

# LOKASI NILAI EIGEN DARI MATRIKS REAL

## SKRIPSI

oleh:  
**Ongky Denny Wijaya**  
**145090401111032**



**JURUSAN MATEMATIKA**  
**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**  
**UNIVERSITAS BRAWIJAYA**  
**MALANG**  
**2018**

**LOKASI NILAI EIGEN DARI MATRIKS REAL**

**SKRIPSI**

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar  
Sarjana Matematika

oleh:

**Ongky Denny Wijaya**  
**145090401111032**



**JURUSAN MATEMATIKA**  
**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**  
**UNIVERSITAS BRAWIJAYA**  
**MALANG**  
**2018**



**LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI**

**LOKASI NILAI EIGEN DARI MATRIKS REAL**

oleh:  
**Ongky Denny Wijaya**  
**145090401111032**

**Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji  
pada tanggal 3 Juli 2018 dan dinyatakan memenuhi syarat untuk  
memperoleh gelar Sarjana Matematika**

**Pembimbing**

**Drs. Bambang Sugandi, M.Si.**  
**NIP. 195905151992031002**

**Mengetahui,**  
**Ketua Jurusan Matematika**  
**Fakultas MIPA Universitas Brawijaya**

**Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si., M.Si., Ph.D.**  
**NIP. 197509082000031003**



## LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Ongky Denny Wijaya  
NIM : 145090401111032  
Jurusan : Matematika  
Penulis Skripsi berjudul : Lokasi Nilai Eigen dari Matriks Real

dengan ini menyatakan bahwa:

1. isi skripsi yang saya buat adalah benar-benar karya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain. Rujukan-rujukan yang tercantum pada Daftar Pustaka hanya digunakan sebagai referensi,
2. apabila di kemudian hari ternyata skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala risiko yang akan saya terima.

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 3 Juli 2018  
yang menyatakan,

Ongky Denny Wijaya  
NIM. 145090401111032



## LOKASI NILAI EIGEN DARI MATRIKS REAL

### ABSTRAK

Pada tahun 1931, ilmuwan bernama Semyon Aronovich Gershgorin menemukan Teorema Gershgorin yang menyatakan bahwa nilai eigen suatu matriks persegi terletak pada gabungan cakram Gershgorin. Pada Bulan September tahun 2017, peneliti yang bernama Rachid Marsli dan Frank J. Hall memperkenalkan cakram Gershgorin baru yang dinamakan cakram Gershgorin tipe kedua. Lokasi nilai eigen yang dihasilkan oleh cakram Gershgorin tipe kedua lebih baik dari cakram Gershgorin tipe pertama. Hanya dalam kondisi tertentu nilai eigen dari matriks real terletak pada cakram Gershgorin tipe kedua. Pada skripsi ini dibahas teorema mengenai syarat cukup lokasi nilai eigen matriks real terletak dalam cakram Gershgorin tipe kedua. Dalam syarat cukup yang dibahas, terdapat syarat cukup yang dikaitkan maupun tidak dengan multiplisitas geometri. Semakin besar multiplisitas geometri, lokasi nilai eigen yang dihasilkan semakin baik. Pada skripsi ini juga disertakan contoh-contoh lokasi nilai eigen real dan nilai eigen kompleks pada masing-masing syarat cukup.

**Kata kunci:** matriks real, nilai eigen, cakram Gershgorin tipe pertama, cakram Gershgorin tipe kedua, jari-jari.



## EIGENVALUES LOCATION OF REAL MATRICES

### ABSTRACT

In 1931, a scientist named Semyon Aronovich Gershgorin discovered the Gershgorin Theorem which states that the eigenvalue of a square matrix lies in a unions of Gershgorin discs. In September of 2017, researchers named Rachid Marsli and Frank J. Hall introduced a new Gershgorin disc called a second type of Gershgorin disc. The location of the eigenvalues generated by the second type Gershgorin disc is better than that of the first type Gershgorin disc. Only under certain conditions the eigenvalues of the real matrix lies on the second type of Gershgorin disc. This final project discusses the theorem about the sufficient condition of the location of the real eigen matrix value lies in the second type of Gershgorin disc. In sufficient conditions to be discussed, there are sufficient conditions to be related or not to the geometric multiplicity. The greater the geometric multiplicity, the better the resulting eigenvalues. In this final project is also included examples of real eigenvalue location and complex eigenvalue on each sufficient condition.

**Keywords:** real matrix, eigenvalue, Gershgorin disc first type, Gershgorin disc second type, radius.



## KATA PENGANTAR

Puji syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa atas segala perlindungan, berkat, rahmat, dan anugerah-Nya yang diberikan sampai saat ini karena penulis dapat menyelesaikan tugas akhir skripsi yang berjudul "Lokasi Nilai Eigen dari Matriks Real", yang bertujuan meneliti mengenai syarat cukup nilai eigen terletak pada cakram Gershgorin tipe kedua. Penulisan skripsi ini merupakan persyaratan dalam menyelesaikan program studi S1 Matematika dan memperoleh gelar sarjana di Universitas Brawijaya.

Dalam penyusunan dan penulisan skripsi ini, tidak lepas dari bantuan, bimbingan, dorongan, serta dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis menyampaikan penghargaan dan rasa terima kasih yang tulus dan sebesar-besarnya kepada :

1. Bapak Drs. Bambang Sugandi, M.Si. selaku dosen pembimbing dan anggota majelis penguji I yang telah memberikan bimbingan materi, pengarahan penulisan skripsi, saran, nasihat, dan penilaian kepada penulis sehingga skripsi ini dapat terselesaikan,
2. Ibu Dra. Ari Andari, MS. selaku ketua majelis penguji yang telah memberikan kritik, saran, dan penilaian dalam penyusunan skripsi ini sehingga skripsi ini dapat terselesaikan,
3. Bapak Drs. Abdul Rouf Alghofari, M.Sc., Ph.D. selaku anggota majelis penguji II yang telah memberikan kritik, saran, dan penilaian dalam penyusunan skripsi ini sehingga skripsi ini dapat terselesaikan,
4. Bapak Drs. Imam Nurhadi Purwanto, M.T. selaku dosen pembimbing akademik yang telah memberikan pengarahan dan dorongan selama empat tahun penulis menempuh pendidikan S1 Program Studi Matematika di Universitas Brawijaya,
5. Bapak Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si., M.Si., Ph.D. selaku Ketua Jurusan Matematika Universitas Brawijaya atas segala bantuan yang telah diberikan,
6. Ibu Dr. Isnani Darti, M.Si. selaku Ketua Program Studi S1 Matematika Universitas Brawijaya atas segala bantuan yang telah diberikan,

7. Seluruh dosen Program Studi S1 Matematika Universitas Brawijaya yang telah memberikan kuliah dengan ilmu yang bermanfaat bagi penulis,
8. Seluruh staff tata usaha Jurusan Matematika Universitas Brawijaya atas segala bantuan yang telah diberikan,
9. Kedua orang tua yang telah mendidik dan membesarkan penulis,
10. Semua pihak yang telah memberikan semangat dan membantu proses kelulusan penulis mulai dari seminar proposal, seminar hasil, dan ujian skripsi.

Kiranya Tuhan Yang Maha Esa, senantiasa memberikan rahmat dan karunia-Nya serta membalas semua budi baik seluruh pihak yang telah banyak memberikan bantuan kepada penulis dalam penyusunan skripsi ini.

Pepatah mengatakan, tak ada gading yang tak retak. Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih belum sempurna. Oleh karena itu, penulis sangat mengharapkan kritik dan saran yang membangun dari pembaca agar skripsi ini dapat menjadi lebih sempurna. Kritik dan saran dapat disampaikan melalui alamat surat elektronik penulis [ongkydenny@yahoo.com](mailto:ongkydenny@yahoo.com) atau [ongkydenny@gmail.com](mailto:ongkydenny@gmail.com).

Akhir kata, penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat untuk menunjang dan menginspirasi perkembangan ilmu pengetahuan, khususnya bidang ilmu matematika.

Malang, Juli 2018

Penulis

## DAFTAR ISI

<b>HALAMAN JUDUL</b> . . . . .	<b>i</b>
<b>HALAMAN PENGESAHAN</b> . . . . .	<b>iii</b>
<b>HALAMAN PERNYATAAN</b> . . . . .	<b>v</b>
<b>ABSTRAK</b> . . . . .	<b>vii</b>
<b>ABSTRACT</b> . . . . .	<b>ix</b>
<b>KATA PENGANTAR</b> . . . . .	<b>xi</b>
<b>DAFTAR ISI</b> . . . . .	<b>xiii</b>
<b>DAFTAR GAMBAR</b> . . . . .	<b>xv</b>
<b>DAFTAR LAMBANG</b> . . . . .	<b>xvii</b>
<b>BAB I PENDAHULUAN</b> . . . . .	<b>1</b>
1.1. Latar Belakang . . . . .	1
1.2. Rumusan Masalah . . . . .	2
1.3. Tujuan Penulisan . . . . .	2
<b>BAB II DASAR TEORI</b> . . . . .	<b>3</b>
2.1. Matriks . . . . .	3
2.1.1. Matriks . . . . .	3
2.1.2. Operasi Matriks . . . . .	3
2.1.3. Matriks Eselon Baris Tereduksi . . . . .	5
2.1.4. Submatriks . . . . .	6
2.2. Sistem Persamaan Linear . . . . .	7
2.3. Operasi Baris Elementer dan Eliminasi Gauss Jordan . . . . .	7
2.4. Determinan . . . . .	8
2.4.1. Minor dan Kofaktor . . . . .	9
2.4.2. Menghitung Determinan Dengan Ekspansi Kofaktor . . . . .	10
2.5. Vektor . . . . .	11
2.6. Ruang Vektor . . . . .	12
2.7. Subruang . . . . .	16
2.8. Kombinasi Linear, Membangun, dan Kebebasan Linear . . . . .	17
2.9. Basis dan Dimensi . . . . .	20

2.9.1. Basis . . . . .	20
2.9.2. Dimensi . . . . .	20
2.10. Nilai Eigen, Vektor Eigen, dan Ruang Eigen . . . . .	20
2.11. Multiplisitas Geometri . . . . .	24
2.12. Cakram Gershgorin Tipe Pertama . . . . .	25
<b>BAB III HASIL DAN PEMBAHASAN . . . . .</b>	<b>39</b>
3.1. Cakram Gershgorin Tipe Kedua . . . . .	39
3.2. Syarat Cukup Menentukan Lokasi Nilai Eigen di dalam Cakram Gershgorin Tipe Kedua . . . . .	49
<b>BAB IV PENUTUP . . . . .</b>	<b>85</b>
4.1. Kesimpulan . . . . .	85
4.2. Saran . . . . .	85
<b>DAFTAR PUSTAKA . . . . .</b>	<b>87</b>



## DAFTAR GAMBAR

2.1	Cakram Gershgorin tipe pertama dari Matriks $A$ . . . . .	26
2.2	Cakram Gershgorin tipe pertama dan Nilai Eigen dari Matriks $A$ pada Contoh 2.1.2 . . . . .	27
2.3	Cakram Gershgorin tipe pertama dan Nilai Eigen dari Matriks $C$ pada Contoh 2.12.5 . . . . .	28
2.4	Cakram Gershgorin tipe pertama dari Matriks $A$ . . . . .	32
2.5	Cakram Gershgorin tipe pertama $C_4(A)$ dari Matriks $A$ . . . . .	33
2.6	Cakram Gershgorin Setengah dari Matriks $A$ . . . . .	34
2.7	Cakram Gershgorin Setengah dari Matriks $B$ . . . . .	35
3.1	Cakram Gershgorin tipe kedua dari Matriks $A$ . . . . .	42
3.2	Cakram Gershgorin $D_i^4(A)$ dari Matriks $A$ . . . . .	47
3.3	Cakram Gershgorin Tipe Kedua dari Matriks $A$ . . . . .	53
3.4	Cakram Gershgorin tipe kedua dari matriks $B$ . . . . .	55
3.5	Cakram Gershgorin tipe pertama dari $C_4(A)$ dan cakram Gershgorin tipe kedua dari $A$ . . . . .	56
3.6	Cakram Gershgorin tipe pertama dari $C_1(B)$ dan cakram Gershgorin tipe kedua dari $B$ . . . . .	57
3.7	Cakram Gershgorin tipe pertama dari $C_1(B)$ dan cakram Gershgorin tipe kedua dari $B$ . . . . .	58
3.8	Cakram Gershgorin tipe pertama dari $C_2(A)$ dan cakram Gershgorin tipe kedua dari $A$ . . . . .	59
3.9	Cakram Gershgorin tipe pertama dari $C_1(A)$ dan cakram Gershgorin tipe kedua dari $A$ . . . . .	62
3.10	Cakram Gershgorin tipe pertama dari $C_1(A)$ dan cakram Gershgorin tipe kedua dari $A$ . . . . .	62
3.11	Cakram Gershgorin tipe pertama dari $C_2(A)$ dan cakram Gershgorin tipe kedua dari $A$ . . . . .	63
3.12	Cakram Gershgorin tipe pertama dari $C_2(A)$ dan cakram Gershgorin tipe kedua dari $A$ . . . . .	63
3.13	Cakram Gershgorin tipe pertama dari $C_3(A)$ dan cakram Gershgorin tipe kedua dari $A$ . . . . .	64

3.14	Cakram Gershgorin tipe pertama dari $C_3(A)$ dan cakram Gershgorin tipe kedua dari $A$ . . . . .	64
3.15	Cakram Gershgorin tipe pertama dari $C_4(A)$ dan cakram Gershgorin tipe kedua dari $A$ . . . . .	65
3.16	Cakram Gershgorin tipe pertama dari $C_4(A)$ dan cakram Gershgorin tipe kedua dari $A$ . . . . .	65
3.17	Cakram Gershgorin tipe pertama dari matriks $C_4(A)$ dan cakram Gershgorin $\hat{D}_i^4(A)$ . . . . .	68
3.18	Cakram Gershgorin tipe pertama dari $C_1(B)$ dan cakram Gershgorin $D_i^1(B)$ . . . . .	69
3.19	Cakram Gershgorin tipe pertama dari $C_2(A)$ dan cakram Gershgorin tipe kedua dari $A$ . . . . .	70
3.20	Cakram Gershgorin $D_i^1(A)$ dan cakram Gershgorin tipe pertama dari $C_1(A)$ . . . . .	73
3.21	Cakram Gershgorin $D_i^1(A)$ dan cakram Gershgorin tipe pertama dari $C_1(A)$ . . . . .	73
3.22	Cakram Gershgorin $D_i^2(A)$ dan cakram Gershgorin tipe pertama dari $C_2(A)$ . . . . .	74
3.23	Cakram Gershgorin $D_i^2(A)$ dan cakram Gershgorin tipe pertama dari $C_2(A)$ . . . . .	74
3.24	Cakram Gershgorin $D_i^3(A)$ dan cakram Gershgorin tipe pertama dari $C_3(A)$ . . . . .	75
3.25	Cakram Gershgorin $D_i^3(A)$ dan cakram Gershgorin tipe pertama dari $C_3(A)$ . . . . .	75
3.26	Cakram Gershgorin $D_i^4(A)$ dan cakram Gershgorin tipe pertama dari $C_4(A)$ . . . . .	76
3.27	Cakram Gershgorin $D_i^4(A)$ dan cakram Gershgorin tipe pertama dari $C_4(A)$ . . . . .	76
3.28	Cakram Gershgorin tipe kedua dari Matriks $A'$ . . . . .	81
3.29	Cakram Gershgorin tipe kedua dari Matriks $M'$ . . . . .	84

## DAFTAR LAMBANG

$A$	: matriks $A$
$a_{ij}$	: entri baris $i$ dan kolom $j$ dari matriks $A$
$m \times n$	: ordo matriks
$M_{ij}$	: minor dari entri matriks baris $i$ dan kolom $j$
$C_{ij}$	: kofaktor dari entri matriks baris $i$ dan kolom $j$
$ A $	: determinan matriks $A$
$\mathbf{u}$	: vektor $\mathbf{u}$
$\ \mathbf{u}\ $	: panjang vektor $\mathbf{u}$
$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$	: hasil kali titik vektor $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$
$\sum$	: penjumlahan
$\mathbb{R}$	: himpunan bilangan real
$\mathbb{C}$	: himpunan bilangan kompleks
$\cup$	: gabungan
$\cap$	: irisan
$ r $	: harga mutlak $r$
$\dim(V)$	: dimensi ruang vektor $V$
$D_i(a_{ii}, r_i)$	: cakram Gershgorin tipe pertama ke- $i$ dengan pusat di $a_{ii}$ dan jari-jari $r_i$
$C_k(A)$	: matriks yang diperoleh dengan mengganti $k - 1$ entri mutlak terkecil non diagonal dengan 0, $k$ adalah multiplisitas geometri dari nilai eigen.
$[a]$	: bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan $a$
$<$	: kurang dari
$>$	: lebih dari
$\leq$	: kurang dari atau sama dengan
$\geq$	: lebih dari atau sama dengan
$=$	: sama dengan
$\neq$	: tidak sama dengan
$\hat{D}_i(a_{ii}, \hat{r}_i)$	: cakram Gershgorin tipe kedua ke- $i$ dengan pusat di $a_{ii}$ dan jari-jari $\hat{r}_i$
$D_i^k(A)$	: cakram Gershgorin tipe kedua ke- $i$ dari matriks $A$ dengan jari-jari yang didefinisikan tertentu
$i$	: bilangan imajiner $\sqrt{-1}$





# BAB I PENDAHULUAN

## 1.1. Latar Belakang

Aljabar linear adalah salah satu cabang matematika yang memegang peranan penting dalam kehidupan. Salah satu materi dari aljabar linear adalah nilai eigen dan vektor eigen. Nilai eigen dan vektor eigen memegang peranan penting dalam dunia teknologi ataupun pengembangan teori-teori dalam bidang aljabar linear.

Dalam menentukan nilai eigen suatu matriks persegi, digunakan penyelesaian persamaan karakteristik. Penyelesaian persamaan karakteristik menghasilkan nilai eigen dan vektor eigen yang bersesuaian. Terdapat cara-cara untuk menentukan lokasi nilai eigen dari suatu matriks persegi, salah satunya adalah dengan menggunakan teorema Gershgorin.

Pada tahun 1931, ilmuwan matematika dari Soviet bernama Semyon Aronovich Gershgorin (1901-1933) pertama kali berhasil mempublikasikan teorema Gershgorin. Teorema Gershgorin adalah teorema dasar yang digunakan untuk memperkirakan lokasi nilai eigen dari matriks persegi dalam bidang kompleks. Teorema Gershgorin mengatakan bahwa lokasi nilai eigen terletak pada gabungan cakram-cakram Gershgorin. Dengan adanya teorema Gershgorin, dapat dengan cepat ditentukan lokasi nilai eigen dari suatu matriks persegi.

Perkembangan cakram Gershgorin sampai saat ini, yaitu dari cakram Gershgorin tipe pertama telah berkembang menjadi cakram Gershgorin tipe kedua. Cakram Gershgorin tipe kedua memiliki jari-jari cakram lebih kecil dibandingkan dengan cakram Gershgorin tipe pertama, sehingga tingkat ketelitian lokasi nilai eigen yang diperoleh lebih tinggi dari cakram Gershgorin tipe pertama. Hanya dalam kondisi tertentu lokasi nilai eigen terletak pada cakram Gershgorin tipe kedua. Agar hal tersebut dipenuhi, perlu dikaji mengenai syarat-syarat cukup nilai eigen agar terletak dalam cakram Gershgorin tipe kedua.

Pada skripsi ini dikaji kembali artikel berjudul "*On The Location of Eigenvalues of Real Matrices*" (2017) oleh Rachid Marsli dan Frank Hall. Artikel ini menjelaskan syarat cukup lokasi nilai eigen terletak pada cakram Gershgorin tipe kedua. Artikel ini merupakan perkembangan dari penelitian cakram Gershgorin dari matriks non negatif oleh Imre Barany dan Joseph Solymosi pada tahun 2016.

## 1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, permasalahan yang dibahas dalam skripsi ini adalah sebagai berikut.

Bagaimana syarat cukup lokasi nilai eigen didalam cakram Gershgorin tipe kedua?

## 1.3. Tujuan Penulisan

Berdasarkan rumusan masalah yang diuraikan tersebut, tujuan penulisan skripsi ini adalah sebagai berikut.

Menjelaskan syarat cukup lokasi nilai eigen didalam cakram Gershgorin tipe kedua.



## BAB II DASAR TEORI

Pada bab ini diberikan teori-teori yang digunakan sebagai acuan dalam pembahasan. Teori-teori dalam bab ini dikutip dari Howard Anton(1988), Richard Varga(2004), dan Rachid Marsli dan Frank Hall(2013).

### 2.1. Matriks

Dalam bagian ini, dijelaskan definisi dari matriks, contoh matriks, operasi yang berlaku pada matriks, matriks eselon baris tereduksi, serta submatriks.

#### 2.1.1. Matriks

**Definisi 2.1.1** Matriks adalah susunan objek-objek yang diletakkan dalam baris dan kolom, dan diapit oleh dua kurung siku. Bentuk umum dari matriks yang memiliki  $m$  baris dan  $n$  kolom adalah

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Objek-objek dalam matriks disebut entri. Matriks dinotasikan dengan huruf besar, sedangkan entri-entri matriks dinotasikan dengan huruf kecil yaitu  $a_{ij}$ . Ordo matriks dilambangkan dengan  $m \times n$ , dengan  $m$  adalah banyaknya baris dan  $n$  adalah banyaknya kolom.

**Contoh 2.1.2** Berikut ini adalah matriks berordo  $3 \times 3$ .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

#### 2.1.2. Operasi Matriks

Berikut ini dibahas beberapa operasi dalam matriks, diantaranya penjumlahan, pengurangan, dan perkalian.

**Definisi 2.1.3** (Penjumlahan Matriks)

Misalkan  $A$  dan  $B$  adalah matriks berordo  $m \times n$ . Penjumlahan

matriks dinotasikan  $A + B$  dan misalkan  $C = A + B$ . Entri-entri penjumlahan matriks didefinisikan sebagai

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},$$

untuk setiap  $i, j$ .

Berikut ini adalah contoh dari penjumlahan matriks.

**Contoh 2.1.4** Diberikan dua matriks  $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ ,  
 $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ , penjumlahan matriks  $A$  dan  $B$  adalah

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1+2 & -2+1 & 3+0 \\ 2-3 & -1+1 & 3+2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

**Definisi 2.1.5** (Pengurangan Matriks)

Misalkan  $A$  dan  $B$  adalah matriks berordo  $m \times n$ . Pengurangan matriks dinotasikan  $A - B$  dan misalkan  $C = A - B$ . Entri-entri pengurangan matriks didefinisikan sebagai

$$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij},$$

untuk setiap  $i, j$ .

Berikut ini adalah contoh dari pengurangan matriks.

**Contoh 2.1.6** Diberikan dua matriks  $A$  dan  $B$  diambil dari Contoh 2.1.4, pengurangan matriks  $A$  dan  $B$  adalah

$$\begin{aligned} A - B &= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1-2 & -2-1 & 3-0 \\ 2-(-3) & -1-1 & 3-2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & -3 & 3 \\ 5 & -2 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

### Definisi 2.1.7 (Perkalian Matriks)

Misalkan  $A$  adalah matriks berordo  $m \times n$ ,  $B$  adalah matriks berordo  $n \times p$  dan  $C = AB$ , maka

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj},$$

untuk setiap  $i, j$ .

Berikut ini adalah contoh dari perkalian matriks.

**Contoh 2.1.8** Diberikan matriks  $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$  dan

$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ . Matriks  $A$  mempunyai ordo  $2 \times 3$  dan matriks  $B$

mempunyai ordo  $3 \times 2$ . Matriks ini dapat dikalikan karena banyaknya kolom pada matriks  $A$  sama dengan banyaknya baris pada matriks  $B$  yaitu 3. Perkalian matriks  $A$  dan  $B$  menghasilkan matriks dengan ordo  $2 \times 2$  sebagai berikut

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (1)(1) + (-2)(-3) + (3)(1) & (1)(0) + (-2)(1) + (3)(1) \\ (2)(1) + (-1)(-3) + (3)(1) & (2)(0) + (-1)(1) + (3)(1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 + 6 + 3 & 0 - 2 + 3 \\ 2 + 3 + 3 & 0 - 1 + 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

### 2.1.3. Matriks Eselon Baris Terreduksi

**Definisi 2.1.9** Misalkan  $A$  adalah matriks sebarang,  $A$  disebut matriks eselon baris terreduksi jika memenuhi empat syarat sebagai berikut :

1. Jika suatu baris dari matriks  $A$  adalah taknol, maka bilangan taknol pertama dalam baris itu adalah 1. (Bilangan 1 itu disebut 1 utama).
2. Jika terdapat baris yang semua entrinya nol, maka baris itu

dikelompokkan di bawah matriks.

