

## BAB II

### TINJAUAN PUSTAKA

#### 2.1. Model *Geographically Weighted Regression* (GWR)

##### 2.1.1. Model Umum *Geographicaly Weighted Regression* (GWR)

Model GWR merupakan salah satu model regresi yang dikembangkan dari model regresi global dengan melibatkan faktor geografis. Model ini merupakan suatu metode regresi yang menghasilkan estimator parameter untuk memprediksi setiap titik atau lokasi di mana data tersebut diamati dan dikumpulkan (Fotheringham dkk, 2002). Secara matematis model GWR dapat dituliskan sebagai berikut :

$$y_i = \beta_0(u_i, v_i) + \sum_{k=1}^p \beta_k(u_i, v_i)x_{ki} + \varepsilon_i ; \quad k = 1, 2, \dots, p ; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.1)$$

di mana

$y_i$  : nilai observasi peubah respon pada lokasi ke- $i$ ,

$x_{ki}$  : nilai observasi peubah penjelas  $k$  pada lokasi ke- $i$ ,

$\beta_0(u_i, v_i)$  : nilai intersep model pada lokasi ke- $i$ ,

$\beta_k(u_i, v_i)$  : nilai parameter regresi peubah penjelas ke-  $k$  untuk setiap lokasi ke- $i$ ,

$(u_i, v_i)$  : titik koordinat (lintang, bujur) lokasi ke- $i$ ,

$\varepsilon_i$  : galat observasi ke- $i$  dimana  $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ ,

$n$  : banyaknya lokasi,

$p$  : banyaknya peubah penjelas.

Asumsi-asumsi yang digunakan dalam analisis GWR adalah sebagai berikut (Leung dkk, 2000) :

- 1) Bentuk galat,  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  diasumsikan saling bebas, identik, dan berdistribusi normal dengan rata-rata nol dan ragam konstan.
- 2) Jika  $\hat{y}_i$  adalah penduga bagi  $y_i$ , maka untuk seluruh lokasi ( $i = 1, 2, \dots, n$ ),  $\hat{y}_i$  adalah penduga yang tak bias untuk  $E(y_i)$  atau dapat ditulis  $E(\hat{y}_i) = E(y_i)$  untuk semua  $i$ .

### 2.1.2. Uji Heterogenitas Spasial

Pemodelan regresi terhadap data spasial diawali dengan pengujian heterogenitas spasial. Hal ini dilakukan untuk melihat adanya keragaman antar lokasi yang disebabkan suatu lokasi memiliki struktur dan parameter hubungan yang berbeda dengan lokasi lainnya. Menurut Anselin (1988), heterogenitas data secara spasial dapat diuji dengan menggunakan statistik *Breusch-Pagan test (BP test)* yang memiliki hipotesis sebagai berikut :

$H_0 : \sigma_{(u_1, v_1)}^2 = \sigma_{(u_2, v_2)}^2 = \dots = \sigma_{(u_n, v_n)}^2 = \sigma^2$  artinya tidak terdapat heterogenitas spasial atau memiliki ragam yang sama (homoskedastisitas)

$H_1 : \text{minimal ada satu } \sigma_{(u_i, v_i)}^2 \neq \sigma^2$  artinya terdapat heterogenitas spasial atau ragam tidak sama (heteroskedastisitas)

Untuk menguji hipotesis tersebut, digunakan statistik uji *Breusch-Pagan (BP)* yaitu :

$$BP = \left(\frac{1}{2}\right) \mathbf{h}^T \mathbf{Z} (\mathbf{Z}^T \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}^T \mathbf{h} + \left(\frac{1}{tr}\right) \left[ \frac{\mathbf{e}^T \mathbf{W} \mathbf{e}}{\sigma^2} \right]^2 \sim \chi_{(p+1)}^2 \quad (2.2)$$

dimana

$\mathbf{h}$  : vektor dengan elemen  $h_i = \left(\frac{e_i^2}{\sigma^2} - 1\right)$ ,

$\mathbf{e}$  : vektor galat  $e_i$  (galat untuk pengamatan ke- $i$ ),

$\sigma^2$  : ragam galat,

$tr$  : teras matriks  $[W^T W + W^2]$ ,

$W$  : matriks pembobot antara lokasi ke- $i$  dan  $j$ , dengan fungsi pembobot

*Adaptive Gaussian Kernel* dalam pemodelan GWR.

$Z$  : matriks  $X$  berukuran  $n \times (p + 1)$  yang sudah dinormal-standarkan untuk setiap pengamatan dengan  $p$  merupakan banyaknya peubah penjelas.

Dengan kriteria uji:  $BP = \begin{cases} \leq \chi^2_{(p+1)}, & \text{terima } H_0 \\ > \chi^2_{(p+1)}, & \text{tolak } H_0 \end{cases}$ , dimana  $\chi^2_{(p+1)}$  merupakan

titik kritis uji  $\chi^2$  dengan taraf kesalahan  $\alpha$  dan derajat bebas  $(p + 1)$ . Kriteria pengambilan keputusan juga dapat dilakukan dengan membandingkan  $p - value$  dan  $\alpha$ . Jika  $p - value < \alpha$  maka  $H_0$  ditolak, sehingga dapat disimpulkan bahwa terdapat heterogenitas spasial.

### 2.1.3 Fungsi Pembobot Spasial

Pada dasarnya, pembobot spasial merupakan matriks dependensi spasial yang menggambarkan hubungan antar daerah atau lokasi. Pembobot yang diperhitungkan bagi suatu lokasi bergantung pada jarak antar satu daerah dengan daerah lainnya (Pace dan Barry, 1997). Pembobot digunakan untuk memberikan pendugaan hasil parameter yang berbeda di setiap lokasi pengamatan.

Matriks pembobot  $W_i$  menjadi bagian yang sentral pada GWR. Jika  $W_i$  merupakan matriks identitas, maka persamaan GWR akan sama dengan regresi linear biasa. Nilai  $W_i$  ditentukan oleh kedekatan pengamatan (lokasi ke- $i$ ) dengan lokasi lainnya (lokasi ke- $j$ ). Semakin dekat lokasinya, semakin besar nilai pembobot pada unsur yang berkesesuaian. Menurut Chan (2008) fungsi jarak *Euclidian*  $d_{ij}$  digunakan untuk menggeneralisasi  $W_i$  sedemikian rupa sehingga

nilai bobot lebih tinggi diberikan bagi pengamatan yang lebih dekat dari titik atau lokasi prediksi. Oleh karena itu, penentuan matriks pembobot yang tepat adalah krusial dalam pemodelan GWR.

Sebagaimana tercantum dalam tujuan penelitian, pada penelitian ini digunakan jenis fungsi pembobot spasial *Adaptive Gaussian kernel*. Secara matematis fungsi pembobot kernel tersebut dapat dituliskan sebagai berikut (Fotheringham dkk, 2002):

$$w_{ij} = \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{d_{ij}}{b_i} \right)^2 \right] \quad (2.3)$$

dimana  $b_i$  adalah *bandwidth* dan  $d_{ij}$  merupakan jarak *Euclidian* antara pengamatan pada titik ke- $i$  dan ke- $j$  dengan perhitungan :

$$d_{ij} = \sqrt{(u_i - u_j)^2 + (v_i - v_j)^2} \quad (2.4)$$

di mana:

$(u_i, v_i)$  : titik koordinat (lintang, bujur) pada lokasi ke- $i$ ,

$(u_j, v_j)$  : titik koordinat (lintang, bujur) pada lokasi ke- $j$ .

#### 2.1.4 Pemilihan *Bandwidth* Optimum

*Bandwidth* merupakan suatu bundaran dengan jari-jari  $b$  dari titik pusat lokasi yang berfungsi sebagai dasar perhitungan bobot bagi masing-masing amatan yang digunakan untuk membentuk pemodelan regresi tiap lokasi (Mei, 2005). Semakin kecil nilai *bandwidth* maka akan semakin sedikit titik observasi yang tercakup dalam radius  $b$ , sehingga ragam menjadi besar dan hasil estimasi model yang melibatkan sedikit observasi menjadi sangat kasar. Sebaliknya, jika nilai *bandwidth* besar, maka semakin banyak titik pengamatan yang berada

dalam radius  $b$ , sehingga dapat menimbulkan bias dan model yang terlalu halus (Hutabarat, 2014).

