = 1 + \frac{\xi_f}{\gamma_f}$ diperoleh (perhitungan selengkapnya diberikan pada Lampiran 3)

$$p_f I_f^* \left(\frac{\Lambda_m}{\gamma_m} - I_m^* \right) - \gamma_m I_m^* = 0 \tag{3.19a}$$

$$\left(p_m I_m^* + \frac{\eta I_f^*}{1 + I_f^*} \right) \left(\frac{\Lambda_f}{\gamma_f} - \hat{p}_f I_f^* \right) - (\gamma_f + \xi_f) I_f^* = 0 \tag{3.19b}$$

$$\xi_f I_f^* - \gamma_f D_f^* = 0. \tag{3.19c}$$

Dari persamaan (3.19a) diperoleh

$$I_m^* = \frac{p_f I_f^* \Lambda_m}{\gamma_m (p_f I_f^* + \gamma_m)} \quad (3.20)$$

dan dari persamaan (3.19c) diperoleh

$$D_f^* = \frac{\xi_f}{\gamma_f} I_f^*. \quad (3.21)$$

Selanjutnya, substitusikan persamaan (3.20) ke persamaan (3.19b), sehingga diperoleh polinomial I_f^* berderajat dua berikut

$$q_2 I_f^{*2} + q_1 I_f^* + q_0 = 0, \quad (3.22)$$

dengan

$$\begin{aligned} q_0 &= -\Lambda_f (p_m p_f \Lambda_m + \eta \gamma_m^2) + \gamma_m^2 \gamma_f (\gamma_f + \xi_f), \\ q_1 &= -\Lambda_f (p_m p_f \Lambda_m + \eta \gamma_m p_f) + \gamma_f \hat{p} (p_m p_f \Lambda_m + \eta \gamma_m^2) \\ &\quad + \gamma_m \gamma_f (\gamma_f + \xi_f) (\gamma_m + p_f), \\ q_2 &= \gamma_f \hat{p} (p_m p_f \Lambda_m + \eta \gamma_m p_f) + \gamma_m \gamma_f p_f (\gamma_f + \xi_f) > 0. \end{aligned}$$

Jika $R_0 > 1$ dan $a_3 < 0$ maka $q_0 = a_3 \gamma_m < 0$. Akibatnya, I_f^* memiliki solusi tunggal positif. Proses penentuan polinomial I_f^* berderajat dua (3.22) diberikan pada Lampiran 3. Solusi persamaan (3.22) adalah

$$I_{f\pm}^* = \frac{-q_1 \pm \sqrt{q_1^2 - 4q_2q_0}}{2q_2}.$$

I_f^* haruslah suatu bilangan real positif. I_f^* bernilai real jika $q_1^2 - 4q_2q_0 = 0$ atau $q_1^2 - 4q_2q_0 > 0$, sehingga dilakukan analisis beberapa kasus berikut.

Kasus 1. $q_1^2 - 4q_2q_0 = 0$.

Dalam kasus ini terdapat dua akar kembar, yaitu

$$I_f^* = -\frac{q_1}{2q_2}$$

$I_f^* > 0$ apabila $q_1 < 0$.

Kasus 2. $q_1^2 - 4q_2q_0 > 0$.

i. $q_1 > 0$ dan $q_0 > 0$

Perhatikan bahwa $-4q_2q_0 < 0$, sehingga $\sqrt{q_1^2 - 4q_2q_0} < q_1$. Hal ini berakibat $I_{f\pm}^* < 0$.

ii. $q_1 > 0$ dan $q_0 < 0$.

Perhatikan bahwa $-4q_2q_0 > 0$, sehingga $\sqrt{q_1^2 - 4q_2q_0} > q_1$. Hal ini berakibat $I_{f+}^* > 0$ dan $I_{f-}^* < 0$.

iii. $q_1 < 0$ dan $q_0 > 0$.

Perhatikan bahwa $-q_1 > 0$, dan $\sqrt{q_1^2 - 4q_2q_0} > 0$. Hal ini berakibat $I_{f\pm}^* > 0$.

iv. $q_1 < 0$ dan $q_0 < 0$.

Perhatikan bahwa $-4q_2q_0 > 0$, sehingga $\sqrt{q_1^2 - 4q_2q_0} > -q_1$. Hal ini berakibat $I_{f+}^* > 0$ dan $I_{f-}^* < 0$.