3. Untuk sebarang dua baris taknol berurutan, 1 utama dalam baris yang lebih rendah terletak lebih jauh ke kanan dari 1 utama dari baris yang lebih tinggi.
4. Masing-masing kolom yang memiliki 1 utama mempunyai 0 di tempat yang lain.

**Contoh 2.1.10** Berikut adalah contoh dari matriks eselon baris tereduksi,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

#### 2.1.4. Submatriks

Pada bagian ini dijelaskan definisi dan contoh dari submatriks dan submatriks pokok.

##### **Definisi 2.1.11** (Submatriks)

Misalkan  $A$  adalah matriks berordo  $m \times n$ . Submatriks dari matriks  $A$  adalah matriks diperoleh dengan menghilangkan satu atau lebih baris atau kolom dari matriks  $A$ .

**Contoh 2.1.12** Diberikan matriks  $A$  sesuai dengan Contoh 2.1.2. Jika  $B$  adalah submatriks dari  $A$  yang diperoleh dengan menghilangkan kolom pertama, maka

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

##### **Definisi 2.1.13** (Submatriks Pokok)

Misalkan  $A$  adalah matriks berordo  $n \times n$ . Submatriks pokok dari matriks  $A$  adalah matriks yang diperoleh dengan cara menghilangkan baris ke- $i$  dan kolom ke- $i$  dari matriks  $A$  sedemikian sehingga submatriks dari  $A$  tetap merupakan matriks persegi.

**Contoh 2.1.14** Diberikan matriks  $A$  sesuai dengan Contoh 2.1.2. Jika  $B$  adalah submatriks pokok dari  $A$  yang diperoleh dengan

menghilangkan baris kedua dan kolom kedua, maka

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

## 2.2. Sistem Persamaan Linear

Pada bagian ini, dijelaskan mengenai sistem persamaan linear dan contohnya.

**Definisi 2.2.1** Misalkan  $x_1, x_2, \dots, x_n$  adalah variabel dan  $a_{ij}, b_i$  adalah konstanta, untuk setiap  $i = 1, 2, \dots, m$  dan  $j = 1, 2, \dots, n$ . Sistem persamaan linear yang terdiri dari  $m$  persamaan dan  $n$  variabel didefinisikan sebagai himpunan persamaan yang berbentuk

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

**Contoh 2.2.2** Berikut ini adalah contoh dari sistem persamaan linear 2 persamaan dan 2 variabel.

$$\begin{aligned} 3k_1 + 3k_2 &= a \\ -k_1 + 2k_2 &= b \end{aligned}$$

## 2.3. Operasi Baris Elementer dan Eliminasi Gauss Jordan

Pada bagian ini dijelaskan operasi baris elementer dari suatu matriks dan eliminasi Gauss Jordan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear.

**Definisi 2.3.1** Terdapat 3 operasi baris elementer yang berlaku pada matriks sebagai berikut

1. Mengalikan sebuah baris  $i$  dengan konstanta tak nol  $a$ , dinotasikan dengan  $aB_i$ .
2. Pertukaran dua baris

3. Menambahkan kelipatan  $a$  suatu baris  $i$  dengan dengan baris  $j$ , dinotasikan dengan  $B_j + aB_i$ .

**Definisi 2.3.2** Eliminasi Gauss Jordan adalah prosedur melakukan operasi baris elementer pada suatu matriks sampai diperoleh matriks eselon baris tereduksi.

**Contoh 2.3.3** Berikut adalah contoh eliminasi Gauss Jordan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear pada Contoh 2.2.2.

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & a \\ -1 & 2 & b \end{bmatrix}$$

Mengalikan baris pertama dengan  $\frac{1}{3}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{a}{3} \\ -1 & 2 & b \end{bmatrix}$$

Menambahkan baris kedua dengan baris pertama

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{a}{3} \\ 0 & 3 & \frac{a+3b}{3} \end{bmatrix}$$

Mengalikan baris kedua dengan  $\frac{1}{3}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{a}{3} \\ 0 & 1 & \frac{a+3b}{6} \end{bmatrix}$$

Menambahkan baris pertama dengan  $-1$  kali baris pertama

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{a-3b}{6} \\ 0 & 1 & \frac{a+3b}{6} \end{bmatrix}.$$

Diperoleh  $k_1 = \frac{a-3b}{6}$  dan  $k_2 = \frac{a+3b}{6}$ .

## 2.4. Determinan

Pada bagian ini, dijelaskan minor kofaktor dari suatu matriks berordo  $n \times n$  dan satu metode untuk mencari determinan dari sebuah matriks berordo  $n \times n$ , yaitu ekspansi kofaktor sepanjang baris ke- $i$  atau ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke- $j$ .

### 2.4.1. Minor dan Kofaktor

**Definisi 2.4.1** Misalkan  $A$  adalah matriks berordo  $n \times n$ , minor entri  $a_{ij}$  dinotasikan dengan  $M_{ij}$  dan didefinisikan sebagai determinan submatriks dengan baris ke- $i$  dan kolom ke- $j$  tidak disertakan.

Sedangkan kofaktor entri  $a_{ij}$  dinotasikan dengan  $C_{ij}$  didefinisikan sebagai  $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ .

**Contoh 2.4.2** Diberikan matriks

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 8 & 6 & 8 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Akan ditentukan semua minor dan kofaktor dari  $A$ .

**Penyelesaian.**

Minor dari  $A$  adalah

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 12 - 16 = -4$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 8 & 8 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 16 - 24 = -8$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 16 - 18 = -2$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 12 - 0 = 12$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 - 0 = 0$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 - 18 = -18$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 48 - 0 = 48$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 8 & 8 \end{vmatrix} = 0 - 0 = 0$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} = 0 - 48 = -48$$

Kofaktor dari  $A$  adalah

$$C_{11} = (-1)^{1+1}(-4) = -4$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2}(-8) = 8$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3}(-2) = -2$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1}(12) = -12$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2}(0) = 0$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3}(-18) = 18$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1}(48) = 48$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2}(0) = 0$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3}(-48) = -48.$$

#### 2.4.2. Menghitung Determinan Dengan Ekspansi Kofaktor

Berikut diberikan teorema untuk menghitung determinan suatu matriks dengan ekspansi kofaktor.

**Teorema 2.4.3** Misalkan  $A$  adalah matriks berordo  $n \times n$ . Determinan dari  $A$  dinotasikan dengan  $|A|$ , dapat dihitung dengan menjumlahkan hasil perkalian entri-entri suatu baris atau suatu kolom dengan kofaktor-kofaktornya, yaitu

1. Ekspansi Kofaktor Sepanjang Baris ke- $i$

$$|A| = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \dots + a_{in}C_{in}.$$

2. Ekspansi Kofaktor Sepanjang Kolom ke- $j$

$$|A| = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \dots + a_{nj}C_{nj}.$$

**Contoh 2.4.4** Diberikan matriks  $A$  pada Contoh 2.4.2. Akan ditentukan determinan  $A$  dengan menggunakan ekspansi kofaktor sepanjang baris ke-1.

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} \\ &= 0(-4) + 6(8) + 0(-2) \\ &= 48. \end{aligned}$$

## 2.5. Vektor

Pada bagian ini, dijelaskan mengenai definisi vektor baris dan vektor kolom dalam  $\mathbb{R}^n$ , vektor satu, panjang vektor, hasil kali titik, vektor ortogonal, dan contoh-contohnya.

**Definisi 2.5.1** Vektor adalah besaran yang mempunyai panjang dan arah. Dalam  $\mathbb{R}^n$ , vektor baris dinyatakan dengan  $n$  bilangan real terurut,  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  atau  $\mathbf{v} = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]$ . Sedangkan

vektor kolom dinyatakan dengan  $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ .

**Contoh 2.5.2** Berikut ini adalah contoh dari vektor baris dan vektor kolom berturut-turut :

$$\mathbf{v} = [1 \ -4 \ 2], \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

**Definisi 2.5.3** Vektor satu adalah vektor yang berbentuk

$$\mathbf{v} = (1, 1, \dots, 1).$$

**Definisi 2.5.4** Panjang dari vektor  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  dinotasikan dengan  $\|\mathbf{v}\|$  dan didefinisikan sebagai

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}$$

**Contoh 2.5.5** Diberikan vektor  $\mathbf{v} = (2, 1, 1)$ , panjang vektor  $\mathbf{v}$  adalah

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

**Definisi 2.5.6** (Hasil Kali Titik)

Hasil kali titik dua buah vektor  $\mathbf{u}$  dan  $\mathbf{v}$  dinotasikan sebagai  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ , dan didefinisikan sebagai :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta,$$

dengan  $\theta$  adalah sudut yang dibentuk oleh kedua vektor  $\mathbf{u}$  dan  $\mathbf{v}$ . Hasil

kali titik antara kedua vektor  $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$  dan  $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$  dapat juga dinyatakan sebagai :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n = \sum_{i=1}^n u_iv_i.$$

**Contoh 2.5.7** Diberikan vektor dalam  $\mathbb{R}^3$ , yaitu  $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$  dan  $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ . Hasil kali titik  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$  adalah

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= (1)(2) + (-4)(1) + (2)(1) \\ &= 2 - 4 + 2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

### Definisi 2.5.8 (Ortogonal)

Dua buah vektor  $\mathbf{u}$  dan  $\mathbf{v}$  dikatakan ortogonal jika sudut yang dibentuk oleh kedua vektor adalah  $\frac{\pi}{2}$ . Dengan kata lain,  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \cos \frac{\pi}{2} = 0$ .

**Contoh 2.5.9** Perhatikan Contoh 2.5.7, hasil kali titik  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ . Sehingga,  $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$  dan  $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  adalah ortogonal.

## 2.6. Ruang Vektor

Pada bagian ini, dijelaskan mengenai aksioma ruang vektor real dan contohnya.

**Definisi 2.6.1** Misalkan  $V$  adalah himpunan tak kosong yang dilengkapi operasi biner penjumlahan dan perkalian terhadap skalar.  $V$  disebut ruang vektor jika memenuhi sepuluh aksioma berikut :

1. Tertutup terhadap penjumlahan  
Untuk setiap  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ , berlaku  $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$ .
2. Komutatif terhadap penjumlahan  
Untuk setiap  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ , berlaku  $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ .
3. Asosiatif terhadap penjumlahan  
Untuk setiap  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ , berlaku  $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ .
4. Memiliki identitas penjumlahan  
Terdapat  $\mathbf{0} \in V$  sedemikian sehingga untuk setiap  $\mathbf{u} \in V$  berlaku  $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$ .
5. Setiap vektor mempunyai invers penjumlahan  
Untuk setiap  $\mathbf{u} \in V$ , terdapat  $-\mathbf{u} \in V$  sedemikian sehingga berlaku  $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = -\mathbf{u} + \mathbf{u} = \mathbf{0}$ .
6. Tertutup terhadap perkalian skalar  
Untuk setiap  $\mathbf{u} \in V$  dan  $k \in \mathbb{R}$ , berlaku  $k\mathbf{u} \in V$ .
7. Distributif perkalian skalar dengan penjumlahan vektor  
Untuk setiap  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$  dan  $k \in \mathbb{R}$ , berlaku  $k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$ .
8. Distributif perkalian dari penjumlahan skalar dengan vektor  
Untuk setiap  $\mathbf{u} \in V$  dan  $k, l \in \mathbb{R}$ , berlaku  $(k + l)\mathbf{u} = k\mathbf{u} + l\mathbf{u}$ .
9. Asosiatif terhadap perkalian skalar dengan vektor  
Untuk setiap  $\mathbf{u} \in V$  dan  $k, l \in \mathbb{R}$ , berlaku  $(kl)\mathbf{u} = k(l\mathbf{u})$ .
10. Perkalian dengan skalar 1  
Untuk setiap  $\mathbf{u} \in V$  berlaku  $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$ .

**Contoh 2.6.2** Diberikan himpunan  $\mathbb{R}^2 = \{(a, b) | a, b \in \mathbb{R}\}$  terhadap operasi penjumlahan vektor dan perkalian skalar. Akan ditunjukkan  $\mathbb{R}^2$  merupakan ruang vektor.

**Penyelesaian.**

Ambil sembarang  $\mathbf{u} = (a, b)$ ,  $\mathbf{v} = (c, d)$ ,  $\mathbf{w} = (e, f) \in \mathbb{R}^2$  dan  $k \in \mathbb{R}$ ,

1. Tertutup terhadap penjumlahan

$$\begin{aligned}\mathbf{u} + \mathbf{v} &= (a, b) + (c, d) \\ &= (a + c, b + d) \in \mathbb{R}^2\end{aligned}$$

Sehingga,  $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ , untuk setiap  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ .

2. Komutatif terhadap penjumlahan

$$\begin{aligned}\mathbf{u} + \mathbf{v} &= (a, b) + (c, d) \\ &= (a + c, b + d) \\ &= (c + a, d + b) \\ &= (c, d) + (a, b) \\ &= \mathbf{v} + \mathbf{u}\end{aligned}$$

Sehingga,  $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ , untuk setiap  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ .

3. Asosiatif terhadap penjumlahan

$$\begin{aligned}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} &= ((a, b) + (c, d)) + (e, f) \\ &= ((a + c, b + d)) + (e, f) \\ &= ((a + c) + e, (b + d) + f) \\ &= (a + (c + e), b + (d + f)) \\ &= (a, b) + ((c + e), (d + f)) \\ &= (a, b) + ((c, d) + (e, f)) \\ &= \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}).\end{aligned}$$

Sehingga,  $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ , untuk setiap  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ .

4. Memiliki identitas penjumlahan Terdapat  $\mathbf{0} = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$  sedemikian sehingga untuk setiap  $\mathbf{u} = (a, b) \in V$  berlaku

$$\begin{aligned}\mathbf{u} + \mathbf{0} &= (a, b) + (0, 0) \\ &= (a + 0, b + 0) \\ &= (a, b) \\ &= \mathbf{u} \\ \mathbf{0} + \mathbf{u} &= (0, 0) + (a, b) \\ &= (0 + a, 0 + b) \\ &= (a, b) \\ &= \mathbf{u}\end{aligned}$$

Sehingga,  $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$  untuk setiap  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ .

5. Setiap vektor mempunyai invers penjumlahan Untuk setiap  $\mathbf{u} = (a, b) \in V$ , terdapat  $-\mathbf{u} = (-a, -b) \in V$  sedemikian sehingga

berlaku

$$\begin{aligned}\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) &= (a, b) + (-a, -b) \\ &= (a + (-a), b + (-b)) \\ &= (a - a, b - b) \\ &= (0, 0) \\ &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-\mathbf{u} + \mathbf{u} &= (-a, -b) + (a, b) \\ &= (-a + a, -b + b) \\ &= (0, 0) \\ &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

Sehingga,  $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = -\mathbf{u} + \mathbf{u} = \mathbf{0}$ , untuk setiap  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ .

6. Tertutup terhadap perkalian skalar

$$\begin{aligned}k\mathbf{u} &= k(a, b) \\ &= (ka, kb) \in \mathbb{R}^2\end{aligned}$$

Sehingga,  $k\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$  untuk setiap  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$  dan  $k \in \mathbb{R}$

7. Distributif perkalian skalar dengan penjumlahan vektor

$$\begin{aligned}k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= k((a, b) + (c, d)) \\ &= k(a + c, b + d) \\ &= (k(a + c), k(b + d)) \\ &= (ka + kc, kb + kd) \\ &= (ka, kb) + (kc, kd) \\ &= k(a, b) + k(c, d) \\ &= k\mathbf{u} + k\mathbf{v}\end{aligned}$$

Sehingga berlaku  $k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$ , untuk setiap  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$  dan  $k \in \mathbb{R}$ .

8. Distributif perkalian dari penjumlahan skalar dengan vektor

$$\begin{aligned}(k + l)\mathbf{u} &= (k + l)(a, b) \\ &= ((k + l)a, (k + l)b) \\ &= (ka + la, kb + lb)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (ka, kb) + (la, lb) \\
 &= k(a, b) + l(a, b) \\
 &= k\mathbf{u} + l\mathbf{u}
 \end{aligned}$$

Sehingga berlaku  $(k + l)\mathbf{u} = k\mathbf{u} + l\mathbf{u}$  untuk setiap  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$  dan  $k, l \in \mathbb{R}$ .

### 9. Asosiatif terhadap perkalian skalar dengan vektor

$$\begin{aligned}
 (kl)\mathbf{u} &= (kl)(a, b) \\
 &= ((kl)a, (kl)b) \\
 &= (k(la), k(lb)) \\
 &= k(la, lb) \\
 &= k(l(a, b)) \\
 &= k(l\mathbf{u})
 \end{aligned}$$

Sehingga berlaku  $(kl)\mathbf{u} = k(l\mathbf{u})$  untuk setiap  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$  dan  $k, l \in \mathbb{R}$ .

### 10. Perkalian dengan skalar 1

$$\begin{aligned}
 1\mathbf{u} &= 1(a, b) \\
 &= (1a, 1b) \\
 &= (a, b) \\
 &= \mathbf{u}
 \end{aligned}$$

Sehingga berlaku  $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$  untuk setiap  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ .

Dengan demikian, semua aksioma ruang vektor dipenuhi, sehingga  $\mathbb{R}^2$  merupakan ruang vektor dengan operasi penjumlahan vektor dan perkalian skalar.

## 2.7. Subruang

Pada bagian ini, dijelaskan definisi, teorema subruang dari suatu ruang vektor, dan contohnya.

**Definisi 2.7.1** Misalkan  $V$  adalah ruang vektor,  $S \subseteq V$  dan  $S \neq \emptyset$ .  $S$  disebut subruang dari  $V$  jika  $S$  ruang vektor dengan operasi yang sama dengan  $V$ .

**Teorema 2.7.2** Misalkan  $V$  adalah ruang vektor,  $S \subseteq V$ , dan  $S \neq \emptyset$ .  $S$  subruang dari  $V$  jika dipenuhi dua aksioma berikut

1. Untuk setiap  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in S$  berlaku  $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in S$
2. Untuk setiap  $\mathbf{u} \in S$  dan  $k \in \mathbb{R}$  berlaku  $k\mathbf{u} \in S$ .

Kedua aksioma diatas dapat dipersingkat menjadi satu aksioma, yaitu Untuk setiap  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in S$  dan  $k, l \in \mathbb{R}$  berlaku  $k\mathbf{u} + l\mathbf{v} \in S$ .

**Contoh 2.7.3** Misalkan  $O$  melambangkan himpunan vektor nol. Himpunan  $O$  merupakan subruang dari semua ruang vektor  $V$ , karena berlaku untuk setiap  $k, l \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} k\mathbf{0} + l\mathbf{0} &= \mathbf{0} + \mathbf{0} \\ &= \mathbf{0} \in V. \end{aligned}$$

## 2.8. Kombinasi Linear, Membangun, dan Kebebasan Linear

Pada bagian ini, dijelaskan definisi dan contoh dari kombinasi linear, himpunan membangun, dan bebas linear dari suatu himpunan bagian dari ruang vektor.

**Definisi 2.8.1** Misalkan  $V$  adalah ruang vektor,  $\mathbf{w} \in V$ , dan  $k_1, k_2, \dots, k_n$  adalah skalar.  $\mathbf{w}$  adalah kombinasi linear dari vektor-vektor  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ , jika  $\mathbf{w}$  dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\mathbf{w} = k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2 + \dots + k_n\mathbf{a}_n.$$

**Definisi 2.8.2** Misalkan  $V$  adalah ruang vektor.  $S = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\} \subseteq V$ .  $S$  disebut membangun  $V$ , jika setiap vektor di  $v \in V$  dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari  $S$ , yaitu terdapat skalar-skalar  $k_1, k_2, \dots, k_n$  sedemikian sehingga memenuhi persamaan

$$k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2 + \dots + k_n\mathbf{a}_n = \mathbf{v}.$$

**Contoh 2.8.3** Diberikan ruang vektor  $\mathbb{R}^2$  terhadap operasi penjumlahan dan perkalian skalar dan himpunan  $B = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$ . Akan ditunjukkan  $B$  membangun  $\mathbb{R}^2$ .

**Penyelesaian.**

Ambil sembarang  $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ , selanjutnya ditunjukkan  $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$  dapat

dinyatakan sebagai kombinasi linear dari  $B$ , yang berarti terdapat skalar-skalar  $k_1, k_2$  sedemikian sehingga memenuhi persamaan

$$k_1 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 3k_1 \\ -k_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3k_2 \\ 2k_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3k_1 + 3k_2 \\ -k_1 + 2k_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Diperoleh sistem persamaan linear

$$\begin{aligned} 3k_1 + 3k_2 &= a \\ -k_1 + 2k_2 &= b \end{aligned}$$

Selanjutnya digunakan eliminasi Gauss Jordan untuk menyelesaikan persamaan linear tersebut, sehingga diperoleh skalar-skalar  $k_1 = \frac{a-3b}{6}$  dan  $k_2 = \frac{a+3b}{6}$ , sehingga

$$\frac{a-3b}{6} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{a+3b}{6} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

Dengan demikian,  $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$  dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari  $B$ , yang berarti himpunan  $B = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$  membangun  $\mathbb{R}^2$ .

**Definisi 2.8.4** Misalkan  $V$  adalah ruang vektor,  $B = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\} \subseteq V$ . Himpunan  $B$  disebut bebas linear jika persamaan vektor

$$k_1 \mathbf{a}_1 + k_2 \mathbf{a}_2 + \dots + k_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0}$$

hanya dipenuhi oleh  $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$ . Jika terdapat solusi yang lain, maka  $B$  disebut bergantung linear.

**Contoh 2.8.5** Diberikan himpunan  $B$  pada Contoh 2.8.3. Akan ditunjukkan  $B$  merupakan himpunan bebas linear, yaitu dengan

menunjukkan persamaan

$$k_1 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

hanya dipenuhi oleh  $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$ .

**Penyelesaian.**

Dengan menguraikan persamaan 2.1, diperoleh

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 3k_1 \\ -k_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3k_2 \\ 2k_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3k_1 + 3k_2 \\ -k_1 + 2k_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Berikutnya untuk memperoleh  $k_1$  dan  $k_2$  dilakukan eliminasi Gauss Jordan sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Mengalikan baris pertama dengan  $\frac{1}{3}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Menambahkan baris kedua dengan baris pertama

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Mengalikan baris kedua dengan  $\frac{1}{3}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Menambahkan baris pertama dengan  $-1$  baris kedua.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh  $k_1 = 0$  dan  $k_2 = 0$ , yang berarti menunjukkan

bahwa himpunan  $B$  adalah bebas linear.

## 2.9. Basis dan Dimensi

Pada bagian ini, dijelaskan definisi basis dan dimensi dari ruang vektor serta contohnya.

### 2.9.1. Basis

**Definisi 2.9.1** Misalkan  $V$  adalah ruang vektor dan  $B \subseteq V$ .  $B$  disebut basis ruang vektor  $V$  jika  $B$  memenuhi dua aksioma :

1.  $B$  bebas linear
2.  $B$  membangun  $V$

**Contoh 2.9.2** Himpunan  $B$  pada Contoh 2.8.3 merupakan basis ruang vektor  $\mathbb{R}^2$ , karena telah ditunjukkan sebelumnya bahwa  $B$  bebas linear  $B$  membangun  $\mathbb{R}^2$ .

### 2.9.2. Dimensi

**Definisi 2.9.3** Misalkan  $V$  adalah ruang vektor tak nol. Dimensi dari  $V$  dinotasikan dengan  $\dim(V)$  didefinisikan sebagai banyaknya vektor pada suatu basis.

**Contoh 2.9.4** Diberikan ruang vektor  $\mathbb{R}^2$ . Basis dari  $\mathbb{R}^2$  mempunyai vektor sebanyak 2, sehingga  $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$ .

## 2.10. Nilai Eigen, Vektor Eigen, dan Ruang Eigen

Pada bagian ini dijelaskan mengenai definisi, teorema, dan contoh dari nilai eigen, vektor eigen, dan ruang eigen dari suatu matriks persegi.

