

**METODE BEDA HINGGA TAK-STANDAR  
YANG STABIL ELEMENTER DAN POSITIF  
UNTUK MODEL *PREDATOR-PREY* BEDDINGTON-DEANGELIS**

**SKRIPSI**

Oleh:  
**AJI SWASONO**  
**0510940001-94**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS BRAWIJAYA  
MALANG  
2010**

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



**METODE BEDA HINGGA TAK-STANDAR  
YANG STABIL ELEMENTER DAN POSITIF  
UNTUK MODEL *PREDATOR-PREY* BEDDINGTON-DEANGELIS**

**SKRIPSI**

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar  
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Oleh :

**AJI SWASONO  
0510940001-94**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS BRAWIJAYA  
MALANG  
2010**

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



**LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI**

**METODE BEDA HINGGA TAK-STANDAR  
YANG STABIL ELEMENTER DAN POSITIF  
UNTUK MODEL *PREDATOR-PREY* BEDDINGTON-DEANGELIS**

Oleh:  
**AJI SWASONO**  
**0510940001-94**

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji  
pada tanggal 10 Februari 2010  
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar  
Sarjana Sains dalam bidang matematika

**DOSEN PEMBIMBING I**

**DOSEN PEMBIMBING II**

**Dr. Agus Suryanto, M.Sc.**  
**NIP. 196908071994121001**

**Kwardiniya A., S.Si., M.Si.**  
**NIP. 197006221998022001**

**Mengetahui,**  
**Ketua Jurusan Matematika**  
**Fakultas MIPA Universitas Brawijaya**

**Dr. Agus Suryanto, M .Sc**  
**NIP. 196908071994121001**

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



## LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

**Nama** : AJI SWASONO  
**NIM** : 0510940001  
**Jurusan** : MATEMATIKA  
**Judul Skripsi** : METODE BEDA HINGGA TAK-STANDAR  
YANG STABIL ELEMENTER DAN POSITIF UNTUK  
MODEL *PREDATOR-PREY* BEDDINGTON-DEANGELIS

Dengan ini menyatakan bahwa :

1. Isi Skripsi yang saya buat adalah benar-benar karya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain, selain nama-nama yang termaktub di isi dan tertulis di daftar pustaka dalam Skripsi ini.
2. Apabila di kemudian hari ternyata Skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala risiko yang akan saya terima.

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 10 Februari 2010

Yang menyatakan,

(AJI SWASONO)  
NIM. 0510940001



UNIVERSITAS BRAWIJAYA





# METODE BEDA HINGGA TAK-STANDAR YANG STABIL ELEMENTER DAN POSITIF UNTUK MODEL *PREDATOR-PREY* BEDDINGTON- DEANGELIS

## ABSTRAK

Model *predator-prey* Beddington-DeAngelis adalah model interaksi antara spesies *prey* dan *predator*, dimana laju memangsa *predator* terhadap *prey* menggunakan tipe Beddington-DeAngelis. Model tersebut berbentuk sistem persamaan diferensial biasa tak-linier yang solusi umumnya sulit dicari, sehingga solusinya diperoleh secara numerik. Banyak metode numerik yang digunakan untuk memperoleh solusi dari model di atas, namun, kestabilan dan akurasi sangat bergantung pada nilai langkah waktu dan nilai awalnya. Metode beda hingga tak-standar yang stabil elementer dan positif (*Positive and Elementary Stable Nonstandard* (PESN)) merupakan salah satu metode numerik yang berdasar pada diskritisasi tak-standar pada turunan terhadap waktu dan diskritisasi tak-lokal pada fungsi laju pertumbuhan. Dari analisa tentang sifat-sifat dinamik dan simulasi numerik, metode ini konsisten ketika dikaitkan dengan model *predator-prey* di atas, kecuali pada sifat stabil pusat.

**Kata kunci** : Beddington-DeAngelis, diskritisasi, tak-standar, positif, stabil elementer, tak-lokal..

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



# POSITIF AND ELEMENTARY STABLE NONSTANDARD FINITE DIFFERENCE METHODS FOR BEDDINGTON-DEANGELIS PREDATOR-PREY MODEL

## ABSTRACT

Predator-prey Beddington-DeAngelis model describes an interaction between prey and predator species, where predator feeding rate uses the Beddington-DeAngelis type. The model is a nonlinear differential equations system where the general solution is generally difficult to be determined, therefore, the solution is usually determined numerically. There are many numerical methods to get the solution from the model above. However, their stability and accuracy depend strongly on the time step size and initial value. Positive and elementary stable nonstandard (PESN) finite-difference methods is one of numerical methods that is based on nonstandard discretization of the time derivative and nonlocal discretization of the growth rate function. From the dynamical analyzes and the numerical simulations, the method is consistent with the corresponding continuous predator-prey, except the stable centre properties.

**Keywords** : Beddington-DeAngelis, discretization, nonstandard, positive, elementary stable, nonlocal.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



## KATA PENGANTAR

Segala puji, syukur, hormat dan kemuliaan bagi Allah SWT yang telah melimpahkan kasih-Nya dan anugerah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan judul “**Metode Beda Hingga Tak-Standar yang Stabil Elementer dan Positif untuk Model *Predator-Prey Beddington-DeAngelis***”. Skripsi ini merupakan sebagian persyaratan kelulusan dalam memperoleh gelar kesarjanaan di Fakultas MIPA Jurusan Matematika Universitas Brawijaya.

Pada penyelesaian skripsi ini penulis banyak mendapat bantuan dan dukungan dari berbagai pihak, karena itu pada kesempatan kali ini penulis ingin mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Dr. Agus Suryanto, M.Sc dan Kwardiniya A., S.Si, M.Si, selaku dosen pembimbing yang telah meluangkan waktu untuk membimbing dan memberi masukan kepada penulis.
2. Indah Yanti, S.Si selaku dosen pembimbing akademik yang telah memberi motivasi dan arahan selama penulis menempuh kuliah.
3. Dra. Ari Andari, M.S, Dra. Endang WH, M.Si, Drs. Marsudi, M.S, selaku dosen penguji pada ujian skripsi.
4. Seluruh dosen Matematika yang telah memberikan bekal dan ilmu pengetahuan serta staf administrasi Jurusan Matematika atas segala bantuannya.
5. Bapak Zaenal Rofii dan ibu Tri Yuniati serta saudara-saudara penulis yang senantiasa tanpa henti memberi semangat dan doa. Ira Marita Efrinawati atas segala dukungannya.
6. Keluarga besar Zero Jeans, Math '05, HIMAMASTER dan semua pihak yang telah membantu proses penulisan skripsi ini yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Semoga Allah SWT memberikan anugerah dan karunia-Nya kepada semua pihak yang telah membantu menyelesaikan skripsi ini. Penulis menyadari bahwa dalam skripsi ini masih banyak kekurangan, sehingga kritik dan saran pembaca sangat penulis harapkan.

Akhirnya semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi pembaca, khususnya mahasiswa Matematika Universitas Brawijaya.

Malang, 10 Februari 2010

Penulis

UNIVERSITAS BRAWIJAYA





## DAFTAR ISI

	Halaman
<b>HALAMAN JUDUL</b> .....	i
<b>LEMBAR PENGESAHAN</b> .....	iii
<b>LEMBAR PERNYATAAN</b> .....	v
<b>ABSTRAK</b> .....	vii
<b>ABSTRACT</b> .....	ix
<b>KATA PENGANTAR</b> .....	xi
<b>DAFTAR ISI</b> .....	xiii
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	xv
<b>DAFTAR TABEL</b> .....	xvii
<b>DAFTAR LAMPIRAN</b> .....	xix
<b>BAB I PENDAHULUAN</b> .....	1
1.1. Latar Belakang .....	1
1.2. Rumusan Masalah .....	2
1.3. Tujuan .....	2
<b>BAB II TINJAUAN PUSTAKA</b> .....	3
2.1. Persamaan Otonomus dan Sistem Otonomus.....	3
2.2. Titik Kesetimbangan dan Kestabilan .....	3
2.2.1. Kestabilan Sistem Otonomus Linier .....	4
2.2.2. Kestabilan Sistem Otonomus Tak-Linier .....	7
2.3. Model <i>Predator-Prey</i> .....	10
2.3.1. Fungsi Respon.....	10
2.3.2. Fungsi Respon Beddington-DeAngelis.....	11
2.4. Sistem Persamaan Beda .....	12
2.4.1. Titik kesetimbangan dan Kestabilan .....	12
2.5. Solusi Sistem Persamaan Beda Orde Satu .....	14
2.6. Sistem Persamaan Beda Orde Satu Tak-Linier .....	15
2.7. Metode Numerik untuk Persamaan Diferensial .....	16
2.7.1. Pendekatan Turunan Pertama.....	17
2.7.2. Metode Beda Hingga Standar .....	17
2.7.3. Metode Beda Hingga Tak-Standar .....	18
2.7.4. Metode Beda Hingga Tak-Standar yang Stabil Elementer dan Positif .....	19
2.8. Konsisten secara Dinamik.....	20



<b>BAB III HASIL DAN PEMBAHASAN</b> .....	21
3.1. Analisis Dinamik Sistem Kontinu .....	21
3.1.1. Titik Keseimbangan.....	21
3.1.2. Kestabilan .....	22
3.2. Diskritisasi Model .....	25
3.2.1. Titik Keseimbangan.....	26
3.2.2. Kestabilan.....	27
3.3. Simulasi Numerik.....	31
<b>BAB IV PENUTUP</b> .....	37
4.1 Kesimpulan .....	37
4.2 Saran .....	37
<b>DAFTAR PUSTAKA</b> .....	31
<b>LAMPIRAN</b> .....	43



## DAFTAR GAMBAR

	Halaman
<b>Gambar 2.1</b> Jenis kestabilan titik kesetimbangan, (a) stabil, (b) stabil asimtotik .....	4
<b>Gambar 2.2</b> Jenis kestabilan titik kesetimbangan persamaan Beda, (a) stabil, (b) tidak stabil, (c) stabil dan <i>attracting</i> (stabil asimtotik), (d) <i>global attracting</i> .....	13
<b>Gambar 3.1</b> Untuk $h=0,1$ solusi numerik metode PESN dan metode Euler konsisten .....	32
<b>Gambar 3.2</b> Untuk $h=0,7$ solusi numerik metode PESN dan metode Euler masih konsisten .....	32
<b>Gambar 3.3</b> Untuk $h=0,81$ solusi numerik metode PESN konsisten dan metode Euler tidak konsisten....	33
<b>Gambar 3.4</b> Metode PESN konsisten untuk $q=4,2$ .....	34
<b>Gambar 3.5</b> Metode PESN tidak konsisten untuk $q=3,5$ ....	34
<b>Gambar 3.6</b> Untuk $ac-2=-0,15$ solusi numerik metode PESN menuju titik kesetimbangan $e_2=(1,7857, 7,1428)$ .....	35
<b>Gambar 3.7</b> Untuk $ac-2=0$ solusi numerik metode PESN mendekati sifat stabil pusat.....	35
<b>Gambar 3.8</b> Untuk $ac-2=0,1$ solusi numerik metode PESN menjauhi titik kesetimbangan $e_2=(1,0467, 4,6667)$ .....	36
<b>Gambar 3.9</b> Metode PESN bersifat positif tanpa syarat .....	37

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



## DAFTAR LAMPIRAN

Halaman

<b>Lampiran 1</b>	Listing Program Menggunakan Matlab 7.1 untuk Melakukan Simulasi Skema Numerik Model <i>Predator-Prey</i> Beddington-DeAngelis.....	43
<b>Lampiran 2</b>	Desain <i>Interface</i> Program Menggunakan Matlab 7.1 untuk Melakukan Simulasi Skema Numerik Model <i>Predator-Prey</i> Beddington-DeAngelis.....	48



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1. Latar Belakang

Menurut Boyce dan DiPrima (2005), banyak fakta yang menekankan perilaku alami dalam kehidupan nyata merupakan hubungan yang menyertakan laju dari suatu kejadian. Ketika diekspresikan ke dalam istilah matematika, hubungan tersebut dinyatakan sebagai persamaan sedangkan laju dinyatakan sebagai turunan. Persamaan yang mengandung turunan disebut persamaan diferensial (*differential equations*). Kejadian-kejadian dalam kehidupan nyata seperti fluida bergerak, penyebaran panas dari benda padat, perubahan populasi, dan lain sebagainya adalah sebagian contoh aplikasi dari persamaan diferensial.