Menurut Fotheringham, dkk (2002) pemilihan ukuran *bandwidth* yang optimum menjadi salah satu hal yang penting karena akan mempengaruhi ketepatan hasil regresi. Pada penelitian ini menggunakan salah satu metode pemilihan *bandwidth* optimum yaitu *Cross Validation* (CV).

Metode *Cross Validation* (CV) ini cocok digunakan untuk penentuan *bandwidth* optimum pada pembobot jenis *Gaussian kernel*. Nilai *bandwidth* dengan metode CV diperoleh dengan menghasilkan nilai prediksi peubah respon ke- $i$  dalam menduga nilai  $y_i$  pada model. Secara matematis *Cross Validation* (CV) dapat dituliskan sebagai berikut (Fotheringham dkk, 2002):

$$CV(b) = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_{\neq i}(b))^2 \quad (2.5)$$

dimana

$n$  : banyaknya lokasi observasi

$i$  :  $1, 2, \dots, n$

$y_i$  : observasi ke- $i$

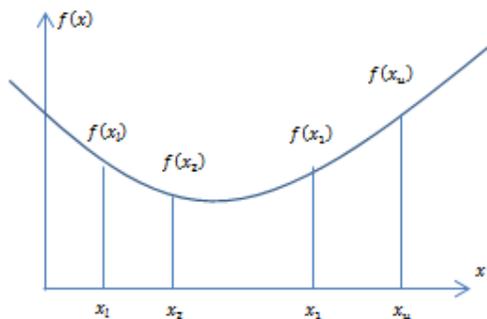
$\hat{y}_{\neq i}(b)$  : nilai estimasi observasi ke- $i$  yang nilainya diperoleh tanpa melibatkan pengamatan lokasi ke- $i$  itu sendiri.

Untuk memperoleh *bandwidth* yang optimum maka persamaan (2.5) harus diminimumkan. Dalam praktiknya, pemilihan *bandwidth* optimum diperoleh menggunakan teknik optimalisasi komputer. Berdasarkan deskripsi yang dijelaskan pada *R Help Documentation*, salah satu teknik optimalisasi yang digunakan dikenal dengan *One Dimensional Optimization*, yaitu suatu fungsi optimalisasi yang mencari sebuah nilai parameter  $x$  pada interval dengan batas

bawah dan batas atas tertentu sedemikian rupa sehingga suatu fungsi  $f(x)$  menjadi minimum atau maksimum berdasarkan nilai inisiasi awal.

Salah satu metode optimalisasi satu dimensi yang diperkenalkan oleh Yalcin dan Kaw (2012) adalah *Golden Section Search* (GSS). Metode GSS digunakan untuk menemukan suatu fungsi minimum atau maksimum. Dalam hal ini fungsi yang akan diminimumkan adalah fungsi CV dengan *bandwidth* tertentu.

Secara sederhana, metode GSS diawali dengan menentukan nilai-nilai  $x_l$  sebagai batas bawah,  $x_1$  sebagai nilai antara, dan  $x_u$  sebagai batas atas, sehingga  $x_l < x_1 < x_u$  yang bersesuaian dengan fungsi berturut-turut  $f(x_l)$ ,  $f(x_1)$ , dan  $f(x_u)$ . Jika  $f(x_1) < f(x_l)$  dan  $f(x_1) < f(x_u)$ , maka nilai yang meminimumkan fungsi akan berada pada selang antara  $x_l$  dan  $x_u$ . Langkah selanjutnya adalah menentukan nilai antara  $x_2$  pada selang terbesar dari  $[x_l, x_1]$  atau  $[x_1, x_u]$ . Dengan mengasumsikan bahwa interval  $[x_l, x_1]$  sebagai selang lebih besar dari  $[x_1, x_u]$ , maka dipilih selang  $[x_l, x_1]$  sebagai selang dimana  $x_2$  ditempatkan. Jika  $f(x_2) < f(x_1)$  maka tiga titik nilai baru menjadi  $x_l > x_2 > x_1$  dan sebaliknya jika  $f(x_2) > f(x_1)$  maka tiga titik baru menjadi  $x_2 < x_1 < x_u$ . Proses ini berlanjut hingga jarak antara titik terluar menjadi cukup kecil. Secara visual, proses tersebut diperlihatkan dalam Gambar 2.1.



**Gambar 2.1 Ilustrasi Proses Metode *Golden Section Search***

### **Algoritma *Golden Section Search***

Algoritma GSS yang dilakukan untuk menemukan nilai minimum dari fungsi  $f(x)$  adalah sebagai berikut (Yalcin, 2012):

- 1) Inisialisasi : menentukan batas bawah selang  $x_l$  dan batas atas  $x_u$  yang diduga mengandung nilai minimum fungsi  $f(x)$ ,
- 2) Menentukan titik intermedial  $x_1$  dan  $x_2$  sebagai berikut

$$x_1 = x_l + d$$

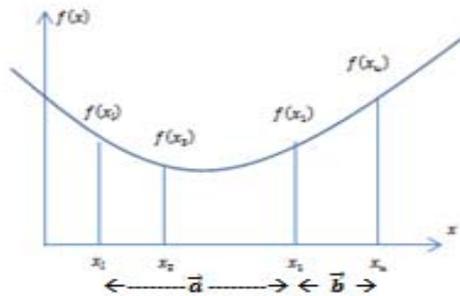
$$x_2 = x_u - d,$$

dimana  $d = (\varphi)/(x_u - x_l)$ , dan

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \text{ merupakan } \textit{golden ratio}$$

Menurut Wikipedia (2017), dua jarak  $\vec{a}$  dan  $\vec{b}$  dapat dikatakan dalam *golden ratio*  $\varphi$  jika,

$\frac{\vec{a}+\vec{b}}{\vec{a}} = \frac{\vec{a}}{\vec{b}} = \varphi$  , sebagaimana diilustrasikan pada Gambar berikut :



**Gambar 2.2 Penentuan Golden Ratio**

Nilai *golden ratio*  $\varphi$  ditentukan dengan penyederhanaan fraksi kiri,

dan substitusi  $\frac{\vec{b}}{\vec{a}} = \frac{1}{\varphi}$  sebagai berikut

$$\rightarrow \frac{\vec{a}+\vec{b}}{\vec{a}} = 1 + \frac{\vec{b}}{\vec{a}} = 1 + \frac{1}{\varphi},$$

$$\rightarrow 1 + \frac{1}{\varphi} = \varphi$$

$$\rightarrow \varphi + 1 = \varphi^2$$

→  $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$  , maka dengan penurunan rumus kuadrat diperoleh,

→  $\varphi = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$  (dipilih nilai yang positif karena rasio antara nilai positif adalah bilangan positif.

3) Mengevaluasi fungsi  $f(x_1)$  dan  $f(x_2)$ ,

Jika  $f(x_1) < f(x_2)$ , maka tentukan titik-titik  $x_l$ ,  $x_1$ ,  $x_2$ , dan  $x_u$  yang baru sebagai berikut :

$$x_l = x_2$$

$$x_2 = x_{opt} = x_1$$

$$x_u = x_u$$

$$x_1 = x_l + \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) / (x_u - x_l)$$

Jika  $f(x_1) > f(x_2)$ , maka tentukan titik-titik  $x_l$ ,  $x_1$ ,  $x_2$ , dan  $x_u$  yang baru sebagai berikut :

$$x_l = x_l$$

$$x_1 = x_{opt} = x_2$$

$$x_u = x_u$$

$$x_2 = x_u - \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) / (x_u - x_l)$$

4) Iterasi akan berhenti jika nilai  $\left( (2 - \varphi) * \text{abs} \left( (x_u - x_l) / x_{opt} \right) \right)$  cukup kecil ( $< 0.01$ )(Guzman, 2017).