**Definisi 2.10.1** Misalkan  $A$  adalah matriks berordo  $n \times n$ . Vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  disebut vektor eigen jika terdapat bilangan real  $\lambda$  sedemikian sehingga memenuhi persamaan

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

dan  $\lambda$  disebut nilai eigen.

**Teorema 2.10.2** Diberikan matriks  $A$  berordo  $n \times n$ ,  $\lambda$  adalah nilai

eigen jika memenuhi persamaan karakteristik

$$|\lambda I - A| = 0.$$

**Bukti.** Misalkan  $\lambda$  adalah nilai eigen dari  $A$  jika terdapat vektor  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  sehingga

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \lambda\mathbf{x} \\ \iff A\mathbf{x} &= \lambda I\mathbf{x} \\ \iff \lambda I\mathbf{x} - A\mathbf{x} &= \mathbf{0} \\ \iff (\lambda I - A)\mathbf{x} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Karena  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ , haruslah  $\lambda I - A$  merupakan matriks singular, sehingga

$$|\lambda I - A| = 0.$$



**Contoh 2.10.3** Diberikan matriks  $A$  pada Contoh 2.1.2, akan ditentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks  $A$ .

$$\begin{aligned} |\lambda I - A| &= 0 \\ \left| \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \right| &= 0 \\ \left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \right| &= 0 \\ \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ -2 & \lambda - 1 & 0 \\ -2 & -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} &= 0 \\ (\lambda - 1)(\lambda - 1)(\lambda - 2) &= 0 \end{aligned}$$

Diperoleh nilai eigen  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$ .

Selanjutnya ditentukan vektor eigen untuk masing-masing nilai eigen.

Untuk  $\lambda = 1$ ,

$$(I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan melakukan operasi baris elementer mempertukarkan baris pertama dengan baris kedua, diperoleh

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Baris ketiga ditambahkan dengan  $-1$  baris pertama

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Baris pertama dikalikan dengan  $-\frac{1}{2}$  dan baris ketiga ditukarkan baris pertama.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Baris kedua dikalikan dengan  $-1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga,  $x_1 = 0$  dan  $x_2 + x_3 = 0$ . Dengan memisalkan  $x_2 = s$ , untuk  $s \in \mathbb{R}, s \neq 0$ , diperoleh  $x_3 = -s$ . Jadi,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ s \\ -s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Jadi, vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen  $\lambda = 1$  adalah  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ .

Untuk  $\lambda = 2$ ,

$$(2I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya dilakukan operasi baris elementer untuk memperoleh vektor eigen.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Baris kedua ditambahkan dengan 2 kali baris pertama dan baris ketiga ditambahkan dengan 2 kali baris pertama

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Baris ketiga ditambahkan dengan baris kedua

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh  $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = t, t \in \mathbb{R}, t \neq 0$ .

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Jadi, vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen  $\lambda = 2$  adalah

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya dijelaskan mengenai ruang eigen yang berkaitan dengan suatu nilai eigen dari matriks persegi.

**Teorema 2.10.4** Misalkan  $A$  adalah matriks berordo  $n \times n$  dan  $\lambda$  adalah nilai eigen dari  $A$ . Ruang eigen dari  $A$  yang bersesuaian dengan  $\lambda$  dinotasikan  $E_\lambda$  dan didefinisikan sebagai himpunan vektor-vektor  $\mathbf{x}$  yang memenuhi  $(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , yaitu

$$E_\lambda = \{\mathbf{x} | (\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

merupakan subruang dari  $\mathbb{R}^n$ .

**Bukti.** Akan ditunjukkan himpunan  $E_\lambda$  bukan himpunan kosong dan untuk setiap  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E_\lambda$  dan  $k \in \mathbb{R}$  berlaku  $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in E_\lambda$  dan  $k\mathbf{x} \in E_\lambda$ . Untuk setiap persamaan  $(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$  memiliki penyelesaian salah satunya adalah  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , sehingga  $\mathbf{0} \in E_\lambda$  dan terbukti  $E_\lambda$  bukan himpunan kosong.

Ambil sembarang  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E_\lambda$ , diperoleh  $(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$  dan  $(\lambda I - A)\mathbf{y} = \mathbf{0}$ . Selanjutnya,

$$\begin{aligned} (\lambda I - A)\mathbf{x} + (\lambda I - A)\mathbf{y} &= \mathbf{0} + \mathbf{0} \\ \iff (\lambda I - A)(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

yang berarti  $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in E_\lambda$ .

Ambil sembarang  $k \in \mathbb{R}$ , diperoleh

$$\begin{aligned} k(\lambda I - A)\mathbf{x} &= k\mathbf{0} \\ \iff (\lambda I - A)(k\mathbf{x}) &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

yang berarti  $k\mathbf{x} \in E_\lambda$ . Dengan demikian, terbukti bahwa ruang eigen  $E_\lambda$  merupakan subruang dari  $\mathbb{R}^n$ . ■

**Contoh 2.10.5** Diberikan matriks  $A$  sesuai pada Contoh 2.10.3, akan ditentukan ruang eigen dari matriks  $A$ .

### Penyelesaian.

Telah diperoleh nilai eigen dari matriks  $A$ , yaitu  $\lambda = 1$  dan  $\lambda = 2$ . Berdasarkan Contoh 2.10.3, telah dicari semua vektor  $\mathbf{x}$  yang memenuhi  $(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Sehingga,

ruang eigen untuk  $\lambda = 1$  adalah  $E_1 = \left\{ s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}$  dan

ruang eigen untuk  $\lambda = 2$  adalah  $E_2 = \left\{ t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$ .

## 2.11. Multiplisitas Geometri

Pada bagian ini, dijelaskan definisi dan contoh multiplisitas geometri dari nilai eigen matriks persegi.

**Definisi 2.11.1** Misalkan  $A$  adalah matriks berordo  $n \times n$  dengan nilai eigen  $\lambda$ . Multiplisitas geometri dari  $\lambda$  adalah dimensi dari ruang eigen  $A$  berkaitan dengan  $\lambda$ , yaitu  $\dim(E_\lambda)$ .

**Contoh 2.11.2** Diberikan matriks  $A$  pada Contoh 2.1.2, akan ditentukan multiplisitas geometri dari nilai-nilai eigen yang telah diperoleh pada Contoh 2.10.3.

**Penyelesaian.**

Untuk nilai eigen  $\lambda = 1$ , dimensi ruang eigen yang bersesuaian adalah 1, sehingga multiplisitas geometri dari nilai eigen  $\lambda = 1$  adalah 1.

Untuk nilai eigen  $\lambda = 2$ , dimensi ruang eigen yang bersesuaian adalah 1, sehingga multiplisitas geometri dari nilai eigen  $\lambda = 2$  adalah 1.

**2.12. Cakram Gershgorin Tipe Pertama**

Pada bagian ini dijelaskan definisi, contoh, dan teorema dari cakram Gershgorin tipe pertama.

**Definisi 2.12.1** (Cakram Gershgorin Tipe Pertama)

Misalkan  $A$  adalah matriks berordo  $n \times n$ ,

$$r_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

adalah jari-jari cakram, untuk  $i = 1, 2, \dots, n$ , dan  $a_{ii}$  adalah pusat cakram. Cakram Gershgorin tipe pertama yang berpusat di  $a_{ii}$  dan berjari-jari  $r_i$  dinotasikan dengan  $D_i(a_{ii}, r_i)$  dan didefinisikan sebagai himpunan

$$D_i(a_{ii}, r_i) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq r_i\}.$$

**Contoh 2.12.2** Diberikan matriks

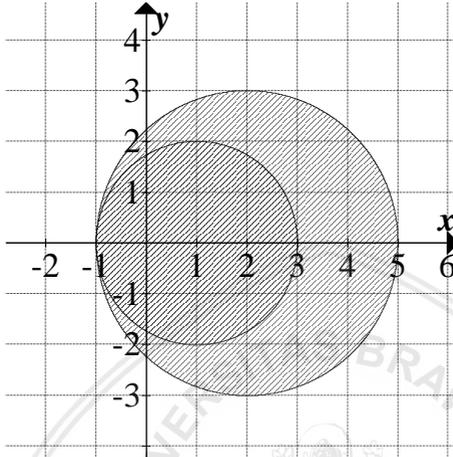
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Akan ditentukan cakram Gershgorin tipe pertama pada matriks  $A$ .

**Penyelesaian.**

Ditentukan jari-jari dari masing-masing cakram Gershgorin tipe pertama dari matriks  $A$ , yaitu dengan menjumlahkan entri-entri mutlak non diagonal utama dari setiap baris matriks  $A$ , yaitu  $r_1 = |0| + |0| = 0$ ,  $r_2 = |2| + |0| = 2$ , dan  $r_3 = |2| + |1| = 3$ , dengan pusat masing-masing cakram adalah entri-entri yang terletak pada

diagonal utama dari masing-masing baris matriks  $A$ , yaitu  $a_{11} = 1, a_{22} = 1$ , dan  $a_{33} = 2$ . Sehingga, ketiga cakram Gershgorin matriks  $A$  adalah  $D_1(1, 0)$ ,  $D_2(1, 2)$ , dan  $D_3(2, 3)$ . Berikut ini adalah gambar cakram Gershgorin tipe pertama dari matriks  $A$  pada contoh ini.



Gambar 2.1 Cakram Gershgorin tipe pertama dari Matriks  $A$

**Teorema 2.12.3** (Teorema Gershgorin)

Jika  $A$  adalah matriks real berordo  $n \times n$  dan

$$r_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, i = 1, 2, \dots, n$$

adalah jari-jari cakram Gershgorin tipe pertama, maka semua nilai eigen dari  $A$  terletak pada gabungan dari  $n$  cakram Gershgorin tipe pertama :

$$\bigcup_{i=1}^n D_i$$

dengan

$$D_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq r_i\}.$$

**Bukti.** Misalkan  $\lambda$  adalah nilai eigen dari matriks  $A$  dan memenuhi

$$Ax = \lambda x, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}.$$

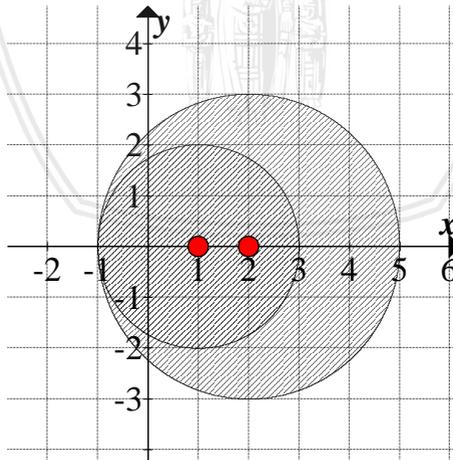
Beberapa entri pada  $x$  memiliki nilai mutlak terbesar,  $|x_p| \geq |x_i|$  untuk semua  $i = 1, 2, \dots, n$ , dan  $x_p \neq 0$ . Selanjutnya,

$$\begin{aligned}
 x_p(\lambda - a_{pp}) &= \sum_{j=1, j \neq p}^n a_{pj}x_j \\
 \Leftrightarrow |x_p(\lambda - a_{pp})| &= \sum_{j=1, j \neq p}^n |a_{pj}x_j| \\
 \Leftrightarrow |x_p| |\lambda - a_{pp}| &\leq |x_p| \sum_{j=1, j \neq p}^n |a_{pj}| \\
 \Leftrightarrow |\lambda - a_{pp}| &\leq r_p
 \end{aligned}$$

Dengan demikian,  $\lambda$  terletak di cakram Gershgorin tipe pertama ke- $p$ .

■

**Contoh 2.12.4** Diberikan matriks  $A$  pada Contoh 2.1.2. Akan ditentukan lokasi nilai eigen dengan menggunakan Teorema 2.12.3. Berdasarkan Contoh 2.10.3, diperoleh nilai eigen  $\lambda = 1$  dan  $\lambda = 2$ . Berikut gambar dari cakram Gershgorin pada Contoh 2.12.2 beserta nilai eigen.



**Gambar 2.2** Cakram Gershgorin tipe pertama dan Nilai Eigen dari Matriks  $A$  pada Contoh 2.1.2

Pada Contoh 2.12.4 telah ditunjukkan bahwa nilai eigen real terletak pada gabungan cakram Gershgorin tipe pertama. Selanjutnya, diberikan contoh nilai eigen kompleks dari suatu matriks terletak pada gabungan cakram Gershgorin tipe pertama.

**Contoh 2.12.5** Diberikan matriks  $C$  berordo  $2 \times 2$ ,

$$C = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Akan ditentukan cakram Gershgorin tipe pertama dari  $C$ .

**Penyelesaian.**

Persamaan karakteristik untuk mencari nilai eigen dari matriks  $C$  adalah

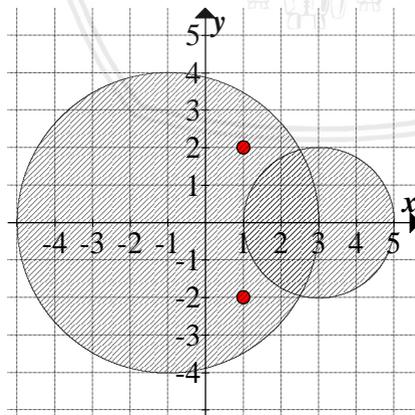
$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0,$$

dan apabila diselesaikan diperoleh nilai eigen  $\lambda = 1 + 2i$  dan  $\lambda = 1 - 2i$ .

Cakram Gershgorin tipe pertama dari  $C$  adalah cakram pertama berpusat di  $a_{11} = 3$  dan berjari-jari  $r_1 = |-2| = 2$  dan cakram kedua berpusat di  $a_{22} = -1$  dan berjari-jari  $r_2 = |4| = 4$ .

Sehingga diperoleh cakram Gershgorin tipe pertama dari  $C$  adalah  $D_1(3, 2)$  dan  $D_2(-1, 4)$ .

Berikut adalah gambar cakram Gershgorin dan nilai eigen dari contoh ini. Terlihat bahwa nilai eigen terletak pada gabungan kedua cakram Gershgorin.



**Gambar 2.3** Cakram Gershgorin tipe pertama dan Nilai Eigen dari Matriks  $C$  pada Contoh 2.12.5

**Definisi 2.12.6** Misalkan  $A$  adalah matriks berordo  $n \times n$ .  $A$  disebut matriks kolom full rank jika setiap kolom dari  $A$  bebas linear.

**Definisi 2.12.7** Misalkan  $I_n$  adalah matriks identitas berordo  $n \times n$ . Matriks permutasi dinotasikan dengan  $P_{ij}$  didefinisikan sebagai matriks yang diperoleh dari  $I_n$  dengan menukarkan baris ke- $i$  dan ke- $j$ , untuk  $i, j = 1, \dots, n$ .

**Contoh 2.12.8** Jika diberikan

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

adalah matriks identitas berordo  $3 \times 3$ , maka matriks permutasi  $P_{13}$  adalah matriks yang diperoleh dengan cara menukarkan baris pertama dan baris ketiga dari  $I_3$ , yaitu

$$P_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Lemma 2.12.9** Misalkan  $S$  adalah subruang dari  $\mathbb{C}^n$  berdimensi  $k$ . Ada basis  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  dari  $S$  dengan sifat sebagai berikut : Untuk setiap  $i = 1, 2, \dots, k$  terdapat bilangan bulat berbeda  $p_i$ , dengan  $1 \leq p_i \leq n$  dan  $p_i \neq p_j$  untuk  $i \neq j$ , sedemikian sehingga modulus terbesar dari setiap  $v_i$  terletak pada posisi  $p_i$ .

**Bukti.** Susun vektor-vektor basis  $B = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  dari  $S$  sebagai kolom-kolom dari matriks kolom full rank berordo  $n \times k$ ,

$$X = [v_1 | \dots | v_k].$$

Misalkan  $P_1 \in M_n$  adalah matriks permutasi sedemikian sehingga modulus terbesar dari  $v_1$  adalah entri pertama dari  $P_1 v_1 = y_1$ .

Partisi  $P_1 X = [y_1 \ Y_2]$  dan  $y_1 = [y_{11} \ w^T]^T$ . Misalkan  $R_1$  adalah matriks segitiga atas dengan bentuk

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & z^* \\ 0 & I_{k-1} \end{bmatrix}$$

dan pilih vektor  $z \in \mathbb{C}^{n-1}$  sedemikian sehingga

$$(p_1)R_1 = [y_1 \ Y_2] \begin{bmatrix} 1 & z^* \\ 0 & I_{k-1} \end{bmatrix} = [y_1 \ y_1 z^* + Y_2] = \begin{bmatrix} y_{11} & 0 \\ w & X^{(2)} \end{bmatrix}$$

mempunyai entri nol dalam baris pertama kolom kedua. Ulangi proses untuk  $X^{(2)}$ ,  $X^{(3)}$ , ... untuk memperoleh  $(P_{k-1} \dots P_1)X(R_1 \dots R_{k-1}) = Z$ , sebuah matriks segitiga bawah yang entri diagonalnya adalah entri modulus terbesar di kolomnya masing-masing. Sehingga dapat dinyatakan dengan  $Z = PXR$  dengan  $P$  adalah hasil perkalian  $k - 1$  matriks permutasi dan  $R$  adalah hasil kali  $k - 1$  matriks segitiga atas dengan 1 terletak pada diagonal. Dengan demikian,  $P$  adalah matriks permutasi,  $R$  adalah matriks segitiga atas dan non singular, dan  $Z$  memiliki full kolom rank. Dengan catatan bahwa ruang kolom dari  $X$  dan  $Z$  sama. Sehingga, kolom dari  $P^T Z = XR$  sesuai dengan sifat. ■

**Teorema 2.12.10** Jika  $A$  matriks berordo  $n \times n$  dan  $\lambda$  adalah nilai eigen dari  $A$  dengan multiplisitas geometri  $k$ , maka  $\lambda$  terletak pada minimal  $k$  cakram Gershgorin tipe pertama dari  $A$ .

**Bukti.** Lemma 2.12.9 memastikan bahwa terdapat basis  $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$  dari ruang eigen  $S$  dari  $\lambda$  dan bilangan bulat berbeda  $p_1, \dots, p_k \in \{1, \dots, n\}$  sedemikian sehingga setiap vektor  $x_i$  mempunyai entri modulus terbesar  $p_i$ . Dalam pembuktian Teorema Gershgorin  $\lambda$  terletak pada cakram Gershgorin  $D_{p_1}, \dots, D_{p_k}$ . ■

**Contoh 2.12.11** Diberikan matriks

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 8 & 10 & 3 & 3 & 3 & 2 \\ 15 & 12 & 3 & 4 & 4 & 3 \\ 16 & 20 & 4 & 6 & 7 & 4 \\ 9 & 18 & 3 & 6 & 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

Persamaan karakteristik untuk mencari nilai eigen dari matriks  $A$  adalah

$$\lambda^6 - 35\lambda^5 + 267\lambda^4 - 738\lambda^3 + 947\lambda^2 - 579\lambda + 137 = 0.$$

Apabila ruas kiri persamaan ini difaktorkan diperoleh

$$(\lambda - 1)^4(\lambda^2 - 31\lambda + 137) = 0,$$

dan diperoleh nilai eigen  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$ ,  $\lambda_5 = \frac{31 - \sqrt{413}}{2}$ ,

$\lambda_6 = \frac{31 + \sqrt{413}}{2}$ . Empat vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai

eigen  $\lambda = 1$  adalah

$$v_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} \\ -\frac{7}{18} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} -\frac{2}{13} \\ -\frac{54}{13} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen  $\lambda = \frac{31 - \sqrt{413}}{2}$  adalah

$$v_5 = \begin{bmatrix} \frac{-14 - \sqrt{413}}{31} \\ \frac{45 + \sqrt{413}}{62} \\ \frac{17 - \sqrt{413}}{62} \\ \frac{-11 - 3\sqrt{413}}{62} \\ \frac{17 - \sqrt{413}}{31} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen  $\lambda = \frac{31 + \sqrt{413}}{2}$  adalah

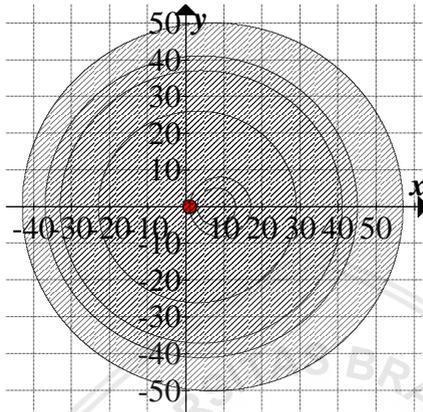
$$v_6 = \begin{bmatrix} \frac{-14 + \sqrt{413}}{31} \\ \frac{45 - \sqrt{413}}{62} \\ \frac{17 + \sqrt{413}}{62} \\ \frac{-11 + 3\sqrt{413}}{62} \\ \frac{17 + \sqrt{413}}{31} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Jari-jari cakram Gershgorin tipe pertama dari matriks  $A$  adalah penjumlahan dari entri mutlak non diagonal utama, yaitu  $r_1 = 2 + 1 + 0 + 1 + 1 = 5$ ,  $r_2 = 1 + 1 + 3 + 2 + 1 = 8$ ,  $r_3 = 8 + 10 + 3 + 3 + 2 = 26$ ,  $r_4 = 15 + 12 + 3 + 4 + 3 = 37$ ,  $r_5 = 16 + 20 + 4 + 6 + 4 = 50$ , dan  $r_6 = 9 + 18 + 3 + 6 + 5 = 41$ . Pusat cakram Gershgorin tipe pertama dari matriks  $A$  adalah entri pada diagonal utama dari masing-masing baris pada matriks  $A$ , yaitu  $a_{11} = 8$ ,  $a_{22} = 9$ ,  $a_{33} = 3$ ,  $a_{44} = 4$ ,  $a_{55} = 7$ , dan  $a_{66} = 4$ .

Sehingga, cakram Gershgorin tipe pertama dari  $A$  adalah  $D_1(8, 5)$ ,  $D_2(9, 8)$ ,  $D_3(3, 26)$ ,  $D_4(4, 37)$ ,  $D_5(7, 50)$ , dan  $D_6(4, 41)$ . Nilai eigen  $\lambda = 1$  terletak di dalam 5 cakram Gershgorin, yaitu  $D_2, D_3, D_4, D_5,$

dan  $D_6$ . Dengan demikian Teorema 2.12.10 dipenuhi,  $\lambda = 1$  terletak minimal di dalam  $k = 4$  cakram Gershgorin.

Berikut adalah gambar cakram Gershgorin tipe pertama dari matriks  $A$  pada contoh ini.



Gambar 2.4 Cakram Gershgorin tipe pertama dari Matriks  $A$

**Lemma 2.12.12** Misalkan  $\lambda$  adalah nilai eigen dari matriks  $A$  berordo  $n \times n$  dengan multiplisitas geometri  $k$ . Jika  $\hat{A}$  adalah submatriks pokok berordo  $m \times m$  dan jika  $m > n - k$  maka  $\lambda$  adalah nilai eigen dari  $\hat{A}$ .

**Teorema 2.12.13** Jika  $A$  adalah matriks berordo  $n \times n$  dan  $\lambda$  adalah nilai eigen dari  $A$  dengan multiplisitas geometri  $k$ . Konstruksi matriks  $C_k(A)$  berordo  $n \times n$  dengan cara sebagai berikut : Setiap baris dari  $A$ , ganti  $k - 1$  entri mutlak terkecil non diagonal dengan 0, maka  $\lambda$  terletak pada minimal  $k$  cakram Gershgorin dari  $C_k(A)$ .

**Bukti.** Pilih submatriks pokok  $B_1$  berordo  $(n - k + 1) \times (n - k + 1)$  dari  $A$ . Berdasarkan Lemma 2.12.12,  $\lambda$  adalah nilai eigen dari  $B_1$ , dan terletak di salah satu cakram Gershgorin.

Dalam baris yang berkaitan (misalkan baris  $r$ ) dari matriks  $A$ , ganti  $k - 1$  entri mutlak terkecil non diagonal dengan 0, sehingga  $\lambda$  terletak pada cakram Gershgorin dari matriks baru.

Kemudian hapus baris dan kolom  $r$  dari matriks  $A$  untuk memperoleh submatriks pokok  $A_2$  dari  $A$  dengan ordo  $(n - 1) \times (n - 1)$ .