Berdasarkan uraian yang telah dijelaskan, dapat diambil kesimpulan berikut.

1. Jika $D = q_1^2 - 4q_2q_0 = 0$ dan $q_1 < 0$ (kasus 1), maka terdapat satu titik kesetimbangan endemik, yaitu

$$E^* = (I_m^*, I_f^*, D_f^*)$$

2. Jika $D > 0$, $q_1 > 0$, dan $q_0 > 0$ (kasus (i)), maka tidak terdapat titik kesetimbangan endemik.

3. Jika $D > 0$ dan $q_0 < 0$ (kasus (ii) dan (iv)), maka terdapat satu titik kesetimbangan endemik, yaitu

$$E_1^* = (I_m^*, I_{f+}^*, D_f^*)$$

4. Jika $D > 0$, $q_1 < 0$, dan $q_0 > 0$ (kasus (iii)), maka terdapat dua titik kesetimbangan endemik yang berbeda, yaitu

$$E_1^* = (I_m^*, I_{f+}^*, D_f^*) \text{ dan } E_2^* = (I_m^*, I_{f-}^*, D_f^*)$$

dengan

$$I_m^* = \frac{p_f I_{f\pm}^* \Lambda_m}{\gamma_m (p_f I_f^* + \gamma_m)}$$

$$I_f^* = \frac{-q_1}{2q_2}, I_{f+}^* = \frac{-q_1 + \sqrt{q_1^2 - 4q_2q_0}}{2q_2}, I_{f-}^* = \frac{-q_1 - \sqrt{q_1^2 - 4q_2q_0}}{2q_2},$$

$$D_f^* = \frac{\xi_f I_{f\pm}^*}{\gamma_f}.$$

3.2.2.1. Kestabilan Global

Untuk menentukan kestabilan global, terlebih dahulu dimisalkan $\beta_1 = \frac{\beta_f \gamma_f}{\Lambda_f}$, $\beta_2 = \frac{\beta_f \alpha_f \gamma_f}{\Lambda_f}$, $\beta_3 = \frac{\beta_m \gamma_m}{\Lambda_m}$ dan $g(I_f, S_f) = \frac{\eta I_f S_f}{1 + I_f}$. Berdasarkan pemisalan tersebut, persamaan (3.7) dapat dituliskan sebagai

$$\begin{aligned}\frac{dS_m}{dt} &= \Lambda_m - \beta_1 I_f S_m - \beta_2 D_f S_m - \gamma_f S_m, \\ \frac{dI_m}{dt} &= \beta_1 I_f S_m + \beta_2 D_f S_m - \gamma_m I_m, \\ \frac{dS_f}{dt} &= \Lambda_f - \beta_3 I_m S_f - g(I_f, S_f) - \gamma_f S_f, \\ \frac{dI_f}{dt} &= \beta_3 I_m S_f + g(I_f, S_f) - \gamma_f I_f - \xi_f I_f, \\ \frac{dD_f}{dt} &= \xi_f I_f - \gamma_f D_f.\end{aligned}\quad (3.23)$$

Kestabilan global titik kesetimbangan endemik dengan mengkonstruksi fungsi Lyapunov. Didefinisikan fungsi Lyapunov

$$\begin{aligned}V &= a_1 \left[\left(S_m - S_m^* - S_m^* \ln \frac{S_m}{S_m^*} \right) + \left(I_m - I_m^* - I_m^* \ln \frac{I_m}{I_m^*} \right) \right] \\ &+ a_2 \left[\left(S_f - S_f^* - S_f^* \ln \frac{S_f}{S_f^*} \right) + \left(I_f - I_f^* - I_f^* \ln \frac{I_f}{I_f^*} \right) \right] \\ &+ a_3 \left(D_f - D_f^* - D_f^* \ln \frac{D_f}{D_f^*} \right)\end{aligned}$$

pada

$$\Gamma = \{(S_m, I_m, S_f, I_f, D_f) \mid S_m, S_f > 0, I_m, I_f, D_f \geq 0, I_m + I_f + D_f > 0\}.$$

Selanjutnya, untuk memeriksa apakah fungsi tersebut merupakan fungsi Lyapunov kuat atau lemah, perlu diperiksa apakah fungsi $V(S_m, I_m, S_f, I_f, D_f)$ memenuhi kondisi 1 pada Definisi 2.5.2, yaitu $V(\vec{x}^*) = 0$ dan $V(\vec{x}) > 0, \forall \vec{x} \neq \vec{x}^* \in W$.