### 2.1.5. Estimasi Parameter Model GWR

Pada model GWR, nilai setiap parameternya memiliki perbedaan antara satu lokasi dengan lokasi lainnya karena dihitung berdasarkan titik-titik setiap lokasi geografis. Menurut Fotheringham dkk (2002), *Weighted Least Square*

(WLS) atau metode kuadrat terkecil terboboti dapat digunakan untuk mengestimasi parameter model GWR.

Hutabarat (2014) menuliskan secara rinci estimasi parameter model GWR pada setiap lokasi. Jika  $w_{ij}^{\frac{1}{2}}$  merupakan suatu akar kuadrat dari nilai-nilai elemen diagonal matriks pembobot spasial ke-  $i$  yang ditentukan oleh kedekatan observasi (lokasi) ke- $i$  dengan lokasi lainnya (ke- $j$ ), dimana  $w_{ij}^{\frac{1}{2}} w_{ij}^{\frac{1}{2}} = w_{ij}$  dan  $w_{ij}^{-\frac{1}{2}} w_{ij}^{-\frac{1}{2}} = w_{ij}^{-1}$ .

Dengan mengalikan kedua ruas pada persamaan (2.1) dengan  $w_{ij}^{\frac{1}{2}}$ , dihasilkan persamaan sebagai berikut :

$$w_{ij}^{\frac{1}{2}} y_i = w_{ij}^{\frac{1}{2}} \beta_0(u_i, v_i) + w_{ij}^{\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^p \beta_k(u_i, v_i) x_{ki} + w_{ij}^{\frac{1}{2}} \varepsilon_i$$

$$w_{ij}^{\frac{1}{2}} \varepsilon_i = w_{ij}^{\frac{1}{2}} y_i - w_{ij}^{\frac{1}{2}} \beta_0(u_i, v_i) - w_{ij}^{\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^p \beta_k(u_i, v_i) x_{ki}$$

$$w_{ij}^{\frac{1}{2}} \varepsilon_i = w_{ij}^{\frac{1}{2}} \left\{ y_i - \beta_0(u_i, v_i) - \sum_{k=1}^p \beta_k(u_i, v_i) x_{ki} \right\}$$

$$w_{ij}^{\frac{1}{2}} \varepsilon_i = w_{ij}^{\frac{1}{2}} \{ y_i - \beta_0(u_i, v_i) - \beta_1(u_i, v_i) x_{1i} - \beta_2(u_i, v_i) x_{2i} - \dots - \beta_p(u_i, v_i) x_{pi} \}.$$

Dengan menganggap estimasi parameter GWR dengan WLS sebagai prosedur estimasi parameter regresi dengan *Ordinary Least Square* (OLS), maka estimasi parameter GWR dengan WLS dapat diperoleh dengan meminimumkan fungsi  $Q$  sebagai jumlah kuadrat galat sebagai berikut :

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{j=1}^n \left( w_{ij}^{\frac{1}{2}} \varepsilon_i \right)^2 \\ &= \sum_{j=1}^n \left( w_{ij}^{\frac{1}{2}}(u_i, v_i) \{ y_i - \beta_0(u_i, v_i) - \beta_1(u_i, v_i) x_{1i} - \dots - \beta_k(u_i, v_i) x_{pi} \} \right)^2 \quad (2.6) \end{aligned}$$

Misalkan :

$$\mathbf{W}_i : \begin{bmatrix} w_{i1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w_{i2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & w_{in} \end{bmatrix}, \text{ matriks pembobot spasial lokasi}$$

ke- $i$  berukuran  $n \times n$ ,

$$\mathbf{Y} : \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \text{ matriks nilai peubah respon berukuran } n \times 1,$$

$$\mathbf{X} : \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1p} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{np} \end{bmatrix}, \text{ matriks nilai peubah penjelas berukuran}$$

$n \times (p + 1)$ ,

$$\boldsymbol{\beta}(u_i, v_i) : \begin{bmatrix} \beta_0(u_i, v_i) \\ \beta_1(u_i, v_i) \\ \vdots \\ \beta_p(u_i, v_i) \end{bmatrix}, \text{ vektor parameter berukuran } (p + 1) \times 1 \text{ lokasi ke- } i,$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} : \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}, \text{ vektor galat observasi dimana } \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2),$$

maka persamaan (2.6) dapat dituliskan dalam bentuk matriks sebagai berikut :

$$\begin{aligned} Q &= \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{W}_i \boldsymbol{\varepsilon} \\ &= \{\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}(u_i, v_i)\}^T \mathbf{W}_i \{\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}(u_i, v_i)\} \\ &= \mathbf{Y}^T \mathbf{W}_i \mathbf{Y} - \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i)^T \mathbf{X}^T \mathbf{W}_i \mathbf{Y} - \mathbf{Y}^T \mathbf{W}_i \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}(u_i, v_i) + \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i)^T \mathbf{X}^T \mathbf{W}_i \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}(u_i, v_i) \end{aligned}$$

Karena  $\{\boldsymbol{\beta}(u_i, v_i)^T \mathbf{X}^T \mathbf{W}_i \mathbf{Y}\}^T = \mathbf{Y}^T \mathbf{W}_i \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}(u_i, v_i) = \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i)^T \mathbf{X}^T \mathbf{W}_i \mathbf{Y}$ , maka

$$Q = \mathbf{Y}^T \mathbf{W}_i \mathbf{Y} - 2\boldsymbol{\beta}(u_i, v_i)^T \mathbf{X}^T \mathbf{W}_i \mathbf{Y} + \boldsymbol{\beta}(u_i, v_i)^T \mathbf{X}^T \mathbf{W}_i \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}(u_i, v_i) \quad (2.7)$$

Penyelesaian persamaan (2.7) diperoleh dengan menurunkannya secara parsial terhadap  $\beta(u_i, v_i)^T$  dan menyamadengankan 0 sebagai berikut

$$\frac{\partial Q}{\partial \beta(u_i, v_i)^T} = 0$$

$$\frac{\partial Y^T W_i Y - 2\beta(u_i, v_i)^T X^T W_i Y + \beta(u_i, v_i)^T X^T W_i X \beta(u_i, v_i)}{\partial \beta(u_i, v_i)^T} = 0$$

$$\Rightarrow 0 - 2X^T W_i Y + 2X^T W_i X \hat{\beta}(u_i, v_i) = 0$$

$$\Rightarrow -2X^T W_i Y = -2X^T W_i X \hat{\beta}(u_i, v_i)$$

$$\Rightarrow 2X^T W_i Y = 2X^T W_i X \hat{\beta}(u_i, v_i)$$

$$\Rightarrow X^T W_i Y = X^T W_i X \hat{\beta}(u_i, v_i)$$

kedua ruas dikalikan dengan  $(X^T W_i X)^{-1}$ , maka

$$\Rightarrow (X^T W_i X)^{-1} X^T W_i Y = (X^T W_i X)^{-1} X^T W_i X \hat{\beta}(u_i, v_i)$$

$$\Rightarrow (X^T W_i X)^{-1} X^T W_i Y = I \hat{\beta}(u_i, v_i)$$

$$\Rightarrow (X^T W_i X)^{-1} X^T W_i Y = \hat{\beta}(u_i, v_i).$$

Dari penyelesaian persamaan tersebut diperoleh estimasi parameter model untuk setiap lokasi ke-  $i$ , dituliskan sebagai berikut :

$$\hat{\beta}(u_i, v_i) = (X^T W_i X)^{-1} X^T W_i Y, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.8)$$

Jika terdapat  $n$  lokasi pengamatan, maka estimator tersebut merupakan estimasi setiap baris dari matriks parameter lokal sebagai berikut :

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0(u_1, v_1) & \hat{\beta}_1(u_1, v_1) & \hat{\beta}_2(u_1, v_1) & \dots & \hat{\beta}_p(u_1, v_1) \\ \hat{\beta}_0(u_2, v_2) & \hat{\beta}_1(u_2, v_2) & \hat{\beta}_2(u_2, v_2) & \ddots & \hat{\beta}_p(u_2, v_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\beta}_0(u_n, v_n) & \hat{\beta}_1(u_n, v_n) & \hat{\beta}_2(u_n, v_n) & \dots & \hat{\beta}_p(u_n, v_n) \end{bmatrix}$$