Pilih submatriks pokok  $B_2$  berordo  $(n - k + 1) \times (n - k + 1)$  dari  $A_2$  dan dilanjutkan proses di atas sampai diperoleh submatriks pokok

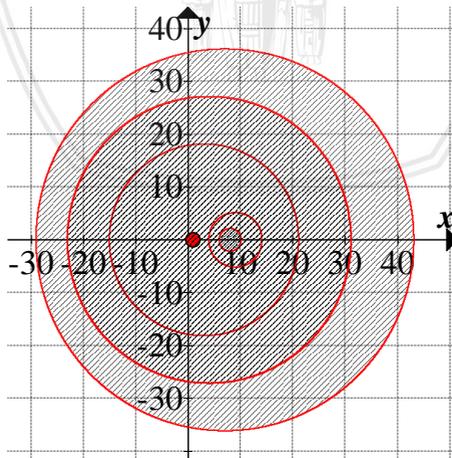
$A_k$  berordo  $(n - k + 1) \times (n - k + 1)$ , kemudian lakukan prosedur yang sama untuk  $A_k$ . Sebanyak  $k$  baris dari  $A$  telah diganti  $k - 1$  entri mutlak terkecil non diagonal dengan 0, dan  $\lambda$  terletak pada setiap cakram Gershgorin yang bersesuaian. Terakhir, setiap  $n - k$  baris yang tersisa, ganti  $k - 1$  entri mutlak terkecil non diagonal dengan 0. ■

**Contoh 2.12.14** Perhatikan kembali Contoh 2.12.11. Terlihat bahwa untuk nilai eigen  $\lambda = 1$  memiliki multiplisitas geometri  $k = 4$ . Kemudian bentuk matriks  $C_4(A)$  dengan mengganti 3 entri mutlak terkecil non diagonal per baris dengan nol sebagai berikut.

$$C_4(A) = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 8 & 10 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & 12 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 16 & 20 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 9 & 18 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Cakram Gershgorin tipe pertama dari matriks  $C_4(A)$  adalah  $D_1(8, 3)$ ,  $D_2(9, 5)$ ,  $D_3(3, 18)$ ,  $D_4(4, 27)$ ,  $D_5(7, 36)$ , dan  $D_6(4, 27)$ . Nilai eigen  $\lambda = 1$  terletak pada 4 cakram, yaitu  $D_3$ ,  $D_4$ ,  $D_5$ , dan  $D_6$ . Jadi Teorema 2.12.13 dipenuhi.

Berikut adalah gambar cakram Gershgorin tipe pertama  $C_4(A)$  dari contoh ini.



**Gambar 2.5** Cakram Gershgorin tipe pertama  $C_4(A)$  dari Matriks  $A$

**Definisi 2.12.15** Misalkan  $A$  adalah matriks real  $n \times n$ . Cakram Gershgorin setengah dari matriks  $A$  adalah cakram berpusat di elemen diagonal  $a_{ii}$  dari  $A$  dengan jari-jari sama dengan jumlah  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  elemen mutlak terbesar non diagonal pada baris ke- $i$ , dengan notasi  $[a]$  menyatakan bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan  $a$ .

**Contoh 2.12.16** Diberikan matriks  $A$  sesuai dengan Contoh 2.12.11. Akan ditentukan cakram Gershgorin setengah dari matriks  $A$ . Selanjutnya dicari jari-jari cakram jumlah elemen mutlak terbesar sebanyak  $\lfloor \frac{6}{2} \rfloor = 3$ .

Pada baris pertama,

Cakram berpusat di  $a_{11} = 8$ , dan jari-jari sebesar  $2 + 1 + 1 = 4$ .

Pada baris kedua,

Cakram berpusat di  $a_{22} = 9$ , dan jari-jari sebesar  $3 + 2 + 1 = 6$ .

Pada baris ketiga,

Cakram berpusat di  $a_{33} = 3$ , dan jari-jari sebesar  $10 + 8 + 3 = 21$ .

Pada baris keempat,

Cakram berpusat di  $a_{44} = 4$ , dan jari-jari sebesar  $15 + 12 + 4 = 31$ .

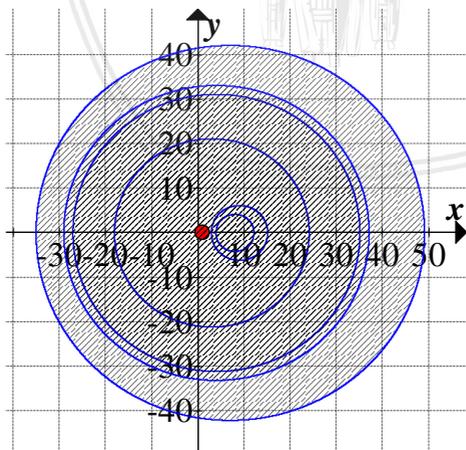
Pada baris kelima,

Cakram berpusat di  $a_{55} = 7$ , dan jari-jari sebesar  $20 + 16 + 6 = 42$ .

Pada baris keenam,

Cakram berpusat di  $a_{66} = 4$ , dan jari-jari sebesar  $18 + 9 + 6 = 33$ .

Berikut adalah gambar cakram Gershgorin setengah dari contoh ini.



**Gambar 2.6** Cakram Gershgorin Setengah dari Matriks  $A$

**Teorema 2.12.17** Jika  $A$  matriks non negatif dan  $\lambda$  adalah nilai eigen  $A$  dengan multiplisitas geometri minimal dua, maka  $\lambda$  terletak di cakram Gershgorin setengah dari  $A$ .

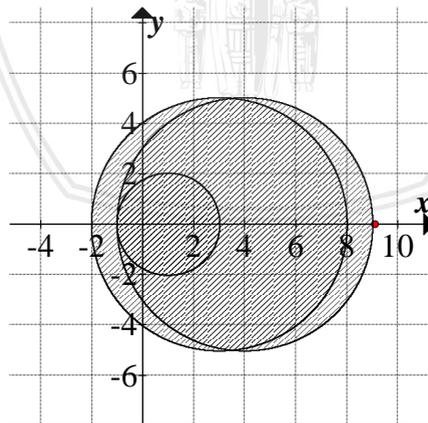
**Contoh 2.12.18** Diberikan matriks  $A$  sesuai dengan Contoh 2.12.11. Matriks  $A$  mempunyai nilai eigen  $\lambda = 1$  dengan multiplisitas geometri 4. Berdasarkan Gambar 2.6, terlihat bahwa nilai eigen  $\lambda = 1$  terletak pada cakram Gershgorin setengah.

Apabila multiplisitas nilai eigen dari suatu matriks adalah 1 maka Teorema 2.12.17 belum tentu dipenuhi, sebagaimana dituliskan dalam contoh berikut ini.

**Contoh 2.12.19** Diberikan matriks

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

memiliki nilai eigen  $\lambda = 9.100098$  dengan multiplisitas geometri 1. Cakram Gershgorin setengah dari matriks  $B$  adalah cakram pertama berpusat di 1 dan berjari-jari 2, cakram kedua berpusat di 4 dan berjari-jari 5, dan cakram ketiga berpusat di 3 dan berjari-jari 5. Berikut adalah gambar cakram Gershgorin setengah dari matriks  $B$ .



**Gambar 2.7** Cakram Gershgorin Setengah dari Matriks  $B$

Terlihat bahwa nilai eigen  $\lambda = 9.100098$  terletak diluar cakram Gershgorin setengah dari matriks  $B$ .

**Lemma 2.12.20** Diberikan fungsi real  $f(x) = \sum_{i=1}^n |x - \beta_i|$ , dengan  $\beta_1 \geq \dots \geq \beta_n$  bilangan real tidak harus berbeda.

1. Jika  $n$  adalah bilangan bulat ganjil, maka  $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \left( \beta_1 + \dots + \beta_{\frac{n-1}{2}} \right) - \left( \beta_{\frac{n+3}{2}} + \dots + \beta_n \right)$ . Minimum tercapai ketika  $x = \beta_{\frac{n+1}{2}}$ .
2. Jika  $n$  adalah bilangan bulat genap, maka  $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \left( \beta_1 + \dots + \beta_{\frac{n}{2}} \right) - \left( \beta_{\frac{n}{2}+1} + \dots + \beta_n \right)$ , untuk setiap  $x \in \left[ \beta_{\frac{n}{2}}, \beta_{\frac{n}{2}+1} \right]$  jika  $\beta_{\frac{n}{2}} \neq \beta_{\frac{n}{2}+1}$  dan  $x = \beta_{\frac{n}{2}}$  jika  $\beta_{\frac{n}{2}} = \beta_{\frac{n}{2}+1}$ .

**Bukti.** Diketahui  $f(x) = \sum_{i=1}^n |x - \beta_i|$ , dengan  $\beta_1 \geq \dots \geq \beta_n$ . Asumsikan  $n$  adalah bilangan ganjil. Langkah pertama, lakukan proses mengubah bentuk fungsi  $f(x)$  menjadi

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=1}^n |x - \beta_i| \\ &= \sum_{i=2}^{n-1} |x - \beta_i| + |x - \beta_1| + |x - \beta_n| \\ &= \sum_{i=2}^{n-1} |x - \beta_i| + (\beta_1 - x) + (x - \beta_n) \\ &= \sum_{i=2}^{n-1} |x - \beta_i| + (\beta_1 - \beta_n) \end{aligned}$$

Langkah kedua, ubah kembali bentuk fungsi  $f(x)$  menjadi

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=3}^{n-2} |x - \beta_i| + (\beta_1 - \beta_n) + |x - \beta_2| + |x - \beta_{n-1}| \\ &= \sum_{i=3}^{n-2} |x - \beta_i| + (\beta_1 - \beta_n) + (\beta_2 - x) + (x - \beta_{n-1}) \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=3}^{n-2} |x - \beta_i| + (\beta_1 - \beta_n) + (\beta_2 - \beta_{n-1})$$

Selanjutnya, lakukan langkah-langkah diatas berulang-ulang sampai diperoleh

$$f(x) = \left| x - \beta_{\frac{n+1}{2}} \right| + (\beta_1 - \beta_n) + (\beta_2 - \beta_{n-1}) + \dots + \left( \beta_{\frac{n-1}{2}} - \beta_{\frac{n+3}{2}} \right).$$

Dengan kata lain, bentuk ini dapat diubah menjadi

$$f(x) = \left| x - \beta_{\frac{n+1}{2}} \right| + \text{konstanta.}$$

Diperoleh  $f(x)$  adalah fungsi nilai mutlak. Sehingga,  $f(x)$  minimum pada saat  $x = \beta_{\frac{n+1}{2}}$ . Nilai minimum  $f(x)$  pada saat  $x = \beta_{\frac{n+1}{2}}$  adalah

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}} f(x) &= \sum_{i=1}^n \left| \beta_{\frac{n+1}{2}} - \beta_i \right| \\ &= \left| \beta_{\frac{n+1}{2}} - \beta_1 \right| + \left| \beta_{\frac{n+1}{2}} - \beta_2 \right| + \dots + \left| \beta_{\frac{n+1}{2}} - \beta_{\frac{n-1}{2}} \right| + \\ &\quad \left| \beta_{\frac{n+1}{2}} - \beta_{\frac{n+1}{2}} \right| + \left| \beta_{\frac{n+1}{2}} - \beta_{\frac{n+3}{2}} \right| + \dots + \\ &\quad \left| \beta_{\frac{n+1}{2}} - \beta_{n-1} \right| + \left| \beta_{\frac{n+1}{2}} - \beta_n \right| \\ &= \left( \beta_1 - \beta_{\frac{n+1}{2}} \right) + \left( \beta_2 - \beta_{\frac{n+1}{2}} \right) + \dots + \\ &\quad \left( \beta_{\frac{n-1}{2}} - \beta_{\frac{n+1}{2}} \right) + \left( \beta_{\frac{n+1}{2}} - \beta_{\frac{n+1}{2}} \right) + \left( \beta_{\frac{n+1}{2}} - \beta_{\frac{n+3}{2}} \right) \\ &\quad + \dots + \left( \beta_{\frac{n+1}{2}} - \beta_{n-1} \right) + \left( \beta_{\frac{n+1}{2}} - \beta_n \right) \\ &= \left( \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{\frac{n-1}{2}} \right) - \left( \beta_{\frac{n+3}{2}} + \dots + \beta_{n-1} + \beta_n \right) \end{aligned}$$

Terbukti  $f(x) = \sum_{i=1}^n |x - \beta_i|$ , dengan  $\beta_1 \geq \dots \geq \beta_n$  untuk  $n$  ganjil, memiliki  $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \left( \beta_1 + \dots + \beta_{\frac{n-1}{2}} \right) - \left( \beta_{\frac{n+3}{2}} + \dots + \beta_n \right)$ , ketika  $x = \beta_{\frac{n+1}{2}}$ .

Apabila  $n$  genap, dengan cara yang sama dengan  $n$  ganjil,  $f(x)$  dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\begin{aligned} f(x) &= \left| x - \beta_{\frac{n}{2}} \right| + \left| x - \beta_{\frac{n}{2}+1} \right| + (\beta_1 - \beta_n) + (\beta_2 - \beta_{n-1}) \\ &\quad + \dots + \left( \beta_{\frac{n}{2}-1} - \beta_{\frac{n}{2}+2} \right) \\ &= \left| x - \beta_{\frac{n}{2}} \right| + \left| x - \beta_{\frac{n}{2}+1} \right| + \text{konstanta.} \end{aligned}$$

Fungsi  $f(x)$  dengan bentuk tersebut memiliki nilai minimum pada saat  $x \in [\beta_{\frac{n}{2}}, \beta_{\frac{n}{2}+1}]$ , jika  $\beta_{\frac{n}{2}} \neq \beta_{\frac{n}{2}+1}$  dan  $x = \beta_{\frac{n}{2}}$  jika  $\beta_{\frac{n}{2}} = \beta_{\frac{n}{2}+1}$  dengan nilai fungsi

$$\begin{aligned} f(x) &= \left( \beta_{\frac{n}{2}} - \beta_{\frac{n}{2}+1} \right) + (\beta_1 - \beta_n) + (\beta_2 - \beta_{n-1}) \\ &\quad + \dots + \left( \beta_{\frac{n}{2}-1} - \beta_{\frac{n}{2}+2} \right) \\ &= \left( \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{\frac{n}{2}-1} + \beta_{\frac{n}{2}} \right) - \\ &\quad \left( \beta_{\frac{n}{2}+1} + \beta_{\frac{n}{2}+2} + \dots + \beta_{n-1} + \beta_n \right). \end{aligned}$$

Terbukti  $f(x) = \sum_{i=1}^n |x - \beta_i|$ , dengan  $\beta_1 \geq \dots \geq \beta_n$  untuk  $n$  genap, memiliki  $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \left( \beta_1 + \dots + \beta_{\frac{n}{2}} \right) - \left( \beta_{\frac{n}{2}+1} + \dots + \beta_n \right)$ , ketika  $x \in [\beta_{\frac{n}{2}}, \beta_{\frac{n}{2}+1}]$ , jika  $\beta_{\frac{n}{2}} \neq \beta_{\frac{n}{2}+1}$  dan  $x = \beta_{\frac{n}{2}}$  jika  $\beta_{\frac{n}{2}} = \beta_{\frac{n}{2}+1}$ . ■

**Lemma 2.12.21** Jika  $S$  adalah subruang dari  $\mathbb{C}^n$  dengan dimensi  $k \geq 2$  dan  $\mathbf{w} \neq 0$  adalah vektor di  $\mathbb{C}^n$ , maka ada minimal  $k - 1$  vektor satu bebas linear dalam  $S$  yang ortogonal dengan  $\mathbf{w}$ .

**Lemma 2.12.22** Jika  $A$  adalah matriks  $n \times n$  dan  $\lambda$  adalah nilai eigen dari  $A$  dengan multiplisitas geometri  $k$ . Misalkan  $\hat{A}$  adalah submatriks pokok  $A$  berordo  $m \times m$  dengan  $m > n - k$ , maka  $\lambda$  adalah nilai eigen dari  $\hat{A}$  dengan multiplisitas geometri minimal  $m + k - n$ .

## BAB III HASIL DAN PEMBAHASAN

### 3.1. Cakram Gershgorin Tipe Kedua

Pada bagian ini, dibahas definisi dan contoh cakram Gershgorin tipe kedua dari matriks real berordo  $n \times n$ , yang dikutip dari Rachid Marsli dan Frank Hall(2017).

**Definisi 3.1.1** (Cakram Gershgorin Tipe Kedua)

Misalkan  $A = [a_{ij}]$  adalah matriks real berordo  $n \times n$  dan  $x_{i1} \geq \dots \geq x_{in}$  menyatakan urutan tak naik dari  $a_{i1}, \dots, a_{ii-1}, 0, a_{ii+1}, \dots, a_{in}$ , untuk  $i = 1, \dots, n$ . Cakram Gershgorin tipe kedua dari  $A$  dinotasikan dengan  $\hat{D}(a_{ii}, \hat{r}_i)$  didefinisikan sebagai :

1. Pusat cakram terletak di elemen diagonal dari baris ke- $i$  matriks  $A$ , yaitu  $a_{ii}$ .
2. Dengan jari-jari cakram

$$(a) \hat{r}_i = \sum_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} x_{ij} - \sum_{j=\frac{n+3}{2}}^n x_{ij}, \text{ jika } n \text{ ganjil.}$$

$$(b) \hat{r}_i = \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} x_{ij} - \sum_{j=\frac{n}{2}+1}^n x_{ij}, \text{ jika } n \text{ genap.}$$

Perbedaan dari cakram Gershgorin tipe pertama dengan cakram Gershgorin tipe kedua adalah jari-jari cakram Gershgorin tipe kedua lebih kecil dari cakram Gershgorin tipe pertama, karena jari-jari cakram Gershgorin tipe kedua adalah pengurangan yang didefinisikan berdasarkan Definisi 3.1.1, sedangkan cakram Gershgorin tipe pertama adalah jumlah entri non diagonal utama.

Berdasarkan Definisi 3.1.1, berikut adalah contoh dari cakram Gershgorin tipe kedua dari matriks berordo  $6 \times 6$ .

**Contoh 3.1.2** Diberikan matriks

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 8 & 10 & 3 & 3 & 3 & 2 \\ 15 & 12 & 3 & 4 & 4 & 3 \\ 16 & 20 & 4 & 6 & 7 & 4 \\ 9 & 18 & 3 & 6 & 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

Akan ditentukan cakram Gershgorin tipe kedua dari matriks  $A$ .

### Penyelesaian.

Matriks  $A$  pada contoh ini mempunyai 6 baris, sehingga ada 6 cakram Gershgorin tipe kedua, yaitu :

Pada baris pertama,

Pusat cakram terletak pada entri diagonal utama pada baris pertama,  $a_{11} = 8$  dan selanjutnya ditentukan jari-jari cakram Gershgorin tipe kedua, yaitu dengan cara mengganti entri pada diagonal utama dengan 0,  $a_{11} = 0$ , diperoleh urutan tak naik dari entri-entri baris pertama adalah  $x_{11} = 2$ ,  $x_{12} = 1$ ,  $x_{13} = 1$ ,  $x_{14} = 1$ ,  $x_{15} = 0$ ,  $x_{16} = 0$ . Sehingga, jari-jarinya adalah

$$\begin{aligned}\hat{r}_1 &= \sum_{j=1}^{\frac{6}{2}} x_{1j} - \sum_{j=\frac{6}{2}+1}^6 x_{1j} \\ &= \sum_{j=1}^3 x_{1j} - \sum_{j=4}^6 x_{1j} \\ &= (2 + 1 + 1) - (1 + 0 + 0) \\ &= 4 - 1 \\ &= 3\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh  $\hat{D}_1(8, 3)$ .

Dengan cara yang sama, untuk menentukan jari-jari cakram Gershgorin tipe kedua, untuk setiap baris pada entri diagonal utama diganti dengan 0, kemudian ditentukan urutan tak naik dari entri-entri setiap baris, dan ditentukan jari-jari cakram sesuai dengan Definisi 3.1.1.

Pada baris kedua,

Pusat cakram terletak pada  $a_{22} = 9$  dan misalkan  $a_{22} = 0$ , diperoleh urutan tak naik dari entri-entri baris kedua adalah  $x_{21} = 3$ ,  $x_{22} = 2$ ,  $x_{23} = 1$ ,  $x_{24} = 1$ ,  $x_{25} = 1$ ,  $x_{26} = 0$ . Sehingga, jari-jarinya adalah

$$\begin{aligned}\hat{r}_2 &= \sum_{j=1}^3 x_{2j} - \sum_{j=4}^6 x_{2j} \\ &= (3 + 2 + 1) - (1 + 1 + 0) \\ &= 6 - 2 \\ &= 4\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh  $\hat{D}_2(9, 4)$ .

Pada baris ketiga,  
Pusat cakram terletak pada  $a_{33} = 3$  dan misalkan  $a_{33} = 0$ , diperoleh urutan tak naik dari entri-entri baris ketiga adalah  $x_{31} = 10$ ,  $x_{32} = 8$ ,  $x_{33} = 3$ ,  $x_{34} = 3$ ,  $x_{35} = 2$ ,  $x_{36} = 0$ . Sehingga, jari-jarinya adalah

$$\begin{aligned}\hat{r}_3 &= \sum_{j=1}^3 x_{3j} - \sum_{j=4}^6 x_{3j} \\ &= (10 + 8 + 3) - (3 + 2 + 0) \\ &= 21 - 5 \\ &= 16\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh  $\hat{D}_3(3, 16)$ .

Pada baris keempat,  
Pusat cakram terletak pada  $a_{44} = 4$  dan misalkan  $a_{44} = 0$ , diperoleh urutan tak naik dari entri-entri baris keempat adalah  $x_{41} = 15$ ,  $x_{42} = 12$ ,  $x_{43} = 4$ ,  $x_{44} = 3$ ,  $x_{45} = 3$ ,  $x_{46} = 0$ . Sehingga, jari-jarinya adalah

$$\begin{aligned}\hat{r}_4 &= \sum_{j=1}^3 x_{4j} - \sum_{j=4}^6 x_{4j} \\ &= (15 + 12 + 4) - (3 + 3 + 0) \\ &= 31 - 6 \\ &= 25\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh  $\hat{D}_4(4, 25)$ .

Pada baris kelima,  
Pusat cakram terletak pada  $a_{55} = 7$  dan misalkan  $a_{55} = 0$ , diperoleh urutan tak naik dari entri-entri baris kelima adalah  $x_{51} = 20$ ,  $x_{52} = 16$ ,  $x_{53} = 6$ ,  $x_{54} = 4$ ,  $x_{55} = 4$ ,  $x_{56} = 0$ . Sehingga, jari-jarinya adalah

$$\begin{aligned}\hat{r}_5 &= \sum_{j=1}^3 x_{5j} - \sum_{j=4}^6 x_{5j} \\ &= (20 + 16 + 6) - (4 + 4 + 0) \\ &= 42 - 8 \\ &= 34\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh  $\hat{D}_5(7, 34)$ .

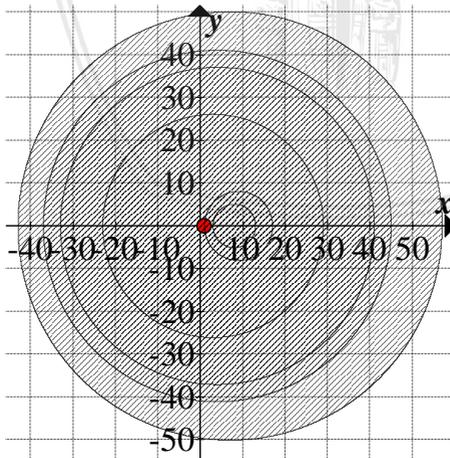
Pada baris keenam, Pusat cakram terletak pada  $a_{66} = 4$  dan misalkan  $a_{66} = 0$ , diperoleh urutan tak naik dari entri-entri baris keenam adalah  $x_{61} = 18, x_{62} = 9, x_{63} = 6, x_{64} = 5, x_{65} = 3, x_{66} = 0$ . Sehingga, jari-jarinya adalah

$$\begin{aligned}\hat{r}_6 &= \sum_{j=1}^3 x_{6j} - \sum_{j=4}^6 x_{6j} \\ &= (18 + 9 + 6) - (5 + 3 + 0) \\ &= 33 - 8 \\ &= 25\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh  $\hat{D}_6(4, 25)$ .

