p-SUBGRUP *SYLOW COMPLEMENTED* DALAM GRUP BERHINGGA

SKRIPSI

oleh:
HILARIA CHRISTA DIAN NOVITA
145090401111029

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2018

p-SUBGRUP *SYLOW COMPLEMENTED* DALAM GRUP BERHINGGA

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Matematika

oleh:

HILARIA CHRISTA DIAN NOVITA
145090401111029

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2018

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

p-SUBGRUP *SYLOW COMPLEMENTED*
DALAM GRUP BERHINGGA

oleh:
HILARIA CHRISTA DIAN NOVITA
145090401111029

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji pada tanggal 5 April 2018 dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Matematika

Pembimbing

Dra. Ari Andari, M.Si.
NIP. 196105161987012001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas FMIPA Universitas Brawijaya

Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si., M.Si., Ph.D.
NIP. 197509082000031003

LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	**:**	**HILARIA CHRISTA DIAN NOVITA**
NIM	**:**	**145090401111029**
Jurusan	**:**	**Matematika**
Judul Skripsi	**:**	***p*-Subgrup *Sylow Complemented* dalam Grup Berhingga**

dengan ini saya menyatakan bahwa:

1. **isi dari skripsi yang Saya buat adalah benar-benar karya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain, selain nama-nama yang termaktub di isi dan tertulis di daftar pustakan dalam skripsi ini.**
2. **apabila di kemudian hari ternyata skripsi yang Saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya akan bersedia menanggung segala resiko yang akan Saya terima.**

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 13 April 2018
yang menyatakan,

<u>HILARIA CHRISTA DIAN NOVITA</u>
NIM. 145090401111029

p-SUBGRUP *SYLOW COMPLEMENTED* DALAM GRUP BERHINGGA

ABSTRAK

Konsep mengenai subgrup dalam grup berhingga mengalami perkembangan salah satunya adalah konsep subgrup *complemented*. Salah satu subgrup yang mempunyai sifat *complemented* adalah subgrup *Sylow*. Diberikan G grup berhingga dan H subgrup dari G. H disebut *complemented* di G jika terdapat subgrup K dari G dimana $G = H*K$ dan $H \cap K = \{e\}$. Untuk setiap bilangan prima p yang membagi order G, terdapat P sebagai p-subgrup *Sylow* dari G. Terdapat suatu subgrup D dan H dalam P dimana $1 \leq o(D) < o(P)$ dengan asumsi $o(H) = o(D)$ atau $o(H) = p \cdot o(D)$ adalah *complemented* di G.

Kata kunci : p-subgrup *Sylow*, subgrup *complemented*, grup p-nilpoten.

COMPLEMENTED SYLOW *p*-SUBGROUPS OF FINITE GROUPS

ABSTRACT

The concept of subgroups in a finite groups has developed, one is concept of complemented subgroups. One of the complemented subgroup is Sylow subgroup. Let G be a finite group and H a subgroup of G. We say that H is complemented in G if there exists a subgroup K of G such that $G = H * K$ and $H \cap K = \{e\}$. For each prime p dividing the order of G let P be a Sylow p-subgroup of G. We fix in each P a subgroup D such that $1 \leq o(D) < o(P)$ and study the structure of G under the assumption that each subgroup H of P with $o(H) = o(D)$ or $o(H) = p \cdot o(D)$ is complemented in G.

Keywords : *p*-Sylow subgroups, complemented subgroups, *p*-nilpotent groups.

KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa yang telah memberikan rahmat dan berkat-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul **"*p*-Subgrup *Sylow Complemented* dalam Grup Berhingga"** sebagai syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Matematika.

Dalam penyelesaian skripsi ini, penulis mendapatkan bimbingan, motivasi dan bantuan secara langsung maupun tidak langsung dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Dra. Ari Andari, M.Si. selaku dosen pembimbing sekaligus Ketua KBI Aljabar atas segala bimbingan, waktu, dan motivasi yang diberikan selama pengerjaan dan penyusunan skripsi ini.

2. Drs. Bambang Sugandi, M.Si. dan Dr. Noor Hidayat, M.Si. selaku dosen penguji skripsi yang telah memberikan kritik dan saran dalam perbaikan skripsi ini.

3. Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si., M.Si, Ph.D., selaku ketua Jurusan Matematika, dan Dr. Isnani Darti, S.Si., M.Si., selaku ketua Program Studi Matematika.

4. Drs. Imam Nurhadi Purwanto, M.T. selaku dosen penasihat akademik atas segala bimbingan dan motivasi kepada penulis selama masa perkuliahan.

5. Segenap dosen Jurusan Matematika atas semua ilmu yang telah diberikan kepada penulis, serta segenap karyawan Tata Usaha, dan karyawan NOC Jurusan Matematika atas segala bantuannya selama penulis menempuh studi.

6. M. M. Asih Susilawaty (Ibu), Yohanes Muji W. (Bapak), Valentinus Wastu R. (Adik), dan keluarga besar yang selalu mendoakan dan memberi semangat serta kasih sayang yang tiada henti kepada penulis.

7. Teman-teman Jurusan Matematika angkatan 2014 atas semua perhatian, motivasi, doa, dan bantuannya.

8. Teman-teman OMK St. Simon Stock Batu atas semua perhatian, motivasi, doa, dan dukungannya.

Penulis menyadari masih terdapat kekurangan dalam penulisan skripsi ini. Oleh karena itu, penulis dengan senang hati menerima segala kritik dan saran yang membangun lewat email penulis *hc.diannovita@gmail.com.* Akhir kata, penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat khususnya bagi penulis dan bagi pembaca pada umumnya.

Malang, 13 April 2018

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR SIMBOL

SIMBOL	KETERANGAN
$\mathbb{Z}$	Himpunan bilangan bulat
$\mathbb{Z}_n$	Himpunan bilangan bulat modulo n
$o(G)$	Order dari grup G
$H \leq G$	H subgrup dari G
$\{e\}$	Himpunan elemen identitas
$H \trianglelefteq G$	H subgrup normal dari G
S_n	Grup simetri derajat n
A_n	Grup alternating derajat n
$\Phi(G)$	Subgrup *Frattini* dari G

BAB I
PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Aljabar abstrak atau lebih sering dikenal dengan aljabar modern adalah salah satu cabang ilmu aljabar yang mempelajari struktur aljabar, seperti grup, ring, field, dan modul. Dalam skripsi ini dibahas struktur aljabar yang berkaitan dengan grup, yaitu p-subgrup *Sylow*.

Grup adalah suatu himpunan tak kosong dan memenuhi sifat tertutup, asosiatif, mempunyai elemen satuan atau identitas, dan setiap elemen mempunyai invers. Subgrup adalah himpunan bagian sembarang tak kosong dalam grup dengan operasi yang sama dan memenuhi sifat-sifat pada grup. Sedangkan p-subgrup *Sylow* adalah subgrup yang order grupnya sama dengan p^a, dimana $a \in \mathbb{Z}_0^+$ dan p tidak membagi $[G : S]$.

Konsep grup telah berkembang, salah satu contohnya adalah grup *complemented* yang telah dibahas oleh Hall pada tahun 1937 dalam artikel yang berjudul *"Complemented groups"*. Kemudian pada tahun 1999, Ballester-Bolinches dan Xiuyun mulai mengembangkan konsep *complemented* pada subgrup dalam artikel yang berjudul *"On complemented subgroups of finite groups"*. Selanjutnya pada tahun 2010, Asaad kembali mengembangkan konsep dan sifat-sifat subgrup *complemented*.

Skripsi ini mengulas kembali beberapa lema dan sifat subgrup *complemented* yang berkaitan dengan subgrup *Sylow* dari hasil penelitian Asaad pada tahun 2010 dalam artikel *"Finite groups with certain subgroups of Sylow subgroups complemented"*.

1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang, permasalahan yang dibahas pada skripsi ini adalah bagaimana sifat-sifat subgrup *Sylow complemented* dalam grup berhingga.

1.3. Tujuan

Berdasarkan rumusan masalah, tujuan dari skripsi ini adalah membuktikan sifat-sifat subgrup *Sylow complemented* dalam grup berhingga.

BAB II
DASAR TEORI

Pada bab ini diberikan beberapa definisi, lema, dan contoh mengenai fungsi, grup, grup permutasi, subgrup, koset, subgrup normal, serta p-subgrup *Sylow* yang akan digunakan sebagai materi dasar dalam pembahasan.

2.1. Fungsi

Berikut ini diberikan definisi dan contoh yang berkaitan dengan fungsi yang dirujuk dari Fraleigh (2003) dan Andari (2015).

Definisi 2.1.1 Hasil Kali Kartesius

Misalkan A dan B adalah himpunan tak kosong. Hasil kali kartesius dari $A \times B$ didefinisikan sebagai $A \times B = \{(a, b)|a \in A, b \in B\}$.

Definisi 2.1.2 Relasi

Misalkan A dan B adalah himpunan tak kosong. Relasi R pada himpunan A dan B adalah himpunan bagian (subset) dari hasil kali kartesius $A \times B$.

$(a, b) \in R$ artinya a dihubungkan dengan b oleh R dan dinotasikan dengan aRb. Himpunan A disebut daerah asal (domain) dan himpunan B disebut daerah kawan (kodomain).

Contoh 2.1.3

Diberikan $A = \{a, b, c, d, e\}$ dan $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (a, 4), (a, 5), (a, 6), (b, 1), (b, 2), ...,$
$(b, 6), (c, 1), (c, 2), ..., (c, 6), ..., (e, 5), (e, 6)\}$ dan
$R = \{(a, 1), (b, 2), (b, 3), (d, 5), (e, 4)\}$. R disebut relasi karena
$R \subseteq A \times B$.

Definisi 2.1.4 Relasi Ekuivalensi

Misalkan S adalah hasil kali kartesius dari $A \times B$ dan $a, b, c \in S$, relasi ekuivalensi pada S adalah suatu relasi yang memenuhi sifat refleksif, simetris, dan transitif, yaitu:

(i) Relasi R disebut refleksif jika dan hanya jika untuk setiap a elemen S berlaku aRa.
(ii) Relasi R disebut simetris jika dan hanya jika untuk setiap a, b elemen S berlaku jika aRb maka bRa.
(iii) Relasi R disebut transitif jika dan hanya jika untuk setiap a, b, c elemen S berlaku jika aRb dan bRc, maka aRc.

Definisi 2.1.5 Fungsi

Misalkan A dan B adalah himpunan tak kosong. Suatu fungsi $f : A \to B$ adalah suatu relasi antara himpunan A dan B yang mengkaitkan setiap elemen x di A dengan tepat satu atau secara tunggal dengan sebuah nilai y dari himpunan B, sedemikian sehingga $y = f(x)$.

Berdasarkan sifat pemetaannya, ada macam-macam fungsi yaitu fungsi surjektif, fungsi injektif, dan fungsi bijektif.

Definisi 2.1.6 Fungsi Surjektif

Suatu fungsi $f : A \to B$ dikatakan surjektif (onto) jika berlaku $(\forall y \in B)(\exists x \in A) \ni y = f(x)$.

Definisi 2.1.7 Fungsi Injektif

Suatu fungsi $f : A \to B$ dikatakan injektif (1-1) jika berlaku $(\forall x_1, x_2 \in A), f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Definisi 2.1.8 Fungsi Bijektif

Suatu fungsi $f : A \to B$ dikatakan bijektif (korespondensi 1-1) jika dan hanya jika fungsi tersebut merupakan fungsi surjektif dan fungsi injektif.

Salah satu contoh fungsi adalah operasi biner, definisinya sebagai berikut.

Definisi 2.1.9 Operasi Biner

Suatu operasi biner atau operasi tertutup dalam himpunan S yang tak kosong adalah suatu pemetaan dari $(a, b) \in S \times S$ ke S dengan notasi:

$$\begin{aligned} * : S \times S &\to S \\ (a, b) &\mapsto *(a, b) = a * b \end{aligned}$$

Contoh 2.1.10

(1) Diberikan himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$ yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan. Akan ditunjukkan operasi penjumlahan pada $\mathbb{N}$ merupakan operasi biner.
Bukti:

$$\begin{aligned} + : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ (a, b) &\mapsto +(a, b) = a + b \end{aligned}$$

Karena a dan b elemen di $\mathbb{N}$, $a + b$ elemen di $\mathbb{N}$, maka operasi penjumlahan pada $\mathbb{N}$ merupakan operasi biner.