1. Pembuktian $V(E^*) = 0$

$$\begin{aligned}
 V(E^*) &= V(S_m^*, I_m^*, S_f^*, I_f^*, D_f^*) \\
 &= a_1 \left[\left(S_m^* - S_m^* - S_m^* \ln \frac{S_m^*}{S_m^*} \right) + \left(I_m^* - I_m^* - I_m^* \ln \frac{I_m^*}{I_m^*} \right) \right] \\
 &\quad + a_2 \left[\left(S_f^* - S_f^* - S_f^* \ln \frac{S_f^*}{S_f^*} \right) + \left(I_f^* - I_f^* - I_f^* \ln \frac{I_f^*}{I_f^*} \right) \right] \\
 &\quad + a_3 \left(D_f^* - D_f^* - D_f^* \ln \frac{D_f^*}{D_f^*} \right) \\
 &= a_1 [(0 - S_m^* \ln(1)) + (0 - I_m^* \ln(1))] \\
 &\quad + a_2 [(0 - S_f^* \ln(1)) + (0 - I_f^* \ln(1))] + a_3 (0 - D_f^* \ln(1)). \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

2. Pembuktian $V(\vec{E}) > 0, \forall \vec{E} \in \Gamma / \{E^*\}$

Diketahui

$$V(S_m, I_m, S_f, I_f, D_f)$$

$$\begin{aligned}
 &= a_1 \left[\left(S_m^* - S_m^* - S_m^* \ln \frac{S_m^*}{S_m^*} \right) + \left(I_m^* - I_m^* - I_m^* \ln \frac{I_m^*}{I_m^*} \right) \right] \\
 &\quad + a_2 \left[\left(S_f^* - S_f^* - S_f^* \ln \frac{S_f^*}{S_f^*} \right) + \left(I_f^* - I_f^* - I_f^* \ln \frac{I_f^*}{I_f^*} \right) \right] \\
 &\quad + a_3 \left(D_f^* - D_f^* - D_f^* \ln \frac{D_f^*}{D_f^*} \right)
 \end{aligned}$$

Misal $f(S_m) = S_m - S_m^* - S_m^* \ln \frac{S_m}{S_m^*}$ dan $f(S_m)$ terdefinisi pada domain $S_m \in \mathbb{R}^+$. Turunan pertama $f(S_m)$ terhadap S_m , yaitu

$$f'(S_m) = 1 - \frac{S_m^*}{S_m} \text{ dengan } S_m \in (0, \infty).$$

Titik stasioner $f(S_m)$ diperoleh ketika $f'(S_m) = 0$. Nilai x yang memenuhi $f'(S_m) = 0$ adalah ketika $S_m = S_m^*$, atau $f(S_m^*) = 0$. Jika $S \in (0, S_m^*)$ maka berlaku $f'(S_m) < 0$. Di lain pihak, jika $S_m \in (S_m^*, \infty)$ maka berlaku $f'(S_m) > 0$. Oleh karena itu, $f(S_m)$ monoton turun pada selang $(0, S_m^*)$ dan monoton naik pada selang (S_m^*, ∞) .

Berdasarkan uraian tersebut, jelas bahwa $(S_m^*, 0)$ merupakan titik minimum $f(S_m)$. Oleh karena 0 merupakan nilai minimum $f(S_m)$ maka pasti berlaku $f(S_m) > 0$ untuk $S_m \neq S_m^* \in W$. Dalam hal ini juga berlaku $f(I_m) = I_m - I_m^* - I_m^* \ln \frac{I_m}{I_m^*}$, $f(S_f) = S_f - S_f^* - S_f^* \ln \frac{S_f}{S_f^*}$, $f(I_f) = I_f - I_f^* - I_f^* \ln \frac{I_f}{I_f^*}$, dan $f(D_f) = D_f - D_f^* - D_f^* \ln \frac{D_f}{D_f^*}$. Jadi terbukti bahwa $V(S_m, I_m, S_f, I_f, D_f) > 0$.