Model *predator-prey* adalah model yang menggambarkan pertumbuhan populasi dari *prey* dan *predator* dan dapat ditulis dalam bentuk sistem persamaan diferensial sebagai berikut

$$\frac{dx}{dt} = p(x) - af(x, y)y; \quad x(0) \geq 0$$

$$\frac{dy}{dt} = f(x, y)y - \mu(y); \quad y(0) \geq 0,$$

dimana  $x$  dan  $y$  masing-masing menyatakan banyaknya populasi *prey* dan *predator*, fungsi  $p(x)$  dan  $\mu(y)$  masing-masing menyatakan laju kelahiran *prey* dan laju kematian *predator*, konstanta  $a$  menyatakan efisiensi penyerapan oleh *predator* dan fungsi  $f(x, y)$  disebut fungsi respon yang menyatakan laju memangsa per *predator* terhadap *prey*.

Sistem persamaan diferensial di atas merupakan bentuk tak-linier yang solusi umumnya sulit diperoleh secara eksak, sehingga solusinya diperoleh secara numerik. Metode numerik dengan menggunakan metode beda hingga standar seperti Euler dan Runge-Kutta maupun tak-standar seperti *Elementary Stable Nonstandard* (ESN) sering digunakan untuk memprediksi perilaku dinamik dari model *predator-prey*. Namun, pada metode Euler dan Runge-Kutta, kestabilan dan akurasinya sangat bergantung pada nilai selang waktunya. Sementara itu, pada metode ESN tidak dijamin solusinya bernilai positif untuk semua nilai awal yang positif. Oleh karena itu,



masih menimbulkan banyak pertanyaan tentang konsistensinya secara dinamik dengan model yang kontinu.

Pada skripsi ini akan dibahas metode beda hingga tak-standar yang stabil elementer dan positif (*Positive and Elementary Stable Nonstandard* (PESN)) untuk melakukan simulasi pada model *predator-prey* tersebut dengan menggunakan fungsi respon Beddington-DeAngelis. Metode ini menggunakan model grid tak-lokal pada fungsi pertumbuhan dan diskritisasi tak-standar pada turunan terhadap waktu. Kestabilan dari metode ini tidak bergantung pada nilai selang waktu dan mempunyai solusi positif untuk semua nilai awal yang positif.

## 1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, pokok permasalahan dalam penulisan skripsi ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana konstruksi skema numerik model *predator-prey* Beddington-DeAngelis dengan menggunakan metode beda hingga tak-standar yang stabil elementer dan positif?
2. Bagaimana konsistensi dinamik dari skema numerik model *predator-prey* dengan fungsi respon Beddington-DeAngelis dengan sistem persamaan diferensialnya?

## 1.3. Tujuan

Tujuan penulisan skripsi ini adalah sebagai berikut:

1. Mengkonstruksi skema numerik model *predator-prey* Beddington-DeAngelis dengan menggunakan metode beda hingga tak-standar yang stabil elementer dan positif.
2. Menganalisis konsistensi dinamik dari skema numerik pada model *predator-prey* dengan fungsi respon Beddington-DeAngelis dengan sistem persamaan diferensialnya.



## BAB II TINJAUAN PUSTAKA

### 2.1. Sistem Otonomus

Menurut Birkhof dan Rota (1989), sistem persamaan diferensial orde satu yang berbentuk

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n); \quad i=1, \dots, n$$

dengan  $f_i$  adalah fungsi bernilai real yang tidak bergantung secara eksplisit terhadap  $t$  disebut sistem otonomus.

### 2.2. Titik Kesetimbangan dan Kestabilan

Menurut Boyce dan DiPrima (2001), misal diberikan suatu sistem otonomus

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y) \tag{2.1}$$

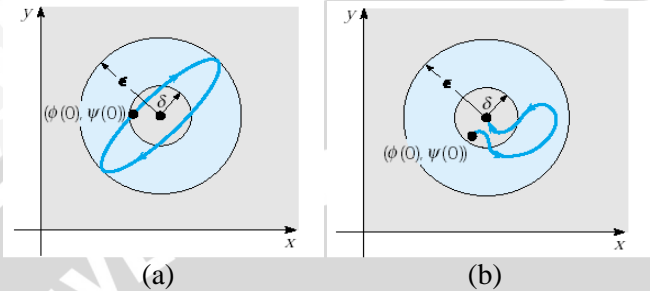
$$\frac{dy}{dt} = g(x, y),$$

maka titik  $(x^*, y^*)$  yang memenuhi  $f(x^*, y^*) = 0$  dan  $g(x^*, y^*) = 0$  disebut *titik kritis* sistem (2.1). Titik kritis  $(x^*, y^*)$  adalah solusi sistem (2.1) yang bernilai konstan sebab  $\frac{dx}{dt} = 0$  dan  $\frac{dy}{dt} = 0$ . Oleh karena itu, titik kritis tersebut disebut juga *titik kesetimbangan*.

Jenis kestabilan titik kesetimbangan  $(x^*, y^*)$  dapat dibagi menjadi tiga kriteria, yaitu:

1. Stabil apabila  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  sedemikian sehingga jika  $\|(x(0), y(0)) - (x^*, y^*)\| < \delta$  maka  $\|(x(t), y(t)) - (x^*, y^*)\| < \varepsilon$ , untuk  $t > 0$ .
2. Tak-stabil apabila tidak memenuhi kriteria pertama.
3. Stabil asimtotik jika stabil dan  $\exists \delta_0, 0 < \delta_0 < \delta$ , sedemikian sehingga sebuah solusi  $x = x(t)$  dan  $y = y(t)$  yang memenuhi  $\|(x(t), y(t)) - (x^*, y^*)\| < \delta_0$  akan bersifat  $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t)) = (x^*, y^*)$ .

Untuk lebih jelasnya, kriteria kestabilan tersebut dapat dilihat pada Gambar 2.1 dengan  $(\phi(0), \psi(0)) = (x(0), y(0))$ .



**Gambar 2.1** Jenis kestabilan titik kesetimbangan, (a) stabil, (b) stabil asimtotik

### 2.2.1. Kestabilan Sistem Otonomus Linier

#### Teorema 2.1 (Boice dan DiPrima, 2005)

Diketahui sistem otonomus linier dua dimensi sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax + by \\ \frac{dy}{dt} &= cx + dy. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Dari sistem (2.2) diperoleh matriks koefisien  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ .

Dimisalkan  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  adalah nilai eigen dari matriks  $A$  dan  $\det(A) = ad - bc \neq 0$ . Titik kritis  $(0,0)$  adalah:

1. Stabil asimtotik jika  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  bernilai negatif atau bagian real dari  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  juga bernilai negatif.
2. Stabil (tetapi bukan stabil asimtotik) jika bagian real dari  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  keduanya adalah nol atau  $\lambda_1 = i\beta$  dan  $\lambda_2 = -i\beta$ .
3. Tidak stabil jika  $\lambda_1$  atau  $\lambda_2$  atau keduanya bernilai positif, atau bagian real dari  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  bernilai positif.

Bukti:

Sistem (2.2) dapat ditulis dalam bentuk

$$\vec{x}' = A\vec{x}. \quad (2.3)$$

Diasumsikan matriks  $A$  mempunyai nilai eigen  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$ , solusi umum persamaan (2.3) adalah

$$\vec{x} = c_1 \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{v}_2 e^{\lambda_2 t},$$

di mana  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  menyatakan nilai eigen,  $v_1$  dan  $v_2$  masing-masing menyatakan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen,  $c_1$  dan  $c_2$  adalah sebarang konstanta. Oleh karena itu, dari solusi umum tersebut diperoleh:

1. Jika  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  bernilai negatif, maka  $\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{x} = \vec{0}$ . Dengan kata lain, semakin besar nilai  $t$ , solusi akan menuju ke titik kritis (0,0). Menurut kriteria kestabilan, titik kritis (0,0) bersifat stabil asimtotik. Jika  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$  dan  $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ , dengan  $\alpha < 0$ , maka solusi dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned} \vec{x} &= c_1 \vec{v}_1 e^{(\alpha+i\beta)t} + c_2 \vec{v}_2 e^{(\alpha-i\beta)t} \\ &= c_1 \vec{v}_1 e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \sin \beta t) + c_2 \vec{v}_2 e^{\alpha t} (\cos \beta t - i \sin \beta t). \end{aligned}$$

Karena terdapat suku  $e^{\alpha t}$  dengan  $\alpha < 0$ , maka semakin besar nilai  $t$ , solusi akan berosilasi menuju ke titik kritis (0,0).

2. Jika  $\lambda_1 = i\beta$  dan  $\lambda_2 = -i\beta$ , maka solusi dapat ditulis menjadi

$$\vec{x} = c_1 \vec{v}_1 (\cos \beta t + i \sin \beta t) + c_2 \vec{v}_2 (\cos \beta t - i \sin \beta t).$$

Karena  $\cos \beta t$  dan  $\sin \beta t$  merupakan fungsi periodik, maka solusi akan terus berosilasi di sekitar titik kritis, sehingga menurut kriteria kestabilan, titik kritis (0,0) bersifat stabil atau sering disebut stabil pusat.

3. Jika  $\lambda_1$  atau  $\lambda_2$  atau keduanya bernilai positif, maka  $\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{x} = \infty$ .

Dengan kata lain, semakin besar nilai  $t$ , solusi akan menjauhi titik kritis (0,0). Menurut kriteria kestabilan, titik kritis (0,0) bersifat tidak stabil. Jika  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$  dan  $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ , dengan  $\alpha > 0$ , maka semakin besar nilai  $t$ , solusi akan berosilasi menjauhi titik kritis (0,0).

Untuk mencari nilai eigen dari matriks  $A$  digunakan persamaan

$$\begin{aligned} A\vec{v} &= \vec{v}\lambda \\ (A - I\lambda)\vec{v} &= 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Persamaan (2.4) akan mempunyai solusi tak-trivial jika dan hanya jika  $|A - I\lambda| = 0$  dengan  $\lambda$  menyatakan nilai eigen dari matriks  $A$ , sehingga diperoleh

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

atau

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0. \quad (2.5)$$

Solusi persamaan (2.5) adalah

$$\lambda_1 = \frac{\text{trace}(A) + \sqrt{(\text{trace}(A))^2 - 4\det(A)}}{2} \quad (2.6)$$

dan

$$\lambda_2 = \frac{\text{trace}(A) - \sqrt{(\text{trace}(A))^2 - 4\det(A)}}{2}, \quad (2.7)$$

di mana  $\text{trace}(A) = a + d$  dan  $\det(A) = ad - bc$  dengan  $\det(A) \neq 0$ .

Dari persamaan (2.6) dan (2.7) kemungkinan nilai  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  dapat dibagi menjadi beberapa kriteria yang bergantung pada nilai  $\text{trace}(A)$  dan  $\det(A)$ , yaitu:

1. Jika  $\text{trace}(A) < 0$ ,  $\det(A) > 0$ ,  $(\text{trace}(A))^2 - 4\det(A) \geq 0$  maka  $\lambda_1 < 0$  dan  $\lambda_2 < 0$ .
2. Jika  $\text{trace}(A) < 0$ ,  $\det(A) > 0$ ,  $(\text{trace}(A))^2 - 4\det(A) < 0$  maka  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$  dan  $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ , dengan  $\alpha < 0$ .
3. Jika  $\text{trace}(A) < 0$ ,  $\det(A) < 0$  maka  $\lambda_1 > 0$  dan  $\lambda_2 < 0$ .
4. Jika  $\text{trace}(A) > 0$ ,  $\det(A) > 0$ ,  $(\text{trace}(A))^2 - 4\det(A) \geq 0$ , maka  $\lambda_1 > 0$  dan  $\lambda_2 > 0$ .
5. Jika  $\text{trace}(A) > 0$ ,  $\det(A) > 0$ ,  $(\text{trace}(A))^2 - 4\det(A) < 0$ , maka  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$  dan  $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ , dengan  $\alpha > 0$ .
6. Jika  $\text{trace}(A) > 0$ ,  $\det(A) < 0$ , maka  $\lambda_1 > 0$  dan  $\lambda_2 < 0$ .
7. Jika  $\text{trace}(A) = 0$ ,  $\det(A) > 0$ , maka  $\lambda_1 = i\beta$  dan  $\lambda_2 = -i\beta$ .
8. Jika  $\text{trace}(A) = 0$ ,  $\det(A) < 0$ , maka  $\lambda_1 > 0$  dan  $\lambda_2 < 0$ .

Berdasarkan Teorema 2.1 dan kriteria-kriteria tersebut dapat disimpulkan bahwa titik kritis (0,0) akan bersifat stabil asimtotik jika dan hanya jika  $\text{trace}(A) < 0$  dan  $\text{det}(A) > 0$ , dan bersifat stabil pusat jika  $\text{trace}(A) = 0$  dan  $\text{det}(A) > 0$ .