(2) Diberikan himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ yang dilengkapi dengan operasi $(*)$. Akan ditunjukkan operasi $(*)$ seperti yang didefinisikan berikut bukan merupakan operasi biner.

$$\begin{aligned} * : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z} \\ (a, b) &\mapsto a * b = \frac{ab}{5} \end{aligned}$$

Bukti:
Karena a dan b elemen di $\mathbb{Z}$, tetapi $a * b = \dfrac{ab}{5}$ bukan elemen di $\mathbb{Z}$, maka operasi $(*)$ pada $\mathbb{Z}$ bukan merupakan operasi biner.

2.2. Grup

Berikut ini diberikan definisi dan contoh yang berkaitan dengan grup yang dirujuk dari Andari (2015).

Definisi 2.2.1 Struktur Aljabar

Suatu himpunan tak kosong H disebut struktur aljabar jika H dilengkapi dengan satu atau lebih operasi biner dan berlaku sifat tertutup.

Definisi 2.2.2 Grup

Misalkan G adalah himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan operasi biner $(*)$. $(G, *)$ disebut grup jika memenuhi aksioma:

1. Tertutup, yaitu $(\forall a, b \in G)(\exists c \in G), a * b = c$.
2. Asosiatif, yaitu $(\forall a, b, c \in G), (a * b) * c = a * (b * c)$.
3. Mempunyai elemen satuan / identitas, yaitu $(\exists e \in G)(\forall a \in G), e * a = a * e = a$.
4. Setiap elemen mempunyai invers, yaitu $(\forall a \in G)(\exists a^{-1} \in G), a * (a^{-1}) = (a^{-1}) * a = e$.

Definisi 2.2.3 Grup Komutatif

Misalkan $(G, *)$ adalah grup. $(G, *)$ disebut grup komutatif (grup Abelian) jika memenuhi aksioma $(\forall a, b \in G), a * b = b * a$.

Contoh 2.2.4

(1) Diberikan himpunan $A = \{\bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}\} \subseteq \mathbb{Z}_{10}$ yang dilengkapi dengan operasi pergandaan. Akan ditunjukkan bahwa $(A, \cdot)$ merupakan grup komutatif.
Bukti:

Tabel 2.1 Hasil Operasi Pergandaan pada A

$\cdot$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$
$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$
$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$
$\bar{8}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$

Ambil $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in A$:
$\bar{a} = 2m + 10k_1$ untuk suatu $m, k_1 \in \mathbb{Z}$,
$\bar{b} = 2n + 10k_2$ untuk suatu $n, k_2 \in \mathbb{Z}$, dan
$\bar{c} = 2p + 10k_3$ untuk suatu $p, k_3 \in \mathbb{Z}$.

i. Akan ditunjukkan $(\forall \bar{a}, \bar{b} \in A), \bar{a}\bar{b} \in A$.

$$\begin{aligned}
\bar{a}\bar{b} &= (2m + 10k_1)(2n + 10k_2) \\
&= 4mn + 20nk_1 + 20mk_2 + 100k_1k_2 \\
&= 4mn + 20(nk_1 + mk_2) + 100k_1k_2 \\
&= 2q + 10k_4,
\end{aligned}$$

dengan $q = 2mn + 10(nk_1 + mk_2)$ dan $k_4 = 10k_1k_2$.
Karena $\bar{a}\bar{b} \in A$, maka sifat tertutup terpenuhi.

ii. Akan ditunjukkan $(\forall \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in A), (\bar{a}\bar{b})\bar{c} = \bar{a}(\bar{b}\bar{c})$.

$$\begin{aligned}
(\bar{a}\bar{b})\bar{c} &= [(2m + 10k_1)(2n + 10k_2)](2p + 10k_3) \\
&= [4mn + 20(nk_1 + mk_2) + 100k_1k_2](2p + 10k_3) \\
&= 8mnp + 40p(nk_1 + mk_2) + 200pk_1k_2 + 40mnk_3 + \\
&\quad 200k_3(nk_1 + mk_2) + 1000k_1k_2k_3 \\
&= 8mnp + 40npk_1 + 40mpk_2 + 200pk_1k_2 + 40mnk_3 + \\
&\quad 200nk_1k_3 + 200mk_2k_3 + 1000k_1k_2k_3 \\
&= 8mnp + 40m(pk_2 + nk_3) + 200mk_2k_3 + 40npk_1 + \\
&\quad 200k_1(pk_2 + nk_3) + 1000k_1k_2k_3 \\
&= (2m + 10k_1)[4np + 20(pk_2 + nk_3) + 100k_2k_3] \\
&= (2m + 10k_1)[(2n + 10k_2)(2p + 10k_3)] \\
&= \bar{a}(\bar{b}\bar{c})
\end{aligned}$$

Karena $(\bar{a}\bar{b})\bar{c} = \bar{a}(\bar{b}\bar{c})$, maka sifat asosiatif terpenuhi.

iii. Akan ditunjukkan $(\exists e \in A)(\forall \bar{a} \in A), e\bar{a} = \bar{a}e = \bar{a}$.
Berdasarkan Tabel 2.1 dapat diperoleh bahwa $e = \bar{6}$ sehingga $\bar{6} \cdot \bar{a} = \bar{a} \cdot \bar{6} = \bar{a}$, maka terbukti $(A, \cdot)$ mempunyai elemen satuan.

iv. Akan ditunjukkan
$(\forall \bar{a} \in A)(\exists \bar{a}^{-1} \in A), \bar{a}(\bar{a}^{-1}) = (\bar{a}^{-1})\bar{a} = e.$
Berdasarkan Tabel 2.1 dapat diperoleh sebagai berikut:
invers dari $\bar{2}$ adalah $\bar{8}$ karena $\bar{2} \cdot \bar{8} = \bar{8} \cdot \bar{2} = \bar{6} = e$,
invers dari $\bar{4}$ adalah $\bar{4}$ karena $\bar{4} \cdot \bar{4} = \bar{6} = e$,
invers dari $\bar{6}$ adalah $\bar{6}$ karena $\bar{6} \cdot \bar{6} = \bar{6} = e$, dan
invers dari $\bar{8}$ adalah $\bar{2}$ karena $\bar{8} \cdot \bar{2} = \bar{2} \cdot \bar{8} = \bar{6} = e$,
maka terbukti setiap elemen dalam A mempunyai invers.

v. Akan ditunjukkan $\bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{a}$.

$$\begin{aligned}
\bar{a}\bar{b} &= (2m + 10k_1)(2n + 10k_2) \\
&= 4mn + 20nk_1 + 20mk_2 + 100k_1k_2 \\
&= 4nm + 20mk_2 + 20nk_1 + 100k_2k_1 \\
&= (2n + 10k_2)(2m + 10k_1) \\
&= \bar{b}\bar{a}
\end{aligned}$$

Karena $\bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{a}$, maka hukum komutatif terpenuhi.

Berdasarkan bukti i sampai v, dapat disimpulkan bahwa $(A, \cdot)$ merupakan grup komutatif.

(2) Diberikan himpunan $\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan. Akan ditunjukkan bahwa $(\mathbb{Z}_4, +)$ merupakan grup.
Bukti:

Tabel 2.2 Hasil Operasi Penjumlahan pada $\mathbb{Z}_4$

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$

Berdasarkan Tabel 2.2 di atas dapat diperoleh bahwa $(\mathbb{Z}_4, +)$ memenuhi aksioma:

i. Tertutup, yaitu $(\forall a, b \in \mathbb{Z}_4)(\exists c \in \mathbb{Z}_4), a + b = c$.

ii. Asosiatif, yaitu $(\forall a, b, c \in \mathbb{Z}_4), (a + b) + c = a + (b + c)$.

iii. Mempunyai elemen satuan / identitas, yaitu $\bar{0}$, sedemikian sehingga $(\forall a \in \mathbb{Z}_4), \bar{0} + a = a + \bar{0} = a$.

iv. Setiap elemen mempunyai invers, yaitu
$(\forall a \in \mathbb{Z}_4)(\exists a^{-1} \in \mathbb{Z}_4), a + (a^{-1}) = (a^{-1}) + a = e$;
$(\bar{0})^{-1} = \bar{0}$ karena $\bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$,
$(\bar{1})^{-1} = \bar{3}$ karena $\bar{1} + \bar{3} = \bar{3} + \bar{1} = \bar{0}$,
$(\bar{2})^{-1} = \bar{2}$ karena $\bar{2} + \bar{2} = \bar{0}$, dan
$(\bar{3})^{-1} = \bar{1}$ karena $\bar{3} + \bar{1} = \bar{1} + \bar{3} = \bar{0}$.

Berdasarkan bukti i sampai iv, dapat disimpulkan bahwa $(\mathbb{Z}_4, +)$ merupakan grup.

(3) Diberikan himpunan $\mathbb{Z}_7 - \{\bar{0}\} = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$ yang dilengkapi dengan operasi pergandaan. Akan ditunjukkan bahwa $(\mathbb{Z}_7 - \{\bar{0}\}, \cdot)$ merupakan grup.
Bukti:

Tabel 2.3 Hasil Operasi Pergandaan pada $\mathbb{Z}_7 - \{\bar{0}\}$

$\cdot$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{5}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{6}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Berdasarkan Tabel 2.3 di atas dapat diperoleh bahwa $(\mathbb{Z}_7 - \{\bar{0}\}, \cdot)$ memenuhi aksioma:

i. Tertutup, yaitu $(\forall a, b \in \mathbb{Z}_7 - \{\bar{0}\})(\exists c \in \mathbb{Z}_7 - \{\bar{0}\}), ab = c$.

ii. Asosiatif, yaitu $(\forall a, b, c \in \mathbb{Z}_7 - \{\bar{0}\}), (ab)c = a(bc)$.

iii. Mempunyai elemen satuan / identitas, yaitu $\bar{1}$ sedemikian sehingga $(\forall a \in \mathbb{Z}_7 - \{\bar{0}\}), \bar{1} \cdot a = a \cdot \bar{1} = a$.

iv. Setiap elemen mempunyai invers, yaitu
$(\forall a \in \mathbb{Z}_7 - \{\bar{0}\})(\exists a^{-1} \in \mathbb{Z}_7 - \{\bar{0}\}), a(a^{-1}) = (a^{-1})a = e$;
$(\bar{1})^{-1} = \bar{1}$ karena $\bar{1} \cdot \bar{1} = \bar{1}$,
$(\bar{2})^{-1} = \bar{4}$ karena $\bar{2} \cdot \bar{4} = \bar{4} \cdot \bar{2} = \bar{1}$,
$(\bar{3})^{-1} = \bar{5}$ karena $\bar{3} \cdot \bar{5} = \bar{5} \cdot \bar{3} = \bar{1}$,

$(\bar{4})^{-1} = \bar{2}$ karena $\bar{4} \cdot \bar{2} = \bar{2} \cdot \bar{4} = \bar{1}$,
$(\bar{5})^{-1} = \bar{3}$ karena $\bar{5} \cdot \bar{3} = \bar{3} \cdot \bar{5} = \bar{1}$, dan
$(\bar{6})^{-1} = \bar{6}$ karena $\bar{6} \cdot \bar{6} = \bar{1}$.

Berdasarkan bukti i sampai iv, dapat disimpulkan bahwa $(\mathbb{Z}_7 - \{\bar{0}\}, \cdot)$ merupakan grup.