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa $V'(S_m, I_m, S_f, I_f, D_f) < 0$. Dengan menggunakan aturan rantai dilakukan penurunan terhadap fungsi $V(S_m, I_m, S_f, I_f, D_f)$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} V'(S_m, I_m, S_f, I_f, D_f) = & a_1 \left[\left(1 - \frac{S_m^*}{S_m}\right) S'_m + \left(1 - \frac{I_m^*}{I_m}\right) I'_m \right] \\ & + a_2 \left[\left(1 - \frac{S_f^*}{S_f}\right) S'_f + \left(1 - \frac{I_f^*}{I_f}\right) I'_f \right] \\ & + a_3 \left(1 - \frac{D_f^*}{D_f}\right) D'_f, \end{aligned}$$

atau dapat dinyatakan ke dalam bentuk

$$V'(S_m, I_m, S_f, I_f, D_f) = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5,$$

dimana

$$P_1 = a_1 \left(1 - \frac{S_m^*}{S_m}\right) S'_m, \quad (3.24a)$$

$$P_2 = a_1 \left(1 - \frac{I_m^*}{I_m}\right) I'_m, \quad (3.24b)$$

$$P_3 = a_2 \left(1 - \frac{S_f^*}{S_f}\right) S'_f, \quad (3.24c)$$

$$P_4 = a_2 \left(1 - \frac{I_f^*}{I_f}\right) I'_f, \quad (3.24d)$$

$$P_5 = a_3 \left(1 - \frac{D_f^*}{D_f}\right) D'_f. \quad (3.24e)$$

Selanjutnya S'_m, I'_m, S'_f, I'_f dan D'_f disubstitusikan ke dalam persamaan P_1, P_2, P_3, P_4 , dan P_5 . Dengan menggunakan

$$\begin{aligned}
 \Lambda_m &= \beta_1 I_f^* S_m^* + \beta_2 D_f^* S_m^* + \gamma_m S_m^*, \\
 \gamma_m I_m^* &= \beta_1 I_f^* S_m^* + \beta_2 D_f^* S_m^*, \\
 \Lambda_f &= \beta_3 I_m^* S_f^* + g(I_f^*, S_f^*) + \gamma_f S_f^*, \\
 \gamma_f I_f^* + \xi_f I_f^* &= \beta_3 I_m^* S_f^* + g(I_f^*, S_f^*), \\
 \gamma_f D_f^* &= \xi_f I_f^*,
 \end{aligned}$$

diperoleh

$$\begin{aligned}
 P_1 &= a_1 \left(1 - \frac{S_m^*}{S_m} \right) S_m' \\
 &= a_1 \left(1 - \frac{S_m^*}{S_m} \right) (\Lambda_m - \beta_1 I_f S_m - \gamma_f S_m), \\
 &= a_1 \left[\frac{-\gamma_m (S_m^* - S_m)^2}{S_m} + \beta_1 S_m^* I_f^* \left(1 - \frac{I_f S_m}{I_f^* S_m^*} - \frac{S_m^*}{S_m} + \frac{I_f}{I_f^*} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \beta_2 D_f^* S_m^* \left(1 - \frac{D_f S_m}{D_f^* S_m^*} - \frac{S_m^*}{S_m} + \frac{D_f}{D_f^*} \right) \right] \\
 P_2 &= a_1 \left(1 - \frac{I_m^*}{I_m} \right) I_m' \\
 &= a_1 \left(1 - \frac{I_m^*}{I_m} \right) (\beta_1 I_f S_m + \beta_2 D_f S_m - \gamma_m I_m) \\
 &= a_1 \left[\beta_1 S_m^* I_f^* \left(1 - \frac{I_f S_m}{I_f^* S_m^*} - \frac{I_f S_m I_m^*}{I_f^* S_m^* I_m} - \frac{I_m}{I_m^*} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \beta_2 D_f^* S_m^* \left(1 + \frac{D_f S_m}{D_f^* S_m} - \frac{D_f S_m I_m^*}{D_f^* S_m^* I_m} - \frac{I_m}{I_m^*} \right) \right].
 \end{aligned}$$