### 2.2.2. Kestabilan Sistem Otonomus Tak-Linier

Ketika fungsi  $f$  dan  $g$  pada sistem (2.1) merupakan fungsi tak-linier, sistem (2.1) disebut sistem otonomus tak-linier. Untuk melihat kestabilan titik kesetimbangan dari sistem tak-linier tersebut dapat dilakukan dengan pendekatan fungsi di sekitar titik kesetimbangan.

#### Teorema 2.2 (Robinson, 2004)

Titik kesetimbangan dari sistem otonomus tak-linier adalah:

1. Stabil asimtotik jika titik kesetimbangan sistem yang dilinierkan adalah stabil asimtotik.
2. Tidak stabil jika titik kesetimbangan sistem yang dilinierkan adalah tak-stabil.

Teorema 2.2 menjelaskan bahwa kestabilan titik kesetimbangan dari sistem tak-linier dapat didekati dengan hampiran linier di sekitar titik tersebut. Oleh karena itu, kestabilan yang didapat hanya bersifat lokal atau di daerah sekitar titik kesetimbangan.

Menurut Boyce dan DiPrima (2001), jika diasumsikan  $f$  dan  $g$  mempunyai turunan parsial yang kontinu di titik  $(x^*, y^*)$ , maka fungsi  $f$  dan  $g$  di sekitar titik  $(x^*, y^*)$  dapat didekati dengan Deret Taylor sebagai berikut

$$f(x, y) = f(x^*, y^*) + \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x}(x - x^*) + \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y}(y - y^*) + \eta_1(x, y)$$

$$g(x, y) = g(x^*, y^*) + \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x}(x - x^*) + \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y}(y - y^*) + \eta_2(x, y),$$

di mana  $\eta_1(x, y)$  dan  $\eta_2(x, y)$  merupakan suku sisa. Karena

$$f(x^*, y^*) = 0 \quad \text{dan} \quad g(x^*, y^*) = 0 \quad \text{serta} \quad \frac{dx}{dt} = \frac{d(x - x^*)}{dt} \quad \text{dan}$$



$\frac{dy}{dt} = \frac{d(y-y^*)}{dt}$ , maka sistem (2.1) dapat ditulis dalam bentuk matriks

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x-x^* \\ y-y^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x} (x-x^*) + \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y} (y-y^*) \\ \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x} (x-x^*) + \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y} (y-y^*) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1(x, y) \\ \eta_2(x, y) \end{bmatrix}$$

atau

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x-x^* \\ y-y^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x} & \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x} & \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (x-x^*) \\ (y-y^*) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1(x, y) \\ \eta_2(x, y) \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Matriks  $J^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x} & \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x} & \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y} \end{bmatrix}$  disebut matriks Jacobi atau

*partial derivative matrix (derivative matrix)* pada titik  $(x^*, y^*)$ .

Jika dimisalkan  $u=x-x^*$ ,  $v=y-y^*$  dan  $\vec{w} = (u, v)^T$ , maka persamaan (2.8) juga dapat ditulis dalam bentuk vektor  $\frac{d\vec{w}}{dt} = J^* \vec{w} + \vec{\eta}$ . Ketika  $(x, y) \rightarrow (x^*, y^*)$  nilai  $\vec{w}$  menjadi sangat kecil dan nilai  $\|\vec{\eta}\| \leq \|\vec{w}\|$ . Dengan demikian  $\vec{\eta}$  dapat diabaikan, sehingga sistem tak-linier dapat didekati oleh sistem baru  $\frac{d\vec{w}}{dt} = J^* \vec{w}$ . Sistem baru tersebut dinamakan sistem hampiran.

Menurut Boyce dan DiPrima (2001), jika  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  pada sistem linier bersesuaian dengan sistem hampiran, maka jenis dan kestabilan titik kesetimbangan dari kedua sistem dapat dilihat pada Tabel 2.1.

**Tabel 2.1.** Sifat kestabilan dari sistem linier dan sistem hampiran.

Nilai	Sistem Linier		Sistem Hampiran	
	Kestabilan	Jenis	Kestabilan	Jenis
$\lambda_1, \lambda_2 > 0$	Tidak stabil	Simpul	tidak stabil	Simpul
$\lambda_1, \lambda_2 < 0$	stabil asimtotik	Simpul	stabil asimtotik	Simpul
$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$	tidak stabil	Pelana	tidak stabil	Pelana
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	tidak stabil	simpul sejati /simpul tak-sejati	tidak stabil	simpul /spiral
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	stabil asimtotik	simpul sejati /simpul tak-sejati	stabil asimtotik	simpul /spiral
$\lambda_1, \lambda_2 = p \pm iq$				
$p > 0$	tidak stabil	Spiral	tidak stabil	Spiral
$p < 0$	stabil asimtotik	Spiral	stabil asimtotik	Spiral
$p = 0$	Stabil	Pusat	tidak dapat ditentukan	pusat /spiral

Keterangan di atas menjelaskan bahwa pada dasarnya untuk  $(x, y)$  yang cukup dekat dengan  $(x^*, y^*)$  bentuk tak-liniernya mendekati bentuk linier, sehingga tidak berpengaruh pada jenis dan kestabilan dari titik kesetimbangan yang dijelaskan pada sistem linier, kecuali pada dua kasus sensitif, yaitu pada nilai eigen yang sama dan nilai eigen yang murni imajiner. Pada dua kasus tersebut perubahan koefisien yang sangat kecil dapat merubah jenis dan kestabilan dari titik kesetimbangan (bifurkasi). Hal ini menjadi alasan bahwa pada sistem hampiran, peristiwa bifurkasi sangat mudah terjadi, terutama pada dua kasus tersebut.



### 2.3. Model *Predator-Prey*

Menurut Murray (2002), salah satu contoh dari sistem otonom tak-linier adalah model pertumbuhan populasi antara dua spesies, di mana jika jumlah populasi suatu spesies menurun, maka jumlah populasi spesies yang lain meningkat. Model pertumbuhan populasi yang demikian disebut model *predator-prey*. Voltera (1926) pertama kali mengenalkan model sederhana dari spesies yang memangsa spesies lainnya untuk menjelaskan osilasi dari ikan tangkapan jenis tertentu di Adriatic.

Jika  $x(t)$  adalah populasi dari *prey* dan  $y(t)$  adalah populasi dari *predator* pada saat ke  $t$ , maka model Voltera adalah sebagai berikut

$$\frac{dx}{dt} = x(\alpha - \beta y)$$

$$\frac{dy}{dt} = y(\gamma - \sigma),$$

di mana  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  dan  $\sigma$  konstanta positif.

Asumsi pada model ini adalah sebagai berikut:

1. Populasi *prey* dengan tidak ada *predator* akan meningkat tidak terbatas, ditunjukkan dalam bentuk  $\alpha x$ .
2. Akibat dari pemangsaan oleh *predator* adalah mengurangi laju pertumbuhan per kapita *prey* dan sebanding dengan populasi *prey* dan *predator*, ditunjukkan dalam bentuk  $-\beta xy$ .
3. Jika tidak ada satu pun *prey* sebagai mangsa, maka laju kematian predator akan mengakibatkan populasi predator menurun secara eksponensial, ditunjukkan dalam bentuk  $-\sigma y$ .
4. Laju pertumbuhan *predator* akan meningkat seiring dengan kontribusi dari *prey* yang ada dan jumlah *predator* yang ada, ditunjukkan dalam bentuk  $\gamma y$ .

#### 2.3.1. Fungsi Respon

Menurut Skalski dan Gilliam (2001), memahami hubungan antara *predator* dan *prey* merupakan suatu keberhasilan pokok dalam mempelajari ilmu ekologi, dan salah satu komponen penting dari hubungan tersebut adalah laju *predator* dalam memangsa *prey*. Laju memangsa per kapita *predator* terhadap *prey*, atau sering disebut fungsi respon, memberikan pondasi tentang teori *predator-prey*.

Seiring dengan pengembangan penelitian terhadap model *predator-prey*, didapat bentuk umum sebagai berikut

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= p(x) - af(x, y)y \\ \frac{dy}{dt} &= f(x, y)y - \mu(y),\end{aligned}\tag{2.9}$$

di mana  $f(x, y)$  menyatakan fungsi respon dan parameter  $a$  menyatakan efisiensi penyerapan oleh *predator*. Fungsi respon menjelaskan perpindahan biomassa yang terjadi pada tingkat memangsa. Secara lengkap, fungsi respon mengendalikan tingkah laku dari kepadatan populasi *predator* dan *prey*.

Ada banyak macam fungsi respon yang dikembangkan seiring dengan penelitian pada model *predator-prey*. Hal tersebut dapat dilihat pada Tabel 2.2.

**Tabel 2.2.** Tipe dan bentuk fungsi respon.

Tipe	Bentuk Fungsi Respon $f(x,y)$
Holling tipe I	$cx$
Holling tipe II	$\frac{cx}{r + ex}$
Holling tipe III	$\frac{cx^2}{r + ex^2}$
Beddington-DeAngelis	$\frac{cx}{r + ex + y}$
<i>Ratio-dependent</i>	$\frac{cx}{ex + y}$
Nicholson-Bailey	$ax \exp(-by)$

### 2.3.2. Fungsi Respon Beddington-DeAngelis

Menurut Skalski dan Gilliam (2001), model fungsi respon Beddington-DeAngelis diberikan dalam bentuk

$$f(x, y) = \frac{cx}{r + ex + y},$$

di mana  $c$ ,  $d$  dan  $e$  konstanta positif yang berturut-turut menjelaskan pengaruh dari laju penangkapan, banyaknya waktu menguasai dan banyaknya waktu memakan *prey*. Asumsi yang mendasari fungsi respon ini adalah:

1. Terjadi kejenuhan akibat dari jumlah populasi *prey* yang padat.
2. Ketika kepadatan populasi *predator* tinggi, tiap individu *predator* harus bersaing untuk mendapatkan makanannya sehingga memerlukan banyak waktu untuk berkompetisi mendapatkan *prey*. Dengan kata lain, laju berburu dari *predator* berkurang.

#### 2.4. Sistem Persamaan Beda

Menurut Elaydi (2005), persamaan beda biasanya menggambarkan tentang fenomena-fenomena tertentu yang berkaitan dengan waktu yang berjalan. Sebagai contohnya, jika populasi tertentu berkembang secara diskrit, maka jumlah populasi ke- $n+1$  adalah fungsi dari populasi ke- $n$ . Jika terdapat interaksi antara dua spesies, maka populasi keduanya pada waktu ke- $n+1$  dapat ditulis dalam bentuk sistem persamaan beda sebagai berikut

$$\begin{aligned} x(n+1) &= f(x(n), y(n)) \\ y(n+1) &= g(x(n), y(n)). \end{aligned} \tag{2.10}$$

##### 2.4.1. Titik kesetimbangan dan Kestabilan

###### Definisi 2.1 (Elaydi, 2005)

Titik  $(x^*, y^*)$  pada domain  $f$  dan  $g$  dikatakan sebagai titik kesetimbangan dari sistem (2.10) jika titik tersebut merupakan titik tetap, yaitu  $f(x^*, y^*) = x^*$  dan  $g(x^*, y^*) = y^*$ .