(4) Diberikan himpunan $\mathbb{Z}_9 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}\}$ yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan. Akan ditunjukkan bahwa $(\mathbb{Z}_9, +)$ merupakan grup.
Bukti:

Tabel 2.4 Hasil Operasi Penjumlahan pada $\mathbb{Z}_9$

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{6}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{7}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{8}$	$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$

Berdasarkan Tabel 2.4 di atas dapat diperoleh bahwa $(\mathbb{Z}_9, +)$ memenuhi aksioma:

i. Tertutup, yaitu $(\forall a, b \in \mathbb{Z}_9)(\exists c \in \mathbb{Z}_9), a + b = c$.
ii. Asosiatif, yaitu $(\forall a, b, c \in \mathbb{Z}_9), (a + b) + c = a + (b + c)$.
iii. Mempunyai elemen satuan / identitas, yaitu $\bar{0}$ sedemikian sehingga $(\forall a \in \mathbb{Z}_9), \bar{0} + a = a + \bar{0} = a$.
iv. Setiap elemen mempunyai invers, yaitu
$(\forall a \in \mathbb{Z}_9)(\exists a^{-1} \in \mathbb{Z}_9), a + (a^{-1}) = (a^{-1}) + a = e$;
$(\bar{0})^{-1} = \bar{0}$ karena $\bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$,
$(\bar{1})^{-1} = \bar{8}$ karena $\bar{1} + \bar{8} = \bar{8} + \bar{1} = \bar{0}$,
$(\bar{2})^{-1} = \bar{7}$ karena $\bar{2} + \bar{7} = \bar{7} + \bar{2} = \bar{0}$,
$(\bar{3})^{-1} = \bar{6}$ karena $\bar{3} + \bar{6} = \bar{6} + \bar{3} = \bar{0}$,
$(\bar{4})^{-1} = \bar{5}$ karena $\bar{4} + \bar{5} = \bar{5} + \bar{4} = \bar{0}$,
$(\bar{5})^{-1} = \bar{4}$ karena $\bar{5} + \bar{4} = \bar{4} + \bar{5} = \bar{0}$,
$(\bar{6})^{-1} = \bar{3}$ karena $\bar{6} + \bar{3} = \bar{3} + \bar{6} = \bar{0}$,
$(\bar{7})^{-1} = \bar{2}$ karena $\bar{7} + \bar{2} = \bar{2} + \bar{7} = \bar{0}$, dan
$(\bar{8})^{-1} = \bar{1}$ karena $\bar{8} + \bar{1} = \bar{1} + \bar{8} = \bar{0}$.

Berdasarkan bukti i sampai iv, dapat disimpulkan bahwa $(\mathbb{Z}_9, +)$ merupakan grup.

(5) Diberikan himpunan $\mathbb{Z}_{12} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{1}0, \bar{1}1\}$ yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan. Akan ditunjukkan bahwa $(\mathbb{Z}_{12}, +)$ merupakan grup.
Bukti:

Tabel 2.5 Hasil Operasi Penjumlahan pada $\mathbb{Z}_{12}$

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{1}0$	$\bar{1}1$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{1}0$	$\bar{1}1$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{1}0$	$\bar{1}1$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{1}0$	$\bar{1}1$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{1}0$	$\bar{1}1$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{1}0$	$\bar{1}1$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{1}0$	$\bar{1}1$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{6}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{1}0$	$\bar{1}1$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{7}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{1}0$	$\bar{1}1$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{8}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{1}0$	$\bar{1}1$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$
$\bar{9}$	$\bar{9}$	$\bar{1}0$	$\bar{1}1$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$
$\bar{1}0$	$\bar{1}0$	$\bar{1}1$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$
$\bar{1}1$	$\bar{1}1$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{1}0$

Berdasarkan Tabel 2.5 di atas dapat diperoleh bahwa $(\mathbb{Z}_{12}, +)$ memenuhi aksioma:

i. Tertutup, yaitu $(\forall a, b \in \mathbb{Z}_{12})(\exists c \in \mathbb{Z}_{12}), a + b = c$.

ii. Asosiatif, yaitu $(\forall a, b, c \in \mathbb{Z}_{12}), (a + b) + c = a + (b + c)$.

iii. Mempunyai elemen satuan / identitas, yaitu $\bar{0}$ sedemikian sehingga $(\forall a \in \mathbb{Z}_{12}), \bar{0} + a = a + \bar{0} = a$.

iv. Setiap elemen mempunyai invers, yaitu
$(\forall a \in \mathbb{Z}_{12})(\exists a^{-1} \in \mathbb{Z}_{12}), a + (a^{-1}) = (a^{-1}) + a = e$;
$(\bar{0})^{-1} = \bar{0}$ karena $\bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$,
$(\bar{1})^{-1} = \bar{1}1$ karena $\bar{1} + \bar{1}1 = \bar{1}1 + \bar{1} = \bar{0}$,
$(\bar{2})^{-1} = \bar{1}0$ karena $\bar{2} + \bar{1}0 = \bar{1}0 + \bar{2} = \bar{0}$,
$(\bar{3})^{-1} = \bar{9}$ karena $\bar{3} + \bar{9} = \bar{9} + \bar{3} = \bar{0}$,
$(\bar{4})^{-1} = \bar{8}$ karena $\bar{4} + \bar{8} = \bar{8} + \bar{4} = \bar{0}$,
$(\bar{5})^{-1} = \bar{7}$ karena $\bar{5} + \bar{7} = \bar{7} + \bar{5} = \bar{0}$,
$(\bar{6})^{-1} = \bar{6}$ karena $\bar{6} + \bar{6} = \bar{0}$,
$(\bar{7})^{-1} = \bar{5}$ karena $\bar{7} + \bar{5} = \bar{5} + \bar{7} = \bar{0}$,
$(\bar{8})^{-1} = \bar{4}$ karena $\bar{8} + \bar{4} = \bar{4} + \bar{8} = \bar{0}$,

$(\bar{9})^{-1} = \bar{3}$ karena $\bar{9} + \bar{3} = \bar{3} + \bar{9} = \bar{0}$,
$(\bar{10})^{-1} = \bar{2}$ karena $\bar{10} + \bar{2} = \bar{2} + \bar{10} = \bar{0}$, dan
$(\bar{11})^{-1} = \bar{1}$ karena $\bar{11} + \bar{1} = \bar{1} + \bar{11} = \bar{0}$.

Berdasarkan bukti i sampai iv, dapat disimpulkan bahwa $(\mathbb{Z}_{12}, +)$ merupakan grup.

(6) Diberikan himpunan $G = \{1, -1, i, -i\}$ dengan i adalah bilangan imajiner yang dilengkapi dengan operasi pergandaan. Akan ditunjukkan bahwa $(G, \cdot)$ merupakan grup.
Bukti:

Tabel 2.6 Hasil Operasi Pergandaan pada G

$\cdot$	1	-1	i	$-i$
1	1	-1	i	$-i$
-1	-1	1	$-i$	i
i	i	$-i$	-1	1
$-i$	$-i$	i	1	-1

Berdasarkan Tabel 2.6 di atas dapat diperoleh bahwa $(G, \cdot)$ memenuhi aksioma:

i. Tertutup, yaitu $(\forall a, b \in G)(\exists c \in G), ab = c$.
ii. Asosiatif, yaitu $(\forall a, b, c \in G), (ab)c = a(bc)$.
iii. Mempunyai elemen satuan / identitas, yaitu $\bar{1}$ sedemikian sehingga $(\forall a \in G), \bar{1} \cdot a = a \cdot \bar{1} = a$.
iv. Setiap elemen mempunyai invers, yaitu
$(\forall a \in G)(\exists a^{-1} \in G), a(a^{-1}) = (a^{-1})a = e$;
$(1)^{-1} = 1$ karena $1 \cdot 1 = 1$,
$(-1)^{-1} = -1$ karena $(-1)(-1) = 1$,
$(i)^{-1} = -i$ karena $i(-i) = (-i)i = 1$, dan
$(-i)^{-1} = i$ karena $(-i)i = i(-i) = 1$.

Berdasarkan bukti i sampai iv, dapat disimpulkan bahwa $(G, \cdot)$ merupakan grup.

(7) Diberikan himpunan $\mathbb{Z}_{15} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, ..., \bar{12}, \bar{13}, \bar{14}\}$ yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan. Akan ditunjukkan bahwa $(\mathbb{Z}_{15}, +)$ merupakan grup.
Bukti:

Tabel 2.7 Hasil Operasi Penjumlahan pada $\mathbb{Z}_{15}$

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{6}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{7}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{8}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$
$\bar{9}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$
$\overline{10}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$
$\overline{11}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$
$\overline{12}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$
$\overline{13}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$
$\overline{14}$	$\overline{14}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$

Berdasarkan Tabel 2.7 dapat diperoleh bahwa $(\mathbb{Z}_{15}, +)$ memenuhi aksioma:

i. Tertutup, yaitu $(\forall a, b \in \mathbb{Z}_{15})(\exists c \in \mathbb{Z}_{15}), a + b = c$.

ii. Asosiatif, yaitu $(\forall a, b, c \in \mathbb{Z}_{15}), (a + b) + c = a + (b + c)$.

iii. Mempunyai elemen satuan / identitas, yaitu $\bar{0}$ sedemikian sehingga $(\forall a \in \mathbb{Z}_{15}), \bar{0} + a = a + \bar{0} = a$.

iv. Setiap elemen mempunyai invers, yaitu
$(\forall a \in \mathbb{Z}_{15})(\exists a^{-1} \in \mathbb{Z}_{15}), a + (a^{-1}) = (a^{-1}) + a = e$;
$(\bar{0})^{-1} = \bar{0}$ karena $\bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$,
$(\bar{1})^{-1} = \bar{14}$ karena $\bar{1} + \bar{14} = \bar{14} + \bar{1} = \bar{0}$,
$(\bar{2})^{-1} = \bar{13}$ karena $\bar{2} + \bar{13} = \bar{13} + \bar{2} = \bar{0}$,
$(\bar{3})^{-1} = \bar{12}$ karena $\bar{3} + \bar{12} = \bar{12} + \bar{3} = \bar{0}$,
$(\bar{4})^{-1} = \bar{11}$ karena $\bar{4} + \bar{11} = \bar{11} + \bar{4} = \bar{0}$,
$(\bar{5})^{-1} = \bar{10}$ karena $\bar{5} + \bar{10} = \bar{10} + \bar{5} = \bar{0}$,
$(\bar{6})^{-1} = \bar{9}$ karena $\bar{6} + \bar{9} = \bar{9} + \bar{6} = \bar{0}$,
$(\bar{7})^{-1} = \bar{8}$ karena $\bar{7} + \bar{8} = \bar{8} + \bar{7} = \bar{0}$,
$(\bar{8})^{-1} = \bar{7}$ karena $\bar{8} + \bar{7} = \bar{7} + \bar{8} = \bar{0}$,
$(\bar{9})^{-1} = \bar{6}$ karena $\bar{9} + \bar{6} = \bar{6} + \bar{9} = \bar{0}$,
$(\bar{10})^{-1} = \bar{5}$ karena $\bar{10} + \bar{5} = \bar{5} + \bar{10} = \bar{0}$,
$(\bar{11})^{-1} = \bar{4}$ karena $\bar{11} + \bar{4} = \bar{4} + \bar{11} = \bar{0}$,
$(\bar{12})^{-1} = \bar{3}$ karena $\bar{12} + \bar{3} = \bar{3} + \bar{11} = \bar{0}$,
$(\bar{13})^{-1} = \bar{2}$ karena $\bar{13} + \bar{2} = \bar{2} + \bar{11} = \bar{0}$, dan
$(\bar{14})^{-1} = \bar{1}$ karena $\bar{14} + \bar{1} = \bar{1} + \bar{11} = \bar{0}$.

Berdasarkan bukti i sampai iv, dapat disimpulkan bahwa $(\mathbb{Z}_{15}, +)$ merupakan grup.

Definisi 2.2.5 Order Grup

Order dari grup G dengan notasi $o(G)$ adalah banyaknya elemen dari grup G. Jika banyaknya elemen dalam grup G berhingga maka G disebut sebagai grup berhingga.

Definisi 2.2.6 Order Elemen

Misalkan G adalah grup dan $a \in G$. Jika dapat ditemukan bilangan bulat positif terkecil n sedemikian sehingga berlaku $a^n = e$ (untuk pergandaan) atau $na = e$ (untuk penjumlahan), maka dikatakan bahwa a mempunyai order n. Jika tidak dapat ditemukan n tersebut, maka dikatakan bahwa a mempunyai order tak hingga.

Contoh 2.2.7

(1) Diberikan grup $(\mathbb{Z}_4, +)$ pada Contoh 2.2.4 nomor 2 dengan $e = \bar{0}$, maka;
$o(\mathbb{Z}_4) = 4$ artinya banyaknya elemen dari $\mathbb{Z}_4$ adalah 4,
$o(\bar{0}) = 1$ karena $1 \cdot \bar{0} = \bar{0}$, sedangkan $0 \cdot \bar{0} = \bar{0}$ tetapi 0 bukan bilangan bulat positif, artinya $n \cdot \bar{0} \neq e$ untuk $n \neq 1$,
$o(\bar{1}) = 4$ karena $4 \cdot \bar{1} = \bar{0}$, sedangkan $n \cdot \bar{1} \neq \bar{0} \neq e$ untuk $n < 4$,
$o(\bar{2}) = 2$ karena $2 \cdot \bar{2} = \bar{0}$, sedangkan $n \cdot \bar{2} \neq \bar{0} \neq e$ untuk $n < 2$,
dan $o(\bar{3}) = 4$ karena $4 \cdot \bar{3} = \bar{0}$, sedangkan $n \cdot \bar{3} \neq \bar{0} \neq e$ untuk $n < 4$.