Selanjutnya dari persamaan (3.24a) dan (3.24b) dapat dibentuk

$$\begin{aligned}
 P_1 + P_2 &\leq a_1 \left[\beta_1 S_m^* I_f^* \left(\frac{I_f}{I_f^*} - \ln \frac{I_f}{I_f^*} - \frac{I_m}{I_m^*} + \ln \frac{I_m}{I_m^*} \right) \right] \\
 &\quad + a_1 \left[\beta_2 D_f^* S_m^* \left(\frac{D_f}{D_f^*} - \ln \frac{D_f}{D_f^*} - \frac{I_m}{I_m^*} + \ln \frac{I_m}{I_m^*} \right) \right].
 \end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (3.24c), diperoleh

$$\begin{aligned}
 P_3 &= a_2 \left(1 - \frac{S_f^*}{S_f} S_f' \right) \\
 &= a_2 \left(1 - \frac{S_f^*}{S_f} S_f' \right) [\Lambda_f - \beta_3 I_m S_f - g(I_f, S_f) - \gamma_f S_f] \\
 &= a_2 \left(-\frac{\gamma_f (S_f^* - S_f)^2}{S_f} + \beta_3 S_f^* I_m^* \left(1 - \frac{I_m S_f}{I_m^* S_f^*} - \frac{S_f^*}{S_f} + \frac{I_m}{I_m^*} \right) \right) \\
 &\quad + a_2 g(I_f^*, S_f^*) \left(1 - \frac{g(I_f, S_f)}{g(I_f^*, S_f^*)} - \frac{S_f^*}{S_f} + \frac{g(I_f, S_f) S_f^*}{g(I_f^*, S_f^*) S_f} \right)
 \end{aligned}$$

dan dari persamaan (3.24d) diperoleh

$$\begin{aligned}
 P_4 &= a_2 \left(1 - \frac{I_f^*}{I_f} \right) I_f' \\
 &= a_2 \left(1 - \frac{I_f^*}{I_f} \right) [\beta_3 I_m S_f + g(I_f, S_f) - \gamma_f I_f - \xi_f I_f] \\
 &= a_2 \beta_3 S_f^* I_m^* \left(\frac{I_m S_f}{I_m^* S_f^*} - \frac{I_m S_f I_f^*}{I_m^* S_f^* I_f} - \frac{I_f}{I_f^*} + 1 \right) \\
 &\quad + a_2 g(I_f^*, S_f^*) \left(1 + \frac{g(I_f, S_f)}{g(I_f^*, S_f^*)} - \frac{I_f}{I_f^*} - \frac{g(I_f, D_f)}{g(I_f^*, D_f^*)} \right).
 \end{aligned}$$

Dengan demikian berdasarkan persamaan (3.24c) dan (3.24d) dapat dibentuk

$$P_3 + P_4 \leq a_2 \beta_3 S_f^* I_m^* \left(\frac{I_m}{I_m^*} - \ln \frac{I_m}{I_m^*} - \frac{I_f}{I_f^*} + \ln \frac{I_f}{I_f^*} \right)$$

Dari persamaan (3.19e) diperoleh

$$\begin{aligned}
 P_5 &= a_3 \left(1 - \frac{D_f^*}{D_f} \right) D'_f \\
 &= a_3 \left(1 - \frac{D_f^*}{D_f} \right) \left(\frac{\gamma_f D_f^* I_f}{I_f^*} - \gamma_f D_f \right) \\
 &= a_3 \left(\frac{\gamma_f D_f^* I_f}{I_f^*} - \gamma_f D_f - \frac{D_f^* \gamma_f D_f^* I_f}{D_f I_f^*} + \gamma_f D_f^* \right) \\
 &= a_3 \gamma_f D_f^* \left(1 - \frac{D_f^* I_f}{D_f I_f^*} + \frac{I_f}{I_f^*} - \frac{D_f}{D_f^*} \right) \\
 &\leq a_3 \gamma_f D_f^* \left(\frac{I_f}{I_f^*} - \ln \frac{I_f}{I_f^*} - \frac{D_f}{D_f^*} + \ln \frac{D_f}{D_f^*} \right).
 \end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh

$$\begin{aligned}
 V' &= P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 \\
 &\leq a_1 \beta_1 S_m^* I_f \left(\frac{I_f}{I_f^*} - \ln \frac{I_f}{I_f^*} - \frac{I_m}{I_m^*} + \ln \frac{I_m}{I_m^*} \right) \\
 &\quad + a_1 \beta_2 D_f^* S_m^* \left(\frac{D_f}{D_f^*} - \ln \frac{D_f}{D_f^*} - \frac{I_m}{I_m^*} + \ln \frac{I_m}{I_m^*} \right) \\
 &\quad + a_2 \beta_2 S_f^* I_m^* \left(\frac{I_m}{I_m^*} - \ln \frac{I_m}{I_m^*} - \frac{I_f}{I_f^*} + \ln \frac{I_f}{I_f^*} \right) \\
 &\quad + a_3 \gamma_f D_f^* \left(\frac{I_f}{I_f^*} - \ln \frac{I_f}{I_f^*} - \frac{D_f}{D_f^*} + \ln \frac{D_f}{D_f^*} \right).
 \end{aligned}$$

Sesuai dengan perhitungan pada Lampiran 3 diperoleh

$$V' = b_1 \left(\frac{I_f}{I_f^*} - \ln \frac{I_f}{I_f^*} \right) + b_2 \left(\frac{I_m}{I_m^*} - \ln \frac{I_m}{I_m^*} \right) + b_3 \left(\frac{D_f}{D_f^*} - \ln \frac{D_f}{D_f^*} \right).$$

Dari uraian tersebut diketahui $V' \leq 0$ jika $a_1, a_2, a_3 \geq 0$ dimana nilai a_1, a_2, a_3 sesuai pada permisalan b_1, b_2, b_3 dan $V' = 0$ jika $b_1 = b_2 = b_3 = 0$. Dengan demikian $V'(S_m, I_m, S_f, I_f, D_f) < 0$

$\forall \{S_m, I_m, S_f, I_f, D_f\} \neq \{S_m^*, I_m^*, S_f^*, I_f^*, D_f^*\}$ dengan $\{S_m, I_m, S_f, I_f, D_f\} \in \Gamma$, sehingga V memenuhi Definisi 2.5.2. Oleh karena itu, berdasarkan Teorema 2.2, E^* bersifat stabil asimtotik global.

Rincian perhitungan P_1, P_2, P_3, P_4 , dan P_5 serta V' diberikan pada Lampiran 4.

3.3. Solusi Numerik

Pada subbab ini ditunjukkan simulasi numerik model infeksi HIV antara wanita pekerja seks dan pria dewasa. Metode Runga Kutta orde empat digunakan untuk menyimulasikan hasil analisis.

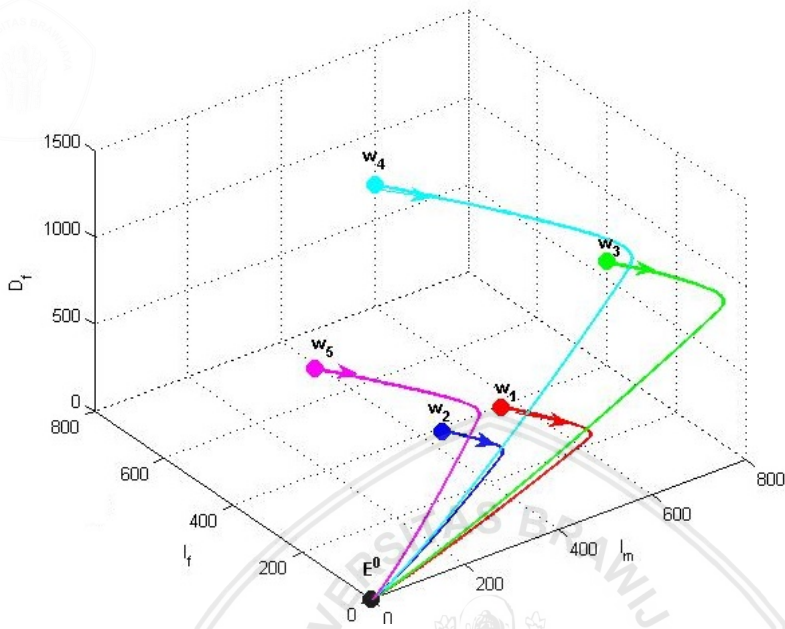
3.3.1. Simulasi numerik untuk $R_0 < 1$

Pada simulasi ini digunakan nilai parameter berdasarkan Yang., dkk (2017) seperti diberikan pada Tabel 3.1.