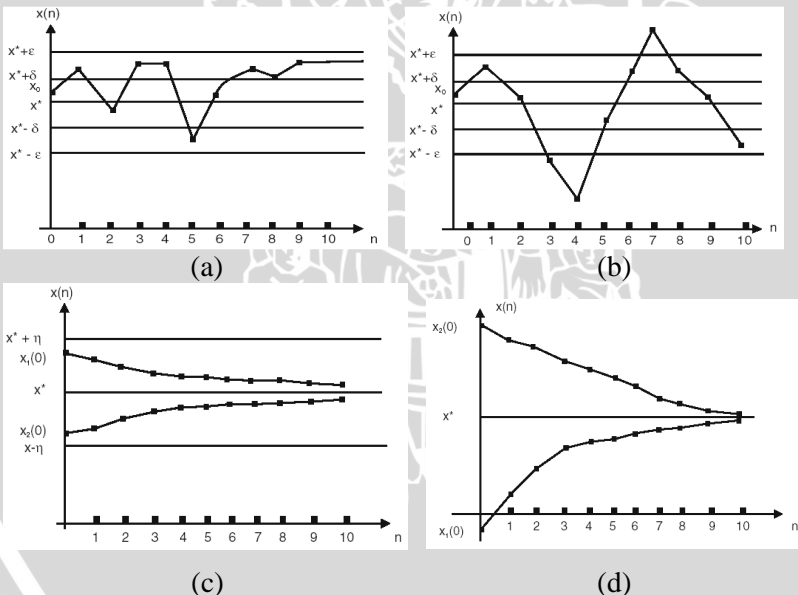
Titik  $(x^*, y^*)$  adalah solusi konstan dari sistem (2.10), karena jika  $(x(0), y(0)) = (x^*, y^*)$  adalah titik awal, maka

$$\begin{aligned} x(1) &= f(x^*, y^*) = x^* \\ y(1) &= g(x^*, y^*) = y^*, \\ x(2) &= f(x(1), y(1)) = f(x^*, y^*) = x^* \\ y(2) &= g(x(1), y(1)) = g(x^*, y^*) = y^*, \\ &\vdots \end{aligned}$$

**Definisi 2.2 (Elaydi, 2005)**

1. Titik kesetimbangan  $(x^*, y^*)$  dari sistem (2.10) adalah stabil jika  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ni \|(x(0), y(0)) - (x^*, y^*)\| < \delta$ , maka  $\|(x(n), y(n)) - (x^*, y^*)\| < \varepsilon$ , untuk semua  $n > 0$ . Jika  $(x^*, y^*)$  tidak memenuhi kriteria di atas maka  $(x^*, y^*)$  dikatakan tidak stabil.
2. Titik  $(x^*, y^*)$  dikatakan *attracting* jika  $\exists \eta > 0 \ni \|(x(0), y(0)) - (x^*, y^*)\| < \eta$  berlaku  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x(n), y(n)) = (x^*, y^*)$ .  
Jika  $\eta = \infty$ , maka  $(x^*, y^*)$  dikatakan *global attracting*.
3. Titik  $(x^*, y^*)$  dikatakan stabil asimtotik jika  $(x^*, y^*)$  stabil dan *attracting*.

Untuk lebih jelasnya, kriteria kestabilan tersebut dapat dilihat pada Gambar 2.2 berikut.



**Gambar 2.2** Jenis kestabilan titik kesetimbangan persamaan Beda, (a) stabil, (b) tidak stabil, (c) stabil dan *attracting* (stabil asimtotik), (d) *global attracting*.

## 2.5. Solusi Sistem Persamaan Beda Orde Satu

Menurut Elaydi (2005), bentuk umum dari sistem persamaan beda orde satu dengan  $n$  variabel bebas adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned} x_1(n+1) &= a_{11}x_1(n) + a_{12}x_2(n) + \dots + a_{1k}x_k(n) \\ x_2(n+1) &= a_{21}x_1(n) + a_{22}x_2(n) + \dots + a_{2k}x_k(n) \\ &\vdots \\ x_k(n+1) &= a_{k1}x_1(n) + a_{k2}x_2(n) + \dots + a_{kk}x_k(n) \end{aligned}$$

atau dapat ditulis dalam bentuk

$$\vec{x}(n+1) = A\vec{x}(n), \quad (2.11)$$

di mana  $\vec{x}(n) = (x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n))^T$ ,  $A = (a_{ij})$  adalah matriks  $k \times k$  bernilai real, dan  $T$  menyatakan *transpose* dari vektor.

Misal diberikan nilai awal  $x(0)$ , maka dari persamaan (2.11) didapat

$$\begin{aligned} x(1) &= Ax(0) \\ x(2) &= Ax(1) = A(Ax(0)) = A^2x(0) \\ x(3) &= Ax(2) = A(A^2x(0)) = A^3x(0) \\ &\vdots \\ x(n) &= Ax(n-1) = A(A^{n-1}x(0)) = A^n x(0), \end{aligned}$$

sehingga solusi umum untuk persamaan (2.11) adalah

$$x(n) = A^n x(0).$$

Jika matriks  $A$  dapat didiagonalkan maka solusi umum dari persamaan (2.11) juga dapat diberikan oleh

$$x(n) = c_1 \lambda_1^n v_1 + c_2 \lambda_2^n v_2 + \dots + c_k \lambda_k^n v_k,$$

di mana  $v_i$  adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen  $\lambda_i$  dan  $c_i$  adalah sebarang konstanta.

### Teorema 2.5 (Elaydi, 2005)

Misal  $A$  adalah matriks berukuran  $k \times k$ , maka  $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = 0$  jika dan

hanya jika  $|\lambda| < 1$  untuk semua nilai eigen  $\lambda$  dari matriks  $A$ .



### Lemma 2.1 (Dimitrov dan Kojouharov , 2007)

Akar dari persamaan kuadrat  $\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta = 0$  akan memenuhi  $|\lambda_{1,2}| < 1$  jika dan hanya jika memenuhi ketiga kondisi berikut:

- i.  $1 + \alpha + \beta > 0$ ,
- ii.  $1 - \alpha + \beta > 0$ ,
- iii.  $\beta < 1$ .

### 2.6. Sistem Persamaan Beda Orde Satu Tak-Linier

Menurut Elaydi (2005), pada persamaan (2.10), jika fungsi  $f$  adalah fungsi tak-linier, maka persamaan tersebut dikatakan persamaan beda orde satu tak-linier. Sama halnya pada sistem otonomus tak-linier, untuk mencari kestabilan dari titik kesetimbangan sistem persamaan beda tak-linier dapat didekati dengan hampiran linier di sekitar titik tersebut. Proses linierisasi untuk mendapatkan sistem hampiran juga dapat menggunakan Deret Taylor.

Misal diketahui sistem persamaan beda tak-linier sebagai berikut

$$\begin{aligned}x(n+1) &= f(x(n), y(n)) \\y(n+1) &= g(x(n), y(n)).\end{aligned}\tag{2.12}$$

Jika titik  $(x^*, y^*)$  adalah titik kesetimbangan sistem (2.12), dan diasumsikan bahwa  $f$  dan  $g$  mempunyai turunan parsial di titik  $(x^*, y^*)$ , maka  $f$  dan  $g$  dapat didekati dengan Deret Taylor sebagai berikut

$$\begin{aligned}f(x(n), y(n)) &= f(x^*, y^*) + \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x}(x(n) - x^*) + \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y}(y(n) - y^*) \\&\quad + \eta_1(x(n), y(n)) \\g(x(n), y(n)) &= g(x^*, y^*) + \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x}(x(n) - x^*) + \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y}(y(n) - y^*) \\&\quad + \eta_2(x(n), y(n)).\end{aligned}$$

Fungsi  $\eta_1(x(n), y(n))$  dan  $\eta_2(x(n), y(n))$  merupakan suku sisa. Untuk hampiran orde satu di atas, jika  $(x(n), y(n)) \rightarrow (x^*, y^*)$ , maka

suku sisa tersebut memenuhi  $\lim_{(x(n), y(n)) \rightarrow (x^*, y^*)} \frac{\eta_1(x(n), y(n))}{\|w\|} = 0$  dan

$$\lim_{(x(n), y(n)) \rightarrow (x^*, y^*)} \frac{\eta_2(x(n), y(n))}{\|\bar{w}\|} = 0, \text{ di mana } \bar{w} = (x(n) - x^*, y(n) - y^*)^T.$$

Oleh karena itu  $\eta_1(x(n), y(n))$  dan  $\eta_2(x(n), y(n))$  dapat diabaikan.

Karena  $(x^*, y^*)$  adalah titik kesetimbangan, maka  $f(x^*, y^*) = x^*$  dan  $g(x^*, y^*) = y^*$ , sehingga sistem (2.12) dapat didekati dengan

$$x(n+1) = x^* + \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x} (x(n) - x^*) + \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y} (y(n) - y^*)$$

$$y(n+1) = y^* + \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x} (x(n) - x^*) + \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y} (y(n) - y^*)$$

atau

$$\begin{aligned} x(n+1) - x^* &= \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x} (x(n) - x^*) + \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y} (y(n) - y^*) \\ y(n+1) - y^* &= \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x} (x(n) - x^*) + \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y} (y(n) - y^*). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Jika dimisalkan  $u(n) = x(n) - x^*$  dan  $v(n) = y(n) - y^*$ , maka sistem (2.13) menjadi

$$u(n+1) = \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x} u(n) + \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y} v(n)$$

$$v(n+1) = \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x} u(n) + \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y} v(n)$$

atau dalam bentuk matriks

$$\begin{bmatrix} u(n+1) \\ v(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x} & \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x} & \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(n) \\ v(n) \end{bmatrix}$$

## 2.7. Metode Numerik untuk Persamaan Diferensial

Menurut Elaydi (2005), persamaan diferensial sudah sangat luas digunakan untuk pemodelan matematika yang menggambarkan suatu obyek yang dibangun secara kontinu, di mana waktu atau variabel bebasnya merupakan himpunan bagian dari bilangan real. Sementara itu, pada persamaan beda obyek dibangun secara diskrit, di mana



waktu atau variabel bebasnya merupakan himpunan bagian dari bilangan bulat. Dalam beberapa kasus, solusi dari persamaan diferensial secara eksak sulit didapat, sehingga dibutuhkan skema numerik yang merupakan persamaan beda untuk memperkirakan solusi dari persamaan diferensial.

### 2.7.1. Pendekatan Turunan Pertama

Menurut Elaydi (2005), ada banyak metode untuk mendapatkan skema numerik dari persamaan diferensial. Metode yang umum digunakan adalah menggunakan Deret Taylor.

Diberikan fungsi  $x(t)$  yang kontinu dan dapat diturunkan pada selang  $[a, b]$ . Dengan menggunakan ekspansi Deret Taylor untuk fungsi  $x$  di titik  $t + h$  didapat

$$x(t + h) = x(t) + x'(t)h + \frac{x''(t)h^2}{2!} + \dots \quad (2.14)$$

Di mana  $h$  merupakan bilangan real.

Dari persamaan (2.14) diperoleh

$$x'(t) = \frac{x(t+h) - x(t)}{h} + O(h). \quad (2.15)$$

Persamaan (2.15) biasa disebut beda maju turunan pertama, di mana  $O(h)$  adalah orde kesalahan. Jika  $O(h)$  sangat kecil, maka  $O(h)$  dapat diabaikan, sehingga diperoleh

$$x'(t) = \frac{x(t+h) - x(t)}{h}. \quad (2.16)$$

Persamaan (2.16) disebut juga Metode Euler untuk turunan pertama.

### 2.7.2. Metode Beda Hingga Standar

Menurut Elaydi (2005), salah satu metode beda hingga standar yang sering digunakan untuk melakukan simulasi dari persamaan diferensial adalah Metode Euler. Misal diberikan persamaan diferensial sebagai berikut

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad t_0 \leq t \leq b$$

dengan menggunakan persamaan (2.16) untuk turunan  $x$  terhadap  $t$ , maka diperoleh

$$\frac{x(t+h) - x(t)}{h} = f(x(t))$$

atau

$$x(t+h) = x(t) + hf(x(t)). \quad (2.17)$$

Jika  $t = t_0 + nh$ , maka persamaan (2.17) menjadi

$$x(t_0 + (n+1)h) = x(t_0 + nh) + hf(x(t_0 + nh)) \quad (2.18)$$

dan untuk  $x(t_0 + nh) = x(n)$ , persamaan (2.18) menjadi

$$x(n+1) = x(n) + hf(x(n)).$$

### 2.7.3. Metode Beda Hingga Tak-Standar

#### Definisi 2.3 (Mickens, 2000)

Skema beda hingga dikatakan beda hingga tak-standar jika paling sedikit satu dari kondisi berikut terpenuhi.

1. Mengganti turunan terhadap waktu dengan bentuk diskrit

$$\frac{dx}{dt} \approx \frac{x(t+h) - x(t)}{\varphi(h)}$$

$$\frac{dy}{dt} \approx \frac{y(t+h) - x(t)}{\varphi(h)}$$

di mana  $\varphi(h)$  adalah fungsi bernilai real dan memenuhi sifat  $\varphi(h) = h + O(h^2)$ , untuk  $h \rightarrow 0$ .

Contoh:

Dimisalkan  $\varphi(h) = 1 - \exp(-h)$ , maka dengan menggunakan deret Maclaurin diperoleh

$$\varphi(h) = 1 - \exp(0) + \exp(0)h - \frac{\exp(0)}{2}h^2 + \frac{\exp(0)}{6}h^3 + \dots$$

atau

$$\varphi(h) = h - \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{6}h^3 + \dots,$$

$$\varphi(h) = h + O(h^2).$$

Contoh fungsi lain yang memenuhi  $\varphi(h) = h + O(h^2)$  adalah  $h$ ,  $\sin(h)$ ,  $\exp(h) - 1$ ,  $\ln(h+1)$  dan lain sebagainya.

2. Bentuk tak-linier dari fungsi pertumbuhan pada persamaan diferensial diubah dalam bentuk diskrit atas grid tak-lokal. Dalam hal ini, jika terdapat bentuk tak-linier  $x^2$  akan diubah dalam bentuk  $x(t)x(t+h)$ , sedangkan untuk  $xy$  akan diubah dalam bentuk  $x(t)y(t)$  atau  $x(t+h)y(t)$  atau  $x(t)y(t+h)$ .