(2) Diberikan grup $G = \{1, -1, i, -i\}$ pada Contoh 2.2.4 nomor 6 dengan $e = 1$, maka;
$o(G) = 4$ artinya banyaknya elemen dari G adalah 4,
$o(1) = 1$ karena $1^1 = 1$, sedangkan $(-1)^0 = 1$ tetapi 0 bukan bilangan bulat positif, artinya $(-1)^n \neq e$ untuk $n \neq 1$,
$o(-1) = 2$ karena $(-1)^2 = 1$, sedangkan $(-1)^n \neq 1 \neq e$ untuk $n < 2$,
$o(i) = 4$ karena $i^4 = 1$, sedangkan $i^n \neq 1 \neq e$ untuk $n < 4$, dan
$o(-i) = 4$ karena $(-i)^4 = 1$, sedangkan $(-i)^n \neq 1 \neq e$ untuk $n < 4$.

2.3. Grup Permutasi

Berikut ini diberikan definisi dan contoh yang berkaitan dengan grup permutasi yang dirujuk dari Fraleigh (2003) dan Andari (2015).

Definisi 2.3.1 Permutasi

Permutasi merupakan suatu fungsi atau pemetaan bijektif dari himpunan berhingga ke dirinya sendiri.

Derajat dari permutasi adalah banyaknya elemen yang termuat dalam himpunan berhingga tersebut. Misalkan $S = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ adalah suatu himpunan berhingga dari n elemen yang berbeda. Dan misalkan suatu permutasi derajat n, $f : S \xrightarrow{1-1} S$ yaitu
$f(a_1) = a_{i_1}, f(a_2) = a_{i_2}, ..., f(a_n) = a_{i_n}$ dimana indeks $i_1, i_2, ..., i_n$ berkisar antara 1 sampai dengan n dan berbeda satu dengan yang lainnya, dinotasikan sebagai:

$$f = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_n \\ a_{i_1} & a_{i_2} & ... & a_{i_n} \end{pmatrix}$$

Definisi 2.3.2 Orbit

Misalkan f adalah suatu permutasi dari himpunan S. Kumpulan kelas ekuivalensi dalam S disebut orbit dari f.

Contoh 2.3.3

Diberikan $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ dan misalkan

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 6 & 7 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

salah satu permutasi dari S. Akan ditentukan orbit dari f dalam S:

1. Kelas ekuivalensi yang memuat elemen $1 : 1 \xrightarrow{f} 3 \xrightarrow{f} 6 \xrightarrow{f} \ldots.$ Didapat bahwa orbit yang memuat elemen 1 adalah $\{1, 3, 6\}$.
2. Kelas ekuivalensi yang memuat elemen $2 : 2 \xrightarrow{f} 8 \xrightarrow{f} 2 \xrightarrow{f} \ldots.$ Didapat bahwa orbit yang memuat elemen 2 adalah $\{2, 8\}$.
3. Kelas ekuivalensi yang memuat elemen $4 : 4 \xrightarrow{f} 7 \xrightarrow{f} 5 \xrightarrow{f} \ldots.$ Didapat bahwa orbit yang memuat elemen 4 adalah $\{4, 7, 5\}$.

Karena ketiga orbit di atas telah memuat semua elemen dalam S, maka orbit dari f adalah $\{1, 3, 6\}$, $\{2, 8\}$, dan $\{4, 7, 5\}$.

Definisi 2.3.4 Sikel

Suatu permutasi $f \in S$ disebut sikel jika f memiliki maksimal 1 orbit yang memuat lebih dari 1 elemen. Panjang sikel adalah banyaknya elemen dalam orbit terbesar.

Suatu permutasi dapat dituliskan sebagai sikel, misalkan $f = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ yang artinya $f(a_1) = a_2$, $f(a_2) = a_3$, $f(a_3) = a_4$, dan $f(a_4) = a_1$ (hasil pemetaan elemen terakhir pada sikel kembali ke elemen awal). Karena $f = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ terdiri dari 4 elemen dalam satu sikel tunggal, maka permutasi ini disebut sebagai 4-sikel.

Definisi 2.3.5 Transposisi

Suatu sikel dengan panjang 2 disebut transposisi.

Definisi 2.3.6 Operasi Pergandaan Permutasi

Misalkan f dan g adalah dua buah permutasi pada himpunan S. Didefinisikan operasi pergandaan $(\cdot)$ antara dua buah permutasi, yaitu

$$(f \cdot g)(a_i) = f(g(a_i)), \forall a_i \in S.$$

Contoh 2.3.7

Diberikan $S = \{1, 2, 3\}$, maka semua permutasi dari S adalah:
$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,
$f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $f_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $f_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(1) Akan ditentukan permutasi f yang merupakan hasil kali dari permutasi f_2 dan f_3:

$$f = f_2 \cdot f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$f(1) = (f_2 \cdot f_3)(1) = f_2(f_3(1)) = f_2(3) = 3$$
$$f(2) = (f_2 \cdot f_3)(2) = f_2(f_3(2)) = f_2(2) = 1$$
$$f(3) = (f_2 \cdot f_3)(3) = f_2(f_3(3)) = f_2(1) = 2$$

(2) Misalkan diambil $f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, f_2 dapat dinyatakan sebagai perkalian dua sikel yaitu $(1, 2) \cdot (3) = (1, 2)$, artinya 1 dipetakan ke 2, 2 dipetakan ke 1, serta 3 dipetakan ke 3, dan sikel $(1, 2)$ disebut transposisi.

Definisi 2.3.8 Permutasi Genap

Suatu permutasi f dikatakan permutasi genap jika f dapat dinyatakan sebagai hasil kali dari sejumlah genap transposisi.

Contoh 2.3.9

$(1, 2, 3)$ adalah permutasi genap karena $(1, 2, 3)$ dapat dinyatakan dalam 2 buah transposisi yaitu $(1, 2, 3) = (1, 2)(1, 3)$.

Definisi 2.3.10 Permutasi Ganjil

Suatu permutasi f dikatakan permutasi ganjil jika f dapat dinyatakan sebagai hasil kali dari sejumlah ganjil transposisi.

Contoh 2.3.11

$(1,2,3,4)$ adalah permutasi ganjil karena $(1,2,3,4)$ dapat dinyatakan dalam 3 buah transposisi yaitu $(1,2,3,4) = (1,2)(1,3)(1,4)$.

Definisi 2.3.12 Grup Permutasi

Grup permutasi adalah himpunan permutasi yang membentuk suatu grup dengan operasi pergandaan permutasi.

Contoh 2.3.13

(1) Diberikan $G = \{e, (1,2)\}$, akan ditunjukkan $(G, \cdot)$ merupakan grup permutasi.
Bukti:

Tabel 2.8 Hasil Operasi Pergandaan Permutasi pada G

$\cdot$	e	$(1,2)$
e	e	$(1,2)$
$(1,2)$	$(1,2)$	e

Berdasarkan Tabel 2.8 di atas dapat diperoleh bahwa $(G, \cdot)$ merupakan grup sehingga $(G, \cdot)$ dapat disebut sebagai grup permutasi.

(2) Diberikan $Q = \{e, (1,2), (1,2,3)\}$, akan ditunjukkan $(Q, \cdot)$ bukan merupakan grup permutasi.
Bukti:

Tabel 2.9 Hasil Operasi Pergandaan Permutasi pada Q

$\cdot$	e	$(1,2)$	$(1,2,3)$
e	e	$(1,2)$	$(1,2,3)$
$(1,2)$	$(1,2)$	e	$(1,3)$
$(1,2,3)$	$(1,2,3)$	$(2,3)$	$(1,3,2)$

Berdasarkan Tabel 2.9 di atas dapat diperoleh bahwa $(Q, \cdot)$ bukan merupakan grup karena tidak memenuhi sifat tertutup, salah satu contohnya adalah $(1,2) \cdot (1,2,3) = (1,3) \notin Q$, sehingga $(Q, \cdot)$ bukan merupakan grup permutasi.

Catatan: grup permutasi bukan grup komutatif.

Definisi 2.3.14 Grup Simetri

Misalkan $S = \{1, 2, ..., n\}$ suatu himpunan berhingga. Grup yang memuat semua permutasi dari S disebut grup simetri derajat n, dinotasikan dengan S_n dan banyaknya elemen pada $S_n = n!$.

Definisi 2.3.15 Tipe Sikel

Suatu permutasi pada grup permutasi mempunyai tipe sikel tertentu. Misalkan untuk suatu permutasi pada grup simetri derajat n, $f \in S_n$ dimana tipe sikel dari $f = 1^a 2^b 3^c$... artinya f mempunyai a buah elemen yang pemetaannya tetap ke dirinya sendiri, b buah 2-sikel, c buah 3-sikel, dan seterusnya serta $(1 \times a) + (2 \times b) + (3 \times c) + ... = n$.

Contoh 2.3.16

Berdasarkan Contoh 2.3.7, himpunan semua permutasi atas S membentuk grup simetri derajat 3, S_3 yang terdiri dari elemen-elemen berikut dimana $o(S_3) = 3! = 6$.
$f_1 = e$ dengan tipe sikel 1^3,
$f_2 = (1, 2)$ dengan tipe sikel $1^1.2^1$,
$f_3 = (1, 3)$ dengan tipe sikel $1^1.2^1$,
$f_4 = (2, 3)$ dengan tipe sikel $1^1.2^1$,
$f_5 = (1, 2, 3)$ dengan tipe sikel 3^1, dan
$f_6 = (1, 3, 2)$ dengan tipe sikel 3^1.
Semua hasil pergandaan permutasi dapat ditulis dalam bentuk tabel komposisi berikut.

Tabel 2.10 Tabel Komposisi Grup Simetri Derajat 3, S_3

$*$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1	e	$(1,2)$	$(1,3)$	$(2,3)$	$(1,2,3)$	$(1,3,2)$
f_2	$(1,2)$	e	$(1,2,3)$	$(1,3,2)$	$(1,3)$	$(2,3)$
f_3	$(1,3)$	$(1,3,2)$	e	$(1,2,3)$	$(2,3)$	$(1,2)$
f_4	$(2,3)$	$(1,2,3)$	$(1,3,2)$	e	$(1,2)$	$(1,3)$
f_5	$(1,2,3)$	$(2,3)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,3,2)$	e
f_6	$(1,3,2)$	$(1,3)$	$(2,3)$	$(1,2)$	e	$(1,2,3)$

Berdasarkan Tabel 2.10 di atas dapat diperoleh bahwa S_3 dengan operasi pergandaan memenuhi sifat tertutup. Akan dibuktikan tiga buah aksioma lain dalam grup.
Bukti:

(i) Memenuhi sifat asosiatif yaitu:
$[(1, 2)(1, 3)](1, 2, 3) = (1, 2)[(1, 3)(1, 2, 3)]$ karena
$[(1, 2)(1, 3)](1, 2, 3) = (1, 2, 3)(1, 2, 3) = (1, 3, 2)$ dan
$(1, 2)[(1, 3)(1, 2, 3)] = (1, 2)(2, 3) = (1, 3, 2)$.
Secara umum berlaku
$\forall f_i, f_j, f_k \in S_3, (f_i \cdot f_j) \cdot f_k = f_i \cdot (f_j \cdot f_k)$.

(ii) Eksistensi elemen identitas, dari Tabel 2.9 diperoleh bahwa $(\exists e = f_1 \in S_3)(\forall a \in S_3), f_1 \cdot f_i = f_i \cdot f_1 = f_i$.

(iii) Eksistensi elemen invers, dari Tabel 2.9 diperoleh bahwa
$e^{-1} = e$,
$(1,2)^{-1} = (1,2)$,
$(1,3)^{-1} = (1,3)$,
$(2,3)^{-1} = (2,3)$,
$(1,2,3)^{-1} = (1,3,2)$, dan
$(1,3,2)^{-1} = (1,2,3)$.
Sehingga $(\forall f_i \in S_3)(\exists f_1^{-1} \in S_3), f_i \cdot f_i^{-1} = f_i^{-1} \cdot f_i = e$.