Dengan demikian, keenam cakram Gersgorin tipe kedua dari matriks  $A$  pada contoh ini adalah :  $\hat{D}_1(8, 3), \hat{D}_2(9, 4), \hat{D}_3(3, 16), \hat{D}_4(4, 25), \hat{D}_5(7, 34),$  dan  $\hat{D}_6(4, 25)$ .

Berikut adalah gambar keenam cakram Gersgorin tipe kedua dari contoh ini.



Gambar 3.1 Cakram Gersgorin tipe kedua dari Matriks  $A$

Pada Contoh 3.1.2 telah dijelaskan cara memperoleh cakram Gershgorin tipe kedua dari matriks  $6 \times 6$ . Semakin besar ordo dari matriks, semakin banyak cakram yang dihasilkan dan penentuan cakram semakin banyak dan membutuhkan waktu yang lama. Untuk mempermudah mencari cakram Gershgorin tipe kedua dengan ordo matriks yang cukup besar, dapat digunakan bantuan perangkat lunak MAPLE ataupun MATLAB. Berikut diberikan contoh kode program MAPLE untuk menentukan cakram Gershgorin tipe kedua.

**Contoh 3.1.3** Berikut adalah kode program MAPLE untuk menentukan cakram Gershgorin tipe kedua dari matriks  $A$  pada Contoh 3.1.2.

```

restart:
with(linalg):
A:=matrix(6,6,[8, 2, 1, 0, 1, 1, 1, 9, 1, 3, 2, 1, 8,
    10, 3, 3, 3, 2, 15, 12, 3, 4, 4, 3, 16, 20, 4, 6, 7,
    4, 9, 18, 3, 6, 5, 4]):
n:=rowdim(A):
for i from 1 to n do
    pusatcakramke[i]:=A[i,i]
end do:
A0:=evalm(A):
for j from 1 to n do
    A0[j,j]:=0:
end do:
evalm(A0):
Aurutantaknaik:=matrix(map(sort,convert(A0,listlist
    ,`>`))):
if mod(n,2)=~1 then
    for im from 1 to n do
        rtopi[im]:=sum(Aurutantaknaik[im,jo],jo=1..(n-1)
            /2)-(sum(Aurutantaknaik[im,jo],jo=(n-1)/2..n)
            )
    end do
else
    for im from 1 to n do
        rtopi[im]:=sum(Aurutantaknaik[im,jo],jo=1..n/2)
            -(sum(Aurutantaknaik[im,jo],jo=n/2+1..n))
    end do:
end if:
printf("\nCakram Gershgorin Tipe Kedua dari A adalah\n
===== \n");
for ja from 1 to n do
    printf("^D_%d(%6.6f,%6.6f)\n",ja,pusatcakramke[ja],
        rtopi[ja]);

```

```
end do;
printf("\n");
```

Berikut adalah keluaran dari kode program MAPLE di atas.

```
Cakram Gershgorin Tipe Kedua dari A adalah
=====
^D_1(8.000000,3.000000)
^D_2(9.000000,4.000000)
^D_3(3.000000,16.000000)
^D_4(4.000000,25.000000)
^D_5(7.000000,34.000000)
^D_6(4.000000,25.000000)
```

**Definisi 3.1.4** Misalkan  $A = [a_{ij}]$  adalah matriks real berordo  $n \times n$  dan misalkan  $x_{i1} \geq \dots \geq x_{in}$  menyatakan urutan tak naik dari  $a_{i1}, \dots, a_{ii-1}, 0, a_{ii+1}, \dots, a_{in}$ . Misalkan  $k$  adalah bilangan bulat sedemikian sehingga  $1 \leq k \leq n$ . Untuk  $i = 1, \dots, n$ , definisikan cakram  $D_i^k(A)$  sebagai berikut :

1. Pusat  $a_{ii}$  terletak di elemen diagonal dari baris ke- $i$  matriks  $A$ .
2. Jari-jarinya adalah

$$(a) r_{ik} = \sum_{j=1}^{\frac{n-k+1}{2}} x_{ij} - \sum_{j=\frac{n+k+1}{2}}^n x_{ij}, \text{ jika } n - k \text{ ganjil.}$$

$$(b) r_{ik} = \sum_{j=1}^{\frac{n-k+2}{2}} x_{ij} - \sum_{j=\frac{n+k}{2}}^n x_{ij}, \text{ jika } n - k \text{ genap.}$$

**Contoh 3.1.5** Diberikan matriks  $A$  pada Contoh 3.1.2. Akan ditentukan cakram Gershgorin sesuai dengan Definisi 3.1.4.

**Penyelesaian.**

Jika dipilih  $k = 4$  maka  $n - k = 6 - 4 = 2$  adalah genap. Sehingga, Untuk baris pertama, pusat cakram terletak pada  $a_{11} = 8$ , kemudian ditentukan jari-jari cakram dengan mengganti entri diagonal utama dengan 0, yaitu  $a_{11} = 0$ . Selanjutnya ditentukan urutan tak naik dari entri-entri pada baris pertama, yaitu  $x_{11} = 2, x_{12} = 1, x_{13} = 1, x_{14} = 1, x_{15} = 0$ ,

$x_{16} = 0$ . Sehingga jari-jarinya adalah

$$\begin{aligned}r_{14} &= \sum_{j=1}^{\frac{6-4+2}{2}} x_{1j} - \sum_{j=\frac{6+4}{2}}^6 x_{1j} \\&= \sum_{j=1}^2 x_{1j} - \sum_{j=5}^6 x_{1j} \\&= (2 + 1) - (0 - 0) \\&= 3 - 0 \\&= 3\end{aligned}$$

Diperoleh  $D_1^4(8, 3)$ .

Dengan cara yang sama, untuk menentukan jari-jari cakram Gershgorin sesuai dengan Definisi 3.1.4, entri pada diagonal utama dalam setiap baris diganti dengan 0, kemudian ditentukan urutan tak naik dari entri-entri dalam suatu baris, dan ditentukan jari-jari cakram sesuai dengan Definisi 3.1.4.

Untuk baris kedua, pusat cakram terletak pada  $a_{22} = 9$ , dan ganti  $a_{22} = 0$ . Diperoleh urutan tak naik dari baris kedua adalah  $x_{21} = 3, x_{22} = 2, x_{23} = 1, x_{24} = 1, x_{25} = 1, x_{26} = 0$ . Sehingga jari-jarinya adalah

$$\begin{aligned}r_{24} &= \sum_{j=1}^2 x_{2j} - \sum_{j=5}^6 x_{2j} \\&= (3 + 2) - (1 + 0) \\&= 5 - 1 \\&= 4\end{aligned}$$

Diperoleh  $D_2^4(9, 4)$ .

Untuk baris ketiga, pusat cakram terletak pada  $a_{33} = 3$ , dan ganti  $a_{33} = 0$ . Diperoleh urutan tak naik dari baris ketiga adalah  $x_{31} = 10, x_{32} = 8, x_{33} = 3, x_{34} = 3, x_{35} = 2, x_{36} = 0$ . Sehingga jari-jarinya adalah

$$\begin{aligned}
 r_{34} &= \sum_{j=1}^2 x_{3j} - \sum_{j=5}^6 x_{3j} \\
 &= (10 + 8) - (2 + 0) \\
 &= 18 - 2 \\
 &= 16
 \end{aligned}$$

Diperoleh  $D_3^4(3, 16)$ .

Untuk baris keempat, pusat cakram terletak pada  $a_{44} = 4$ , dan ganti  $a_{44} = 0$ . Diperoleh urutan tak naik dari baris keempat adalah  $x_{41} = 15, x_{42} = 12, x_{43} = 4, x_{44} = 3, x_{45} = 3, x_{46} = 0$ . Sehingga jari-jarinya adalah

$$\begin{aligned}
 r_{44} &= \sum_{j=1}^2 x_{4j} - \sum_{j=5}^6 x_{4j} \\
 &= (15 + 12) - (3 + 0) \\
 &= 27 - 3 \\
 &= 24
 \end{aligned}$$

Diperoleh  $D_4^4(4, 24)$ .

Untuk baris kelima, pusat cakram terletak pada  $a_{55} = 7$ , dan ganti  $a_{55} = 0$ . Diperoleh urutan tak naik dari baris kelima adalah  $x_{51} = 20, x_{52} = 16, x_{53} = 6, x_{54} = 4, x_{55} = 4, x_{56} = 0$ . Sehingga jari-jarinya adalah

$$\begin{aligned}
 r_{54} &= \sum_{j=1}^2 x_{5j} - \sum_{j=5}^6 x_{5j} \\
 &= (20 + 16) - (4 + 0) \\
 &= 36 - 4 \\
 &= 32
 \end{aligned}$$

Diperoleh  $D_5^4(7, 32)$ .

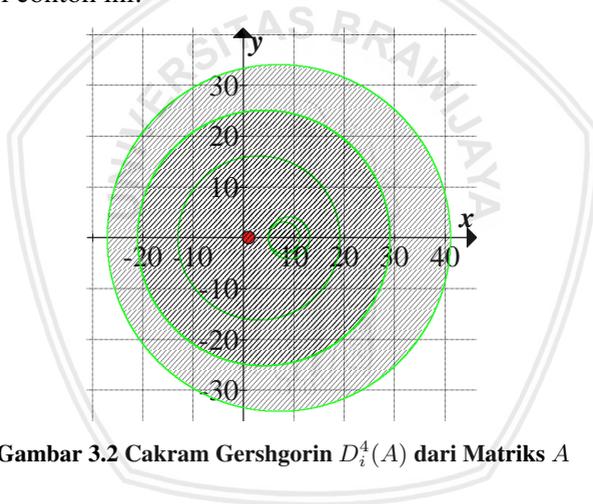
Untuk baris keenam, pusat cakram terletak pada  $a_{66} = 4$ , dan ganti  $a_{66} = 0$ . Diperoleh urutan tak naik dari baris keenam adalah  $x_{61} = 18, x_{62} = 9, x_{63} = 6,$

$x_{64} = 5, x_{65} = 3, x_{66} = 0$ . Sehingga jari-jarinya adalah

$$\begin{aligned} r_{64} &= \sum_{j=1}^2 x_{6j} - \sum_{j=5}^6 x_{6j} \\ &= (18 + 9) - (3 + 0) \\ &= 27 - 3 \\ &= 24 \end{aligned}$$

Diperoleh  $D_6^4(4, 24)$ .

Sehingga, keenam cakram Gershgorin sesuai dengan Definisi 3.1.4 adalah  $D_1^4(8, 3)$ ,  $D_2^4(9, 4)$ ,  $D_3^4(3, 16)$ ,  $D_4^4(4, 24)$ ,  $D_5^4(7, 32)$ , dan  $D_6^4(4, 24)$ . Berikut adalah gambar dari cakram Gershgorin  $D_i^4(A)$  dari contoh ini.



Gambar 3.2 Cakram Gershgorin  $D_i^4(A)$  dari Matriks  $A$

Semakin besar ordo dari matriks, semakin panjang dan membutuhkan waktu yang lama untuk menentukan cakram Gershgorin  $D_i^k(A)$ . Sehingga untuk menentukan cakram Gershgorin  $D_i^k(A)$  agar lebih praktis dan tidak membutuhkan waktu yang lama, dibutuhkan program komputer MAPLE sebagaimana dituliskan dalam contoh berikut.

**Contoh 3.1.6** Berikut adalah kode program MAPLE untuk menentukan cakram Gershgorin  $D_i^k(A)$  pada Contoh 3.1.5.

restart:

```

with(linalg):
A := matrix(6, 6, [8, 2, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 9, 1, 3, 2, 1,
  8, 10, 3, 3, 3, 2, 15, 12, 3, 4, 4, 3, 16, 20, 4, 6,
  7, 4, 9, 18, 3, 6, 5, 4]):
n := rowdim(A):
k := 4:
for i to n do
  pusatcakramke[i] := A[i, i]
end do:
A0 := evalm(A):
for j from 1 to n do
  A0[j, j] := 0
end do:
evalm(A0):
Aurutantaknaik := matrix(map(sort, convert(A0, listlist)
, '>`)):
if mod(n-k, 2) =~ 1 then
  for im from 1 to n do
    rtopi[im] := sum(Aurutantaknaik[im, jo], jo = 1
      .. (n-k+1)*(1/2))-(sum(Aurutantaknaik[im, jo
      ], jo = (n+k+1)*(1/2) .. n))
  end do
else
  for im from 1 to n do
    rtopi[im] := sum(Aurutantaknaik[im, jo], jo = 1
      .. (n-k+2)*(1/2))-(sum(Aurutantaknaik[im, jo
      ], jo = (n+k)*(1/2) .. n))
  end do
end if
printf("\nCakram Gershgorin D_i^%d(A) adalah\n
===== \n", k);
for ja to n do printf("D_%d^%d(%6.6f,%6.6f)\n", ja, k
, pusatcakramke[ja], rtopi[ja]) end do; printf("\n")

```

Keluaran dari program MAPLE tersebut adalah

```

Cakram Gershgorin D_i^4(A) adalah
=====
D_1^4(8.000000,3.000000)
D_2^4(9.000000,4.000000)
D_3^4(3.000000,16.000000)
D_4^4(4.000000,24.000000)
D_5^4(7.000000,32.000000)
D_6^4(4.000000,24.000000)

```

### 3.2. Syarat Cukup Menentukan Lokasi Nilai Eigen di dalam Cakram Gershgorin Tipe Kedua

Pada bagian ini dibahas syarat-syarat cukup dari lokasi nilai eigen suatu matriks berordo  $n \times n$  agar terletak pada cakram Gershgorin tipe kedua, yang dikutip dari Rachid Marsli dan Frank Hall(2017).

**Teorema 3.2.1** Jika  $A$  adalah matriks real berordo  $n \times n$  dan  $\lambda$  adalah nilai eigen dari  $A$  berkaitan dengan vektor eigen yang ortogonal dengan vektor satu, maka  $\lambda$  berada di suatu cakram Gershgorin tipe kedua dari  $A$ .

**Bukti.** Misalkan  $\mathbf{e} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$  adalah vektor satu dalam  $\mathbb{R}^n$  dan misalkan

$\lambda$  adalah nilai eigen berkaitan dengan vektor eigen  $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ .

Diketahui bahwa setiap vektor eigen ortogonal dengan vektor satu, sehingga

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \mathbf{e} &= 0 \\ \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} &= 0 \\ v_1 + \dots + v_n &= 0 \\ \sum_{i=1}^n v_i &= 0. \end{aligned}$$

Kemudian, andaikan  $v_1$  adalah elemen mutlak terbesar dalam  $\mathbf{v}$ . Dari definisi vektor eigen dan nilai eigen,

$$\begin{aligned} A\mathbf{v} &= \lambda\mathbf{v} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} &= \lambda \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_{11}v_1 + \dots + a_{1n}v_n \\ \vdots \\ a_{n1}v_1 + \dots + a_{nn}v_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \lambda v_1 \\ \vdots \\ \lambda v_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Apabila dinyatakan dalam notasi sigma untuk baris pertama,

$$\sum_{j=1}^n a_{1j}v_j = \lambda v_1$$

$$a_{11}v_1 + \sum_{j=2}^n a_{1j}v_j = \lambda v_1$$

$$\lambda v_1 - a_{11}v_1 = \sum_{j=2}^n a_{1j}v_j$$

$$(\lambda - a_{11})v_1 = \sum_{j=2}^n a_{1j}v_j$$

Karena  $\sum_{j=1}^n v_j = 0$ , mengakibatkan  $\sum_{j=1}^n xv_j = 0$ . Sehingga,

$$(\lambda - a_{11})v_1 = \sum_{j=2}^n a_{1j}v_j$$

$$(\lambda - a_{11})v_1 = -0 + \sum_{j=2}^n a_{1j}v_j$$

$$(\lambda - a_{11})v_1 = -\sum_{j=1}^n xv_j + \sum_{j=2}^n a_{1j}v_j$$

$$(\lambda - a_{11})v_1 = -xv_1 - \sum_{j=2}^n xv_j + \sum_{j=2}^n a_{1j}v_j$$

$$(\lambda - a_{11})v_1 = (0 - x)v_1 + \sum_{j=2}^n a_{1j}v_j - xv_j$$

$$(\lambda - a_{11})v_1 = (0 - x)v_1 + \sum_{j=2}^n (a_{1j} - x)v_j$$

$$(\lambda - a_{11})v_1 = (0 - x)v_1 + \sum_{j=2}^n a_{1j}v_j - xv_j$$

$$|\lambda - a_{11}| |v_1| = \left| (0 - x) v_1 + \sum_{j=2}^n (a_{1j} - x) v_j \right|$$

Dengan menggunakan pertidaksamaan segitiga,

$$\begin{aligned} |\lambda - a_{11}| |v_1| &\leq |0 - x| |v_1| + \sum_{j=2}^n |(a_{1j} - x)| |v_j| \\ &\leq \left( |0 - x| + \sum_{j=2}^n |(a_{1j} - x)| \right) |v_1| \end{aligned}$$

Sehingga,

$$|\lambda - a_{11}| \leq \min_{x \in \mathbb{R}} \left( |x| + \sum_{j=2}^n |(a_{1j} - x)| \right)$$

Karena  $x_{i1} \geq \dots \geq x_{in}$  menyatakan urutan tak naik dari  $a_{i1}, \dots, a_{ii-1}, 0, a_{ii+1}, \dots, a_{in}$ , diperoleh

$$\begin{aligned} |\lambda - a_{11}| &\leq \min_{x \in \mathbb{R}} \left( \sum_{j=1}^n |x_{1j} - x| \right) \\ |\lambda - a_{11}| &\leq \min_{x \in \mathbb{R}} \left( \sum_{j=1}^n |x - x_{1j}| \right) \end{aligned}$$

Dengan menggunakan Lemma 2.12.20, pada saat  $n$  ganjil,

$$\begin{aligned} |\lambda - a_{11}| &\leq \left( x_{11} + \dots + x_{\frac{n-1}{2}1} \right) - \left( x_{\frac{n+3}{2}1} + \dots + x_{n1} \right) \\ |\lambda - a_{11}| &\leq \sum_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} x_{i1} - \sum_{j=\frac{n+3}{2}}^n x_{i1} \\ |\lambda - a_{11}| &\leq \hat{r}_1. \end{aligned}$$

Pada saat  $n$  genap,

$$|\lambda - a_{11}| \leq (x_{11} + \dots + x_{\frac{n}{2}1}) - (x_{(\frac{n}{2}+1)1} + \dots + x_{n1})$$

$$|\lambda - a_{11}| \leq \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} x_{j1} - \sum_{j=\frac{n}{2}+1}^n x_{j1}$$

$$|\lambda - a_{11}| \leq \hat{r}_1.$$

Diperoleh  $|\lambda - a_{11}| \leq \hat{r}_1$ , yang berarti bahwa  $\lambda$  terletak di cakram Gershgorin tipe kedua dari  $A$ . Teorema terbukti. ■

**Contoh 3.2.2** Diberikan matriks  $A$  sesuai dengan Contoh 2.1.2, yaitu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

mempunyai nilai eigen 1 dengan vektor eigen  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ , yang ortogonal dengan vektor satu.

Akan ditunjukkan nilai eigen 1 terletak dalam cakram Gershgorin tipe kedua.

**Penyelesaian.**

Terlebih dahulu ditentukan cakram Gershgorin tipe kedua dari matriks  $A$ .

Untuk baris pertama,

Pusat cakram terletak pada  $a_{11} = 1$  dan misalkan  $a_{11} = 0$ , diperoleh urutan tak naik dari entri-entri baris kedua adalah  $x_{11} = 0$ ,  $x_{12} = 0$ ,  $x_{13} = 0$ . Sehingga, jari-jarinya adalah

$$\begin{aligned} \hat{r}_1 &= \sum_{j=1}^1 x_{1j} - \sum_{j=3}^3 x_{1j} \\ &= 0 - 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh  $\hat{D}_1(1, 0)$ .

Untuk baris kedua,

Pusat cakram terletak pada  $a_{22} = 1$  dan misalkan  $a_{22} = 0$ , diperoleh

urutan tak naik dari entri-entri baris kedua adalah  $x_{21} = 2, x_{22} = 0, x_{23} = 0$ . Sehingga, jari-jarinya adalah

$$\begin{aligned}\hat{r}_2 &= \sum_{j=1}^1 x_{2j} - \sum_{j=3}^3 x_{2j} \\ &= 2 - 0 \\ &= 2\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh  $\hat{D}_2(1, 2)$ .

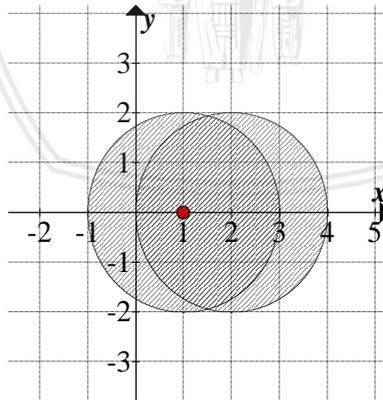
Untuk baris ketiga,

Pusat cakram terletak pada  $a_{33} = 2$  dan misalkan  $a_{33} = 0$ , diperoleh urutan tak naik dari entri-entri baris ketiga adalah  $x_{31} = 2, x_{32} = 1, x_{33} = 0$ . Sehingga, jari-jarinya adalah

$$\begin{aligned}\hat{r}_3 &= \sum_{j=1}^1 x_{3j} - \sum_{j=3}^3 x_{3j} \\ &= 2 - 0 \\ &= 2\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh  $\hat{D}_3(2, 2)$ .

Berikut adalah gambar cakram Gershgorin tipe kedua dari contoh ini.



**Gambar 3.3 Cakram Gershgorin Tipe Kedua dari Matriks  $A$**

Terlihat bahwa nilai eigen 1 terletak dalam cakram Gershgorin tipe kedua, jadi teorema dipenuhi.

Pada Contoh 3.2.2 telah ditunjukkan bahwa apabila vektor eigen ortogonal dengan vektor satu, maka nilai eigen terletak pada cakram Gershgorin tipe kedua. Berikut disajikan contoh matriks dengan nilai eigen tidak ortogonal dengan vektor satu.

**Contoh 3.2.3** Diberikan matriks  $B$  sesuai dengan Contoh 2.12.19, yaitu

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

memiliki nilai eigen  $\lambda_1 = 9.100098$  dengan vektor eigen

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0.2580 \\ 0.7261 \\ 0.6374 \end{bmatrix},$$

$\lambda_2 = -1.6865$ , dengan vektor eigen

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -0.2594 \\ 0.6876 \\ 0.6782 \end{bmatrix},$$

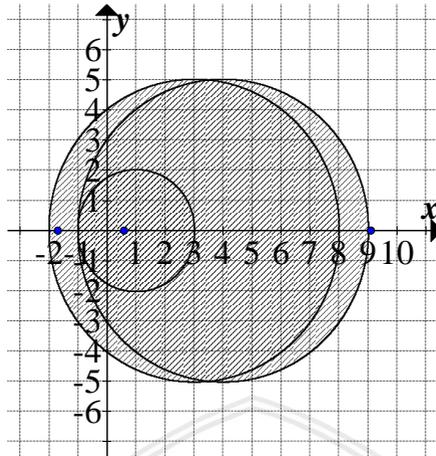
$\lambda_3 = 0.5864$  dengan vektor eigen

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0.9307 \\ -0.0096 \\ -0.3637 \end{bmatrix}.$$

Semua vektor eigen  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$  tidak ortogonal dengan vektor satu, karena jumlah entri-entri vektor eigen tidak sama dengan 0. Akan ditunjukkan Teorema 3.2.1 belum tentu dipenuhi.

### Penyelesaian.

Dengan menggunakan Definisi 3.1.1, diperoleh cakram Gershgorin tipe kedua dari matriks  $B$  adalah  $\hat{D}_1(1, 2)$ ,  $\hat{D}_2(4, 5)$ , dan  $\hat{D}_3(3, 5)$ . Berdasarkan Gambar 3.4 dapat dilihat bahwa nilai eigen  $\lambda_1 = 9.100098$  terletak di luar cakram Gershgorin tipe kedua, namun nilai eigen  $\lambda_2 = -1.6865$  dan  $\lambda_3 = 0.5864$  terletak di dalam cakram Gershgorin tipe kedua. Jadi Teorema 3.2.1 belum tentu dipenuhi apabila vektor eigen tidak ortogonal dengan vektor satu.