### 2.1.6 Pengujian Signifikansi Parameter Model GWR

Pengujian parameter model GWR dilakukan untuk mengetahui signifikansi pengaruh setiap parameter terhadap peubah respon, dengan menggunakan statistik uji  $t$  secara parsial dengan hipotesis sebagai berikut :

$$H_0: \beta_k(u_i, v_i) = 0, \text{ lawan}$$

$$H_1: \beta_k(u_i, v_i) \neq 0 ;$$

dimana  $k = 1, 2, \dots, p$  dan  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Estimator parameter  $\beta_k(u_i, v_i)$  akan mengikuti distribusi normal dengan nilai tengah  $\beta_k(u_i, v_i)$  dan matriks ragam peragam  $CC^T\sigma^2$ , dimana  $C = (X^T W(u_i, v_i) X)^{-1} X^T W(u_i, v_i)$ . Secara matematis statistik uji  $t$  dapat dituliskan sebagai berikut:

$$t = \frac{\hat{\beta}_k(u_i, v_i) - \beta_k(u_i, v_i)}{\hat{\sigma} \sqrt{c_{kk}}} \quad (2.9)$$

dimana  $c_{kk}$  merupakan elemen diagonal ke- $k$  matriks  $CC^T$ . Sementara itu  $\hat{\sigma}$  diperoleh dengan mengakarkan  $\sigma^2 = \frac{JKG}{\delta_i}$ , dimana

$$JKG = Y^T (I - L)^T (I - L) Y,$$

$$\delta_i = \text{trace}[(I - L)^T (I - L)]^i, i = 1, 2, \text{ dan}$$

$$L = \begin{pmatrix} X_1^T (X^T W(u_1, v_1) X)^{-1} X^T W(u_1, v_1) \\ X_2^T (X^T W(u_2, v_2) X)^{-1} X^T W(u_2, v_2) \\ \vdots \\ X_n^T (X^T W(u_n, v_n) X)^{-1} X^T W(u_n, v_n) \end{pmatrix}, \text{ dengan } X_i^T = (1 \ x_{i1} \ x_{i2} \ \dots \ x_{ip})$$

merupakan elemen baris ke- $i$  dari matriks  $X$ .

Jika statistik uji  $|t| > t_{(\frac{\alpha}{2}, df = \frac{\delta_1}{\delta_2})}$ , maka  $H_0$  ditolak. Kriteria pengambilan

keputusan juga dapat dilakukan dengan membandingkan  $p$  - value dan  $\alpha$ . Jika

$p - value < \alpha$ , maka  $H_0$  ditolak, artinya bahwa parameter  $\beta_k(u_i, v_i)$  berpengaruh terhadap model GWR.

## 2.2. Pendekatan Bayesian

Terdapat dua pendekatan dalam teori estimasi parameter, yaitu pendekatan klasik dan pendekatan Bayesian. Pendekatan yang sepenuhnya mengandalkan proses inferensia terhadap data contoh disebut dengan pendekatan klasik, sedangkan pendekatan Bayesian memanfaatkan data sampel dengan memperhitungkan suatu informasi awal yang disebut distribusi prior (Ntzoufras, 2009). Kedua pendekatan tersebut berbeda dalam hal memandang suatu parameter. Jika pada pendekatan klasik mengasumsikan parameter  $\theta$  adalah suatu nilai yang bersifat konstanta dan tidak diketahui, maka Gelman, dkk (2014) menyebutkan bahwa parameter  $\theta$  dipandang sebagai peubah acak berdistribusi prior. Selanjutnya distribusi prior ini akan menentukan distribusi posterior.

Pendekatan Bayesian memiliki kelebihan dibandingkan dengan pendekatan klasik antara lain :

- 1) Parameter dianggap sebagai peubah bebas yang memiliki distribusi peluang yang menghasilkan tingkat kepercayaan yang akurat.
- 2) Telah banyak digunakan sebagai alat bantu estimasi model untuk berbagai persoalan dengan bermacam situasi.
- 3) Memperoleh distribusi prediksi untuk masa mendatang.

### 2.2.1 Distribusi Prior dan Posterior

Distribusi prior merupakan informasi berupa distribusi awal sebelum melakukan analisis data dengan parameter  $\theta$  yang merupakan fungsi kepekatan

peluang untuk menjelaskan tingkat keyakinan nilai  $\theta$  (Berger, 1980). Berdasarkan teorema Bayesian, distribusi posterior dibentuk dengan mengkombinasikan informasi awal (distribusi prior) dan informasi sampel yang dinyatakan dengan fungsi *likelihood*. Berdasarkan Box dan Tiao (1973), distribusi prior terdiri dari tiga kelompok yaitu :

- 1) Berkaitan dengan penentuan masing-masing parameter pada distribusi prior :
  - a. *Informative Prior*, jika terdapat informasi mengenai parameter model dan pemilihannya didasarkan pada informasi dari data yang diperoleh.
  - b. *Non-Informative Prior*, jika pemilihannya tidak didasarkan pada data yang ada.
- 2) Berkaitan dengan bentuk distribusi hasil identifikasi pada data :
  - a. *Conjugate Prior*, mengacu pada analisis model terutama dalam pembentukan fungsi *likelihoodnya*. Prior ini memiliki ketepatan yang baik dalam menghasilkan distribusi posterior sesuai dengan keluarga distribusinya
  - b. *Non-Conjugate Prior*, jika penentuan prior tidak mengacu pada pembentukan fungsi *likelihoodnya*.
- 3) Berkaitan dengan pemberian bobot atau densitas terhadap titik apakah data berdistribusi uniform atukah tidak, terdiri dari *proper* dan *improper prior*.

Berdasarkan teorema Bayesian, jika  $y$  adalah suatu data amatan maka distribusi posterior  $f(\theta|y)$  dibentuk dari prior  $\theta$  atau  $f(\theta)$  sebagai berikut :

$$f(\theta|y) = \frac{f(y|\theta)f(\theta)}{f(y)} \quad (2.10)$$

Secara umum, karena  $f(y)$  tidak mengandung parameter dan merupakan nilai tetap (konstanta), maka persamaan tersebut dapat dinyatakan dalam persamaan

yang menunjukkan perkalian antara fungsi likelihood data dan distribusi prior membentuk distribusi posterior proporsional sebagai berikut :

$$f(\theta|y) \propto f(y|\theta)f(\theta) \quad (2.11)$$

dimana

$f(y|\theta)$  : fungsi *likelihood* data,

$f(\theta)$  : fungsi peluang distribusi prior,

$f(y)$  : konstanta ternormalisasi.

Untuk mengestimasi distribusi posterior dari semua parameter dalam model, dilakukan dengan menurunkan parameter-parameter yang bersangkutan. Pendugaan untuk setiap parameter diperoleh melalui bentuk distribusi bersyarat dari setiap parameter dengan penentuan distribusi prior terlebih dahulu. Sedangkan distribusi bersyarat untuk setiap parameter diperoleh melalui penurunan dari bentuk distribusi gabungan semua peubah dalam model, sehingga distribusi posterior tersebut proporsional terhadap fungsi likelihood dan prior.

Penyelesaian bentuk-bentuk distribusi tersebut memerlukan suatu proses yang sangat rumit dan membutuhkan waktu yang cukup lama. Salah satu penyelesaian untuk mengatasi kesulitan tersebut adalah dengan menggunakan algoritma *Gibbs Sampling* dalam pendekatan numerik *Markov Chain Monte Carlo* (MCMC).