Dengan demikian terbukti bahwa S_3 merupakan suatu grup.

Definisi 2.3.17 Grup Alternating

Grup alternating derajat n, dinotasikan A_n adalah himpunan semua permutasi genap dari grup simetri derajat n, S_n.

Karena permutasi dapat dibedakan menjadi permutasi genap dan ganjil, maka banyaknya elemen atau order dari A_n adalah
$o(A_n) = \dfrac{o(S_n)}{2} = \dfrac{n!}{2}$.

Contoh 2.3.18

Berdasarkan Contoh 2.3.16, permutasi-permutasi genap dari S_3 adalah $e, (1,2,3)$, dan $(1,3,2)$. Maka $A_3 = \{e, (1,2,3), (1,3,2)\}$, dengan $o(A_3) = \dfrac{o(S_3)}{2} = \dfrac{3!}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$.

2.4. Subgrup

Berikut ini diberikan definisi dan contoh yang berkaitan dengan subgrup yang dirujuk dari Fraleigh (2003) dan Andari (2015).

Definisi 2.4.1 Subgrup

Misalkan G adalah grup. H adalah himpunan bagian dalam G dan H himpunan tak kosong. H disebut subgrup dari G jika terhadap operasi yang sama dengan G, H juga merupakan grup.

H subgrup dari grup G diberi notasi $H \leq G$. Setiap grup G mempunyai dua subgrup tak sejati (trivial) yaitu G dan $E = \{e\}$. Suatu subgrup H selain G dan $E(E < H < G)$ disebut subgrup sejati (nontrivial).

Definisi 2.4.2 Subgrup Minimal

Misalkan G adalah grup. Subgrup $H \neq \{e\}$ adalah subgrup minimal dari grup G jika tidak ada subgrup sejati lain dari grup G yang termuat di subgrup H.

Definisi 2.4.3 Subgrup Maksimal

Misalkan G adalah grup. Subgrup $H \neq G$ adalah subgrup maksimal jika subgrup H tidak termuat di subgrup yang lain dari G.

Contoh 2.4.4

(1) Diberikan grup $(\mathbb{Z}_{12}, +)$ pada Contoh 2.2.4 nomor 5. Subgrup-subgrup dalam $\mathbb{Z}_{12}$ adalah:
$H_1 = \{\bar{0}\}$,
$H_2 = Z_8$,
$H_3 = \{\bar{0}, \bar{6}\}$,
$H_4 = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\}$,
$H_5 = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}\}$, dan
$H_6 = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{10}\}$.
H_1 dan H_2 disebut subgrup tak sejati, sedangkan H_3 sampai H_6 disebut subgrup sejati. H_3 dan H_4 disebut subgrup minimal dari $\mathbb{Z}_{12}$ karena tidak ada subgrup lain yang termuat di H_3 dan H_4. Sedangkan H_5 dan H_6 disebut subgrup maksimal dari $\mathbb{Z}_{12}$ karena baik H_3 maupun H_4 tidak termuat di subgrup lain dalam $\mathbb{Z}_{12}$.

(2) Diberikan grup $(\mathbb{Z}_{15}, \cdot)$. Subgrup-subgrup sejati dalam $\mathbb{Z}_{15}$ adalah $H_1 = \{\bar{0}, \bar{5}, \bar{10}\}$ dan $H_2 = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \bar{12}\}$.
Kedua subgrup tersebut dapat disebut subgrup minimal dan subgrup maksimal dari $\mathbb{Z}_{15}$ karena tidak saling termuat satu sama lain.

2.5. Koset

Berikut ini diberikan definisi dan contoh yang berkaitan dengan koset yang dirujuk dari Andari (2015).

Definisi 2.5.1 Koset Kiri dan Koset Kanan

Misalkan $(G, *)$ adalah grup, $a \in G$ dan $H = \{h_1, h_2, h_3, ...\}$ subgrup dari G maka, $a * H = \{a * h_1, a * h_2, a * h_3, ...\}$ disebut koset kiri relatif terhadap subgrup H dan $H * a = \{h_1 * a, h_2 * a, h_3 * a, ...\}$ disebut koset kanan relatif terhadap subgrup H.

Definisi 2.5.2 Indeks Subgrup H dari Grup G

Indeks subgrup H dari grup G adalah banyaknya koset-koset relatif terhadap H, diberi notasi $[G : H]$ dengan $[G : H] = \dfrac{o(G)}{o(H)}$.

Contoh 2.5.3

(1) Diberikan grup $(\mathbb{Z}_9, +)$ pada Contoh 2.2.4 nomor 4. $H = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}\}$ merupakan subgrup dalam $\mathbb{Z}_9$. Akan ditunjukkan terdapat 3 buah koset di $\mathbb{Z}_9$ relatif terhadap H.
Bukti:
Koset-koset kiri dari $\mathbb{Z}_9$ relatif terhadap H adalah:
$\bar{0} + H = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}\} = H$
$\bar{1} + H = \{\bar{1}, \bar{4}, \bar{7}\}$
$\bar{2} + H = \{\bar{2}, \bar{5}, \bar{8}\}$
$\bar{3} + H = \{\bar{3}, \bar{6}, \bar{0}\} = H$
$\bar{4} + H = \{\bar{4}, \bar{7}, \bar{1}\} = \bar{1} + H$
$\bar{5} + H = \{\bar{5}, \bar{8}, \bar{2}\} = \bar{2} + H$
$\bar{6} + H = \{\bar{6}, \bar{0}, \bar{3}\} = H$
$\bar{7} + H = \{\bar{7}, \bar{1}, \bar{4}\} = \bar{1} + H$
$\bar{8} + H = \{\bar{8}, \bar{2}, \bar{5}\} = \bar{2} + H$
Sehingga $[\mathbb{Z}_9 : H] = \dfrac{o(\mathbb{Z}_9)}{o(H)} = \dfrac{9}{3} = 3$ yaitu $H, \bar{1} + H$ dan $\bar{2} + H$.

(2) Diberikan grup $G = \{1, -1, i, -i\}$ pada Contoh 2.2.4 nomor 6. $H = \{1, -1\}$ merupakan subgrup dalam G. Akan ditunjukkan terdapat 2 buah koset di G relatif terhadap H.
Bukti:
Koset-koset kiri di G relatif terhadap H adalah:
$1H = \{1, -1\} = H$
$-1H = \{-1, 1\} = H$
$iH = \{i, -i\}$
$-iH = \{-i, i\} = iH$
Sehingga $[G : H] = \dfrac{o(G)}{o(H)} = \dfrac{4}{2} = 2$ yaitu H dan iH.

2.6. Subgrup Normal

Berikut ini diberikan definisi dan contoh yang berkaitan dengan subgrup normal yang dirujuk dari Andari (2015), Fraleigh (2003), serta Hillman dan Alexanderson (1993).

Misalkan A dan B masing-masing himpunan bagian dari grup G. Perkalian AB didefinisikan sebagai berikut:
$AB = \{ab | a \in A, b \in B\}$.

Definisi 2.6.1 Subgrup Normal

Misalkan G adalah grup dan N subgrup dari G. N disebut subgrup normal dari G jika berlaku $ana^{-1} \in N$, untuk setiap $a \in G$ dan $n \in N$.

N subgrup normal dari grup G biasa diberi notasi $N \triangleleft G$.

Lema 2.6.2

Setiap subgrup dari grup komutatif merupakan subgrup normal.
Bukti:
Misalkan G grup komutatif, dan N subgrup dari G. Maka untuk setiap $a \in G$ dan $n \in N$, berlaku $ana^{-1} = (na)a^{-1} = n(aa^{-1}) = n \in N$. Sehingga terbukti N merupakan subgrup normal.

Contoh 2.6.3

Diberikan grup $(\mathbb{Z}_4, +)$ dan $N = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ subgrup dari $\mathbb{Z}_4$. Akan ditunjukkan bahwa N merupakan subgrup normal.
Bukti:
Akan ditunjukkan grup $(\mathbb{Z}_4, +)$ memenuhi hukum komutatif.
Ambil $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_4$;
$\bar{a} = m + 4k_1$ untuk suatu $m, k_1 \in \mathbb{Z}$ dan
$\bar{b} = n + 4k_2$ untuk suatu $n, k_2 \in \mathbb{Z}$, maka

$$\begin{aligned} \bar{a} + \bar{b} &= (m + 4k_1) + (n + 4k_2) \\ &= m + n + 4(k_1 + k_2) \\ &= n + m + 4k_2 + 4k_1 \\ &= (n + 4k_2) + (m + 4k_1) \\ &= \bar{b} + \bar{a}. \end{aligned}$$

Sehingga terbukti $(\mathbb{Z}_4, +)$ merupakan grup komutatif. Berdasarkan Lemma 2.6.2, karena $(\mathbb{Z}_4, +)$ merupakan grup komutatif maka setiap subgrup nya merupakan subgrup normal, sehingga dapat dikatakan bahwa N merupakan subgrup normal dari $\mathbb{Z}_4$.

Definisi 2.6.4 Grup Faktor

Misalkan $(G, *)$ adalah grup dan N merupakan subgrup normal di G, G/N adalah himpunan koset-koset dari N di G. $(G/N, *)$ merupakan grup dan disebut sebagai grup faktor.

Order dari suatu grup faktor (G/N) merupakan hasil dari order G dibagi order N, $o(G/N) = \dfrac{o(G)}{o(N)}$.

Contoh 2.6.5

(1) Berdasarkan Contoh 2.5.3 nomor 1, $H = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}\}$ merupakan subgrup normal di $\mathbb{Z}_9$, sehingga $\mathbb{Z}_9/H = \{H, \bar{1} + H, \bar{2} + H\}$.

(2) Berdasarkan Contoh 2.5.3 nomor 2, $H = \{1, -1\}$ merupakan subgrup normal di G, sehingga $G/H = \{H, iH\}$.

2.7. *p*-Subgrup *Sylow*

Berikut ini diberikan definisi dan contoh yang berkaitan dengan *p*-subgrup *Sylow* yang dirujuk dari Gorenstein (1968) dan Fraleigh (2003).

Definisi 2.7.1 π-grup

Misalkan π adalah himpunan bilangan prima. Suatu grup berhingga G disebut π-grup jika $o(G)$ hanya dapat dibagi oleh setiap bilangan prima dalam π.

Himpunan bilangan prima komplementer dari π dinotasikan dengan $\pi^{'}$.

Contoh 2.7.2

(1) Diberikan grup $(\mathbb{Z}_4, +)$. Akan ditunjukkan $\mathbb{Z}_4$ merupakan $\{2\}$-grup.
Bukti:
Karena $o(\mathbb{Z}_4) = 4 = 2^2$ hanya dapat dibagi oleh 2 sebagai bilangan prima, maka $\mathbb{Z}_4$ merupakan $\{2\}$-grup.

(2) Diberikan grup $(\mathbb{Z}_{15}, +)$. Akan ditunjukkan $\mathbb{Z}_{15}$ merupakan $\{2\}'$-grup.
Bukti:
Karena $o(\mathbb{Z}_{15}) = 15 = 3 \cdot 5$ tidak dapat dibagi oleh 2 sebagai bilangan prima melainkan hanya dapat dibagi oleh 3 dan 5, maka $\mathbb{Z}_{15}$ merupakan $\{2\}'$-grup yaitu $\{3, 5\}$-grup.

Definisi 2.7.3 π-subgrup

Misalkan H adalah subgrup dari grup berhingga G. H merupakan π-subgrup dari G jika H adalah π-grup.

Definisi 2.7.4 *p*-grup

Misalkan p adalah suatu bilangan prima dan G suatu grup berhingga. G disebut p-grup jika $o(G) = p^x$ dan untuk setiap $g \in G$, $o(g) = p^y$ untuk suatu $x, y \in \mathbb{Z}_0^+$.