#### **2.7.4. Metode Beda Hingga Tak-Standar yang Stabil Elementer dan Positif (Positive and Elementary Stable Nonstandard (PESN))**

Menurut Dimitrov dan Kojouharov (2007), simulasi numerik yang didasari metode beda hingga, seperti Metode Euler, Runge-Kuta dan sebagainya, telah sering digunakan untuk memprediksi perilaku dari model interaksi populasi. Namun, kestabilan dan akurasi sangat bergantung pada nilai langkah waktunya. Oleh karena itu, banyak dilakukan pengembangan untuk mendapat metode beda hingga yang lebih efisien.

##### **Definisi 2.4 (Dimitrov dan Kojouharov, 2007)**

Skema beda hingga disebut stabil elementer, jika untuk setiap nilai  $h$ , maka hanya terdapat titik-titik tetap  $z^* = (x^*, y^*)$  yang merupakan titik kesetimbangan dari sistem persamaan diferensial. Sifat kestabilan dari setiap titik  $z^*$  pada sistem persamaan diferensial dan metode beda hingga adalah sama.

##### **Definisi 2.5 (Dimitrov dan Kojouharov, 2007)**

Metode beda hingga disebut positif tanpa syarat, jika untuk setiap nilai  $h > 0$ , dan  $z(0) = (x(0), y(0))$  dengan  $x(0) \geq 0$  dan  $y(0) \geq 0$ , maka solusinya tetap positif, yaitu  $z(k) = (x(k), y(k))$  dengan  $x(k) \geq 0$  dan  $y(k) \geq 0$ , untuk  $k = 1, 2, 3, \dots$

Metode beda hingga tak-standar disebut stabil elementer dan positif jika memenuhi definisi stabil elementer dan positif tanpa syarat.

## 2.8. Konsisten secara Dinamik

Menurut Dimitrov dan Kojouharov (2007), pencarian titik kesetimbangan sangat penting ketika belajar mengenai sistem dinamik yang kontinu maupun diskrit. Pada berbagai aplikasi ilmu biologi, fisika, ekonomi dan lain sebagainya, semua solusi yang diberikan oleh sistem diinginkan cenderung mendekati atau menjauhi titik kesetimbangan. Hal lain yang perlu dipelajari dalam sistem dinamik adalah perilaku solusi di sekitar titik kesetimbangan atau kestabilan dari titik kesetimbangan.

Jika suatu skema numerik memiliki titik kesetimbangan dan sifat kestabilan yang sama dengan sistem kontinu, maka skema numerik tersebut dikatakan konsisten secara dinamik.



## BAB III HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada skripsi ini akan dibahas tentang model *predator-prey* dengan bentuk sistem persamaan diferensial sebagai berikut

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x - a \frac{cx}{r+ex+y} y, & x(0) &\geq 0 \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{cx}{r+ex+y} y - by, & y(0) &\geq 0\end{aligned}\tag{3.1}$$

di mana laju kelahiran *prey* dan laju kematian *predator* merupakan fungsi linier serta laju memangsa *predator* terhadap *prey* menggunakan tipe Beddington-DeAngelis dengan parameter  $a, b, c, d$  dan  $e$  bernilai positif. Pada bab-bab sebelumnya telah dijelaskan mengenai latar belakang serta dasar-dasar teori yang mendukung pembahasan pada bab ini. Adapun hal-hal yang akan dibahas adalah bagaimana perilaku dinamik dari sistem yang kontinu, mengkontruksi skema numeriknya dengan menggunakan metode beda hingga tak-standar yang stabil elementer dan positif (*Positive and Elementary Stable Nonstandard* (PESN)), serta menganalisis kekonsistenan secara dinamik dari skema numerik yang didapat dengan sistem yang kontinu. Untuk sifat positif tanpa syarat dari solusi numerik akan dilihat pada simulasi numerik dan akan dibandingkan dengan metode Euler.

### 3.1. Analisis Dinamik Sistem Kontinu

#### 3.1.1. Titik Kesetimbangan

Titik kesetimbangan dari sistem (3.1) adalah titik-titik yang memenuhi  $x - a \frac{cx}{r+ex+y} y = 0$  dan  $\frac{cx}{r+ex+y} y - by = 0$ , sehingga didapatkan

$$x = 0 \text{ atau } 1 - \frac{acy}{r+ex+y} = 0$$

dan

$$y = 0 \text{ atau } \frac{cx}{r+ex+y} - b = 0.$$



Garis  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $1 - \frac{acy}{r + ex + y} = 0$ , dan  $\frac{cx}{r + ex + y} - b = 0$  disebut

*nullcline* atau garis yang menyebabkan  $\frac{dx}{dt} = 0$  atau  $\frac{dy}{dt} = 0$ . Titik

kesetimbangan diperoleh dari perpotongan garis  $x = 0$  dan  $y = 0$

atau  $x = 0$  dan  $\frac{cx}{r + ex + y} - b = 0$  atau  $y = 0$  dan  $1 - \frac{acy}{r + ex + y} = 0$

atau  $1 - \frac{acy}{r + ex + y} = 0$  dan  $\frac{cx}{r + ex + y} - b = 0$ , sehingga diperoleh

empat titik perpotongan, yaitu  $(0,0)$ ,  $(0,-r)$ ,  $\left(-\frac{r}{e}, 0\right)$ , dan

$$\left(\frac{abr}{ac - abe - 1}, \frac{r}{ac - abe - 1}\right).$$

Berdasarkan definisi titik kesetimbangan, titik  $(0,-r)$  dan

$\left(-\frac{r}{e}, 0\right)$  bukan merupakan titik kesetimbangan dari sistem (3.1).

Oleh karena itu, hanya terdapat dua titik kesetimbangan dari sistem

(3.1), yaitu  $E_1 = (0,0)$  dan  $E_2 = \left(\frac{abr}{ac - abe - 1}, \frac{r}{ac - abe - 1}\right)$ .

### 3.1.2. Kestabilan

Fungsi laju pertumbuhan pada sistem (3.1) merupakan bentuk tak-linier. Oleh karena itu, untuk memeriksa kestabilan dari titik kesetimbangan  $E_1$  dan  $E_2$  digunakan sistem hampiran di sekitar titik-titik tersebut. Pada Bab II telah dijelaskan bahwa sistem hampiran diperoleh dari pendekatan fungsi laju pertumbuhan dengan

menggunakan deret Taylor dan diberikan dalam bentuk  $\frac{d\bar{w}}{dt} = J^* \bar{w}$ ,

di mana  $J^*$  adalah matriks Jacobi di titik kesetimbangan dan  $\bar{w} = (x - x^*, y - y^*)^T$  dengan  $(x, y)$  cukup dekat dengan  $(x^*, y^*)$ .



Dari sistem (3.1) diperoleh matriks Jacobi pada titik kesetimbangan  $E=(x^*,y^*)$ , yaitu

$$J(E) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{acy^*(r+y^*)}{(r+ex^*+y^*)^2} & \frac{-acx^*(r+ex^*)}{(r+ex^*+y^*)^2} \\ \frac{cy^*(r+y^*)}{(r+ex^*+y^*)^2} & \frac{cx^*(r+ex^*)}{(r+ex^*+y^*)^2} - b \end{bmatrix},$$

sehingga matriks Jacobi di titik kesetimbangan  $E_1$  adalah

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix}. \text{ Untuk menentukan jenis kestabilan titik}$$

kesetimbangan  $E_1$  dicari nilai eigen dari  $J(E_1)$ , yaitu

$$|J(E_1) - I\lambda| = 0$$

$$\left| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -b-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)(-b-\lambda) = 0. \quad (3.2)$$

Dari persamaan (3.2) diperoleh nilai  $\lambda_1 = 1$  dan  $\lambda_2 = -b$ . Berdasarkan Teorema 2.1, maka titik kesetimbangan  $E_1$  adalah tidak stabil.

Untuk titik kesetimbangan  $E_2$  diperoleh matriks Jacobi

$$J(E_2) = \begin{bmatrix} J(E_2)_{11} & J(E_2)_{12} \\ J(E_2)_{21} & J(E_2)_{22} \end{bmatrix},$$

dengan

$$J(E_2)_{11} = 1 - \frac{ac \left( \frac{r}{ac - abe - 1} \right) \left( r + \left( \frac{r}{ac - abe - 1} \right) \right)}{\left( r + e \left( \frac{abr}{ac - abe - 1} \right) + \left( \frac{r}{ac - abe - 1} \right) \right)^2},$$

$$J(E_2)_{12} = \frac{-ac \left( \frac{abr}{ac-abe-1} \right) \left( r + e \left( \frac{abr}{ac-abe-1} \right) \right)}{\left( r + e \left( \frac{abr}{ac-abe-1} \right) + \left( \frac{r}{ac-abe-1} \right) \right)^2},$$

$$J(E_2)_{21} = \frac{c \left( \frac{r}{ac-abe-1} \right) \left( r + \left( \frac{r}{ac-abe-1} \right) \right)}{\left( r + e \left( \frac{abr}{ac-abe-1} \right) + \left( \frac{r}{ac-abe-1} \right) \right)^2},$$

$$J(E_2)_{22} = \frac{c \left( \frac{abr}{ac-abe-1} \right) \left( r + e \left( \frac{abr}{ac-abe-1} \right) \right)}{\left( r + e \left( \frac{abr}{ac-abe-1} \right) + \left( \frac{r}{ac-abe-1} \right) \right)^2} - b.$$

Matriks  $J(E_2)$  di atas dapat disederhanakan menjadi

$$J(E_2) = \begin{bmatrix} \frac{be}{c} & \frac{b-abc}{c} \\ \frac{c-be}{ac} & -\frac{b}{ac} \end{bmatrix}.$$

Untuk menentukan jenis kestabilan titik kesetimbangan  $E_2$  terlebih dahulu, dicari nilai eigen dari matriks  $J(E_2)$ , yaitu dengan menyelesaikan persamaan karakteristik

$$\left( \frac{be}{c} - \lambda \right) \left( -\frac{b}{ac} - \lambda \right) - \left( \frac{b-abc}{c} \right) \left( \frac{c-be}{ac} \right) = 0$$

atau

$$\lambda^2 - \left( \frac{be}{c} - \frac{b}{ac} \right) + \left( \frac{be}{c} \right) \left( -\frac{b}{ac} \right) - \left( \frac{b-abc}{c} \right) \left( \frac{c-be}{ac} \right) = 0.$$

Titik kesetimbangan  $E_2$  akan bersifat stabil asimtotik jika

$$\text{trace}(J(E_2)) = \left( \frac{be}{c} - \frac{b}{ac} \right) < 0 \quad (3.3)$$

dan

$$\det(J(E_2)) = \left( \frac{be}{c} \right) \left( -\frac{b}{ac} \right) - \left( \frac{b-abc}{c} \right) \left( \frac{c-be}{ac} \right) > 0. \quad (3.4)$$

Dari pertaksamaan (3.3) diperoleh  $\frac{b(ae-1)}{ac} < 0$ . Karena semua nilai parameter bernilai positif, maka  $\frac{b}{ac} > 0$ , sehingga persamaan (3.3) akan terpenuhi jika

$$ae - 1 < 0. \tag{3.5}$$

Pertaksamaan (3.4) dapat ditulis sebagai

$$\frac{bc(ac - abe - 1)}{ac^2} > 0.$$

Karena  $\frac{bc}{ac^2}$  bernilai positif, maka pertaksamaan (3.4) akan terpenuhi jika

$$ac - abe - 1 > 0. \tag{3.6}$$

### 3.2. Diskritisasi Model

Untuk memperoleh solusi eksak dari sistem (3.1), secara umum sulit didapatkan dengan cara pengintegralan. Oleh karena itu, untuk melihat perilaku solusi dari sistem (3.1) dibutuhkan metode numerik tanpa harus mencari solusi eksaknya. Ada banyak metode yang digunakan untuk melakukan simulasi dari sistem (3.1), salah satunya adalah metode beda hingga tak-standar yang stabil elementer dan positif (*Positive and Elementary Stable Nonstandard* (PESN)). Metode ini menggunakan model grid tak-lokal pada fungsi laju pertumbuhan dan diskritisasi tak-standar pada turunan terhadap waktu.

#### **Teorema 3.1 (Dimitrov dan Kojouharov, 2007)**

Dimisalkan  $\phi$  adalah fungsi bernilai real yang memenuhi sifat:

- i.  $\phi(h) = h + O(h^2)$ ,
- ii.  $0 < \phi(h) < 1$ , untuk semua  $h > 0$ .