Gambar 3.4 Cakram Gershgorin tipe kedua dari matriks  $B$

**Teorema 3.2.4** Jika  $A$  adalah matriks real berordo  $n \times n$ , dan  $\lambda$  adalah nilai eigen dari  $A$  dengan multiplisitas geometri  $k \geq 2$ , maka  $\lambda$  terletak pada irisan minimal satu cakram Gershgorin tipe pertama  $C_k(A)$  dan minimal  $k - 1$  cakram Gershgorin tipe kedua dari  $A$ , setiap cakram dikonstruksikan dari baris yang berbeda dari  $A$ .

**Bukti.** Nilai eigen  $\lambda$  mempunyai dimensi ruang eigen  $k$ . Berdasarkan Lemma 2.12.21, terdapat vektor eigen sebanyak  $k - 1$  yaitu

$$v_1, v_2, \dots, v_{k-1} \text{ yang ortogonal dengan vektor satu } e = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

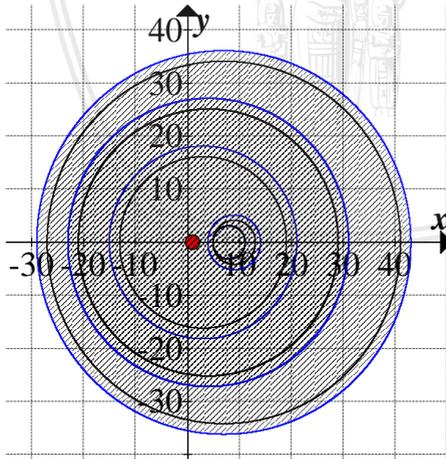
Vektor-vektor  $v_1, v_2, \dots, v_{k-1}$  membangun subruang dari ruang eigen  $\lambda$  dengan semua vektor ortogonal dengan  $e$ . Berdasarkan Teorema 2.12.9 dapat dikonstruksikan basis lain  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_{k-1}\}$  dari subruang ruang eigen  $\lambda$ , sedemikian sehingga setiap vektor dalam basis  $U$  ortogonal dengan vektor satu  $e$ . Vektor-vektor  $u_1, u_2, \dots, u_{k-1}$  mempunyai elemen mutlak terbesar dalam posisi yang berbeda. Berdasarkan Teorema 3.2.1, dapat dikonstruksikan cakram Gershgorin tipe kedua dari baris yang berbeda dari matriks  $A$ . Berdasarkan Teorema 2.12.13, dapat disimpulkan bahwa  $\lambda$  terletak dalam irisan  $k - 1$  cakram Gershgorin tipe kedua dengan minimal satu cakram Gershgorin tipe pertama  $C_k(A)$  yang dikonstruksikan dalam baris yang berbeda. ■

**Contoh 3.2.5** Diberikan matriks  $A$  sesuai dengan Contoh 2.12.11 mempunyai nilai eigen  $\lambda = 1$  dengan multiplisitas geometri 4. Akan ditunjukkan Teorema 3.2.4 dipenuhi, yaitu  $\lambda = 1$  terletak pada irisan minimal satu cakram Gershgorin tipe pertama  $C_4(A)$  dan minimal 3 cakram Gershgorin tipe kedua dari  $A$ .

**Penyelesaian.**

Pada Contoh 2.12.14 telah diperoleh cakram Gershgorin tipe pertama dari  $C_4(A)$  yaitu  $D_1(8, 3)$ ,  $D_2(9, 5)$ ,  $D_3(3, 18)$ ,  $D_4(4, 27)$ ,  $D_5(7, 36)$ , dan  $D_6(4, 27)$ . Pada Contoh 3.1.2, telah diperoleh cakram Gershgorin tipe kedua yaitu  $\hat{D}_1(8, 3)$ ,  $\hat{D}_2(9, 4)$ ,  $\hat{D}_3(3, 16)$ ,  $\hat{D}_4(4, 25)$ ,  $\hat{D}_5(7, 34)$ , dan  $\hat{D}_6(4, 25)$ . Sehingga  $\lambda = 1$  terletak pada 4 cakram Gershgorin tipe pertama  $C_4(A)$ , yaitu  $\hat{D}_3(3, 16)$ ,  $\hat{D}_4(4, 25)$ ,  $\hat{D}_5(7, 34)$ , dan  $\hat{D}_6(4, 25)$ . Nilai eigen  $\lambda = 1$  juga terletak pada 4 cakram Gershgorin tipe kedua, yaitu  $\hat{D}_3(3, 16)$ ,  $\hat{D}_4(4, 25)$ ,  $\hat{D}_5(7, 34)$ , dan  $\hat{D}_6(4, 25)$ . Jadi Teorema 3.2.4 dipenuhi.

Berikut adalah gambar cakram Gershgorin tipe pertama dari  $C_4(A)$  dan cakram Gershgorin tipe kedua dari  $A$ .



**Gambar 3.5** Cakram Gershgorin tipe pertama dari  $C_4(A)$  dan cakram Gershgorin tipe kedua dari  $A$

Pada Contoh 3.2.5 disajikan contoh nilai eigen dengan multiplisitas geometri lebih dari dua. Apabila multiplisitas geometri dari suatu nilai eigen adalah satu, Teorema 3.2.4 belum tentu dipenuhi, seperti ditunjukkan dalam contoh berikut.

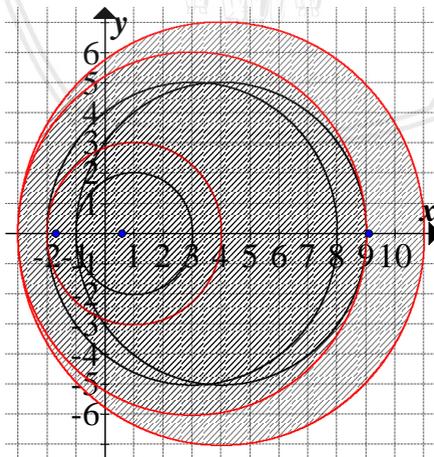
**Contoh 3.2.6** Diberikan matriks  $B$  sesuai dengan Contoh 2.12.19, yaitu

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

memiliki nilai eigen  $\lambda_1 = 9.100098$ ,  $\lambda_2 = -1.6865$ ,  $\lambda_3 = 0.5864$  dengan multiplisitas geometri 1 untuk masing-masing nilai eigen. Akan ditunjukkan Teorema 3.2.4 belum tentu dipenuhi.

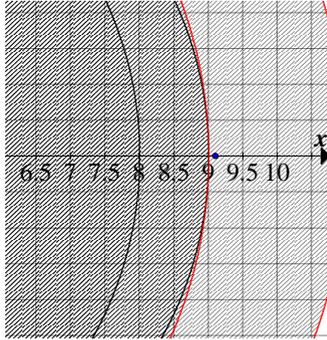
### Penyelesaian.

Dengan menggunakan Definisi 3.1.1, diperoleh cakram Gershgorin tipe kedua dari matriks  $B$  adalah  $\hat{D}_1(1, 2)$ ,  $\hat{D}_2(4, 5)$ , dan  $\hat{D}_3(3, 5)$ . Karena multiplisitas geometri dari masing-masing nilai eigen adalah satu, matriks  $C_1(B) = B$ , sesuai dengan definisi matriks  $C_k(B)$  pada Teorema 2.12.13. Diperoleh cakram Gershgorin tipe pertama dari matriks  $C_1(B)$  adalah  $D_1(1, 3)$ ,  $D_2(4, 7)$ , dan  $D_3(3, 6)$ . Berdasarkan Gambar 3.6 dapat dilihat bahwa nilai eigen  $\lambda_1 = 9.100098$  terletak di luar cakram Gershgorin tipe kedua dan terletak dalam satu cakram Gershgorin pertama dari  $C_1(B)$ . Jadi Teorema 3.2.4 belum tentu dipenuhi apabila multiplisitas geometri dari nilai eigen adalah 1.



**Gambar 3.6** Cakram Gershgorin tipe pertama dari  $C_1(B)$  dan cakram Gershgorin tipe kedua dari  $B$

Berikut adalah Gambar 3.6 yang diperbesar.



**Gambar 3.7** Cakram Gershgorin tipe pertama dari  $C_1(B)$  dan cakram Gershgorin tipe kedua dari  $B$

Nilai eigen dari suatu matriks persegi dapat bernilai real ataupun kompleks. Berikut diberikan contoh matriks dengan nilai eigen kompleks memenuhi Teorema 3.2.4.

**Contoh 3.2.7** Diberikan matriks  $A$  berordo  $4 \times 4$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 & 0 \\ -15 & -15 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -15 & -6 \\ 0 & 1 & 15 & 3 \end{bmatrix}$$

mempunyai nilai eigen  $\lambda_1 = -6 + 2\sqrt{2}i$  dengan vektor eigen

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 6 \\ -9 + 2\sqrt{2}i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 9 + 2\sqrt{2}i \\ -15 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dan  $\lambda_2 = -6 - 2\sqrt{2}i$  dengan vektor eigen

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ -9 - 2\sqrt{2}i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 9 - 2\sqrt{2}i \\ -15 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

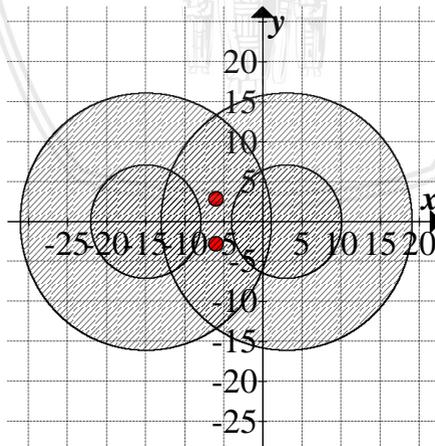
Nilai eigen  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  masing-masing mempunyai multiplisitas geometri 2. Akan ditunjukkan Teorema 3.2.4 dipenuhi, yaitu  $\lambda_1 = -6 + 2\sqrt{2}i$  dan  $\lambda_2 = -6 - 2\sqrt{2}i$  terletak pada irisan minimal satu cakram Gershgorin tipe pertama  $C_2(A)$  dan minimal 1 cakram Gershgorin tipe kedua dari  $A$ .

### Penyelesaian.

Bentuk matriks  $C_2(A)$  dengan cara mengganti 1 entri mutlak terkecil non diagonal dengan 0 untuk setiap baris, sehingga diperoleh

$$C_2(A) = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 & 0 \\ -15 & -15 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -15 & -6 \\ 0 & 1 & 15 & 3 \end{bmatrix} = A.$$

Selanjutnya ditentukan cakram-cakram Gershgorin tipe pertama dari  $C_2(A)$ , dengan pusat terletak pada diagonal setiap baris  $C_2(A)$  dan jari-jari penjumlahan entri mutlak non diagonal setiap baris. Diperoleh cakram Gershgorin tipe pertama  $C_2(A)$  adalah  $D_1(3, 7)$ ,  $D_2(-15, 16)$ ,  $D_3(-15, 7)$ , dan  $D_4(3, 16)$ . Selanjutnya ditentukan cakram-cakram Gershgorin tipe kedua dari  $A$  sesuai dengan Definisi 3.1.1 sehingga diperoleh  $\hat{D}_1(3, 7)$ ,  $\hat{D}_2(-15, 16)$ ,  $\hat{D}_3(-15, 7)$ , dan  $\hat{D}_4(3, 16)$ . Teorema 3.2.4 dipenuhi, karena nilai eigen  $\lambda_1 = -6 + 2\sqrt{2}i$  dan  $\lambda_2 = -6 - 2\sqrt{2}i$  terletak pada cakram Gershgorin tipe pertama  $C_2(A)$  yaitu  $D_2(-15, 16)$  dan  $D_4(3, 16)$ , dan cakram Gershgorin tipe kedua dari  $A$  yaitu  $\hat{D}_2(-15, 16)$  dan  $\hat{D}_4(3, 16)$  seperti ditunjukkan dalam Gambar 3.8.



**Gambar 3.8** Cakram Gershgorin tipe pertama dari  $C_2(A)$  dan cakram Gershgorin tipe kedua dari  $A$

Untuk mengetahui pengaruh multiplisitas geometri suatu nilai eigen dengan lokasi nilai eigen pada Teorema 3.2.4, berikut diberikan contoh matriks berordo  $10 \times 10$  mempunyai nilai eigen dengan multiplisitas geometri 1, 2, 3 dan 4.

**Contoh 3.2.8** Diberikan matriks  $A$  berordo  $10 \times 10$

$$A = \begin{bmatrix} -1.25612 & 4.57139 & 1.18800 & 4.75634 & 11.3930 \\ 25.3546 & -23.9185 & -9.25578 & -23.5826 & -67.0936 \\ 2.62290 & -2.92613 & 2.88630 & -2.21070 & -7.27543 \\ -10.8734 & 11.6225 & 3.87934 & 13.1553 & 29.5466 \\ -17.7935 & 18.9282 & 6.67018 & 17.2205 & 50.4455 \\ 1.69807 & -1.77634 & -0.784606 & -1.62226 & -4.65618 \\ 2.28798 & -2.41496 & -0.895028 & -2.00945 & -6.46447 \\ 4.84056 & -5.05856 & -2.17046 & -4.53312 & -12.3609 \\ 13.3794 & -14.3065 & -4.53767 & -11.9704 & -35.3721 \\ -1.75425 & 1.83716 & 0.890361 & 1.65914 & 4.16173 \\ 7.62531 & 9.29222 & 8.93318 & 4.90767 & 11.4612 \\ -51.2563 & -56.3985 & -46.4690 & -25.0533 & -62.6778 \\ -4.89938 & -6.99693 & -4.81757 & -2.51625 & -5.84317 \\ 22.3327 & 25.8681 & 20.8973 & 11.1549 & 28.0619 \\ 36.6216 & 39.8738 & 33.6386 & 18.2052 & 45.5202 \\ 0.0240615 & -4.11393 & -3.63169 & -1.85983 & -4.85244 \\ -4.73874 & -2.65149 & -4.53585 & -2.55040 & -6.00507 \\ -9.81447 & -9.80620 & -5.48529 & -4.55776 & -11.8261 \\ -26.0706 & -31.2828 & -24.5042 & -9.49538 & -32.9412 \\ 2.04859 & 4.16513 & 2.76542 & 1.25894 & 6.29555 \end{bmatrix}$$

mempunyai nilai eigen  $\lambda = 1$  dengan multiplisitas geometri 1,  $\lambda = 2$  dengan multiplisitas geometri 2,  $\lambda = 3$  dengan multiplisitas geometri 3, dan  $\lambda = 4$  dengan multiplisitas geometri 4. Akan ditunjukkan pengaruh multiplisitas geometri berkaitan dengan lokasi nilai eigen berdasarkan Teorema 3.2.4.

### Penyelesaian.

Ditentukan cakram-cakram Gershgorin tipe pertama dari matriks  $C_k(A)$  untuk masing-masing multiplisitas geometri,  $k = 1, 2, 3, 4$ . Berdasarkan definisi matriks  $C_k(A)$  yang terdapat pada Teorema 2.12.13 diperoleh cakram-cakram Gershgorin tipe pertama  $C_k(A)$  :

Untuk  $k = 1$ ,

$$D_1(-1.25612, 64.1283), D_2(-23.9185, 36.7141),$$

$D_3(2.88630, 40.1085)$ ,  $D_4(13.1553, 164.2367)$ ,  
 $D_5(50.4455, 234.4717)$ ,  $D_6(0.0240615, 24.9953)$ ,  
 $D_7(-2.65149, 31.9020)$ ,  $D_8(-5.48529, 64.9681)$ ,  
 $D_9(-9.49538, 194.3647)$ , dan  $D_{10}(6.29555, 20.5407)$ .

Untuk  $k = 2$ ,

$D_1(-1.25612, 62.9403)$ ,  $D_2(-23.9185, 357.8857)$ ,  
 $D_3(2.88630, 37.8978)$ ,  $D_4(13.1553, 160.3574)$ ,  
 $D_5(50.4455, 227.8016)$ ,  $D_6(0.0240615, 24.2108)$ ,  
 $D_7(-2.65149, 31.0069)$ ,  $D_8(-5.48529, 62.7977)$ ,  
 $D_9(-9.49538, 189.8270)$ , dan  $D_{10}(6.29555, 19.6504)$ .

Untuk  $k = 3$ ,

$D_1(-1.25612, 58.3689)$ ,  $D_2(-23.9185, 334.3031)$ ,  
 $D_3(2.88630, 35.3815)$ ,  $D_4(13.1553, 149.4839)$ ,  
 $D_5(50.4455, 210.5810)$ ,  $D_6(0.0240615, 22.5885)$ ,  
 $D_7(-2.65149, 28.9975)$ ,  $D_8(-5.48529, 58.2645)$ ,  
 $D_9(-9.49538, 177.8566)$ , dan  $D_{10}(6.29555, 18.3914)$ .

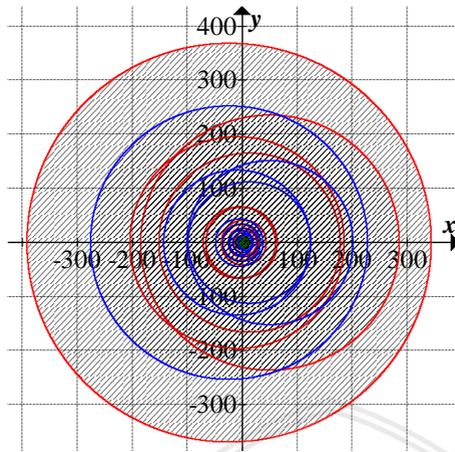
Untuk  $k = 4$ ,

$D_1(-1.25612, 53.6126)$ ,  $D_2(-23.9185, 309.2498)$ ,  
 $D_3(2.88630, 32.7586)$ ,  $D_4(13.1553, 138.3291)$ ,  
 $D_5(50.4455, 192.7875)$ ,  $D_6(0.0240615, 20.8904)$ ,  
 $D_7(-2.65149, 26.7095)$ ,  $D_8(-5.48529, 53.7068)$ ,  
 $D_9(-9.49538, 164.4773)$ , dan  $D_{10}(6.29555, 16.7323)$ .

Selanjutnya ditentukan cakram-cakram Gershgorin tipe kedua dari  $A$  berdasarkan Definisi 3.1.1, sehingga diperoleh

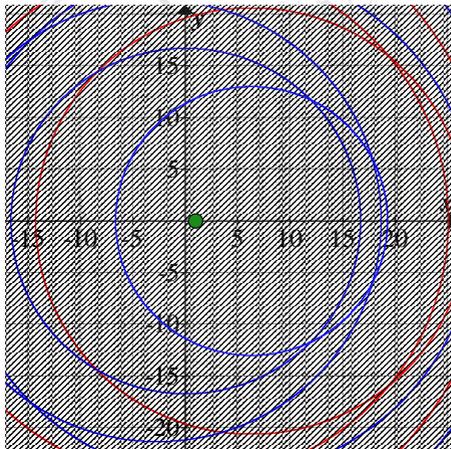
$\hat{D}_1(-1.25612, 33.2815)$ ,  $\hat{D}_2(-23.9185, 251.3582)$ ,  
 $\hat{D}_3(2.88630, 24.8023)$ ,  $\hat{D}_4(13.1553, 110.9233)$ ,  
 $\hat{D}_5(50.4455, 150.2800)$ ,  $\hat{D}_6(0.0240615, 16.6289)$ ,  
 $\hat{D}_7(-2.65149, 21.2631)$ ,  $\hat{D}_8(-5.48529, 42.4454)$ ,  
 $\hat{D}_9(-9.49538, 132.7356)$ , dan  $\hat{D}_{10}(6.29555, 12.9238)$ .

Berikut adalah gambar cakram Gershgorin tipe kedua dan cakram Gershgorin tipe pertama  $C_1(A)$  untuk nilai eigen 1 dengan multiplisitas geometri 1.



**Gambar 3.9** Cakram Gershgorin tipe pertama dari  $C_1(A)$  dan cakram Gershgorin tipe kedua dari  $A$

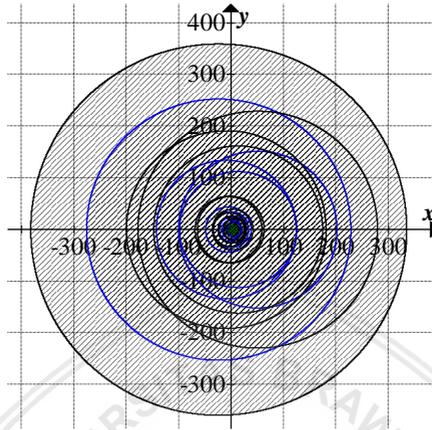
Berikut adalah Gambar 3.9 yang diperbesar.



**Gambar 3.10** Cakram Gershgorin tipe pertama dari  $C_1(A)$  dan cakram Gershgorin tipe kedua dari  $A$

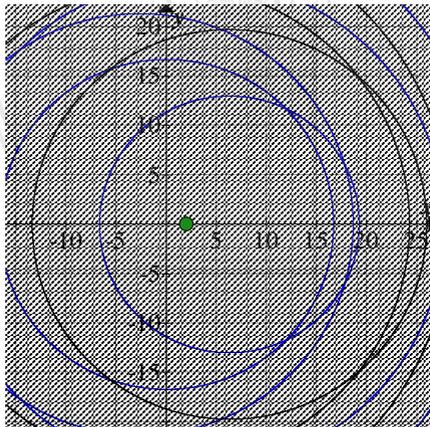
Nilai eigen  $\lambda = 1$  terletak di semua cakram Gershgorin tipe pertama dari  $C_1(A)$  dan cakram Gershgorin tipe kedua dari  $A$ . Nilai eigen  $\lambda = 1$  terletak pada cakram Gershgorin tipe pertama  $C_1(A)$   $D_{10}(6.29555, 20.5407)$ , yaitu pada selang  $[-14.2452, 26.8363]$  dan irisan cakram Gershgorin tipe kedua  $\hat{D}_6(0.0240615, 16.6289)$  dan  $\hat{D}_{10}(6.29555, 12.9238)$ , yaitu pada selang  $[-6.62829, 16.6530]$ .

Berikut adalah gambar cakram Gershgorin tipe kedua dan cakram Gershgorin tipe pertama  $C_2(A)$  untuk nilai eigen 2 dengan multiplisitas geometri 2.



Gambar 3.11 Cakram Gershgorin tipe pertama dari  $C_2(A)$  dan cakram Gershgorin tipe kedua dari  $A$

Berikut adalah Gambar 3.11 yang diperbesar.

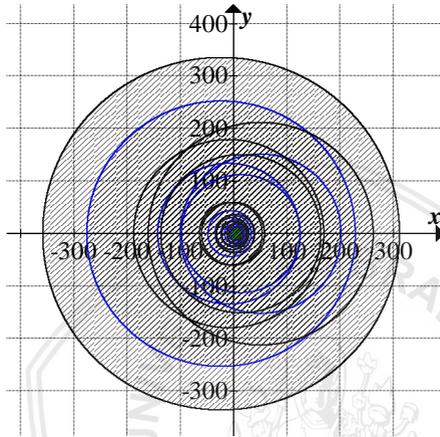


Gambar 3.12 Cakram Gershgorin tipe pertama dari  $C_2(A)$  dan cakram Gershgorin tipe kedua dari  $A$

Nilai eigen  $\lambda = 2$  terletak di semua cakram Gershgorin tipe pertama dari  $C_2(A)$  dan cakram Gershgorin tipe kedua dari  $A$ . Nilai eigen  $\lambda = 2$  terletak pada cakram Gershgorin tipe pertama  $C_2(A)$

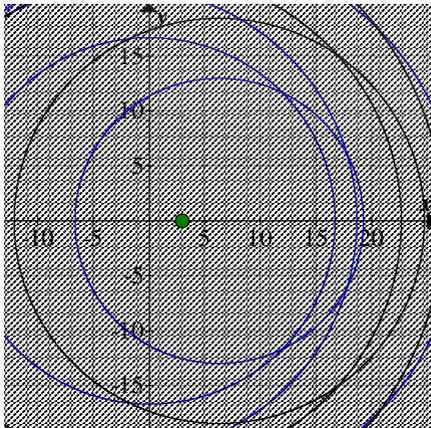
$D_{10}(6.29555, 19.6504)$ , yaitu pada selang  $[-13.3548, 25.9459]$  dan irisan cakram Gershgorin tipe kedua  $\hat{D}_6(0.0240615, 16.6289)$  dan  $\hat{D}_{10}(6.29555, 12.9238)$ , yaitu pada selang  $[-6.62829, 16.6530]$ .