### **2.2.2. Markov Chain Monte Carlo (MCMC) dan Algoritma Gibbs Sampling**

MCMC adalah salah satu metode simulasi untuk memperoleh data contoh bangkitan dari suatu sebaran tertentu dimana mekanisme kerjanya menggunakan sifat-sifat rantai Markov sebagai penghasil distribusi posterior

yang akurat pada pendekatan Bayesian yang sangat rumit (Ntzoufras, 2009). Algoritma *Gibbs Sampling* merupakan salah satu metode yang sering digunakan pada MCMC. Algoritma ini membangkitkan pengamatan berikutnya secara acak dengan menggunakan pengamatan sebelumnya sehingga dihasilkan rantai markov. Algoritma ini sering digunakan karena distribusi bersyarat memiliki bentuk yang diketahui, sehingga mudah dipahami dan dilakukan simulasi yang mudah menggunakan fungsi sederhana pada *software* statistik.

Sebagaimana Ntzoufras (2009) terangkan bahwa algoritma *Gibbs Sampling* dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut :

1. Menginisiasi nilai awal untuk setiap parameter yang diduga :
2. Membangkitkan parameter baru berdasarkan parameter inisiasi,
3. Membentuk parameter baru dari hasil pengulangan (iterasi) ke- $q$  dan menyimpannya sebagai sekumpulan nilai-nilai referensi pada pembangkitan berikutnya pada algoritma iterasi ke  $(q + 1)$ .
4. Mengulangi langkah ke-1 sampai dengan ke-3 sebanyak iterasi yang ditentukan hingga konvergen artinya bahwa observasi yang dibangkitkan pada simulasi sudah sesuai dengan sebaran posterior.

## **2.3. Model *Bayesian* GWR (BGWR)**

### **2.3.1. Pendekatan *Bayesian* Untuk Model GWR**

Sebagaimana diungkapkan oleh Leung, dkk (2000) bahwa ragam galat pada model GWR diasumsikan konstan atau homogen, sehingga permasalahan pencilan sebagai akibat adanya ragam yang tidak konstan tidak dapat diselesaikan. Untuk menyelesaikan permasalahan tersebut dilakukan pendekatan *Bayesian* yang pernah dilakukan oleh LeSage (2001). Melalui

pendekatan *Bayesian*, dijelaskan bahwa parameter-parameter model GWR sebagaimana dalam persamaan dalam bentuk matriks sebagai berikut :

$$\mathbf{W}_i \mathbf{Y} = \mathbf{W}_i \mathbf{X} \boldsymbol{\beta}_i + \boldsymbol{\varepsilon}_i \quad (2.12)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i \sim N[0, \sigma^2 \mathbf{V}], i = 1, 2, \dots, n$$

$$\mathbf{V} = \text{diag}(v_1, v_2, \dots, v_n)$$

dimana :

$\sigma^2$  : ragam galat

$\mathbf{V}$  : matriks diagonal berukuran  $n \times n$  yang menunjukkan ragam tidak konstan antar lokasi amatan

### 2.3.2. Sebaran Prior pada Model GWR

Dalam penelitian ini, sebaran prior bagi  $\boldsymbol{\beta}_i$  dan  $\sigma$  menggunakan *improper prior* berdasarkan Geweke (1993) yaitu masing-masing  $f(\boldsymbol{\beta}_i) \propto \text{konstanta}$  dan  $f(\sigma) \propto \frac{1}{\sigma}$ . Sedangkan sebaran prior bagi  $\mathbf{V}$  dibentuk dari  $f\left(\frac{r}{v_i}\right) \sim \frac{\chi^2(r)}{r}$  sedemikian rupa sehingga  $f(\mathbf{V}) \propto \prod_{i=1}^n v_i^{-(r+2)/2} \exp\left(\frac{-r}{2v_i}\right)$  dengan  $r$  merupakan *hyperparameter* yang mengontrol sejumlah sebaran pendugaan  $\mathbf{V}$  sehingga  $E(\mathbf{V}) = \mathbf{1}$  dan  $\text{Var}(\mathbf{V}) = 2/r$ . Dengan demikian, jika  $r$  menjadi sangat besar, maka ragam galat model BGWR menjadi  $\sigma^2 \mathbf{I}_n$  (terpenuhi asumsi homoskedastisitas atau ragam menjadi konstan). Sebaliknya, jika  $r$  menjadi kecil, maka berarti bahwa sebaran prior menunjukkan bahwa ragam tidak konstan antara lokasi amatan (Chan, 2008).

### 2.3.3. Fungsi *Likelihood* bagi data pada Model GWR

Fungsi *likelihood* data yang biasa digunakan dalam estimasi parameter pada metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE), dapat dibangun dengan mengalikan fungsi densitas peluang masing-masing pengamatan dan memaksimumkan fungsinya.

Sebagaimana dituliskan oleh LeSage (2001), bahwa matriks galat  $\varepsilon_i$  pada persamaan model GWR (2.12) berdistribusi normal dengan nilai rata-rata nol dan matriks varian kovarian  $\sigma^2\mathbf{V}$ , atau dituliskan dengan notasi  $\varepsilon_i \sim N[0, \sigma^2\mathbf{V}]$ . Jika  $y_i$  pada matriks vektor  $\mathbf{Y}$  merupakan suatu peubah random dan saling bebas satu sama lain maka dapat dibentuk fungsi *likelihood* sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
 L(\mathbf{Y}|\boldsymbol{\beta}, \sigma, \mathbf{V}) &= f(y_1)f(y_2) \dots f(y_n) \\
 &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{(2\pi)^{1/2}(\sigma^2v_i)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{(\mathbf{Y}_i^* - \mathbf{X}_i^*\boldsymbol{\beta})^2}{\sigma^2v_i}\right\} \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \frac{1}{(\sigma^2)^{n/2}} \prod_{i=1}^n \frac{1}{(v_i)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2v_i} \sum_{i=1}^n (\mathbf{Y}_i^* - \mathbf{X}_i^*\boldsymbol{\beta})^2\right\} \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \frac{1}{(\sigma^2)^{n/2}} \prod_{i=1}^n \frac{1}{(v_i)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2v_i} \sum_{i=1}^n (\mathbf{Y}_i^* - \mathbf{X}_i^*\boldsymbol{\beta})^2\right\} \\
 &\propto \sigma^{-n} \prod_{i=1}^n \frac{1}{(v_i)^{1/2}} \exp\left\{-\sum_{i=1}^n \frac{(\varepsilon_i)^2}{2\sigma^2v_i}\right\}
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

### 2.3.4. Analisis Posterior bagi Penduga Parameter Model GWR

Proses simulasi algoritma *Gibbs Sampling* memerlukan sebaran posterior bersyarat bagi masing-masing parameter yang diduga. Sebaran posterior bersyarat atau *full conditional distribution* diperoleh dengan cara menurunkan

sebaran posterior bersama. Berdasarkan teorema *Bayesian* dan asumsi saling bebas antar sebaran prior, maka sebaran posterior bersama dapat diperoleh dengan cara mengalikan fungsi *likelihood* data dengan sebaran prior bersama sebagai berikut :

$$f(\boldsymbol{\beta}_i, \sigma, \mathbf{V} | \mathbf{Y}, \mathbf{X}) \propto L(\mathbf{Y}, \mathbf{X} | \boldsymbol{\beta}_i, \sigma, \mathbf{V}) \times f(\boldsymbol{\beta}_i) \times f(\sigma) \times f(\mathbf{V}) \quad (2.14)$$

Sebaran posterior bersama terbentuk sebagai berikut :

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{\beta}_i, \sigma, \mathbf{V} | \mathbf{Y}, \mathbf{X}) &= L(\mathbf{Y}, \mathbf{X} | \boldsymbol{\beta}_i, \sigma, \mathbf{V}) \times f(\boldsymbol{\beta}_i) \times f(\sigma) \times f(\mathbf{V}) \\ &\propto \left[ \sigma^{-n} \prod_{i=1}^n \frac{1}{(v_i)^{1/2}} \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n \frac{(\boldsymbol{\epsilon}_i)^2}{2\sigma^2 v_i} \right\} \right] \times \sigma^{-1} \times \left[ \prod_{i=1}^n (v_i)^{-(r+2)/2} \exp \left( \frac{-r}{2v_i} \right) \right] \\ &\propto \left[ \sigma^{-(n+1)} \prod_{i=1}^n (v_i)^{-1/2} \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n \frac{\sigma^{-2}(\boldsymbol{\epsilon}_i)^2}{2v_i} \right\} \right] \times \left[ \prod_{i=1}^n (v_i)^{-(r+2)/2} \exp \left( \frac{-r}{2v_i} \right) \right] \\ &\propto \left[ \sigma^{-(n+1)} \prod_{i=1}^n (v_i)^{-(r+3)/2} \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n \frac{\sigma^{-2}(\boldsymbol{\epsilon}_i)^2 + r}{2v_i} \right\} \right] \end{aligned} \quad (2.15)$$