Jika terdapat sebuah konstanta  $Q > 0$ , maka skema numerik berikut ini menyatakan metode PESN untuk sistem (3.1).

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\varphi(h)} = x_k - a \frac{cx_{k+1}}{r + ex_k + y_k} y_k \quad (3.7)$$

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{\varphi(h)} = \frac{cy_k}{r + ex_k + y_k} y_k - by_{k+1},$$

di mana  $\varphi(h) = \frac{\phi(qh)}{q}$ , untuk suatu  $q > Q$ .

Dimisalkan  $\phi(h) = 1 - \exp(-h)$ . Berdasarkan Definisi 2.3, fungsi tersebut memenuhi kondisi (i) dan untuk semua nilai  $h > 0$ , nilai  $\phi(h)$  selalu berada pada selang  $(0,1)$ , sehingga  $\phi(h)$  juga memenuhi sifat (ii). Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa sistem (3.7) menyatakan metode PESN.

Pada sistem (3.7), turunan terhadap waktu pada sistem (3.1) diganti dengan  $\frac{x_{k+1} - x_k}{\varphi(h)}$  dan  $\frac{y_{k+1} - y_k}{\varphi(h)}$ , dengan  $\varphi(h)$  memenuhi sifat pada Definisi 2.3. Fungsi laju pertumbuhan pada sistem (3.1) diganti dengan bentuk diskrit atas grid tak-lokal  $x_k - a \frac{cx_{k+1}}{d + ex_k + y_k} y_k$  dan  $\frac{cy_k}{d + ex_k + y_k} y_k - by_{k+1}$ . Oleh karena itu, sistem (3.7) memenuhi definisi beda hingga tak-standar.

Definisi stabil elementer menyatakan bahwa skema numerik harus memiliki titik kesetimbangan yang sama dan setiap titik kesetimbangan juga memiliki sifat kestabilan yang sama dengan sistem persamaan diferensialnya.

### 3.2.1. Titik Kesetimbangan

Sistem (3.7) dapat juga ditulis dalam persamaan sebagai berikut

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \frac{x_k(1 + h_1)(d + ex_k + y_k)}{d + ex_k + y_k + ach_1 y_k} \\ y_{k+1} &= \frac{y_k(ch_1 x_k + d + ex_k + y_k)}{(1 + bh_1)(d + ex_k + y_k)}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

di mana  $h_1 = \varphi(h)$ . Berdasarkan definisi titik kesetimbangan pada persamaan beda, maka titik kesetimbangan dari sistem (3.8) adalah

titik-titik yang memenuhi  $\frac{x_k(1+h_1)(r+ex_k+y_k)}{r+ex_k+y_k+ach_1y_k} = x_k$  dan  $\frac{y_k(ch_1x_k+r+ex_k+y_k)}{(1+bh_1)(r+ex_k+y_k)} = y_k$ , sehingga didapatkan

$$x_k = 0 \text{ atau } \left( \frac{(1+h_1)(r+ex_k+y_k)}{r+ex_k+y_k+ach_1y_k} - 1 \right) = 0$$

dan

$$y_k = 0 \text{ atau } \left( \frac{(ch_1x_k+r+ex_k+y_k)}{(1+bh_1)(r+ex_k+y_k)} - 1 \right) = 0.$$

Dengan cara yang sama pada pencarian titik kesetimbangan untuk sistem kontinu diperoleh dua titik kesetimbangan dari sistem (3.8),

yaitu  $E_1 = (0,0)$  dan  $E_2 = \left( \frac{abr}{ac-abe-1}, \frac{r}{ac-abe-1} \right)$  yang tidak

lain adalah titik kesetimbangan dari sistem (3.1). Jadi, titik kesetimbangan dari skema numerik konsisten dengan titik kesetimbangan dari sistem persamaan diferensialnya.

### 3.2.2. Kestabilan

Fungsi laju pertumbuhan pada sistem (3.8) juga merupakan bentuk tak-linier. Oleh karena itu, untuk memeriksa kestabilan dari titik kesetimbangan  $E_1$  dan  $E_2$  juga digunakan sistem hampiran di sekitar titik-titik tersebut. Sistem hampiran untuk persamaan beda diberikan dalam bentuk

$$\vec{w}(n+1) = J^* \vec{w}(n)$$

di mana  $J^*$  adalah matriks Jacobi di titik kesetimbangan dan  $\vec{w}(n) = (x(n) - x^*, y(n) - y^*)^T$  dengan  $(x(n), y(n))$  cukup dekat dengan  $(x^*, y^*)$ .

Dari sistem (3.8) diperoleh matriks Jacobi pada titik kesetimbangan  $E=(x^*, y^*)$ , yaitu

$$J(E) = \begin{bmatrix} J(E)_{11} & J(E)_{12} \\ J(E)_{21} & J(E)_{22} \end{bmatrix}$$

dengan



$$J(E)_{11} = \frac{(1+h_1)((r+ex^*+y^*)^2 + (r+ex^*+y^*)(ach_1y^*) + aceh_1x^*y^*)}{(r+ex^*+y^*+ach_1y^*)^2},$$

$$J(E)_{12} = \frac{-ach_1y^*(1+h_1)(r+ex^*)}{(r+ex^*+y^*+ach_1y^*)^2},$$

$$J(E)_{21} = \frac{ch_1y^*(1+bh_1)(r+2ex^*+y^*)}{(1+bh_1)^2(r+ex^*+y^*)^2},$$

$$J(E)_{22} = \frac{(1+bh_1)((r+ex^*+y^*)^2 + (r+ex^*+y^*)ch_1x^*-ch_1x^*y^*)}{(1+bh_1)^2(r+ex^*+y^*)^2}.$$

Matriks Jacobi di titik kesetimbangan  $E_1$  adalah

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} 1+h_1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+bh_1} \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

Berdasarkan solusi umum sistem persamaan beda homogen dan Teorema 2.5 yang menyatakan bahwa solusi sistem akan konvergen ke nol jika dan hanya jika  $|\lambda| < 1$  untuk semua nilai nilai eigen  $\lambda$ , maka untuk menentukan kestabilan titik kesetimbangan  $E_1$  dicari nilai eigen dari matriks  $J(E_1)$ . Dari persamaan (3.9) diperoleh nilai eigen  $\lambda_1 = 1+h_1$  dan  $\lambda_2 = \frac{1}{1+bh_1}$ . Karena  $\lambda_1 > 1$ , maka titik

kesetimbangan  $E_1$  bersifat tidak stabil. Oleh karena itu, sifat kestabilan titik kesetimbangan  $E_1$  dari skema numerik konsisten dengan sifat kestabilan titik kesetimbangan  $E_1$  dari sistem kontinu.

Matriks Jacobi untuk titik kesetimbangan  $E_2$  adalah

$$J(E_2) = \begin{bmatrix} 1 + \frac{beh_1}{c(1+h_1)} & \frac{-bh_1(ac-1)}{c(1+h_1)} \\ \frac{h_1(c-be)}{ac(1+bh_1)} & 1 - \frac{bh_1}{ac(1+bh_1)} \end{bmatrix}.$$

Untuk menentukan kestabilan titik kesetimbangan  $E_2$ , dicari nilai eigen dari  $J(E_2)$ , yaitu dengan menyelesaikan persamaan karakteristik

$$\left( \left( 1 + \frac{beh_1}{c(1+h_1)} \right) - \lambda \right) \left( \left( 1 - \frac{bh_1}{ac(1+bh_1)} \right) - \lambda \right) - \left( \frac{-bh_1(ac-1)}{c(1+h_1)} \right) \left( \frac{h_1(c-be)}{ac(1+bh_1)} \right) = 0$$

atau

$$\lambda^2 - (A+2)\lambda + A+B+1=0, \quad (3.10)$$



di mana

$$A = \frac{beh_1}{c(1+h_1)} - \frac{bh_1}{ac(1+bh_1)}$$

dan

$$B = \frac{bh_1^2(ac - abe - 1)}{ac(1+h_1)(1+bh_1)}.$$

Berdasarkan Lemma 2.1, maka harga mutlak dari akar-akar persamaan (3.10) akan bernilai kurang dari satu jika dan hanya jika memenuhi ketiga kondisi berikut:

- i)  $B > 0$ ,
- ii)  $2A + B + 4 > 0$ ,
- iii)  $A + B < 0$ .

Kondisi (i) identik dengan

$$\frac{bh_1^2(ac - abe - 1)}{ac(1+h_1)(1+bh_1)} > 0. \quad (3.11)$$

Berdasarkan pertaksamaan (3.6), maka pertaksamaan (3.11) bernilai benar, sehingga kondisi (i) terpenuhi.

Sementara itu kondisi (ii) diperiksa dengan menghitung nilai  $A$  terlebih dahulu, yaitu

$$\begin{aligned} A &= \frac{beh_1}{c(1+h_1)} - \frac{bh_1}{ac(1+bh_1)} \\ &= \frac{abeh_1 + ab^2eh_1^2 - bh_1 - bh_1^2}{ac + ach_1 + abch_1 + abch_1^2} \\ &= \frac{abeh_1 + ab^2eh_1^2 - bh_1 - bh_1^2 + ac + ach_1 + abch_1 + abch_1^2}{ac + ach_1 + abch_1 + abch_1^2} - 1. \end{aligned}$$

Akibat dari pertaksamaan (3.6) adalah  $ac > 1$ , sehingga diperoleh

$$\frac{abeh_1 + ab^2eh_1^2 - bh_1 - bh_1^2 + ac + ach_1 + abch_1 + abch_1^2}{ac + ach_1 + abch_1 + abch_1^2} > 0.$$

Oleh karena itu,  $A > -1$ , sehingga kondisi (ii) terpenuhi.

Kondisi (iii) dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned} \frac{beh_1}{c(1+h_1)} - \frac{bh_1}{ac(1+bh_1)} + \frac{bh_1^2(ac-abe-1)}{ac(1+h_1)(1+bh_1)} < 0 \\ abeh_1(1+bh_1) - bh_1(1+h_1) + bh_1^2(ac-abe-1) < 0 \\ h_1(ac-2) + ae-1 < 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Jika diasumsikan bahwa titik kesetimbangan  $E_2$  bersifat stabil asimtotik, maka  $ae-1 < 0$ , sehingga pertaksamaan (3.11) akan bernilai benar jika  $ac-2 \leq 0$ . Jika  $ac-2 > 0$ , maka pertaksamaan

$$(3.11) \text{ akan bernilai benar jika nilai } h_1 < \frac{|ae-1|}{|ac-2|}.$$

Jika diasumsikan bahwa titik kesetimbangan  $E_2$  tidak stabil, maka  $ac-abe-1 < 0$  atau  $ae-1 > 0$ . Jika  $ac-abe-1 < 0$ , maka kondisi (i) tidak terpenuhi. Di lain pihak, jika  $ae-1 > 0$ , maka kondisi (iii) tidak terpenuhi jika  $ac-2 \geq 0$ , dan juga tidak akan

terpenuhi jika  $ac-2 < 0$  dan  $h_1 < \frac{|ae-1|}{|ac-2|}$ . Dengan kata lain, jika

titik kesetimbangan  $E_2$  tidak stabil, maka untuk  $h_1 < \frac{|ae-1|}{|ac-2|}$  titik

kesetimbangan  $E_2$  akan tetap tidak stabil.

Berdasarkan Teorema 3.1 diperoleh

$$\begin{aligned} q > Q \\ 0 < \frac{\phi(hq)}{q} = h_1 < \frac{1}{Q}. \end{aligned}$$

Oleh karena itu, terdapat nilai  $\frac{1}{Q}$  yang sama dengan  $\frac{|ae-1|}{|ac-2|}$  atau

$$Q = \frac{|ac-2|}{|ae-1|}, \text{ sehingga sistem (3.8) dapat terpenuhi.}$$

Pada Bab II telah dijelaskan bahwa jika nilai trace dari matriks koefisien sama dengan nol dan determinannya lebih dari nol, maka titik kesetimbangan bersifat stabil pusat. Untuk model yang dibahas, syarat stabil pusat untuk titik kesetimbangan  $E_2$  adalah  $ae-1=0$  dan  $ac-abe-1 > 0$ . Akan tetapi, dari analisis kestabilan yang telah dijelaskan sebelumnya, jika  $ae-1=0$ , maka nilai  $Q$  tidak dapat

ditemukan. Oleh karena itu, sistem (3.7) tidak dapat menunjukkan tentang sifat stabil pusat. Hal tersebut menjadi kelemahan dari metode PESN.

Dari analisis tentang kestabilan titik kesetimbangan dapat disimpulkan bahwa sifat kestabilan titik kesetimbangan  $E_2$  untuk persamaan diferensial dan skema numerik adalah konsisten, kecuali pada kasus stabil pusat.