Tabel 3.1 Nilai parameter untuk $R_0 < 1$

Parameter	Nilai	Parameter	Nilai	Parameter	Nilai
β_f	8×10^{-5}	γ_f	6×10^{-3}	Λ_f	24
α_f	0.2	γ_m	5×10^{-3}	Λ_m	22
η	8×10^{-5}	ξ_f	0.35	β_m	7×10^{-5}

Berdasarkan hasil analisis hanya terdapat satu titik kesetimbangan yang eksis yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit $E^0 = (0, 0, 0)$, sedangkan titik kesetimbangan E^* tidak eksis. Jika digunakan nilai parameter sesuai Tabel 3.1 maka diperoleh nilai $R_0 = 0.8989 < 1$. Pada simulasi ini diambil lima nilai awal $w_1 = (100, 300, 200)$, $w_2 = (300, 200, 400)$, $w_3 = (800, 400, 600)$, $w_4 = (600, 800, 700)$, dan $w_5 = (1200, 1000, 800)$.



Gambar 3.2 Potret fase untuk $R_0 < 1$

Gambar 3.2 menunjukkan bahwa dengan beberapa nilai awal yang diberikan, orbit-orbit pada ruang I_m, I_f, D_f menuju titik kesetimbangan $E^0 = (0, 0, 0)$. Hasil simulasi numerik yang diperoleh mendukung hasil analisis subbab sebelumnya bahwa jika $R_0 < 1$ titik kesetimbangan bebas penyakit $(I_m^0, I_f^0, D_f^0) = (0, 0, 0)$ bersifat stabil asimtotik lokal. Hal ini menunjukkan bahwa tidak terjadi penyebaran infeksi HIV dalam jangka waktu yang lama.

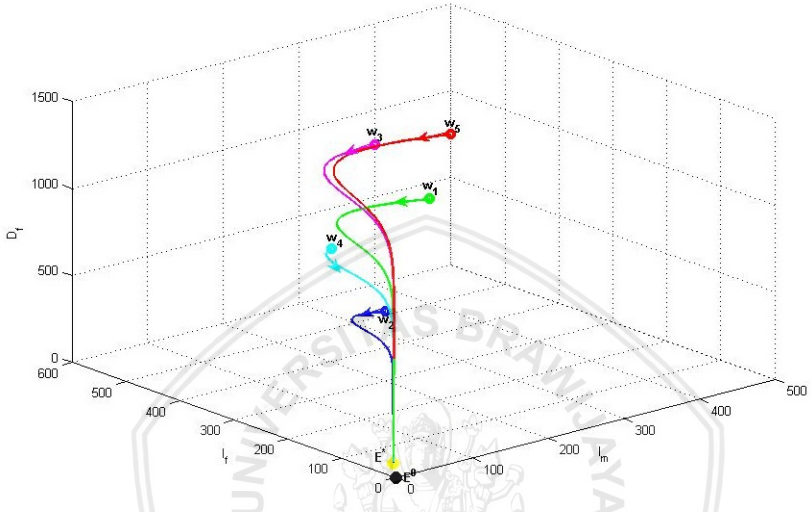
3.3.2. Simulasi numerik untuk $R_0 > 1$

Pada simulasi ini digunakan nilai parameter seperti diberikan pada Tabel 3.2.

Tabel 3.2 Nilai parameter untuk $R_0 > 1$

Parameter	Nilai	Parameter	Nilai	Parameter	Nilai
β_f	4×10^{-3}	γ_f	5×10^{-3}	Λ_f	24
α_f	0.2	γ_m	8×10^{-2}	Λ_m	22
η	1×10^{-4}	ξ_f	0.08	β_m	6×10^{-3}

Jika digunakan nilai parameter sesuai Tabel 3.2 diperoleh nilai $R_0 = 5.6619 > 1$. Pada simulasi ini diambil lima nilai awal $w_1 = (400, 500, 600)$, $w_2 = (200, 300, 400)$, $w_3 = (400, 600, 800)$, $w_4 = (200, 400, 650)$, dan $w_5 = (500, 300, 750)$. Titik kesetimbangan endemik eksis, yaitu $E^* = (4.6365, 0.0558, 74.1839)$.