Berdasarkan sebaran posterior bersama tersebut dapat diperoleh *full conditional* posterior untuk setiap parameter sebagai berikut (Geweke, 1993):

1. Sebaran posterior  $\boldsymbol{\beta}_i$  dengan syarat  $\sigma$  dan  $\mathbf{V}$  :

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{\beta}_i | \sigma, \mathbf{V}) &= \int_{\sigma} \int_{\mathbf{V}} f(\boldsymbol{\beta}_i, \sigma, \mathbf{V} | \mathbf{Y}, \mathbf{X}) \, d\sigma \, d\mathbf{V} = \int_{\sigma} \int_{\mathbf{V}} \left[ \sigma^{-(n+1)} \prod_{i=1}^n (v_i)^{-(r+3)/2} \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n \frac{\sigma^{-2}(\boldsymbol{\epsilon}_i)^2 + r}{2v_i} \right\} \right] \, d\sigma \, d\mathbf{V} \\ &\propto \frac{\left[ \sigma^{-(n+1)} \prod_{i=1}^n (v_i)^{-(r+3)/2} \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n \frac{\sigma^{-2}(\boldsymbol{\epsilon}_i)^2 + r}{2v_i} \right\} \right]}{\sigma^{-1} \times \left\{ \prod_{i=1}^n (v_i)^{-(r+2)/2} \exp \left( \frac{-r}{2v_i} \right) \right\}} \\ &\propto \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n \frac{\sigma^{-2}(\boldsymbol{\epsilon}_i)^2}{2v_i} \right\} \\ &\propto \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n \frac{\sigma^{-2}(\mathbf{Y}_i^* - \mathbf{X}_i^* \boldsymbol{\beta})^2}{2v_i} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\propto \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n \frac{(\mathbf{Y}_i^* - \mathbf{X}_i^* \boldsymbol{\beta})^2 \mathbf{V}^{-1}}{2\sigma^2} \right\} \\
&\propto \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n \frac{(\mathbf{Y}_i^* - \mathbf{X}_i^* \boldsymbol{\beta})^T \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{Y}_i^* - \mathbf{X}_i^* \boldsymbol{\beta})}{2\sigma^2} \right\} \\
&\propto \exp \left\{ - \frac{(\boldsymbol{\beta} - \widehat{\boldsymbol{\beta}}(v))^T [(\mathbf{X}_i^*)^T \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{X}_i^*)] (\boldsymbol{\beta} - \widehat{\boldsymbol{\beta}}(v))}{2\sigma^2} \right\}
\end{aligned}$$

dimana,  $\widehat{\boldsymbol{\beta}}(v) = [(\mathbf{X}_i^*)^T \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{X}_i^*)]^{-1} [(\mathbf{X}_i^*)^T \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{Y}_i^*)]$ , sehingga

$$f(\boldsymbol{\beta}_i | \sigma^2, \mathbf{V}) \sim N \left[ \widehat{\boldsymbol{\beta}}(v), \sigma^2 [(\mathbf{X}_i^*)^T \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{X}_i^*)]^{-1} \right] \quad (2.16)$$

2. Sebaran posterior  $\sigma$  dengan syarat  $\boldsymbol{\beta}_i$  dan  $\mathbf{V}$  :

Misalkan  $\mathbf{u}_i = \mathbf{Y}_i^* - \mathbf{X}_i^* \boldsymbol{\beta}$ , maka

$$\begin{aligned}
f(\sigma | \boldsymbol{\beta}_i, \mathbf{V}) &\propto \int_{\boldsymbol{\beta}_i} \int_{\mathbf{V}} f(\boldsymbol{\beta}_i, \sigma, \mathbf{V} | \mathbf{Y}, \mathbf{X}) \partial \boldsymbol{\beta}_i \partial \mathbf{V} = \int_{\boldsymbol{\beta}_i} \int_{\mathbf{V}} \left[ \sigma^{-(n+1)} \prod_{i=1}^n (v_i)^{-(r+3)/2} \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n \frac{\sigma^{-2} (\boldsymbol{\varepsilon}_i)^2 + r}{2v_i} \right\} \right] \partial \boldsymbol{\beta}_i \partial \mathbf{V} \\
&\propto \frac{\left[ \sigma^{-(n+1)} \prod_{i=1}^n (v_i)^{-(r+3)/2} \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n \frac{\sigma^{-2} (\boldsymbol{\varepsilon}_i)^2 + r}{2v_i} \right\} \right]}{\left\{ \prod_{i=1}^n (v_i)^{-(r+2)/2} \exp \left( \frac{-r}{2v_i} \right) \right\}} \\
&\propto \sigma^{-(n+1)} \times \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n \frac{\sigma^{-2} (\boldsymbol{\varepsilon}_i)^2}{2v_i} \right\} \\
&\propto \sigma^{-(n+1)} \times \exp \left\{ - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{(\boldsymbol{\varepsilon}_i)^2 / v_i}{\sigma^2} \right\}
\end{aligned}$$

Jika  $\phi = \sum_{i=1}^n \frac{(\boldsymbol{\varepsilon}_i)^2 / v_i}{\sigma^2}$  yang proporsional terhadap  $\phi^{(n+2)/2} \exp(-\frac{\phi}{2})$ , maka

$$f \left( \sum_{i=1}^n \frac{(\boldsymbol{\varepsilon}_i)^2 / v_i}{\sigma^2} | \boldsymbol{\beta}_i, \mathbf{V} \right) \sim \chi_{(n)}^2 \quad (2.17)$$

3. Sebaran posterior  $\mathbf{V}$  dengan syarat  $\boldsymbol{\beta}$  dan  $\sigma$  :

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{V} | \boldsymbol{\beta}_i, \sigma) &\propto \int_{\boldsymbol{\beta}_i} \int_{\sigma} f(\boldsymbol{\beta}_i, \sigma, \mathbf{V} | \mathbf{Y}, \mathbf{X}) \partial \boldsymbol{\beta}_i \partial \sigma = \int_{\boldsymbol{\beta}_i} \int_{\sigma} \left[ \sigma^{-(n+1)} \prod_{i=1}^n (v_i)^{-(r+3)/2} \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n \frac{\sigma^{-2} (\boldsymbol{\varepsilon}_i)^2 + r}{2v_i} \right\} \right] \partial \boldsymbol{\beta}_i \partial \sigma \\
&\propto \frac{\left[ \sigma^{-(n+1)} \prod_{i=1}^n (v_i)^{-(r+3)/2} \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n \frac{\sigma^{-2} (\boldsymbol{\varepsilon}_i)^2 + r}{2v_i} \right\} \right]}{\sigma^{-1}} \\
&\propto \sigma^{-n} \prod_{i=1}^n (v_i)^{-(r+3)/2} \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n \frac{\sigma^{-2} (\boldsymbol{\varepsilon}_i)^2 + r}{2v_i} \right\}
\end{aligned}$$

$$\propto \prod_{i=1}^n (v_i)^{-(r+3)/2} \exp\left\{-\sum_{i=1}^n \frac{\sigma^{-2}(\boldsymbol{\varepsilon}_i)^2 + r}{2v_i}\right\}$$

$$\propto \prod_{i=1}^n (v_i)^{-(r+3)/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\sigma^{-2}(\boldsymbol{\varepsilon}_i)^2 + r}{v_i}\right\}$$

Jika  $\psi = \sum_{i=1}^n \frac{\sigma^{-2}(\boldsymbol{\varepsilon}_i)^2 + r}{v_i}$  yang proporsional terhadap  $\psi^{(r-1)/2} \exp(-\frac{\psi}{2})$ , maka

$$f\left(\left[\frac{\sigma^{-2}(\boldsymbol{\varepsilon}_i)^2 + r}{v_i}\right] \mid \boldsymbol{\beta}_i, \sigma\right) \sim \chi_{(r+1)}^2 \quad (2.18)$$