Contoh 2.7.5

(1) Diberikan grup $(\mathbb{Z}_4, +)$. Akan ditunjukkan $\mathbb{Z}_4$ merupakan *2*-grup.
Bukti:
$o(\mathbb{Z}_4) = 4 = 2^2$
$o(\bar{0}) = 1 = 2^0$
$o(\bar{1}) = 4 = 2^2$
$o(\bar{2}) = 2 = 2^1$
$o(\bar{3}) = 4 = 2^2$
$o(\mathbb{Z}_4)$ dapat dinyatakan sebagai 2^x untuk suatu $x \in \mathbb{Z}_0^+$ dan untuk setiap $g \in \mathbb{Z}_4, o(g)$ dapat dinyatakan sebagai 2^y untuk suatu $y \in \mathbb{Z}_0^+$, maka $\mathbb{Z}_4$ dapat disebut sebagai *2*-grup.

(2) Diberikan grup $(\mathbb{Z}_9, +)$. Akan ditunjukkan $\mathbb{Z}_9$ merupakan *3*-grup.
Bukti:
$o(\mathbb{Z}_9) = 9 = 3^2$
$o(\bar{0}) = 1 = 3^0$
$o(\bar{1}) = 9 = 3^2$
$o(\bar{2}) = 9 = 3^2$
$o(\bar{3}) = 3 = 3^1$
$o(\bar{4}) = 9 = 3^2$
$o(\bar{5}) = 9 = 3^2$
$o(\bar{6}) = 3 = 3^1$
$o(\bar{7}) = 9 = 3^2$
$o(\bar{8}) = 9 = 3^2$
$o(\mathbb{Z}_9)$ dapat dinyatakan sebagai 3^x untuk suatu $x \in \mathbb{Z}_0^+$ dan untuk setiap $g \in \mathbb{Z}_9, o(g)$ dapat dinyatakan sebagai 3^y untuk suatu $y \in \mathbb{Z}_0^+$, maka $\mathbb{Z}_9$ dapat disebut sebagai *3*-grup.

(3) Diberikan grup $(\mathbb{Z}_7 - \{\bar{0}\}, \cdot)$ pada Contoh 2.2.4 nomor 3. Akan ditunjukkan $\mathbb{Z}_7 - \{\bar{0}\}$ bukan merupakan *p*-grup.
Bukti:
$o(\mathbb{Z}_7 - \{\bar{0}\}) = 6$ sedangkan 6 tidak dapat dinyatakan sebagai p^x untuk suatu p bilangan prima dan $x \in \mathbb{Z}_0^+$. Sehingga $\mathbb{Z}_7 - \{\bar{0}\}$ tidak dapat disebut sebagai *p*-grup.

Definisi 2.7.6 *p*-subgrup

Misalkan H adalah subgrup dari grup berhingga G. H merupakan p-subgrup dari G jika H adalah p-grup.

Definisi 2.7.7 *p*-subgrup *Sylow*

Misalkan G adalah suatu grup berhingga dan S adalah suatu subgrup dari G. S disebut p-subgrup *Sylow* dari G jika $o(S) = p^a$ dimana $a \in \mathbb{Z}_0^+$ dan p tidak membagi $[G : S]$.

Himpunan semua p-subgrup *Sylow* dinotasikan sebagai $Syl_p(G)$.

Contoh 2.7.8

(1) Diberikan grup $(\mathbb{Z}_4, +)$. Subgrup-subgrup dalam $\mathbb{Z}_4$ antara lain $\mathbb{Z}_4$ itu sendiri dan $N = \{\bar{0}, \bar{2}\}$.

i. Akan ditunjukkan $\mathbb{Z}_4$ merupakan 2-subgrup *Sylow* dari $\mathbb{Z}_4$.
Bukti:
$o(\mathbb{Z}_4) = 4 = 2^2$
$$[\mathbb{Z}_4 : \mathbb{Z}_4] = \frac{o(\mathbb{Z}_4)}{o(\mathbb{Z}_4)} = \frac{4}{4} = 1$$
Karena $o(\mathbb{Z}_4) = 2^2$ dan 2 tidak membagi $[\mathbb{Z}_4 : \mathbb{Z}_4] = 1$, maka $\mathbb{Z}_4$ merupakan 2-subgrup *Sylow* dari $\mathbb{Z}_4$.

ii. Akan ditunjukkan subgrup N bukan merupakan 2-subgrup *Sylow* dari $\mathbb{Z}_4$.
Bukti:
$o(N) = 2 = 2^1$
$$[\mathbb{Z}_4 : N] = \frac{o(\mathbb{Z}_4)}{o(N)} = \frac{4}{2} = 2$$
Karena $o(N) = 2^1$ dan 2 membagi $[\mathbb{Z}_4 : N] = 2$, maka N bukan merupakan 2-subgrup *Sylow* dari $\mathbb{Z}_4$.

(2) Diberikan grup $(\mathbb{Z}_{12}, +)$ pada Contoh 2.4.4 nomor 1. Subgrup-subgrup dalam $\mathbb{Z}_{12}$ antara lain $H = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\}$ dan $K = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}\}$.

i. Akan ditunjukkan H merupakan 3-subgrup *Sylow* dari $\mathbb{Z}_{12}$.
Bukti:
$o(H) = 3 = 3^1$
$$[\mathbb{Z}_{12} : H] = \frac{o(\mathbb{Z}_{12})}{o(H)} = \frac{12}{3} = 4$$
Karena $o(H) = 3^1$ dan 3 tidak membagi $[\mathbb{Z}_{12} : H] = 4$, maka H merupakan 3-subgrup *Sylow* dari $\mathbb{Z}_{12}$.

ii. Akan ditunjukkan K merupakan 2-subgrup *Sylow* dari $\mathbb{Z}_{12}$.
Bukti:
$o(K) = 4 = 2^2$
$[\mathbb{Z}_{12} : K] = \dfrac{o(\mathbb{Z}_{12})}{o(K)} = \dfrac{12}{4} = 3$
Karena $o(K) = 2^2$ dan 2 tidak membagi $[\mathbb{Z}_{12} : K] = 3$, maka K merupakan 3-subgrup *Sylow* dari $\mathbb{Z}_{12}$.

(3) Diberikan grup S_3 pada Contoh 2.3.16. Subgrup-subgrup pada S_3 adalah:
$P = \{e, (1, 2)\}$,
$Q = \{e, (1, 3)\}$,
$R = \{e, (2, 3)\}$, dan
$A_3 = \{e, (1, 2, 3), (1, 3, 2)\}$.
Akan ditunjukkan keempat subgrup tersebut merupakan *p*-subgrup *Sylow* dari S_3.
Bukti:

i. Untuk subgrup $P = \{e, (1, 2)\}, o(P) = 2 = 2^1$ dan
$[S_3 : P] = \dfrac{o(S_3)}{o(P)} = \dfrac{6}{2} = 3.$
Karena $o(P) = 2^1$ dan 2 tidak membagi $[S_3 : P] = 3$, maka P merupakan 2-subgrup *Sylow* dari S_3.

ii. Untuk subgrup $Q = \{e, (1, 3)\}, o(Q) = 2 = 2^1$ dan
$[S_3 : Q] = \dfrac{o(S_3)}{o(Q)} = \dfrac{6}{2} = 3.$
Karena $o(Q) = 2^1$ dan 2 tidak membagi $[S_3 : Q] = 3$, maka Q merupakan 2-subgrup *Sylow* dari S_3.

iii. Untuk subgrup $R = \{e, (1, 2)\}, o(R) = 2 = 2^1$ dan
$[S_3 : R] = \dfrac{o(S_3)}{o(R)} = \dfrac{6}{2} = 3.$
Karena $o(R) = 2^1$ dan 2 tidak membagi $[S_3 : R] = 3$, maka R merupakan 2-subgrup *Sylow* dari S_3.

Maka himpunan semua 2-subgrup *Sylow* dari S_3 adalah
$Syl_2(S_3) = \{\{e, (1, 2)\}, \{e, (1, 3)\}, \{e, (1, 2)\}\}$.

iv. Untuk subgrup $A_3 = \{e, (1, 2, 3), (1, 3, 2)\}$,
$o(A_3) = 3 = 3^1$ dan $[S_3 : A_3] = \dfrac{o(S_3)}{o(A_3)} = \dfrac{6}{3} = 2.$
Karena $o(A_3) = 3^1$ dan 3 tidak membagi $[S_3 : A_3] = 2$, maka A_3 merupakan 3-subgrup *Sylow* dari S_3.

BAB III
PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas mengenai sifat-sifat subgrup *Sylow complemented* dalam grup berhingga yang dijelaskan dalam lema, contoh beserta bukti-buktinya.

3.1. Subgrup *Complemented*

Berikut ini diberikan definisi dan contoh yang berkaitan dengan subgrup *complemented* yang dirujuk dari Ballester-Bolinches dan Xiuyun (1999).

Definisi 3.1.1 Subgrup *Complemented*

Misalkan $(G, *)$ adalah grup berhingga dan H subgrup dari G. H disebut *complemented* di G jika terdapat subgrup K dari G dimana $G = H*K$ dan $H \cap K = \{e\}$ dengan $H*K = \{h*k | h \in H, k \in K\}$. Dalam hal ini, K disebut sebagai komplemen dari H dalam G.

Dua buah bilangan x dan y disebut relatif prima jika FPB (faktor persekutuan terbesar) dari x dan y adalah 1. Jika subgrup H *complemented* di G dan K merupakan komplemen dari H, maka $o(H)$ dan $o(K)$ relatif prima dengan $o(H) \cdot o(K) = o(G)$.

Contoh 3.1.2

(1) Diberikan grup $G = (\mathbb{Z}_{12}, +)$. Berdasarkan Contoh 2.4.4 nomor 1, subgrup sejati dalam $\mathbb{Z}_{12}$ antara lain adalah $H = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\}$ dan $K = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}\}$. Akan ditunjukkan H *complemented* di G.
Bukti:

Tabel 3.1 Hasil Penjumlahan H dan K

$+$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{9}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{9}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{7}$	$\bar{10}$	$\bar{1}$
$\bar{8}$	$\bar{8}$	$\bar{11}$	$\bar{2}$	$\bar{5}$

Berdasarkan Tabel 3.1 di atas dapat diperoleh bahwa $G = H + K$ dan $H \cap K = \{\bar{0}\}$, maka H *complemented* di G. $o(H) = 3$ relatif prima dengan $o(K) = 4$ dan $o(H) \cdot o(K) = 3 \cdot 4 = 12 = o(G)$.

(2) Diberikan grup $G = (\mathbb{Z}_7 - \{\bar{0}\}, \cdot)$ pada Contoh 2.2.4 nomor 3. Subgrup sejati dalam $\mathbb{Z}_7 - \{\bar{0}\}$ adalah $H = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}\}$ dan $K = \{\bar{1}, \bar{6}\}$. Akan ditunjukkan H *complemented* di G.
Bukti:

Tabel 3.2 Hasil Pergandaan H dan K

$\cdot$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{6}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{3}$

Berdasarkan Tabel 3.2 di atas dapat diperoleh bahwa $G = H \cdot K$ dan $H \cap K = \{\bar{1}\}$, maka H *complemented* di G. $o(H) = 3$ relatif prima dengan $o(K) = 2$ dan $o(H) \cdot o(K) = 3 \cdot 2 = 6 = o(G)$.

(3) Diberikan grup $G = S_3$ pada Contoh 2.7.8 nomor 3 dengan subgrup P, Q, R, dan A_3. Akan ditunjukkan P, Q, dan R masing-masing berkomplemen dengan A_3 di G.
Bukti:

i. Akan ditunjukkan $P = \{e, (1,2)\}$ *complemented* di G.

Tabel 3.3 Hasil Pergandaan P dan A_3

$\cdot$	e	$(1,2,3)$	$(1,3,2)$
e	e	$(1,2,3)$	$(1,3,2)$
$(1,2)$	$(1,2)$	$(2,3)$	$(1,3)$

Berdasarkan Tabel 3.3 di atas dapat diperoleh bahwa $G = P \cdot A_3$ dan $P \cap A_3 = \{e\}$, maka P *complemented* di G. $o(P) = 2$ relatif prima dengan $o(A_3) = 3$ dan $o(P) \cdot o(A_3) = 2 \cdot 3 = 6 = o(G)$.

ii. Akan ditunjukkan $Q = \{e, (1,3)\}$ *complemented* di G.