Gambar 3.3 Potret fase untuk $R_0 > 1$

Hasil simulasi numerik yang diperoleh mendukung hasil analisis pada subbab sebelumnya bahwa untuk $R_0 > 1$ terdapat titik kesetimbangan endemik eksis $E^* = (I_m^*, I_f^*, D_f^*)$ yang bersifat stabil asimtotik global. Hal ini menunjukkan bahwa bahwa infeksi HIV akan selalu ada di dalam populasi.





BAB IV

PENUTUP

4.1. Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan pada skripsi ini, dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. Model infeksi HIV antara wanita pekerja seks dan pria dewasa berbentuk persamaan diferensial nonlinear derajat tiga. Model tersebut terdiri dari dua populasi, yaitu wanita pekerja seks dan pria dewasa. Pada wanita pekerja seks terdapat tiga subpopulasi, yaitu individu rentan (S_f), individu terinfeksi yang tidak terdiagnosis HIV-positif (I_f), dan individu yang terdiagnosis HIV-positif (D_f). Sedangkan pada pria dewasa terdapat dua subpopulasi, yaitu individu rentan (S_m) dan individu terinfeksi yang tidak terdiagnosis HIV-positif (I_m).
2. Terdapat dua titik kesetimbangan pada model HIV ini, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit E^0 dan titik kesetimbangan endemik E^* . Analisis kestabilan menunjukkan bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit akan stabil asimtotik lokal jika $R_0 < 1$ dan akan stabil asimtotik global jika $R_0 < 1$. Titik kesetimbangan endemik akan stabil asimtotik global jika $R_0 > 1$.
3. Hasil simulasi numerik yang dilakukan sesuai dengan hasil analisis dinamik.

4.2. Saran

Untuk penelitian selanjutnya, penulis menyarankan untuk dapat menambahkan individu yang terdiagnosis HIV-positif pada pria dewasa (D_m) ke dalam model atau menambahkan laju kematian alami untuk masing-masing individu atau dapat dilakukan kontrol pengobatan.



DAFTAR PUSTAKA

- Arrowsmith, D. K. dan C. M. Place. 1994. *An Introduction to Dynamical Systems*. Cambridge University Press. USA.
- Bacaer, N., X. Abdurrahman, dan Jianli. 2006. Modeling the HIV/AIDS epidemic among injecting drug users and sex workers in Kunming, China. *Bulletin of Mathematical Biology*. 525-550.
- Boyce, W. E. dan R. C. DiPrima. 2012. *Elementary Differential Equations*. 10th Edition. John Wiley and Son. USA.
- Driessche, P. V. D. dan J. Watmough. 2002. Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission. *Mathematical Biosciences*. 180: 29-48.
- Finizio, N. dan G. Ladas. 1982. *An Introduction to Differential Equation with Difference Equation, Fourier Analysis, and Partial Differential Equation*. Wadsworth, Inc. California.
- Huo, H. F. dan R.Chen. 2015. Stability of an HIV/AIDS treatment model with different stages. *Discrete Dynamics Nature and Society*.1-9.
- Murray, J. D. 2002. *Mathematical Biology. I. An Introduction*. Third Edition. Springer-Verlag. Berlin Heidelberg.
- Naresh, R. dan D. Sharm. 2011. An HIV/AIDS model with vertical transmission and time delay. *World Journal Modelling and Simulation*. 7:230-240.
- Neferi, A. 2016. *Hubungan antara Pengetahuan Tentang HIV dan AIDS dengan Respon Masyarakat terhadap OHDA*. Skripsi. Bandar Lampung: Universitas Negeri Lampung.
- Palm, W. J. 2014. *System Dynamic*. Third Edition. McGraw-Hill. USA.
- Robinson, R. C. 2004. *An Introduction to Dynamical Systems: Continuous and Discrete*. Pearson Education. USA.
- UNAIDS. 2013. *AIDS by Numbers*. Geneva.
- Yang, W., Z. Chu, J. Lam, dan C. Sung. 2017. Global dynamics of an model incorporating senior male clients. *Applied Mathematics and Computation*. 311: 203-216.