### 2.3.5. Algoritma *Gibbs Sampling* untuk Estimasi Parameter

Penarikan contoh acak dilakukan dengan menggunakan sebaran posterior bersyarat bagi masing-masing parameter dan pendugaan parameter dilakukan dengan menghitung rataan posterior bersyarat dari parameter yang menjadi fokus perhatian dalam model (Carlin dan Louis, 2009). Gilks, Richardson, dan Spiegelhalter (1996) mengatakan bahwa proses penarikan contoh acak dari sebaran posterior bersyarat melibatkan integrasi dan komputasi yang rumit sehingga dilakukan simulasi *Markov Chain Monte Carlo* (MCMC). Simulasi MCMC ini mengkonstruksi contoh-contoh acak dari sebaran posterior sebagai rantai Markov yang konvergen pada sebaran target (stasioner) sehingga prosesnya dilakukan secara iteratif dimana contoh yang dibangkitkan bergantung pada satu nilai sebelumnya.

Salah satu algoritma yang sering digunakan dalam simulasi MCMC adalah algoritma *Gibbs Sampling*. Algoritma ini digunakan oleh LeSage (2001) untuk membangkitkan contoh acak secara berurutan dari sebaran posterior bagi parameter model untuk mendapatkan pendugaan parameter. Parameter-parameter ( $\theta$ ) yang akan diduga dalam algoritma ini adalah  $\boldsymbol{\beta}_i$ ,  $\sigma$ , dan  $\mathbf{V}$  dengan sebaran posterior bersyarat adalah masing-masing pada persamaan (2.16), (2.17), dan (2.18).

Dengan menggunakan notasi yang sama pada sebaran posterior bersyarat tersebut, proses algoritma *Gibbs Sampling* dapat diperlihatkan melalui tahapan sebagai berikut (Chan, 2008):

- Menentukan nilai inisiasi secara acak bagi parameter-parameter  $\beta_i^0, \sigma^{(0)}$ , dan  $V^0$
- Untuk masing-masing pengamatan  $i = 1$  hingga  $n$  :
  - a. Bangkitkan nilai  $\beta_i^1$  dari  $f(\beta_i|\sigma^{(0)}, V^0)$  menggunakan persamaan (2.16)
  - b. Bangkitkan nilai  $\sigma^{(1)}$  dari  $f(\sigma|\beta_i^1, V^0)$  menggunakan persamaan (2.17)
  - c. Bangkitkan nilai  $V^1$  dari  $f(V|\beta_i^1, \sigma^{(1)})$  menggunakan persamaan (2.18)
- Mengganti nilai-nilai  $\beta_i^0, \sigma^{(0)}$ , dan  $V^0$  pada langkah 1 dengan  $\beta_i^1, \sigma^{(1)}$ , dan  $V^1$
- Mengulangi langkah 2 hingga 3 sebanyak  $q$  kali (bangkitan) hingga mendekati konvergen.
- Menghilangkan sebanyak  $c$  bangkitan pertama (*Burn-in Period*) dalam rangka untuk mengurangi pengaruh dari nilai awal atau inisiasi.
- Nilai bangkitan bagi masing-masing parameter yang diperoleh  $\{\theta^{(c+1)}, \theta^{(c+2)}, \dots, \theta^{(q)}\}$  digunakan sebagai pembentuk sebaran posterior.

Output atau pendugaan yang dihasilkan dari algoritma *Gibbs Sampling* tersebut adalah berupa sekumpulan nilai parameter bangkitan, dimana sebaran posterior bersyarat dari parameter dapat dibangun. Pendugaan parameter ( $\hat{\theta}$ , terdiri dari  $\beta_i, \sigma$ , dan  $V$ ) diperoleh dari :

$$\hat{\theta} = (q - c)^{-1} \sum_{j=1}^{(q-c)} \theta^j \quad (2.19)$$

### 2.3.6. Pengujian Signifikansi Parameter BGWR

Untuk memeriksa apakah peubah-peubah penjelas dalam model berpengaruh nyata terhadap peubah respon, maka diperlukan untuk melakukan pengujian signifikansi parameter. Berdasarkan Ntzoufras (2009), pengujian signifikansi parameter pada pendekatan Bayesian dilakukan dengan melihat nilai *credible interval* yang diperoleh dari prediksi sebaran posterior melalui proses simulasi *MCMC-Gibbs Sampling*. *Credible Interval* merupakan selang atau interval wilayah dari peluang sebaran posterior.

Nilai estimasi parameter BGWR diperlihatkan dengan nilai rata-rata yang diperoleh dari nilai hasil bangkitan sebaran posterior. *Credible interval* diperlihatkan dengan batas bawah *percentile* 2,5% dan batas atas *percentile* 97,5% (Ntzoufras, 2009). Secara rinci, hipotesis yang diuji adalah sebagai berikut :

$H_0 : \beta_{ik} = 0$  ; tidak terdapat pengaruh signifikan peubah penjelas terhadap  
peubah respon

$H_0 : \beta_{ik} \neq 0$  ; terdapat pengaruh signifikan peubah penjelas terhadap peubah  
respon

Kriteria keputusan penolakan atau penerimaan  $H_0$  didasarkan pada muncul atau tidaknya nilai nol pada *credible interval* masing-masing parameter. Jika memuat nilai nol maka tolak  $H_0$ , sebaliknya jika tidak memuat nilai nol maka terima  $H_0$ .

### 2.3.7. Pengujian Ketepatan Estimasi dan Pemeriksaan Konvergensi Model BGWR

Sebagaimana di tulis oleh Ntzoufras (2009), salah satu cara untuk memeriksa ketepatan estimasi parameter pada model dengan pendekatan

Bayesian adalah dengan memperhatikan nilai *MC Error* dan *trace dynamic plot* yang dihasilkan pada proses simulasi *MCMC-Gibbs Sampling*.

*MC error* merupakan sebuah skala pengukuran yang menggunakan variabilitas dari setiap estimasi hasil simulasi. Hasil estimasi parameter dapat dikatakan baik jika nilai *MC Error* kecil atau mendekati nilai nol. Nilai *MC Error* ini juga digunakan untuk memeriksa kekonvergensi hasil simulasi MCMC. Berdasarkan Ntzoufras (2009), rumus matematik untuk menghitung nilai tersebut :

$$MCError[g(\theta)] = \sqrt{\frac{1}{b(b-1)} \sum_{d=1}^b (g(\theta)_d - \overline{g(\theta)})^2} \quad (2.20)$$

dimana,

$$g(\theta)_d = \frac{1}{k} \sum_{l=(d-1)k+1}^{dk} g(\theta_{(l)}) \quad (2.21)$$

$$\overline{g(\theta)} = \frac{1}{q-c} \sum_{l=1}^{q-c} g(\theta_{(l)}) \quad (2.22)$$

Keterangan:

$g(\theta)_d$  : rata-rata setiap *batch* nilai output simulasi

$\overline{g(\theta)}$  : rata-rata umum nilai output simulasi

$b$  : banyaknya *batch*

$k$  : banyaknya nilai output simulasi di setiap *batch*

$d$  : indeks *batch*

$q$  : banyaknya nilai output simulasi yang dibangkitkan

$c$  : banyaknya *burn-in*.

Selain menggunakan nilai *MC Error*, ketepatan estimasi parameter juga dapat dilakukan dengan memperhatikan *trace dynamic plot* yaitu plot nilai

bangkitan sebaran posterior terhadap iterasi, dimana jika plot tidak berpola tertentu maka dapat dikatakan bahwa hasil simulasi telah konvergen. Jika belum, maka perlu meningkatkan proses iterasi.