### 3.3 Simulasi Numerik

Pada pembahasan sebelumnya telah dijelaskan bahwa skema numerik yang diperoleh dari metode PESN mempunyai titik kesetimbangan dan sifat kestabilan yang sama dengan sistem persamaan diferensialnya kecuali pada kasus stabil pusat. Hal tersebut akan ditunjukkan secara visual melalui simulasi numerik.

Pada simulasi numerik untuk sistem (3.1), metode PESN akan dibandingkan dengan metode Euler. Metode Euler menggunakan beda maju untuk turunan terhadap waktu dan fungsi laju pertumbuhan pada persamaan diferensial dirubah dalam bentuk diskrit atas grid lokal. Oleh karena itu, metode Euler untuk sistem (3.1) adalah sebagai berikut

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{h} = x_k - a \frac{cx_k}{r + ex_k + y_k} y_k$$

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = \frac{cx_k}{r + ex_k + y_k} y_k - by_k$$

atau

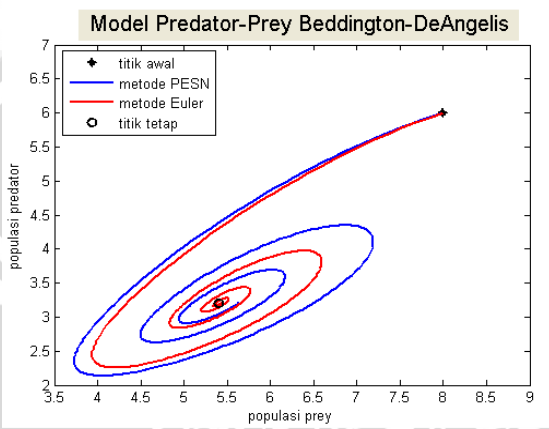
$$x_{k+1} = (h+1)x_k - ha \frac{cx_k}{r + ex_k + y_k} y_k$$

$$y_{k+1} = h \frac{cx_k}{r + ex_k + y_k} y_k - y_k (bh-1).$$

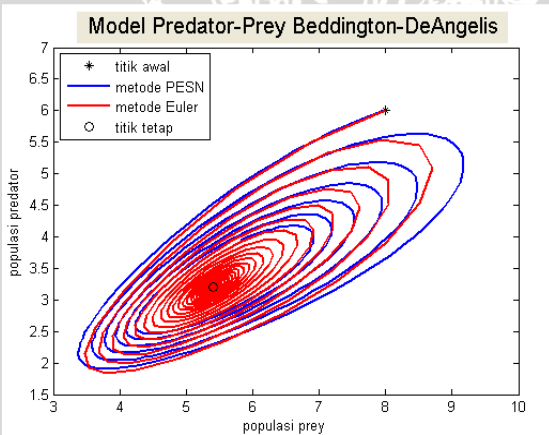
Solusi numerik untuk metode PESN ditunjukkan dengan garis berwarna biru, sedangkan untuk metode Euler ditunjukkan dengan garis berwarna merah. Titik awal dan titik kesetimbangan yang tak-trivial secara urut ditunjukkan dengan tanda bintang dan tanda lingkaran berwarna hitam.

Pada Gambar 3.1 sampai Gambar 3.3 dibandingkan solusi numerik dari metode PESN dengan metode Euler untuk parameter yang sama dan nilai  $h$  yang berbeda. Nilai parameter yang digunakan

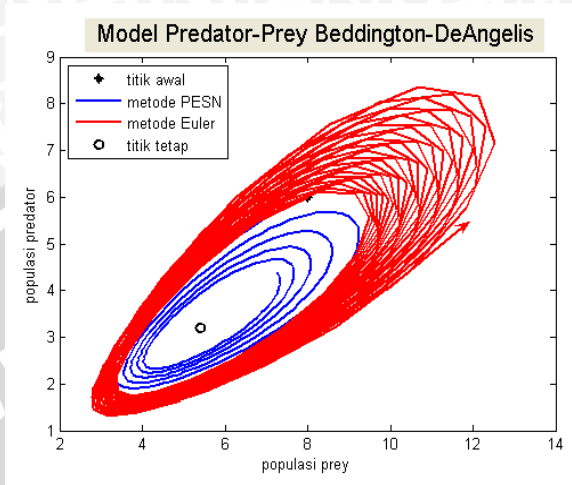
adalah  $a=0,75$ ,  $b=2,25$ ,  $c=4$ ,  $r=1$  dan  $e=1$ . Dengan nilai parameter tersebut diperoleh titik kesetimbangan  $E_2=(5,4, 3,2)$ ,  $\text{trace}=-0,25$  dan  $\text{det}=0,3125$ , sehingga titik kesetimbangan  $E_2$  harus stabil asimtotik. Untuk metode PESN diperoleh nilai  $Q=4$ , dan dipilih nilai  $q=4,5$ .



**Gambar 3.1** Untuk  $h=0,1$  solusi numerik metode PESN dan metode Euler konsisten.



**Gambar 3.2** Untuk  $h=0,7$  solusi numerik metode PESN dan metode Euler masih konsisten.

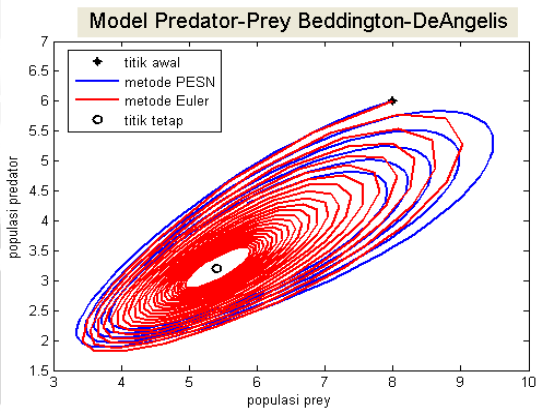


**Gambar 3.3** Untuk  $h=0,81$  solusi numerik metode PESN konsisten dan metode Euler tidak konsisten.

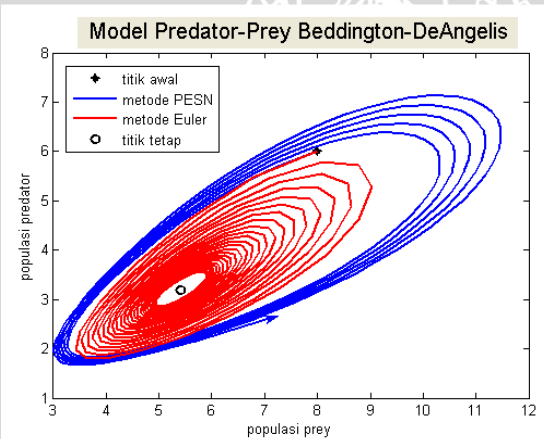
Dari Gambar 3.1 dapat dilihat bahwa dengan nilai  $h=0,1$ , solusi dari metode PESN maupun metode Euler keduanya mendekati titik kesetimbangan, sehingga kedua metode tersebut konsisten. Pada Gambar 3.2 dengan nilai  $h=0,7$  dapat dilihat bahwa metode PESN dan metode Euler masih tetap konsisten. Akan tetapi, pada Gambar 3.3 dengan nilai  $h=0,81$  solusi dari metode Euler menjauhi titik kesetimbangan, sehingga metode tersebut tidak konsisten, sedangkan metode PESN masih tetap konsisten.

Pada Gambar 3.4 dan Gambar 3.5 ditunjukkan bahwa dengan nilai parameter yang sama dengan pada Gambar 3.1 dan nilai  $h=0,75$ , metode PESN tidak berlaku ketika dipilih  $q < Q$ .





**Gambar 3.4** Metode PESN konsisten untuk  $q=4,2$ .



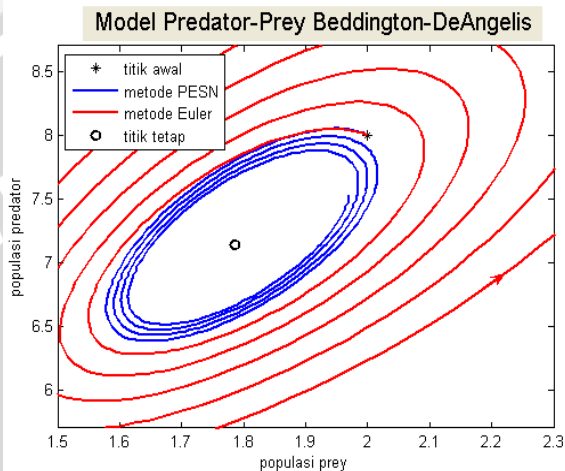
**Gambar 3.5** Metode PESN tidak konsisten untuk  $q=3,5$ .

Dua gambar tersebut menjelaskan bahwa ketika dipilih  $q=4,2$  metode PESN masih konsisten, tetapi ketika dipilih  $q=3,5$  solusi dari metode PESN semakin menjauhi titik kesetimbangan, sehingga metode tersebut tidak konsisten. Oleh karena itu, nilai  $q$  harus dipilih lebih besar dari  $Q$  agar skema numerik dari metode PESN tetap konsisten.

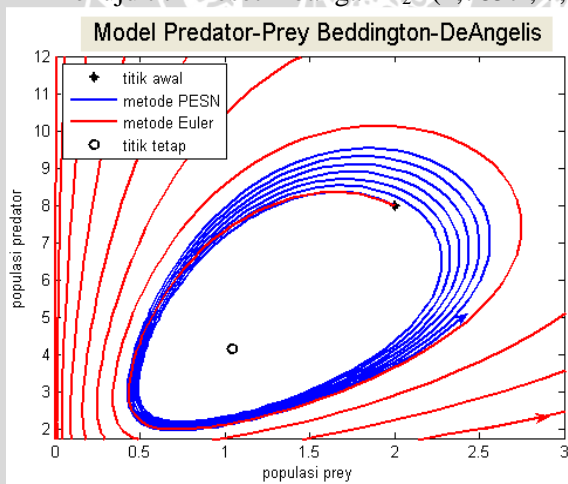
Pada tiga gambar berikut ditunjukkan bahwa untuk  $ae-1=0$  dan  $ac-abe-1>0$ , metode PESN tidak dapat menunjukkan sifat stabil pusat. Kestabilan titik kesetimbangan  $E_2$  tidak lagi bergantung pada nilai  $q$ , melainkan bergantung pada nilai  $ac-2$ . Untuk



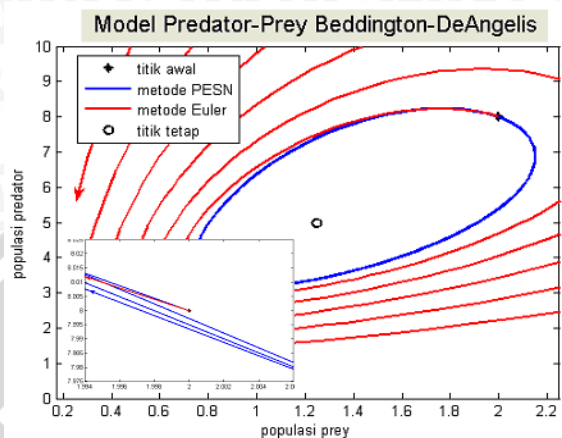
menunjukkan hal tersebut, digunakan nilai-nilai parameter sebagai berikut  $a=0,5$ ,  $b=0,5$ ,  $c=3,7$ ;  $4$ ;  $4,2$ ,  $r=2,5$ ,  $e=2$  dan  $h=0,2$ . Dengan tiga nilai parameter  $c$  yang berbeda diperoleh tiga titik kesetimbangan  $E_2$  yang berbeda pula, yaitu  $(1,7857, 7,1428)$ ,  $(1,25, 5)$  dan  $(1,0467, 4,6667)$ .



**Gambar 3.6** Untuk  $ac-2=-0,15$  solusi numerik metode PESN menuju titik kesetimbangan  $E_2=(1,7857, 7,1428)$ .



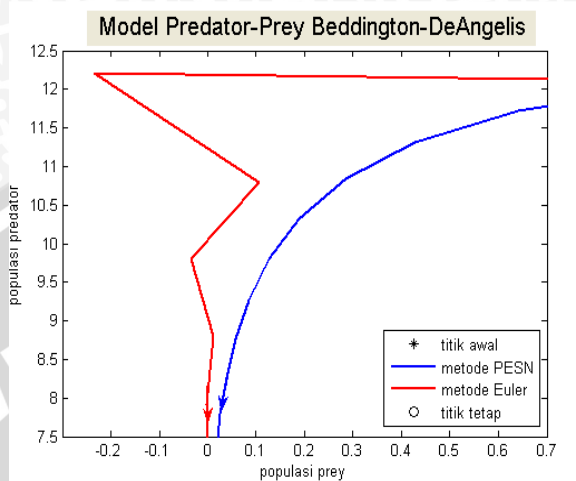
**Gambar 3.7** Untuk  $ac-2=0,1$  solusi numerik metode PESN menjauhi titik kesetimbangan  $E_2=(1,0467, 4,6667)$ .