Berikut adalah gambar cakram Gershgorin tipe kedua dan cakram Gershgorin tipe pertama  $C_3(A)$  untuk nilai eigen 3 dengan multiplisitas geometri 3.



**Gambar 3.13** Cakram Gershgorin tipe pertama dari  $C_3(A)$  dan cakram Gershgorin tipe kedua dari  $A$

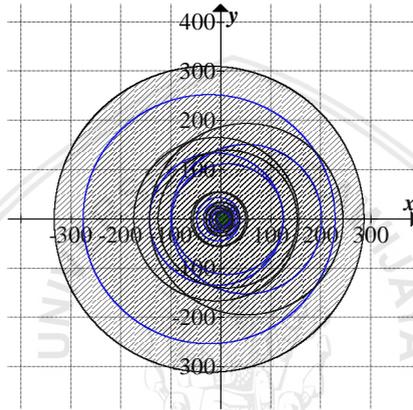
Berikut adalah Gambar 3.13 yang diperbesar.



**Gambar 3.14** Cakram Gershgorin tipe pertama dari  $C_3(A)$  dan cakram Gershgorin tipe kedua dari  $A$

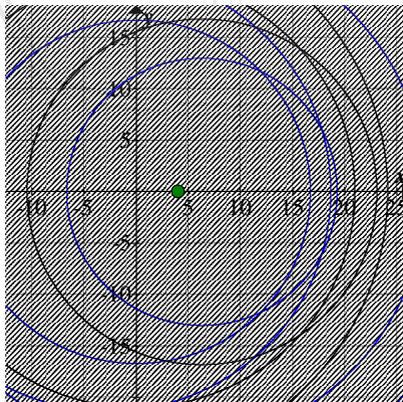
Nilai eigen  $\lambda = 3$  terletak di semua cakram Gershgorin tipe pertama dari  $C_3(A)$  dan cakram Gershgorin tipe kedua dari  $A$ . Nilai eigen  $\lambda = 3$  terletak pada cakram Gershgorin tipe pertama  $C_3(A)$   $D_{10}(6.29555, 18.3914)$ , yaitu pada selang  $[-12.0959, 24.6870]$  dan irisan cakram Gershgorin tipe kedua  $\hat{D}_6(0.0240615, 16.6289)$  dan  $\hat{D}_{10}(6.29555, 12.9238)$ , yaitu pada selang  $[-6.62829, 16.6530]$ .

Berikut adalah gambar cakram Gershgorin tipe kedua dan cakram Gershgorin tipe pertama  $C_4(A)$  untuk nilai eigen 4 dengan multiplisitas geometri 4.



**Gambar 3.15** Cakram Gershgorin tipe pertama dari  $C_4(A)$  dan cakram Gershgorin tipe kedua dari  $A$

Berikut adalah Gambar 3.15 yang diperbesar.



**Gambar 3.16** Cakram Gershgorin tipe pertama dari  $C_4(A)$  dan cakram Gershgorin tipe kedua dari  $A$

Nilai eigen  $\lambda = 4$  terletak di semua cakram Gershgorin tipe pertama dari  $C_4(A)$  dan cakram Gershgorin tipe kedua dari  $A$ . Nilai eigen  $\lambda = 4$  terletak pada cakram Gershgorin tipe pertama  $C_4(A)$   $D_{10}(6.29555, 16.7323)$ , yaitu pada selang  $[-10.4367, 23.0278]$  dan irisan cakram Gershgorin tipe kedua  $\hat{D}_6(0.0240615, 16.6289)$  dan  $\hat{D}_{10}(6.29555, 12.9238)$ , yaitu pada selang  $[-6.62829, 16.6530]$ .

Terlihat bahwa semakin besar multiplisitas geometri dari suatu nilai eigen, selang pada cakram Gershgorin tipe pertama dari  $C_k(A)$  semakin mengecil. Jadi pengaruh multiplisitas geometri dari suatu nilai eigen adalah jari-jari cakram Gershgorin tipe pertama dari  $C_k(A)$  semakin mengecil, sehingga lokasi nilai eigen yang dihasilkan semakin baik.

**Lemma 3.2.9** Jika  $A$  adalah matriks real  $n \times n$  dan  $B$  adalah submatriks pokok berordo  $(n - k + 2) \times (n - k + 2)$ . Misalkan  $\hat{D}_i(B)$  adalah cakram Gershgorin tipe kedua dari  $B$  yang dibentuk dari baris ke- $i$ , maka terdapat indeks  $j \in \{1, \dots, n\}$  sedemikian sehingga  $\hat{D}_i(B) \subseteq D_j^k(A)$ .

**Bukti.** Misalkan baris ke- $i$  dari matriks  $B = [b_{ij}]$  adalah bagian dari baris ke- $j$  dari matriks  $A = [a_{ij}]$ . Oleh karena elemen diagonal utama dari  $B$  juga merupakan elemen diagonal utama dari  $A$ , sehingga  $b_{ii} = a_{jj}$ . Misalkan  $x_{j1} \geq \dots \geq x_{jn}$  menyatakan urutan tak naik dari  $a_{j1}, \dots, a_{j,j-1}, 0, a_{j,j+1}, \dots, a_{jn}$  dan misalkan  $y_{i1} \geq \dots \geq y_{i,n-k+2}$  menyatakan urutan tak naik dari  $b_{i1}, \dots, b_{i,i-1}, 0, b_{i,i+1}, \dots, b_{i,n-k+2}$ . Dengan demikian diperoleh  $\{y_{i1}, \dots, y_{i,n-k+2}\} \subset \{x_{j1}, \dots, x_{jn}\}$ . Dengan menggunakan Definisi 3.1.1 dan Definisi 3.1.4, dapat dilihat bahwa jari-jari dari cakram  $\hat{D}_i(B)$  kurang dari atau sama dengan jari-jari  $D_j^k(A)$  dan karena cakram  $\hat{D}_i(B)$  dan cakram  $D_j^k(A)$  memiliki pusat yang sama, dapat disimpulkan bahwa  $\hat{D}_i(B) \subseteq D_j^k(A)$ . ■

**Teorema 3.2.10** Jika  $A = [a_{ij}]$  adalah matriks real berordo  $n \times n$  dan  $\lambda$  adalah nilai eigen dari  $A$  dengan multiplisitas geometri  $k \geq 2$ . Misalkan  $S = \{D_i^k(A)\}_{1 \leq i \leq n}$ , maka  $\lambda$  terletak pada irisan dari minimal satu cakram Gershgorin tipe pertama  $C_k(A)$  dan minimal  $(k - 1)$  cakram dari  $S$ , setiap cakram dari  $S$  dikonstruksikan dari  $k$  baris berbeda dari  $A$ .

**Bukti.** Notasikan matriks  $A$  dengan  $B_n$ . Misalkan  $M_n$  adalah submatriks pokok berordo  $(n + 2 - k) \times (n + 2 - k)$  dari  $A$ .

Berdasarkan Lemma 2.12.22,  $\lambda$  adalah nilai eigen dari  $M_n$  dengan multiplisitas geometri lebih dari atau sama dengan 2. Oleh karena itu, berdasarkan Teorema 3.2.4,  $\lambda$  terletak pada minimal satu cakram Gershgorin tipe kedua dari  $M_n$ . Lambangkan salah satu cakram Gershgorin tipe kedua ini dengan  $D_1$ . Dari matriks  $B_n$ , bentuk submatriks pokok  $B_{n-1}$  berordo  $(n - 1) \times (n - 1)$ , dengan cara menghapus baris dari  $A$  yang cakram Gershgorin tipe kedua  $D_1$  sebelumnya terbentuk dan menghapus kolom yang bersesuaian. Misalkan  $M_{n-1}$  adalah submatriks pokok berordo  $(n + 2 - k) \times (n + 2 - k)$  dari  $B_{n-1}$ . Berdasarkan Teorema 3.2.4,  $\lambda$  terletak pada minimal satu cakram Gershgorin tipe kedua dari  $M_{n-1}$ . Lambangkan salah satu cakram Gershgorin tipe kedua ini dengan  $D_2$ . Proses ini dilanjutkan hingga terbentuk matriks  $B_{n+2-k}$ . Sekarang diperoleh  $M_{n+2-k} = B_{n+2-k}$ . Lambangkan salah satu cakram Gershgorin tipe kedua ini dengan  $D_{k-1}$ . Proses berakhir sampai di sini, karena apabila menghapus baris dan kolom lain, diperoleh matriks berordo kurang dari  $(n + 2 - k) \times (n + 2 - k)$ , sehingga Lemma 2.12.22 tidak dipenuhi. Sehingga diperoleh  $\lambda$  terletak pada irisan dari cakram-cakram  $D_1, D_2, \dots, D_{k-1}$  yang telah dibentuk dari  $k - 1$  baris berbeda. Berdasarkan Lemma 3.2.9, setiap  $k - 1$  cakram adalah himpunan bagian dari  $S$ . Dari pembentukan cakram Gershgorin di atas, diperoleh sebanyak  $k - 1$  cakram dari  $S$  dikaitkan dengan  $k - 1$  baris berbeda dari  $A$ . Berdasarkan Teorema 2.12.13,  $\lambda$  terletak pada irisan  $k$  cakram Gershgorin tipe pertama dari  $C_k(A)$  yang dikonstruksikan dari baris berbeda. Dengan menggabungkan dua fakta terakhir, teorema terbukti. ■

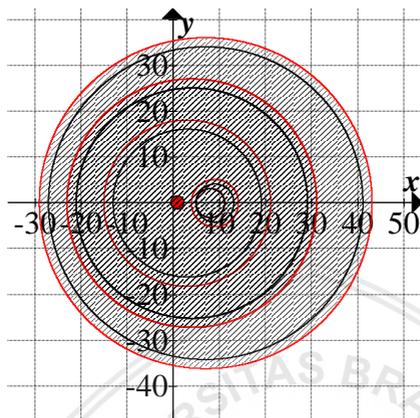
**Contoh 3.2.11** Diberikan matriks  $A$  sesuai dengan Contoh 3.1.2, mempunyai nilai eigen  $\lambda = 1$  dengan multiplisitas geometri 4. Akan ditunjukkan bahwa Teorema 3.2.10 dipenuhi.

**Penyelesaian.**

Berdasarkan Contoh 3.1.5 telah diperoleh cakram Gershgorin sesuai dengan Definisi 3.1.4, yaitu  $D_1^4(8, 3)$ ,  $D_2^4(9, 4)$ ,  $D_3^4(3, 16)$ ,  $D_4^4(4, 24)$ ,  $D_5^4(7, 32)$ , dan  $D_6^4(4, 24)$ . Dari Gambar 3.2 dapat dilihat bahwa nilai eigen  $\lambda = 1$  terletak di empat cakram  $D_3^4(3, 16)$ ,  $D_4^4(4, 24)$ ,  $D_5^4(7, 32)$ , dan  $D_6^4(4, 24)$ . Berdasarkan Contoh 2.12.14, diperoleh keenam cakram Gershgorin tipe pertama dari  $C_4(A)$  adalah  $D_1(8, 3)$ ,  $D_2(9, 5)$ ,  $D_3(3, 18)$ ,  $D_4(4, 27)$ ,  $D_5(7, 36)$ , dan  $D_6(4, 27)$ . Nilai eigen  $\lambda = 1$  juga terletak pada empat cakram Gershgorin tipe pertama dari  $C_4(A)$ , yaitu  $D_3(3, 18)$ ,  $D_4(4, 27)$ ,  $D_5(7, 36)$ , dan  $D_6(4, 27)$ . Dengan kata lain,  $\lambda = 1 \in \bigcap_{i=3}^6 D_i^4(A)$  dan

$\lambda = 1 \in \bigcap_{i=3}^6 D_i(C_4(A))$ . Sehingga Teorema 3.2.10 dipenuhi.

Berikut adalah gambar dari keenam cakram Gersgorin tipe pertama dari matriks  $C_4(A)$  dan cakram Gersgorin  $\hat{D}_i^4(A)$ .



**Gambar 3.17** Cakram Gersgorin tipe pertama dari matriks  $C_4(A)$  dan cakram Gersgorin  $\hat{D}_i^4(A)$

Pada Contoh 3.2.11 disajikan contoh nilai eigen dengan multiplisitas geometri lebih dari dua. Apabila multiplisitas geometri dari suatu nilai eigen adalah satu, Teorema 3.2.10 belum tentu dipenuhi, seperti ditunjukkan dalam contoh berikut.

**Contoh 3.2.12** Diberikan matriks  $B$  sesuai dengan Contoh 2.12.19, yaitu

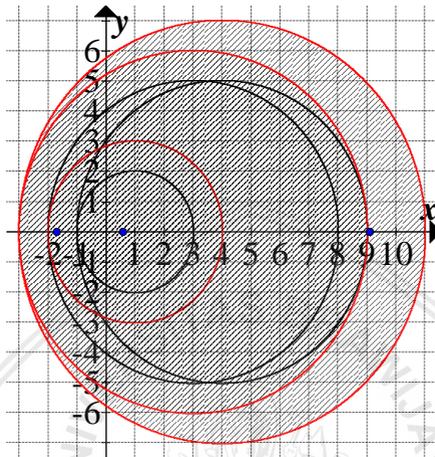
$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

memiliki nilai eigen  $\lambda_1 = 9.100098$ ,  $\lambda_2 = -1.6865$ ,  $\lambda_3 = 0.5864$  dengan multiplisitas geometri 1 untuk masing-masing nilai eigen. Akan ditunjukkan Teorema 3.2.10 belum tentu dipenuhi.

### Penyelesaian.

Dengan menggunakan Definisi 3.1.4, diperoleh cakram Gersgorin  $D_i^1(B)$  adalah  $D_1^1(1, 2)$ ,  $D_2^1(4, 5)$ , dan  $D_3^1(3, 5)$ . Karena multiplisitas geometri dari masing-masing nilai eigen adalah satu, matriks  $C_1(B) = B$ , sesuai dengan definisi matriks  $C_k(B)$  pada Teorema 2.12.13. Diperoleh cakram Gersgorin tipe pertama dari matriks

$C_1(B)$  adalah  $D_1(1, 3)$ ,  $D_2(4, 7)$ , dan  $D_3(3, 6)$ . Berdasarkan Gambar 3.18 dapat dilihat bahwa nilai eigen  $\lambda_1 = 9.100098$  terletak di luar cakram Gershgorin tipe kedua dan terletak dalam satu cakram Gershgorin pertama dari  $C_1(B)$ . Jadi Teorema 3.2.10 belum tentu dipenuhi apabila multiplisitas geometri dari nilai eigen adalah 1.



**Gambar 3.18** Cakram Gershgorin tipe pertama dari  $C_1(B)$  dan cakram Gershgorin  $D_i^1(B)$

Pada Contoh 3.2.11 dan Contoh 3.2.12 telah disajikan lokasi nilai eigen real. Berikut diberikan contoh Teorema 3.2.10 untuk nilai eigen kompleks.

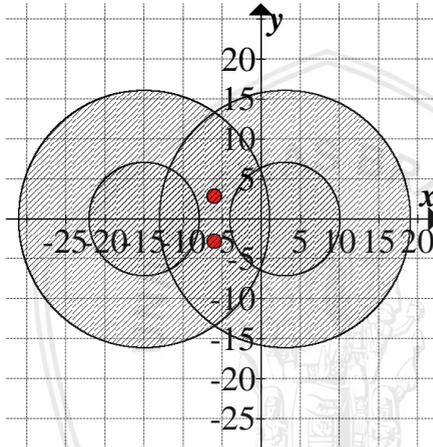
**Contoh 3.2.13** Diberikan matriks  $A$  berordo  $4 \times 4$  sesuai dengan Contoh 3.2.7

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 & 0 \\ -15 & -15 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -15 & -6 \\ 0 & 1 & 15 & 3 \end{bmatrix}$$

mempunyai nilai eigen  $\lambda_1 = -6 + 2\sqrt{2}i$  dan  $\lambda_2 = -6 - 2\sqrt{2}i$  masing-masing mempunyai multiplisitas geometri 2. Akan ditunjukkan Teorema 3.2.10 dipenuhi, yaitu  $\lambda_1 = -6 + 2\sqrt{2}i$  dan  $\lambda_2 = -6 - 2\sqrt{2}i$  terletak pada irisan minimal satu cakram Gershgorin tipe pertama  $C_2(A)$  dan minimal 1 cakram Gershgorin  $D_i^2(A)$ .

### Penyelesaian.

Berdasarkan Contoh 3.2.7 telah diperoleh cakram-cakram Gershgorin tipe pertama dari  $C_2(A)$  adalah  $D_1(3, 7)$ ,  $D_2(-15, 16)$ ,  $D_3(-15, 7)$ , dan  $D_4(3, 16)$ . Selanjutnya ditentukan cakram-cakram Gershgorin  $D_i^2(A)$  sesuai dengan Definisi 3.1.4 sehingga diperoleh  $D_1^2(3, 7)$ ,  $D_2^2(-15, 16)$ ,  $D_3^2(-15, 7)$ , dan  $D_4^2(3, 16)$ . Teorema 3.2.10 dipenuhi, karena nilai eigen  $\lambda_1 = -6 + 2\sqrt{2}i$  dan  $\lambda_2 = -6 - 2\sqrt{2}i$  terletak pada cakram Gershgorin tipe pertama  $C_2(A)$  yaitu  $D_2(-15, 16)$  dan  $D_4(3, 16)$ , dan cakram Gershgorin  $D_i^2(A)$  yaitu  $D_2^2(-15, 16)$  dan  $D_4^2(3, 16)$  seperti ditunjukkan dalam Gambar 3.19.



**Gambar 3.19** Cakram Gershgorin tipe pertama dari  $C_2(A)$  dan cakram Gershgorin tipe kedua dari  $A$

Untuk mengetahui pengaruh multiplisitas geometri dengan lokasi nilai eigen pada Teorema 3.2.10, berikut diberikan contoh matriks berordo  $10 \times 10$  mempunyai nilai eigen dengan multiplisitas geometri 1, 2, 3 dan 4.

**Contoh 3.2.14** Diberikan matriks  $A$  berordo  $10 \times 10$  seperti pada Contoh 3.2.8, yang mempunyai nilai eigen  $\lambda = 1$  dengan multiplisitas geometri 1,  $\lambda = 2$  dengan multiplisitas geometri 2,  $\lambda = 3$  dengan multiplisitas geometri 3, dan  $\lambda = 4$  dengan multiplisitas geometri 4. Akan ditunjukkan pengaruh multiplisitas geometri berkaitan dengan lokasi nilai eigen berdasarkan Teorema 3.2.10.

### Penyelesaian.

Ditentukan cakram-cakram Gershgorin tipe pertama dari matriks  $C_k(A)$  untuk masing-masing multiplisitas geometri,  $k = 1, 2, 3, 4$ . Berdasarkan definisi matriks  $C_k(A)$  yang terdapat pada Teorema 2.12.13 diperoleh cakram-cakram Gershgorin tipe pertama  $C_k(A)$  :  
untuk  $k = 1$ ,

$$D_1(-1.25612, 64.1283), D_2(-23.9185, 36.7141), \\ D_3(2.88630, 40.1085), D_4(13.1553, 164.2367), \\ D_5(50.4455, 234.4717), D_6(0.0240615, 24.9953), \\ D_7(-2.65149, 31.9020), D_8(-5.48529, 64.9681), \\ D_9(-9.49538, 194.3647), \text{ dan } D_{10}(6.29555, 20.5407).$$

Untuk  $k = 2$ ,

$$D_1(-1.25612, 62.9403), D_2(-23.9185, 357.8857), \\ D_3(2.88630, 37.8978), D_4(13.1553, 160.3574), \\ D_5(50.4455, 227.8016), D_6(0.0240615, 24.2108), \\ D_7(-2.65149, 31.0069), D_8(-5.48529, 62.7977), \\ D_9(-9.49538, 189.8270), \text{ dan } D_{10}(6.29555, 19.6504).$$

Untuk  $k = 3$ ,

$$D_1(-1.25612, 58.3689), D_2(-23.9185, 334.3031), \\ D_3(2.88630, 35.3815), D_4(13.1553, 149.4839), \\ D_5(50.4455, 210.5810), D_6(0.0240615, 22.5885), \\ D_7(-2.65149, 28.9975), D_8(-5.48529, 58.2645), \\ D_9(-9.49538, 177.8566), \text{ dan } D_{10}(6.29555, 18.3914).$$

Untuk  $k = 4$ ,

$$D_1(-1.25612, 53.6126), D_2(-23.9185, 309.2498), \\ D_3(2.88630, 32.7586), D_4(13.1553, 138.3291), \\ D_5(50.4455, 192.7875), D_6(0.0240615, 20.8904), \\ D_7(-2.65149, 26.7095), D_8(-5.48529, 53.7068), \\ D_9(-9.49538, 164.4773), \text{ dan } D_{10}(6.29555, 16.7323).$$

Selanjutnya ditentukan cakram-cakram Gershgorin  $D_i^k(A)$  untuk masing-masing multiplisitas geometri,  $k = 1, 2, 3, 4$ . Berdasarkan definisi cakram Gershgorin  $D_i^k(A)$ , yang terdapat pada Definisi 3.1.4 diperoleh cakram-cakram Gershgorin  $D_i^k(A)$  :

untuk  $k = 1$ ,

$$D_1^1(-1.25612, 33.2815), D_2^1(-23.9185, 251.3582), \\ D_3^1(2.88630, 24.8023), D_4^1(13.1553, 24.8023), \\ D_5^1(50.4455, 150.2800), D_6^1(0.0240615, 16.6289), \\ D_7^1(-2.65149, 21.2631), D_8^1(-5.48529, 42.4454), \\ D_9^1(-9.49538, 132.7356), \text{ dan } D_{10}^1(6.29555, 12.9238).$$

Untuk  $k = 2$ ,

$$D_1^2(-1.25612, 33.2815), D_2^2(-23.9185, 251.3582), \\ D_3^2(2.88630, 24.8023), D_4^2(13.1553, 24.8023), \\ D_5^2(50.4455, 150.2800), D_6^2(0.0240615, 16.6289), \\ D_7^2(-2.65149, 21.2631), D_8^2(-5.48529, 42.4454), \\ D_9^2(-9.49538, 132.7356), \text{ dan } D_{10}^2(6.29555, 12.9238).$$

Untuk  $k = 1$  dan  $k = 2$  diperoleh sepuluh cakram  $D_i^k(A)$  yang sama dengan cakram Gershgorin tipe kedua dari  $A$ .

Untuk  $k = 3$ ,

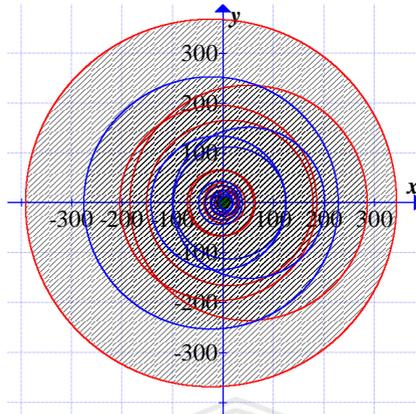
$$D_1^3(-1.25612, 30.5638), D_2^3(-23.9185, 229.9424), \\ D_3^3(2.88630, 22.9109), D_4^3(13.1553, 101.6485), \\ D_5^3(50.4455, 149.5570), D_6^3(0.0240615, 16.5454), \\ D_7^3(-2.65149, 21.1276), D_8^3(-5.48529, 41.9446), \\ D_9^3(-9.49538, 122.5379), \text{ dan } D_{10}^3(6.29555, 12.7458).$$

Untuk  $k = 4$ ,

$$D_1^4(-1.25612, 30.5638), D_2^4(-23.9185, 229.9424), \\ D_3^4(2.88630, 22.9109), D_4^4(13.1553, 101.6485), \\ D_5^4(50.4455, 149.5570), D_6^4(0.0240615, 16.5454), \\ D_7^4(-2.65149, 21.1276), D_8^4(-5.48529, 41.9446), \\ D_9^4(-9.49538, 122.5379), \text{ dan } D_{10}^4(6.29555, 12.7458).$$

Untuk  $k = 3$  dan  $k = 4$  diperoleh sepuluh cakram  $D_i^k(A)$  yang sama.