Tabel 3.4 Hasil Pergandaan Q dan A_3

$\cdot$	e	$(1,2,3)$	$(1,3,2)$
e	e	$(1,2,3)$	$(1,3,2)$
$(1,3)$	$(1,3)$	$(1,2)$	$(2,3)$

Berdasarkan Tabel 3.4 di atas dapat diperoleh bahwa $G = Q \cdot A_3$ dan $Q \cap A_3 = \{e\}$, maka Q *complemented* di G. $o(Q) = 2$ relatif prima dengan $o(A_3) = 3$ dan $o(Q) \cdot o(A_3) = 2 \cdot 3 = 6 = o(G)$.

iii. Akan ditunjukkan $R = \{e, (2,3)\}$ *complemented* di G.

Tabel 3.5 Hasil Pergandaan R dan A_3

$\cdot$	e	$(1,2,3)$	$(1,3,2)$
e	e	$(1,2,3)$	$(1,3,2)$
$(2,3)$	$(2,3)$	$(1,3)$	$(1,2)$

Berdasarkan Tabel 3.5 di atas dapat diperoleh bahwa
$G = R \cdot A_3$ dan $R \cap A_3 = \{e\}$, maka R *complemented* di G.
$o(R) = 2$ relatif prima dengan $o(A_3) = 3$ dan
$o(R) \cdot o(A_3) = 2 \cdot 3 = 6 = o(G)$.

3.2. Grup *p*-Nilpoten

Berikut ini diberikan definisi dan contoh yang berkaitan dengan grup *p*-nilpoten yang dirujuk dari Doerk dan Hawkes (1992).

Definisi 3.2.1 Grup *p*-Nilpoten

Misalkan *p* adalah bilangan prima, suatu grup berhingga G disebut *p*-nilpoten jika setiap *p*-subgrup *Sylow* dalam G *complemented* di G.

Contoh 3.2.2

(1) Diberikan grup $G = (\mathbb{Z}_{12}, +)$ dengan subgrup $H = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\}$ dan $K = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}\}$. Akan ditunjukkan G merupakan grup *2*-nilpoten dan sekaligus grup *3*-nilpoten.
Bukti:
Berdasarkan Contoh 2.7.8 nomor 2, diperoleh bahwa H merupakan *3*-subgrup *Sylow* dari G dan K merupakan 2-subgrup *Sylow* dari G. Kemudian berdasarkan Contoh 3.1.2 nomor 1, diperoleh bahwa H dan K saling berkomplemen dalam G. Karena H *complemented* di G, maka G merupakan grup *3*-nilpoten. Dan karena K *complemented* di G, maka G juga merupakan grup 2-nilpoten.

(2) Diberikan grup $G = S_3$ dengan subgrup $P = \{e, (1,2)\}$, $Q = \{e, (1,3)\}$, dan $R = \{e, (2,3)\}$. Akan ditunjukkan G merupakan grup 2-nilpoten.
Bukti:
Berdasarkan Contoh 2.7.8 nomor 3, diperoleh bahwa P, Q, dan R masing-masing merupakan 2-subgrup *Sylow* dari G. Kemudian berdasarkan Contoh 3.1.2 nomor 3, diperoleh bahwa P, Q, dan R masing-masing *complemented* di G. Karena setiap 2-subgrup

Sylow dalam G *complemented* di G, maka G merupakan grup 2-nilpoten.

3.3. Subgrup *Frattini*

Berikut ini diberikan definisi dan contoh yang berkaitan dengan subgrup *Frattini* yang dirujuk dari Gorenstein (1968).

Definisi 3.3.1 Subgrup *Frattini*

Misalkan $(G, *)$ adalah grup berhingga, suatu subgrup dalam G disebut subgrup *Frattini*, dinotasikan dengan $\Phi(G)$, jika $\Phi(G)$ merupakan irisan dari semua subgrup maksimal dalam G.

Definisi 3.3.2 Grup Faktor *Frattini*

Misalkan $(G, *)$ adalah grup berhingga dan $\Phi(G)$ merupakan subgrup *Frattini* dalam G, maka $G/\Phi(G)$ merupakan grup faktor *Frattini* dalam G.

Contoh 3.3.3

(1) Diberikan grup $G = (\mathbb{Z}_{12}, +)$. Berdasarkan Contoh 2.4.4 nomor 1, diperoleh dua subgrup maksimal dalam G yaitu $H_5 = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}\}$, dan $H_6 = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{10}\}$. Irisan dari semua subgrup maksimal dalam G adalah $\{\bar{0}, \bar{6}\}$, sehingga $\Phi(G) = \{\bar{0}, \bar{6}\}$ dan grup faktor *Frattini* dalam G adalah $G/\Phi(G) = \{\Phi(G), \bar{1} + \Phi(G), \bar{2} + \Phi(G), \bar{3} + \Phi(G), \bar{4} + \Phi(G), \bar{5} + \Phi(G)\}$.

(2) Diberikan grup $G = (\mathbb{Z}_{15}, +)$. Berdasarkan Contoh 2.4.4 nomor 2, diperoleh dua subgrup maksimal dalam G yaitu $H_1 = \{\bar{0}, \bar{5}, \bar{10}\}$ dan $H_2 = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \bar{12}\}$. Irisan dari semua subgrup maksimal dalam G adalah $\{\bar{0}\}$ sehingga $\Phi(G) = \{\bar{0}\}$.

3.4. Sifat-sifat Subgrup *Complemented*

Berikut ini dibahas mengenai sifat-sifat subgrup *complemented* dalam grup berhingga.

Lema 3.4.1

Misalkan G adalah grup berhingga dan E subgrup normal dari G.

(i) Jika $H \leqslant K \leqslant G$ dan H *complemented* di G, maka H *complemented* di K.

(ii) Jika $E \leqslant H$ dan H *complemented* di G, maka H/E *complemented* di G/E.

(iii) Misalkan π himpunan bilangan prima. E merupakan $\pi^{'}$-subgrup dari G dan H merupakan π-subgrup dari G. H *complemented* di G jika dan hanya jika HE/E complemented di G/E.

Bukti:

(i) $H \leqslant K \leqslant G$ artinya H subgrup dari K, K subgrup dari G, dan berarti H juga subgrup dari G. H merupakan subgrup minimal dari G, sedangkan K merupakan subgrup maksimal dari G. H *complemented* di G artinya terdapat subgrup I dari G dimana $G = H * I$ dan $H \cap I = \{e\}$. Karena K subgrup dari G, maka K merupakan grup, sehingga terdapat subgrup K' dari K dimana $K = H * K'$ dan $H \cap K' = \{e\}$. Sehingga terbukti H juga *complemented* di K.

(ii) H *complemented* di G artinya terdapat subgrup K dari G sehingga berlaku $G = H * K$ dan $H \cap K = \{e\}$. Karena E subgrup normal dari H maka H/E merupakan grup faktor. Karena H/E grup faktor, maka terdapat subgrup I/E dimana $o(H/E) \cdot o(I/E) = o(G/E)$. Dengan demikian I/E merupakan komplemen dari H/E di G/E, atau dengan kata lain H/E *complemented* di G/E.

(iii) Akan dibuktikan H *complemented* di G jika dan hanya jika HE/E complemented di G/E.
($\Rightarrow$) Asumsikan H merupakan π-subgrup dari G dan E merupakan π'-subgrup dari G. Diketahui H *complemented* di G dan misalkan komplemennya adalah K, maka $G = H * K$ dan $H \cap K = \{e\}$. Karena H merupakan π-subgrup dan K komplemen dari H, maka K merupakan π'-subgrup. Sehingga terdapat $E \subseteq K$, dimana $o(E) \leq o(K)$. Karena E subgrup normal dari K, maka K/E merupakan grup faktor. Misalkan $o(H) = m, o(K) = n$, dan $o(E) = r$. Karena H berkomplemen dengan K di G artinya $o(G) = o(H) \cdot o(K) = mn$ dan $o(G/E) = \dfrac{mn}{r}$. Grup K/E yang berorder $\dfrac{n}{r}$ memiliki komplemen di G/E yaitu HE/E karena $o(K/E) \cdot o(HE/E) = \dfrac{n}{r} \cdot \dfrac{mr}{r} = \dfrac{mn}{r} = o(G/E)$ dan juga memenuhi $(G/E) = (HE/E) * (K/E)$ dan $(HE/E) \cap (K/E) = E$. Maka dapat dikatakan HE/E *complemented* di G/E.

($\Leftarrow$) Sebaliknya jika HE/E *complemented* di G/E, artinya terdapat subgrup K/E dari G/E dimana
$(G/E) = (HE/E) * (K/E)$ dan $(HE/E) \cap (K/E) = E$.
Misalkan $o(H) = m, o(K) = n$, dan $o(E) = r$, artinya
$o(K/E) \cdot o(HE/E) = \frac{n}{r} \cdot \frac{mr}{r} = \frac{mn}{r} = o(G/E)$. Jika $o(G) = mn$ maka terdapat subgrup yang berorder m berkomplemen dengan subgrup berorder n di G, yaitu H berkomplemen dengan K di G. Berarti $G = H * K$ dan $H \cap K = \{e\}$, oleh karena itu H *complemented* di G.

Contoh 3.4.2

Diberikan grup $G = (\mathbb{Z}_{12}, +)$. Subgrup-subgrup dalam $(\mathbb{Z}_{12})$ antara lain:
$H_1 = \{\bar{0}\}$,
$H_2 = \{\bar{0}, \bar{6}\}$,
$H_3 = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\}$,
$H_4 = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}\}$,
$H_5 = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{10}\}$, dan
$H_6 = \mathbb{Z}_{12}$.

(i) Diberikan subgrup $H \leq K \leq G$ dengan H merupakan subgrup minimal dan K merupakan subgrup maksimal, yaitu;
$H = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\}$ dan $K = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{10}\}$.
Berdasarkan Contoh 3.1.2 nomor 1, telah dibuktikan bahwa H *complemented* di G dengan komplemen nya adalah $I = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}\}$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa H *complemented* di K dimana terdapat subgrup K' dari K dimana $K = H + K'$ dan $H \cap K' = \{\bar{0}\}$. Ambil $K' = \{\bar{0}, \bar{6}\}$ sebagai subgrup dari K. Akan ditunjukkan bahwa H berkomplemen dengan K' di K.

Tabel 3.6 Hasil Penjumlahan H dan K'

$+$	$\bar{0}$	$\bar{6}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{10}$
$\bar{8}$	$\bar{8}$	$\bar{2}$

Berdasarkan Tabel 3.6 di atas, diperoleh bahwa $K = H + K'$ dan $H \cap K' = \{\bar{0}\}$, maka terbukti bahwa H juga *complemented* di K.

(ii) Diberikan subgrup $E \leq H$ dengan E merupakan subgrup normal di G, yaitu; $H = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}\}$ dan $E = \{\bar{0}, \bar{6}\}$.
Berdasarkan Contoh 3.1.2 nomor 1, telah dibuktikan bahwa H *complemented* di G. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa grup faktor (H/E) *complemented* di (G/E).
$(H/E) = \{E, \bar{3} + E\}$ dan
$(G/E) = \{E, \bar{1} + E, \bar{2} + E, \bar{3} + E, \bar{4} + E, \bar{5} + E\}$.
(H/E) *complemented* di (G/E) artinya terdapat subgrup (I/E) dimana $o(H/E) \cdot o(I/E) = o(G/E)$. Jika $o(H/E) = 2$ dan $o(G/E) = 6$ maka $o(I/E) = 3$ agar sifat *complemented* terpenuhi. Maka subgrup I haruslah berorder 6 agar $o(I/E) = 3$.
$I = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{10}\}$ dan $(I/E) = \{E, \bar{2} + E, \bar{4} + E\}$.
Akan ditunjukkan bahwa (H/E) berkomplemen dengan (I/E) di (G/E).

Tabel 3.7 Hasil Penjumlahan (H/E) dan (I/E)

$+$	E	$\bar{2} + E$	$\bar{4} + E$
E	E	$\bar{2} + E$	$\bar{4} + E$
$\bar{3} + E$	$\bar{3} + E$	$\bar{5} + E$	$\bar{1} + E$

Berdasarkan Tabel 3.7 di atas, diperoleh bahwa
$(G/E) = (H/E) + (I/E)$ dan $(H/E) \cap (I/E) = E$, maka terbukti bahwa (H/E) *complemented* di (G/E).