**Gambar 3.8** Untuk  $ac-2=0$  solusi numerik metode PESN mendekati sifat stabil pusat.

Dari Gambar 3.6 dapat dilihat bahwa metode PESN dengan  $ac-2=-0,15$ , titik kesetimbangan bersifat stabil asimtotik, sedangkan pada Gambar 3.7, dengan  $ac-2=0,10$  titik kesetimbangan bersifat tidak stabil. Pada Gambar 3.8, dengan  $ac-2=0$  secara sepintas titik kesetimbangan bersifat stabil pusat, akan tetapi, ketika gambar diperbesar, solusi semakin mendekati titik kesetimbangan, dengan kata lain tidak stabil pusat. Oleh karena itu, metode PESN untuk sistem (3.1) hanya bisa mendekati sifat stabil pusat ketika  $ac-2=0$  dan  $h_1$  yang cukup kecil.

Melalui Gambar 3.1 sampai dengan Gambar 3.8, dapat dilihat bahwa semua solusi dari metode PESN bernilai positif untuk semua nilai awal yang positif. Oleh karena itu, metode PESN memenuhi Definisi 2.5 mengenai sifat positif tanpa syarat. Pernyataan tersebut juga didukung oleh Gambar 3.9 berikut.



**Gambar 3.9** Metode PESN bersifat positif tanpa syarat.

Nilai parameter Gambar 3.9 adalah  $a=3$ ,  $b=0,1$ ,  $c=1$ ,  $r=3$  dan  $e=1$ . Dari nilai parameter tersebut diperoleh  $\text{trace}=2$  dan  $\text{det}=1,7$ , sehingga titik kesetimbangan  $E_2=(0,53, 1,76)$  bersifat tidak stabil. Inti yang dapat diambil dari gambar tersebut adalah meskipun titik kesetimbangan bersifat tidak stabil, solusi dari metode PESN tetap bernilai positif, sedangkan solusi untuk metode Euler ada yang bernilai negatif.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



## BAB IV PENUTUP

### 4.1. Kesimpulan

Berdasarkan tujuan pengerjaan skripsi ini yang telah diuraikan pada Bab I dan pembahasan pada Bab III, maka dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. Diperoleh konstruksi skema numerik dari metode beda hingga tak-standar yang stabil elementer dan positif untuk model *prodator-prey* dengan fungsi respons Beddington-DeAngelis.
2. Skema numerik yang diperoleh memiliki titik kesetimbangan dan sifat kestabilan yang sama, sehingga metode PESN konsisten secara dinamik, kecuali pada kasus stabil pusat. Skema numerik juga bersifat positif tanpa syarat.

### 4.2. Saran

Metode PESN memiliki kelemahan ketika menjelaskan sifat stabil pusat. Oleh karena itu, dibutuhkan metode lain yang juga dapat menjelaskan sifat stabil pusat.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA





## DAFTAR PUSTAKA

- Boyce, W.E. dan R.C. DiPrima. 2001. *Elementary differential equations and boundary value problems*. Seventh edition, John Wiley & Sons, Inc. United State of America.
- Bircoff, G dan G.C. rota. 1989. *Ordinary differential equation*. Canada: john Willey & Sons Inc.
- Dimitrov, D.T. dan H.V. Kojouharov. 2007. Nonstandard numerical methods for a class of predator-prey models with predator interference, *Electronic journal of dfferential Equations*. 15. 67-75.
- Dimitrov, D.T. dan H.V. Kojouharov. 2007. Nonstandard Finite Difference Methods For Predator-Prey Models With General Functional Response. *Technical Report*. 10. 1-14.
- Elaydi, S. 2005. *An introduction to difference equations*. Third edition, Springer. New York.
- Mickens, R.E. 2000. *Applications of nonstandard methods for initial value problems*, World Scientific. Singapore.
- Murray. 2002. *Mathematical Biology: I. An Introduction*. Third Edition, Springer, New York.
- Skalski, G. T. dan J. F. Gilliam. 2001. Functional responses with predator interference: viable alternatives to the Holling Type II model, *Ecology*. 82:11. 3083-3092.
- Robinson, R.C. 2004. *An introduction to dynamical system continuous and discrete*. Prentice Hall Education. USA.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



**Lampiran 1.** Listing Program Menggunakan Matlab 7.1 untuk Melakukan Simulasi Skema Numerik Model *Predator-Prey Beddington-DeAngelis*.

```

function varargout = PESN(varargin)
%=====
gui_Singleton = 1;
gui_State = struct('gui_Name',       mfilename, ...
                  'gui_Singleton',   gui_Singleton, ...
                  'gui_OpeningFcn',  @PESN_OpeningFcn, ...
                  'gui_OutputFcn',   @PESN_OutputFcn, ...
                  'gui_LayoutFcn',   [], ...
                  'gui_Callback',    []);

if nargin && ischar(varargin{1})
    gui_State.gui_Callback = str2func(varargin{1});
end

if nargout
    [varargout{1:nargout}] = gui_mainfcn(gui_State,
    varargin{:});
else
    gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
end
%=====
function PESN_OpeningFcn(hObject, eventdata, handles, varargin)
handles.output = hObject;
set(hObject, 'menubar', 'figure');
set(hObject, 'toolbar', 'figure');
guidata(hObject, handles);
%=====
function varargout = PESN_OutputFcn(hObject, eventdata,
handles)
varargout{1} = handles.output;

%=====data=====
function edittrace_Callback(hObject, eventdata, handles)
function edittrace_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
if ispc && isequal(get(hObject, 'BackgroundColor'),
get(0, 'defaultUiControlBackgroundColor'))
    set(hObject, 'BackgroundColor', 'white');
end

function editdet_Callback(hObject, eventdata, handles)
function editdet_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
if ispc && isequal(get(hObject, 'BackgroundColor'),
get(0, 'defaultUiControlBackgroundColor'))
    set(hObject, 'BackgroundColor', 'white');
end

function editQ_Callback(hObject, eventdata, handles)
function editQ_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
if ispc && isequal(get(hObject, 'BackgroundColor'),
get(0, 'defaultUiControlBackgroundColor'))
    set(hObject, 'BackgroundColor', 'white');

```

end

```
function editxs_Callback(hObject, eventdata, handles)
function editxs_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end
```

```
function editys_Callback(hObject, eventdata, handles)
function editys_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end
```

```
%=====input=====
function editq_Callback(hObject, eventdata, handles)
input=str2num(get(hObject,'string'));
if (isempty(input))
    set(hObject,'string','0')
end
guidata(hObject,handles);
function editq_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end
```

```
function edith_Callback(hObject, eventdata, handles)
input=str2num(get(hObject,'string'));
if (isempty(input))
    set(hObject,'string','0')
end
guidata(hObject,handles);
function edith_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end
```

```
function editn_Callback(hObject, eventdata, handles)
input=str2num(get(hObject,'string'));
if (isempty(input))
    set(hObject,'string','0')
end
guidata(hObject,handles);
function editn_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end
```

```
function editx0_Callback(hObject, eventdata, handles)
input=str2num(get(hObject,'string'));
```

```

if (isempty(input))
    set(hObject, 'string', '0')
end
guidata(hObject, handles);
function editx0_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
if ispc && isequal(get(hObject, 'BackgroundColor'),
get(0, 'defaultUiControlBackgroundColor'))
    set(hObject, 'BackgroundColor', 'white');
end

function edity0_Callback(hObject, eventdata, handles)
input=str2num(get(hObject, 'string'));
if (isempty(input))
    set(hObject, 'string', '0')
end
guidata(hObject, handles);
function edity0_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
if ispc && isequal(get(hObject, 'BackgroundColor'),
get(0, 'defaultUiControlBackgroundColor'))
    set(hObject, 'BackgroundColor', 'white');
end

%=====figure=====
function figurebutton_Callback(hObject, eventdata, handles)
axes(handles.axes1);
a=str2num(get(handles.edita, 'string'));
b=str2num(get(handles.editb, 'string'));
c=str2num(get(handles.editc, 'string'));
d=str2num(get(handles.editd, 'string'));
e=str2num(get(handles.edite, 'string'));
q=str2num(get(handles.editq, 'string'));
h=str2num(get(handles.edith, 'string'));
n=str2num(get(handles.editn, 'string'));
x0=str2num(get(handles.editx0, 'string'));
y0=str2num(get(handles.edity0, 'string'));
xs=str2num(get(handles.editxs, 'string'));
ys=str2num(get(handles.editys, 'string'));
if ((q<=0)|(h<=0)|(n<=0)|(x0<=0)|(y0<=0))
    warndlg('ada input yang bernilai kurang atau sama dengan nol', 'Warning!!')
else
    h1=(1-exp(-h*q))/q;
    X(1)=x0;
    Y(1)=y0;
    for i=2:n,
        X(i)=(1+h1)*X(i-1)*(d+e*X(i-1)+Y(i-1))/(d+e*X(i-1)+Y(i-1)+a*c*h1*Y(i-1));
        Y(i)=Y(i-1)*(c*h1*X(i-1)+d+e*X(i-1)+Y(i-1))/(1+b*h1)*(d+e*X(i-1)+Y(i-1)));
    end;
    Xe(1)=x0;
    Ye(1)=y0;
    for i=2:n,
        Xe(i)=(h+1)*Xe(i-1)-h*a*c*Xe(i-1)*Ye(i-1)/(d+e*Xe(i-1)+Ye(i-1));

```



```

Ye(i)=h*c*Xe(i-1)*Ye(i-1)/(d+e*Xe(i-1)+Ye(i-1))-Ye(i-
1)*(b*h-1);
end;
plot(x0,y0,'k*',X,Y,'b-',Xe,Ye,'r-',xs,ys,'ko');
xlabel('populasi prey');ylabel('populasi predator');
legend('titik awal','metode PESN','metode Euler','titik
tetap');
end

%=====parameter=====
function edita_Callback(hObject, eventdata, handles)
input=str2num(get(hObject,'string'));
if (isempty(input))
    set(hObject,'string','0')
end
guidata(hObject,handles);
function edita_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function editb_Callback(hObject, eventdata, handles)
input=str2num(get(hObject,'string'));
if (isempty(input))
    set(hObject,'string','0')
end
guidata(hObject,handles);
function editb_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function editc_Callback(hObject, eventdata, handles)
input=str2num(get(hObject,'string'));
if (isempty(input))
    set(hObject,'string','0')
end
guidata(hObject,handles);
function editc_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function editd_Callback(hObject, eventdata, handles)
input=str2num(get(hObject,'string'));
if (isempty(input))
    set(hObject,'string','0')
end
guidata(hObject,handles);
function editd_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))

```



```

        set(hObject, 'BackgroundColor', 'white');
    end

    function editte_Callback(hObject, eventdata, handles)
    input=str2num(get(hObject, 'string'));
    if (isempty(input))
        set(hObject, 'string', '0')
    end
    guidata(hObject,handles);
    function editte_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
    if ispc && isequal(get(hObject, 'BackgroundColor'),
    get(0, 'defaultUiControlBackgroundColor'))
        set(hObject, 'BackgroundColor', 'white');
    end

    %=====execute=====
    function exebutton_Callback(hObject, eventdata, handles)
    a=str2num(get(handles.edita, 'string'));
    b=str2num(get(handles.editb, 'string'));
    c=str2num(get(handles.editc, 'string'));
    d=str2num(get(handles.edite, 'string'));
    e=str2num(get(handles.edite, 'string'));
    if ((a<0)|(b<0)|(c<0)|(d<0)|(e<0))
        warndlg('ada parameter yang bernilai kurang dari
        nol', 'Warning!!')
    else
        trace=a*e-1;
        det=a*c-a*b*e-1;
        xs=a*b*d/(a*c-a*b*e-1);
        ys=d/(a*c-a*b*e-1);
        Q=abs((a*c-2)/(a*e-1));
        set(handles.edittrace, 'string', num2str(trace));
        set(handles.editdet, 'string', num2str(det));
        set(handles.editQ, 'string', num2str(Q));
        set(handles.editxs, 'string', num2str(xs));
        set(handles.editys, 'string', num2str(ys));
    end
    guidata(hObject,handles);

```

**Lampiran 2.** Desain *Interface* Program Menggunakan Matlab 7.1 untuk Melakukan Simulasi Skema Numerik Model *Predator-Prey Beddington-DeAngelis*.