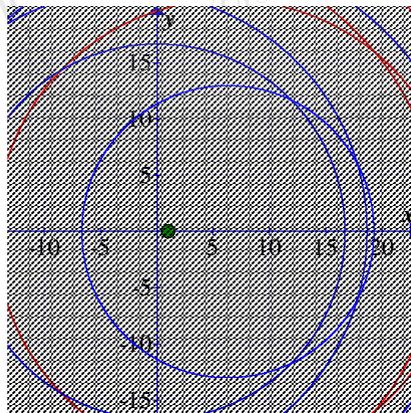
Berikut adalah gambar cakram Gershgorin tipe pertama dari  $C_1(A)$  dan cakram Gershgorin  $D_i^1(A)$  untuk nilai eigen 1 dengan multiplisitas geometri  $k = 1$ .



**Gambar 3.20** Cakram Gershgorin  $D_i^1(A)$  dan cakram Gershgorin tipe pertama dari  $C_1(A)$

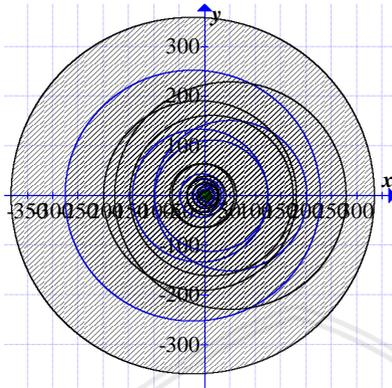
Nilai eigen  $\lambda = 1$  terletak di semua cakram Gershgorin  $D_i^1(A)$  dan cakram Gershgorin tipe pertama dari  $C_1(A)$ . Nilai eigen  $\lambda = 1$  terletak pada irisan cakram Gershgorin  $D_i^k(A)$ ,  $D_6^1(A)$ ,  $D_{10}^1(A)$  dan cakram Gershgorin tipe pertama dari  $C_1(A)$ ,  $D_6(0.0240615, 24.9953)$  dan  $D_{10}(6.29555, 20.5407)$ . Irisan cakram-cakram tersebut terletak pada pada selang  $[-6.62829, 16.6530]$ , yang dapat dilihat pada Gambar 3.21.

Berikut adalah Gambar 3.20 yang diperbesar.



**Gambar 3.21** Cakram Gershgorin  $D_i^1(A)$  dan cakram Gershgorin tipe pertama dari  $C_1(A)$

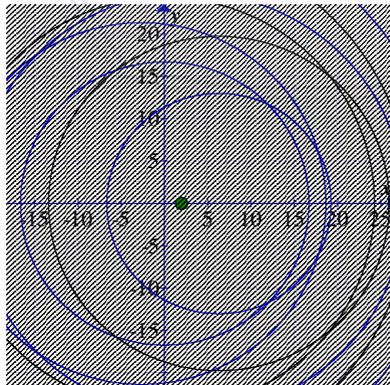
Berikut adalah gambar cakram Gershgorin tipe pertama dari  $C_2(A)$  dan cakram Gershgorin  $D_i^2(A)$  untuk nilai eigen 2 dengan multiplisitas geometri  $k = 2$ .



Gambar 3.22 Cakram Gershgorin  $D_i^2(A)$  dan cakram Gershgorin tipe pertama dari  $C_2(A)$

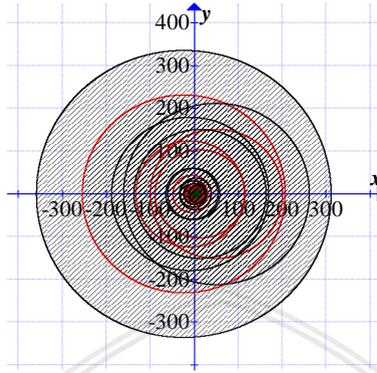
Nilai eigen  $\lambda = 2$  terletak di semua cakram Gershgorin  $D_i^2(A)$  dan cakram Gershgorin tipe pertama dari  $C_2(A)$ . Nilai eigen  $\lambda = 2$  terletak pada irisan cakram Gershgorin  $D_i^k(A)$ ,  $D_6^2(A)$ ,  $D_{10}^2(A)$  dan cakram Gershgorin tipe pertama dari  $C_2(A)$ ,  $D_6(0.0240615, 24.2108)$  dan  $D_{10}(6.29555, 19.6504)$ . Irisan cakram-cakram tersebut terletak pada pada selang  $[-6.62829, 16.6530]$ , yang dapat dilihat pada Gambar 3.23.

Berikut adalah Gambar 3.22 yang diperbesar.



Gambar 3.23 Cakram Gershgorin  $D_i^2(A)$  dan cakram Gershgorin tipe pertama dari  $C_2(A)$

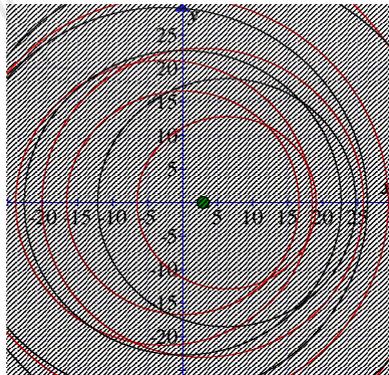
Berikut adalah gambar cakram Gershgorin tipe pertama dari  $C_3(A)$  dan cakram Gershgorin  $D_i^3(A)$  untuk nilai eigen 3 dengan multiplisitas geometri  $k = 3$ .



**Gambar 3.24** Cakram Gershgorin  $D_i^3(A)$  dan cakram Gershgorin tipe pertama dari  $C_3(A)$

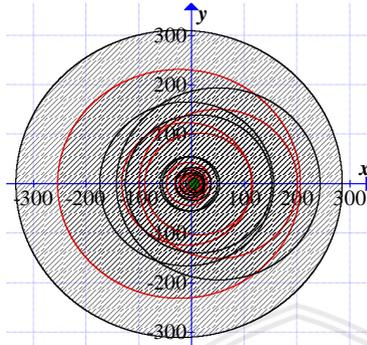
Nilai eigen  $\lambda = 3$  terletak di semua cakram Gershgorin  $D_i^3(A)$  dan cakram Gershgorin tipe pertama dari  $C_3(A)$ . Nilai eigen  $\lambda = 3$  terletak pada irisan cakram Gershgorin  $D_i^k(A)$ , yaitu  $D_6^3(A)$ ,  $D_{10}^3(A)$  dan cakram Gershgorin tipe pertama dari  $C_3(A)$ ,  $D_6(0.0240615, 22.5885)$  dan  $D_{10}(6.29555, 18.3914)$ . Irisan cakram-cakram tersebut terletak pada pada selang  $[-6.45027, 16.5695]$ , yang dapat dilihat pada Gambar 3.25.

Berikut adalah Gambar 3.24 yang diperbesar.



**Gambar 3.25** Cakram Gershgorin  $D_i^3(A)$  dan cakram Gershgorin tipe pertama dari  $C_3(A)$

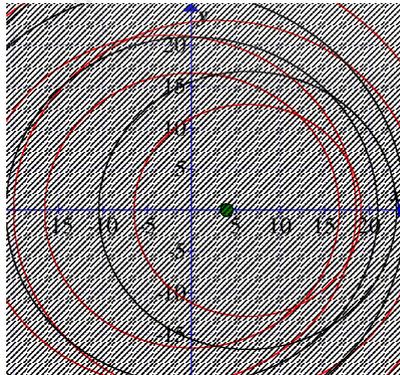
Berikut adalah gambar cakram Gershgorin tipe pertama dari  $C_4(A)$  dan cakram Gershgorin  $D_i^4(A)$  untuk nilai eigen 4 dengan multiplisitas geometri  $k = 4$ .



Gambar 3.26 Cakram Gershgorin  $D_i^4(A)$  dan cakram Gershgorin tipe pertama dari  $C_4(A)$

Nilai eigen  $\lambda = 4$  terletak di semua cakram Gershgorin  $D_i^4(A)$  dan cakram Gershgorin tipe pertama dari  $C_4(A)$ . Nilai eigen  $\lambda = 4$  terletak pada irisan cakram Gershgorin  $D_i^k(A)$ , yaitu  $D_6^4(A)$ ,  $D_{10}^4(A)$  dan cakram Gershgorin tipe pertama dari  $C_4(A)$ ,  $D_6(0.0240615, 20.8904)$  dan  $D_{10}^3(6.29555, 12.7458)$ . Irisan cakram-cakram tersebut terletak pada selang  $[-6.45027, 16.5695]$ , yang dapat dilihat pada Gambar 3.27.

Berikut adalah Gambar 3.26 yang diperbesar.



Gambar 3.27 Cakram Gershgorin  $D_i^4(A)$  dan cakram Gershgorin tipe pertama dari  $C_4(A)$

Semakin besar multiplisitas geometri nilai eigen, diperoleh lokasi nilai eigen terletak pada cakram yang lebih kecil. Sehingga semakin besar multiplisitas geometri berpengaruh pada lokasi nilai eigen yang lebih baik.

**Teorema 3.2.15** Jika  $A$  adalah matriks real berordo  $n \times n$  dan  $\lambda$  adalah nilai eigen dari  $A$  berkaitan dengan vektor eigen  $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$

sedemikian sehingga  $\left| \sum_{i=1}^n v_i \right| \leq |v_p|$  untuk suatu  $p \in \{1, \dots, n\}$ .

Misalkan  $A'$  adalah matriks  $(n+1) \times (n+1)$  diperoleh dari  $A$  dengan menyisipkan sebuah baris dan kolom dengan nol, maka  $\lambda$  terletak pada cakram Gershgorin tipe kedua dari  $A'$ , dikaitkan dengan satu cakram Gershgorin tipe kedua dari  $n$  baris pertama.

**Bukti.** Misalkan

$$A_\lambda = \begin{bmatrix} & & & 0 \\ & A & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

dan

$$\mathbf{v}' = \begin{bmatrix} v'_1 \\ \vdots \\ v'_n \\ v'_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \\ -\sum_{i=1}^n v_i \end{bmatrix}.$$

Berdasarkan definisi nilai eigen dan vektor eigen,  $A_\lambda \mathbf{v}' = \lambda \mathbf{v}'$ , serta  $\sum_{i=1}^{n+1} v'_i = 0$ . Karena terdapat elemen dari  $v$  dengan harga mutlaknya

lebih besar atau sama dengan  $\left| -\sum_{i=1}^n v_i \right|$ , terdapat indeks

$j \in \{1, \dots, n\}$  sedemikian sehingga  $\max_{1 \leq i \leq n+1} |v'_i| = |v'_j|$ . Oleh karena itu, berdasarkan Teorema 3.2.1,  $\lambda$  terletak pada cakram Gershgorin tipe kedua, yang dibentuk dari baris ke- $j$  dari matriks  $A_\lambda$ .

■

**Contoh 3.2.16** Diberikan matriks berordo  $4 \times 4$

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -17 & -11 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & -22 & -7 & -1 \end{bmatrix},$$

dengan nilai eigen dan vektor eigen masing-masing  $\lambda_1 = -3$ , dikaitkan dengan vektor eigen

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$\lambda_2 = -2$ , dikaitkan dengan vektor eigen

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$\lambda_3 = 3$ , dikaitkan dengan vektor eigen

$$v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

dan  $\lambda_4 = 4$ , dikaitkan dengan vektor eigen

$$v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Akan ditentukan lokasi nilai eigen berdasarkan Teorema 3.2.15.

### Penyelesaian.

Bentuk matriks  $A'$  berordo  $5 \times 5$  dengan menyisipkan entri 0 pada baris kelima dan kolom lima,

$$A' = \begin{bmatrix} -4 & -17 & -11 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -22 & -7 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Kemudian bentuk cakram Gershgorin tipe kedua dari  $A'$  sebagai berikut,

Untuk baris pertama,

Pusat cakram terletak pada entri diagonal utama pada baris pertama,  $a_{11} = -4$  dan selanjutnya ditentukan jari-jari cakram Gershgorin tipe kedua, yaitu dengan cara mengganti entri pada diagonal utama dengan 0,  $a_{11} = 0$ , diperoleh urutan tak naik dari entri-entri baris pertama adalah  $x_{11} = 0, x_{12} = 0, x_{13} = -2, x_{14} = -11, x_{15} = -17$ . Sehingga, jari-jarinya adalah

$$\begin{aligned} \hat{r}_1 &= \sum_{j=1}^{\frac{4}{2}} x_{1j} - \sum_{j=\frac{8}{2}}^5 x_{1j} \\ &= \sum_{j=1}^2 x_{1j} - \sum_{j=4}^5 x_{1j} \\ &= (0 + 0) - (-11 - 17) \\ &= 0 - (-28) \\ &= 28 \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh  $\hat{D}_1(-4, 28)$ .

Untuk baris kedua,

Pusat cakram terletak pada  $a_{22} = 4$  dan ganti entri diagonal utama  $a_{22} = 0$ , diperoleh urutan tak naik dari entri-entri baris kedua adalah  $x_{21} = 0, x_{22} = 0, x_{23} = 0, x_{24} = 0, x_{25} = 0$ . Sehingga, jari-jarinya adalah

$$\begin{aligned} \hat{r}_2 &= \sum_{j=1}^2 x_{2j} - \sum_{j=4}^5 x_{2j} \\ &= (0 + 0) - (0 + 0) \\ &= 0 - 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh  $\hat{D}_2(4, 0)$ .

Untuk baris ketiga,

Pusat cakram terletak pada  $a_{33} = 3$  dan ganti entri diagonal utama  $a_{33} = 0$ , diperoleh urutan tak naik dari entri-entri baris ketiga adalah  $x_{31} = 0$ ,  $x_{32} = 0$ ,  $x_{33} = 0$ ,  $x_{34} = 0$ ,  $x_{35} = -1$ . Sehingga, jari-jarinya adalah

$$\begin{aligned}\hat{r}_3 &= \sum_{j=1}^2 x_{3j} - \sum_{j=4}^5 x_{3j} \\ &= (0 + 0) - (0 - 1) \\ &= 0 - (-1) \\ &= 1\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh  $\hat{D}_3(3, 1)$ .

Untuk baris keempat,

Pusat cakram terletak pada  $a_{44} = -1$  dan ganti entri diagonal utama  $a_{44} = 0$ , diperoleh urutan tak naik dari entri-entri baris keempat adalah  $x_{41} = 1$ ,  $x_{42} = 0$ ,  $x_{43} = 0$ ,  $x_{44} = -7$ ,  $x_{45} = -22$ . Sehingga, jari-jarinya adalah

$$\begin{aligned}\hat{r}_4 &= \sum_{j=1}^2 x_{4j} - \sum_{j=4}^5 x_{4j} \\ &= (1 + 0) - (-7 - 22) \\ &= 1 - (-29) \\ &= 30\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh  $\hat{D}_4(-1, 30)$ .

Untuk baris kelima,

Pusat cakram terletak pada  $a_{55} = 0$  dan ganti entri diagonal utama  $a_{55} = 0$ , diperoleh urutan tak naik dari entri-entri baris kelima adalah  $x_{51} = 0$ ,  $x_{52} = 0$ ,  $x_{53} = 0$ ,  $x_{54} = 0$ ,  $x_{55} = 0$ . Sehingga, jari-jarinya adalah

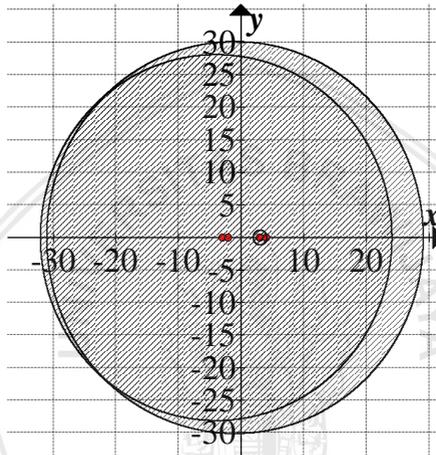
$$\begin{aligned}\hat{r}_5 &= \sum_{j=1}^2 x_{5j} - \sum_{j=4}^5 x_{5j} \\ &= (0 + 0) - (0 + 0)\end{aligned}$$

$$= 0 - 0$$

$$= 0$$

Sehingga diperoleh  $\hat{D}_5(0, 0)$ .

Diperoleh kelima cakram Gershgorin tipe kedua dari matriks  $A'$  adalah  $\hat{D}_1(-4, 28)$ ,  $\hat{D}_2(4, 0)$ ,  $\hat{D}_3(3, 1)$ ,  $\hat{D}_4(-1, 30)$ , dan  $\hat{D}_5(0, 0)$ . Berikut adalah gambar dari cakram Gershgorin tipe kedua dari matriks  $A'$  pada contoh ini.



Gambar 3.28 Cakram Gershgorin tipe kedua dari Matriks  $A'$

Terlihat bahwa nilai eigen  $\lambda_1 = -3$ ,  $\lambda_2 = -2$ ,  $\lambda_3 = 3$ , dan  $\lambda_4 = -3$  terletak dalam cakram Gershgorin tipe kedua dari  $A'$ .

Pada Contoh 3.2.16 telah disajikan lokasi nilai eigen real dari matriks  $A$ . Berikut disajikan contoh lokasi nilai eigen kompleks dari suatu matriks.

**Contoh 3.2.17** Diberikan matriks

$$M = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

mempunyai nilai eigen  $\lambda_1 = 2$  berkaitan dengan vektor eigen

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$\lambda_2 = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$  berkaitan dengan vektor eigen

$$v_2 = \begin{bmatrix} -12 - 9i \\ -9 + 12i \\ 25 \end{bmatrix},$$

$\lambda_3 = \frac{4}{5} - \frac{3}{5}i$  berkaitan dengan vektor eigen

$$v_3 = \begin{bmatrix} -12 + 9i \\ -9 - 12i \\ 25 \end{bmatrix}.$$

Akan ditentukan lokasi nilai eigen berdasarkan Teorema 3.2.15.

### Penyelesaian.

Bentuk matriks  $M'$  berordo  $4 \times 4$  dengan cara menyisipkan baris ke-4 dan kolom ke-4 dengan 0 sebagai berikut.

$$M' = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Kemudian ditentukan cakram-cakram Gershgorin tipe kedua dari  $M'$  sebagai berikut

Untuk baris pertama,

Pusat cakram terletak pada entri diagonal utama pada baris pertama,  $m_{11} = \frac{4}{5}$  dan selanjutnya ditentukan jari-jari cakram Gershgorin tipe kedua, yaitu dengan cara mengganti entri pada diagonal utama dengan 0,  $m_{11} = 0$ , diperoleh urutan tak naik dari entri-entri baris pertama adalah  $x_{11} = 0$ ,  $x_{12} = 0$ ,  $x_{13} = 0$ ,  $x_{14} = -\frac{3}{5}$ . Sehingga, jari-jarinya adalah

$$\begin{aligned}
 \hat{r}_1 &= \sum_{j=1}^{\frac{4}{2}} x_{1j} - \sum_{j=\frac{4}{2}+1}^4 x_{1j} \\
 &= \sum_{j=1}^2 x_{1j} - \sum_{j=3}^4 x_{1j} \\
 &= (0 + 0) - \left(0 - \frac{3}{5}\right) \\
 &= \frac{3}{5}
 \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh  $\hat{D}_1\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ .

Untuk baris kedua,

Pusat cakram terletak pada  $a_{22} = \frac{4}{5}$  dan ganti entri diagonal utama  $a_{22} = 0$ , diperoleh urutan tak naik dari entri-entri baris kedua adalah  $x_{21} = \frac{3}{5}$ ,  $x_{22} = 0$ ,  $x_{23} = 0$ ,  $x_{24} = 0$ . Sehingga, jari-jarinya adalah

$$\begin{aligned}
 \hat{r}_2 &= \sum_{j=1}^2 x_{2j} - \sum_{j=3}^4 x_{2j} \\
 &= \left(\frac{3}{5} + 0\right) - (0 + 0) \\
 &= \frac{3}{5}
 \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh  $\hat{D}_2\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ .

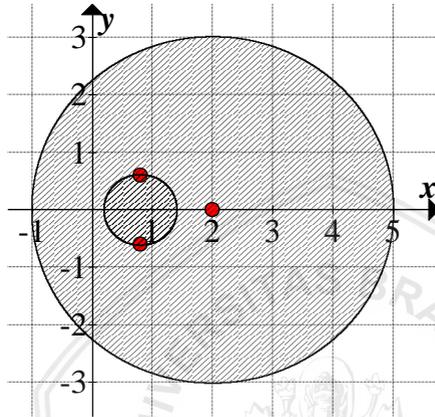
Untuk baris ketiga,

Pusat cakram terletak pada  $a_{33} = 2$  dan ganti entri diagonal utama  $a_{33} = 0$ , diperoleh urutan tak naik dari entri-entri baris ketiga adalah  $x_{31} = 2$ ,  $x_{32} = 1$ ,  $x_{33} = 0$ ,  $x_{34} = 0$ . Sehingga, jari-jarinya adalah

$$\begin{aligned}
 \hat{r}_3 &= \sum_{j=1}^2 x_{3j} - \sum_{j=3}^4 x_{3j} \\
 &= (2 + 1) - (0 + 0) \\
 &= 3
 \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh  $\hat{D}_3(2, 3)$ .

Sedangkan baris ke-4 cakram dapat diabaikan karena cakram berpusat di 0 dan berjari-jari 0. Terlihat bahwa seluruh nilai eigen terletak pada cakram Gershgorin tipe kedua dari  $M'$ , seperti ditunjukkan pada Gambar 3.29, yaitu gambar cakram Gershgorin tipe kedua dari matriks  $M'$  pada contoh ini.



Gambar 3.29 Cakram Gershgorin tipe kedua dari Matriks  $M'$

## BAB IV PENUTUP

### 4.1. Kesimpulan

Berdasarkan rumusan masalah, tujuan, dan pembahasan pada skripsi ini, dapat disimpulkan sebagai berikut.

Syarat cukup lokasi nilai eigen dari matriks real  $A$  berordo  $n \times n$  terletak pada cakram Gershgorin tipe kedua adalah :

1. Nilai eigen dari  $A$  berkaitan dengan vektor eigen ortogonal dengan vektor satu.
2. Jika nilai eigen dari  $A$  memiliki multiplisitas geometri  $k$  lebih dari atau sama dengan dua, maka nilai eigen terletak pada paling sedikit satu cakram Gershgorin tipe pertama dari  $C_k(A)$  dan paling sedikit  $k - 1$  cakram Gershgorin tipe kedua dari  $A$ .
3. Jika nilai eigen dari  $A$  mempunyai multiplisitas geometri  $k$  lebih besar dari dua, maka nilai eigen terletak pada paling sedikit satu cakram Gershgorin tipe pertama dari  $C_k(A)$  dan paling sedikit  $k - 1$  cakram Gershgorin tipe kedua  $D_i^k(A)$ . Semakin besar multiplisitas geometri, lokasi nilai eigen yang dihasilkan semakin baik.
4. Jika  $A'$  adalah matriks yang diperoleh dari  $A$  dengan menyisipkan sebuah baris dan kolom dengan 0 maka nilai eigen dari  $A$  terletak dalam cakram Gershgorin tipe kedua dari  $A'$ .

### 4.2. Saran

Pada skripsi ini hanya dibahas lokasi nilai eigen dari matriks real. Sedangkan untuk menentukan lokasi dari nilai eigen dari matriks kompleks tidak dapat ditentukan oleh cakram Gershgorin tipe kedua, karena tidak dapat dibentuk jari-jari bilangan real dengan cara menjumlahkan entri-entri bilangan kompleks. Pada skripsi selanjutnya disarankan membahas lokasi nilai eigen dari matriks kompleks.



## DAFTAR PUSTAKA

- Anton, Howard. 1988. *Aljabar Linear Elementer Edisi Kelima*. Jakarta : Penerbit Erlangga
- Barany, Imre dan Solymosi, Jozsef. 2016. *Gershgorin Disks for Multiple Eigenvalues of Non-Negative Matrices*. hal.1-9
- Horn, Roger A. dan Johnson, Charles R. 1990. *Matrix Analysis*. Cambridge : Cambridge University Press
- Marsli, Rachid. 2012. *Geometric Multiplicities and Geršgorin Discs*. Department of Mathematics and Statistics. Georgia State University : Georgia
- Marsli, Rachid dan Hall, Frank. 2013. International Journal of Algebra. *Some Refinements of Geršgorin Discs*. vol.7 hal.573-580.
- Marsli, Rachid dan Hall, Frank. 2017. Electronic Journal of Linear Algebra. *On The Location of Eigenvalues of Real Matrices*. vol.32 hal.357-364.
- Varga, Richard S. 2004. *Geršgorin and His Circles*. Berlin : Springer