## 2.4 Pemilihan Pemodelan Terbaik

Salah satu cara untuk memilih model terbaik antara lain adalah dengan menghitung nilai kuadrat tengah galat atau *Mean Square Error* (MSE). MSE diartikan sebagai rata-rata dari jumlah kuadrat perbedaan nilai amatan sebenarnya terhadap penduganya (galat), sehingga pendugaan yang paling akurat atau model yang lebih baik akan mengarah kepada nilai MSE yang semakin kecil. Secara matematis dituliskan sebagai berikut :

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 \quad (2.23)$$

Menurut Walpole (1992), untuk memperkuat pernyataan bahwa suatu model dapat dikatakan sebagai model terbaik, maka perlu dilakukan pengujian terhadap ragam galat yang dihasilkan oleh model. Uji *Bartlett* merupakan salah satu prosedur pengujian kesamaan ragam galat antar model. Hipotesis yang diuji adalah sebagai berikut :

$$H_0 : \sigma_{e1}^2 = \sigma_{e2}^2 = \dots = \sigma_{ek}^2$$

$H_1$  : paling tidak terdapat satu nilai ragam galat yang berbeda

dimana  $\sigma_{ei}$  merupakan ragam galat model ke- $i$  dan  $i = 1, 2, \dots, k$ .

Adapun jika  $H_0$  benar, maka statistik uji  $b$  dirumuskan sebagai berikut:

$$b = \frac{[(S_1^2)^{n_1-1} (S_2^2)^{n_2-1} \dots (S_k^2)^{n_k-1}]^{1/(N-k)}}{S_p^2} \sim b_k(\alpha, n) \quad (2.24)$$

dimana  $b_k(\alpha, n)$  adalah sebaran *Bartlett* dan  $S_p^2$  merupakan ragam galat gabungan yaitu  $S_p^2 = \frac{\sum_{i=1}^k (n_i - 1) S_i^2}{N - k}$ , dengan  $N = \sum_{i=1}^k n_i$  dan  $k$  adalah banyaknya model.

Dengan kriteria pengujian  $H_0$  ditolak jika nilai  $b < b_k(\alpha, n)$  yang berarti bahwa ragam galat yang dihasilkan oleh  $k$  model berbeda.

## 2.5. Uji Signifikansi Perbedaan Dua Nilai Tengah

Untuk menguji signifikansi perbedaan dua nilai tengah, maka dilakukan uji  $t$  terhadap hipotesis sebagai berikut :

$H_0 : \mu_A = \mu_B$  (tidak ada perbedaan nilai tengah)

$H_1 : \mu_A \neq \mu_B$  (terdapat perbedaan nilai tengah)

Adapun jika  $H_0$  benar, maka statistik uji  $t$  dengan jumlah data sama serta asumsi bahwa ragam populasi ( $\sigma^2$ ) berbeda dan tidak diketahui, dirumuskan sebagai berikut (Steel dan Torrie, 1991):

$$t = \frac{\mu_A - \mu_B}{S_{\mu_A - \mu_B}} \sim t_{(\alpha, df)} \quad (2.25)$$

dengan

$$S_{\mu_A - \mu_B} = \sqrt{\frac{s_A^2}{n_A} + \frac{s_B^2}{n_B}} \quad (2.26)$$

$$df = \frac{(s_A^2/n_A + s_B^2/n_B)^2}{(s_A^2/n_A)^2/(n_A - 1) + (s_B^2/n_B)^2/(n_B - 1)} \quad (2.27)$$

dimana

$\mu_A$  : nilai tengah data A,

$\mu_B$  : nilai tengah data B,

$s_A^2$  : ragam sampel data A,

$s_B^2$  : ragam sampel data B,

$s_{\mu_A - \mu_B}$  : standar deviasi gabungan,

$n_A$  : banyaknya observasi data A,

$n_B$  : banyaknya observasi data B,

$df$  : derajat bebas.

Dengan kriteria pengujian jika  $t \begin{cases} \leq t_{(\alpha, df)} \text{ atau nilai } -p > \alpha, \text{ maka terima } H_0 \\ > t_{(\alpha, df)} \text{ atau nilai } -p < \alpha, \text{ maka tolak } H_0 \end{cases}$ , dimana

$t_{(\alpha, df)}$  merupakan titik kritis uji  $t$  dengan taraf kesalahan  $\alpha$  dan derajat bebas  $df$ .

Uji  $t$  tersebut dilakukan dengan mengasumsikan ragam populasi berbeda satu sama lain. Untuk mengetahui perbedaan antar ragam maka dilakukan uji kesamaan ragam  $S_A^2$  dan  $S_B^2$  (Walpole, Myers, Myers, dan Ye, 2012). Hipotesis yang diuji adalah sebagai berikut :

$$H_0 : S_A^2 = S_B^2 \text{ (ragam sampel sama)}$$

$$H_1 : S_A^2 \neq S_B^2 \text{ (ragam sampel sama)}$$

Adapun jika  $H_0$  benar, maka statistik uji  $f$  dirumuskan sebagai berikut:

$$f = \frac{S_A^2}{S_B^2} \sim f_{(\alpha, (n_A-1), (n_B-1))} \quad (2.28)$$

Dengan kriteria pengujian  $H_0$  ditolak jika  $f < f_{((1-\alpha), (n_A-1), (n_B-1))}$  atau  $f > f_{((\alpha), (n_A-1), (n_B-1))}$ .

## 2.6. Kemiskinan

Menurut Badan Pusat Statistik Pusat (2016), dengan menggunakan *basic needs approach* (kemampuan pemenuhan kebutuhan dasar), kemiskinan didefinisikan sebagai ketidakmampuan seseorang dari segi ekonomi dalam mencukupi kebutuhan dasar atas makanan dan non makanan yang

diperhitungkan dari sisi pengeluaran. Dengan pendekatan tersebut, suatu penduduk dapat dikatakan miskin jika memiliki rata-rata pengeluaran per kapita per bulan dibawah garis kemiskinan.

Garis kemiskinan merupakan suatu batasan dimana seseorang dapat dikatakan miskin atau tidak. Garis kemiskinan ditentukan dengan memperhitungkan nilai pengeluaran kebutuhan minimum untuk makanan (52 komoditi meliputi sereal, umbi-umbian, sayuran, buah-buahan dan lain-lain) dan non makanan (perumahan, sandang, pendidikan, dan kesehatan).

Menurut BPS (2015), tingkat kemiskinan ditunjukkan oleh persentase penduduk yang berada di bawah garis kemiskinan yang disebut sebagai *Head Count Index* atau *HCI*. Secara sederhana, *HCI* merupakan pengukuran proporsi penduduk miskin dari total populasi penduduk. Tiga indikator utama yang dapat menunjukkan tingkat kemiskinan kabupaten/kota, antara lain adalah angka melek huruf, rumah tangga pengguna jamban bersama, dan rumah tangga penerima raskin.

Angka melek huruf (AMH) didefinisikan sebagai proporsi penduduk yang bisa menulis dan membaca kalimat sederhana dari alfabet tertentu, terdiri dari huruf, arab, latin, atau huruf lainnya untuk kelompok umur diatas 15 tahun dari jumlah penduduk berusia diatas 15 tahun. Dalam penelitian Kumalasari (2013), diketahui bahwa AMH sebagai bagian dari pendidikan memiliki pengaruh cukup besar terhadap kemiskinan. Suatu wilayah dengan AMH yang tinggi idealnya mempunyai tingkat kemiskinan yang rendah.

Selanjutnya rumah tangga pengguna jamban bersama merupakan rumah tangga yang menggunakan sarana atau fasilitas tempat penampungan air besar yang digunakan secara bersama-sama dengan rumah tangga tertentu lainnya. Sebagaimana disampaikan dalam penelitian Adhi (2009), sanitasi yang

diartikan sebagai akses terhadap jamban yang buruk merupakan akar dari kemiskinan.

Sedangkan rumah tangga penerima raskin adalah rumah tangga yang mendapatkan subsidi beras bagi masyarakat berpenghasilan rendah atau disebut juga dengan program beras miskin (raskin). Program raskin ini merupakan program bersifat nasional lintas sektoral baik vertikal maupun horizontal untuk membantu mencukupi kebutuhan beras bagi masyarakat berpenghasilan rendah.