(iii) Diberikan subgrup $H = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\}$ sebagai *3*-subgrup, sedangkan $E = \{\bar{0}, \bar{6}\}$ sebagai *2*-subgrup.
Berdasarkan Contoh 3.1.2 nomor 1, telah dibuktikan bahwa H *complemented* di G dengan komplemen nya adalah
$K = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}\}$, maka jelas bahwa E termuat di K.
Akan ditunjukkan bahwa $(H + E/E)$ *complemented* di (G/E).
$H + E = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{10}\}$, $(H + E/E) = \{E, \bar{2} + E, \bar{4} + E\}$, dan $(G/E) = \{E, \bar{1} + E, \bar{2} + E, \bar{3} + E, \bar{4} + E, \bar{5} + E\}$.
$(H + E/E)$ *complemented* di (G/E) artinya terdapat subgrup (K/E) dimana $o(H + E/E) \cdot o(K/E) = o(G/E)$.
Jika $o(H+E/E) = 3$ dan $o(G/E) = 6$ maka $o(K/E) = 2$ agar sifat *complemented* terpenuhi. Maka subgrup K haruslah berorder 4 agar $o(K/E) = 2$. $K = \{\bar{0}, \bar{5}, \bar{10}, \bar{15}\}$ dan $(K/E) = \{E, \bar{3} + E\}$. Akan ditunjukkan bahwa $(H + E/E)$ berkomplemen dengan (K/E) di (G/E).
Berdasarkan Tabel 3.7, diperoleh bahwa
$(G/E) = (H+E/E)+(K/E)$ dan $(H+E/E) \cap (K/E) = E$, maka terbukti bahwa $(H + E/E)$ *complemented* di (G/E).

Lema 3.4.3

Misalkan G adalah grup dengan order ganjil dan P adalah p-subgrup *Sylow* dari G, dimana p adalah bilangan prima terkecil pembagi order G. Jika setiap subgrup maksimal dari P adalah *complemented* di G, maka G adalah p-nilpoten.

Bukti:

Jika terdapat suatu grup G dengan order ganjil, maka $o(G)$ dapat dinyatakan sebagai p^a dimana p merupakan bilangan prima dan $a \in \mathbb{Z}_0^+$. Akibatnya G mempunyai subgrup P yang merupakan p-subgrup *Sylow*, minimal G itu sendiri. Jika P mempunyai subgrup maksimal H dengan order p, maka H juga merupakan p-subgrup *Sylow* dari G. Karena H berorder prima, maka H pasti *complemented* di G. Sehingga menurut Definisi 3.2.1, jika setiap p-subgrup *Sylow complemented* di G maka G merupakan p-nilpoten.

Contoh 3.4.4

Diberikan beberapa contoh yang tidak memenuhi Lema 3.4.3.

(1) Diberikan grup $G = (\mathbb{Z}_9, +)$. $p = 3$ merupakan bilangan prima terkecil pembagi $o(G) = 9$. $P = \mathbb{Z}_9$ merupakan *3*-subgrup *Sylow* dari G karena $o(P) = 9 = 3^2$ dan 3 tidak membagi $[G : P] = \dfrac{o(G)}{o(P)} = \dfrac{9}{9} = 1$. $H = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}\}$ merupakan subgrup maksimal dari P namun tidak *complemented* di G, maka G bukan merupakan *3*-nilpoten.

(2) Diberikan grup $G = (\mathbb{Z}_{15}, +)$. $p = 3$ merupakan bilangan prima terkecil pembagi $o(G) = 15$. $P = \{\bar{0}, \bar{5}, \bar{10}\}$ merupakan *3*-subgrup *Sylow* dari G karena $o(P) = 3 = 3^1$ dan 3 tidak membagi $[G : P] = \dfrac{o(G)}{o(P)} = \dfrac{15}{3} = 5$. Namun P tidak mempunyai subgrup maksimal, maka G bukan merupakan *3*-nilpoten.

Lema 3.4.5

Jika $G/\Phi(G)$ adalah p-nilpoten, maka G adalah p-nilpoten.

Bukti:

$G/\Phi(G)$ merupakan grup faktor *Frattini* dalam G. Jika $G/\Phi(G)$ adalah p-nilpoten, artinya setiap p-subgrup *Sylow complemented* di $G/\Phi(G)$. Jika grup faktor $G/\Phi(G)$ dalam G mempunyai p-subgrup *Sylow*, dimana p merupakan faktor dari $o(G/\Phi(G))$, artinya p juga merupakan faktor dari $o(G)$. Maka terdapat p-subgrup *Sylow* yang lain dalam G yang *complemented* di G. Maka G merupakan p-nilpoten.

Contoh 3.4.6

Diberikan grup $G = (\mathbb{Z}_{12}, +)$, berdasarkan Contoh 3.3.3 nomor 1, diperoleh $G/\Phi(G) = \{\Phi(G), \bar{1} + \Phi(G), \bar{2} + \Phi(G), \bar{3} + \Phi(G), \bar{4} + \Phi(G), \bar{5} + \Phi(G)\}$. $G/\Phi(G)$ mempunyai dua subgrup sejati yaitu $P = \{\Phi(G), \bar{2} + \Phi(G), \bar{4} + \Phi(G)\}$ yang merupakan *3*-subgrup *Sylow* dari $G/\Phi(G)$ dan $Q = \{\Phi(G), \bar{3} + \Phi(G)\}$ yang merupakan 2-subgrup *Sylow* dari $G/\Phi(G)$. Akan ditunjukkan bahwa P *complemented* di $G/\Phi(G)$.

Tabel 3.8 Hasil Penjumlahan P dan Q

$+$	$\Phi(G)$	$\bar{2} + \Phi(G)$	$\bar{4} + \Phi(G)$
$\Phi(G)$	$\Phi(G)$	$\bar{2} + \Phi(G)$	$\bar{4} + \Phi(G)$
$\bar{3} + \Phi(G)$	$\bar{3} + \Phi(G)$	$\bar{5} + \Phi(G)$	$\bar{1} + \Phi(G)$

Berdasarkan Tabel 3.8 di atas, diperoleh bahwa $G/\Phi(G) = P + Q$ dan $P \cap Q = \Phi(G) = E$, maka terbukti bahwa P dan Q *complemented* di $G/\Phi(G)$ maka $G/\Phi(G)$ merupakan 2-nilpoten dan *3*-nilpoten. 2 dan 3 merupakan faktor dari $G/\Phi(G)$ maka jelas juga merupakan faktor dari G. Dalam G juga terdapat 2-subgrup *Sylow* dan *3*-subgrup *Sylow* yang *complemented* di G yaitu $R = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}\}$ dan $S = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\}$. Dengan demikian maka G juga dapat disebut sebagai 2-nilpoten dan *3*-nilpoten.

Lema 3.4.7

Misalkan G adalah grup dan P adalah p-subgrup *Sylow* dari G, dimana p bilangan prima terkecil pembagi $o(G)$. Jika setiap subgrup berorder p dalam P adalah *complemented* di G, maka G adalah p-nilpoten.

Bukti:

Misalkan H merupakan subgrup dari P dengan $o(H) = p$. Jika H *complemented* di G maka menurut Definisi 3.1.1, terdapat subgrup K dari G dimana $G = H * K$ dan $H \cap K = \{e\}$. Jelas bahwa p tidak membagi $o(K)$ karena $o(H)$ dan $o(K)$ relatif prima dan $P = H * (P \cap K)$. Sehingga $P \cap K$ merupakan p-subgrup *Sylow* dari K. Menurut Lema 3.4.1 (i), jika setiap subgrup berorder p dari $P \cap K$ *complemented* di G, maka subgrup tersebut juga *complemented* di K . Sehingga K dapat disebut p-nilpoten. Karena K merupakan p-nilpoten dan $K \trianglelefteq G$, maka G juga merupakan p-nilpoten.

Contoh 3.4.8

(1) Diberikan grup $G = (\mathbb{Z}_{15}, +)$ dengan $P = \{\bar{0}, \bar{5}, \bar{10}\}$ merupakan *3*-subgrup *Sylow* dari G. $p = 3$ merupakan bilangan prima terkecil pembagi $o(G) = 15$. $H = \{\bar{0}, \bar{5}, \bar{10}\}$ merupakan subgrup dari P dengan $o(H) = p = 3$. H *complemented* di G dengan komplemennya adalah $K = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \bar{12}\}, K \trianglelefteq G$. Karena *3* tidak membagi $o(K)$ dan
$P = H + (P \cap K) = \{\bar{0}, \bar{5}, \bar{10}\} + \{\bar{0}\} = \{\bar{0}, \bar{5}, \bar{10}\}$ maka $(P \cap K)$ merupakan *3*-subgrup *Sylow* dari K karena $o(P \cap K)$ tidak membagi $[K : (P \cap K)]$, sehingga K dapat disebut sebagai *3*-nilpoten. Karena $K \trianglelefteq G$, maka G juga merupakan *3*-nilpoten.

(2) Diberikan grup yang tidak memenuhi Lema 3.4.7 yaitu grup $G = (\mathbb{Z}_{12}, +)$ dengan $P = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}\}$ merupakan 2-subgrup *Sylow* dari G. $p = 2$ merupakan bilangan prima terkecil pembagi $o(G) = 12$. $H = \{\bar{0}, \bar{6}\}$ merupakan subgrup dari P dengan $o(H) = p = 2$. Namun H tidak *complemented* di G, maka dari itu tidak dapat ditemukan subgrup dari P dengan order 2 yang *complemented* di G. Sehingga dapat disimpulkan G bukan merupakan *2*-nilpoten.

Lema 3.4.9

Misalkan G adalah grup berorder ganjil dan P adalah p-subgrup *Sylow* dari G, dimana p bilangan prima terkecil pembagi $o(G)$.
D subgrup dari P sedemikian sehingga $1 \leq o(D) < o(P)$. Jika setiap subgrup H dari P dengan $o(H) = o(D)$ atau
$o(H) = p \cdot o(D)$ adalah *complemented* di G, maka G adalah p-nilpoten.

Bukti:

(1) Misalkan $1 \leqslant o(D) \leqslant p$. Maka menurut Lema 3.4.7, setiap subgrup dari P yang berorder p *complemented* di G, maka G adalah p-nilpoten.

(2) Misalkan $o(P) = p \cdot o(D)$, P mempunyai subgrup maksimal, yaitu minimal subgrup D yang berorder prima. Jika D berorder prima artinya D *complemented* di G. Menurut Lema 3.4.3, jika setiap subgrup maksimal dari P adalah *complemented* di G, maka G adalah p-nilpoten.

BAB IV
KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan pada skripsi ini dapat disimpulkan bahwa subgrup *Sylow complemented* dalam grup berhingga mempunyai sifat-sifat sebgai berikut:

1. Misalkan G adalah grup dan E subgrup normal dari G.
   (i) Jika $H \leqslant K \leqslant G$ dan H *complemented* di G, maka H *complemented* di K.
   (ii) Jika $E \leqslant H$ dan H *complemented* di G, maka H/E *complemented* di G/E.
   (iii) Misalkan π himpunan bilangan prima. E merupakan $\pi^{'}$-subgrup dari G dan H merupakan π-subgrup dari G. H *complemented* di G jika dan hanya jika HE/E complemented di G/E.
2. Misalkan G adalah grup dan P adalah p-subgrup *Sylow* dari G, dimana p bilangan prima terkecil pembagi $o(G)$. Jika setiap subgrup berorder p dalam P adalah *complemented* di G, maka G adalah p-nilpoten.

DAFTAR PUSTAKA

Andari, A. 2015. *Teori Grup*. Cetakan Pertama. UB Press. Malang.

Asaad, M. 2010. Finite Groups with Certain Subgroups of Sylow Subgroups Complemented. *Journal of Algebra*. 323: 1958-1965.

Ballester-Bolinches, A. dan Xiuyun, G. 1999. On Complemented Subgroups of Finite Groups. *Arch. Math. (Basel)*. 72: 161-166.

Doerk, K. dan Hawkes, T. 1992. *Finite Soluble Groups*. Walter de Gruyter. Berlin.

Fraleigh, J. B. 2003. *A First Course in Abstract Algebra*. Seventh Edition. Pearson Education International. USA.

Gorenstein, D. 1968. *Finite Groups*. Harper and Row Publishers. New York.

Hall, P. 1937. Complemented Groups. *J. Lond. Math. Soc.* 12: 201204.

Hillman, A. P. dan Alexanderson, G. L. 1994. *Abstract Algebra: a First Undergraduate Course*. Fifth Edition. PWS Publishing Company. Boston.