PENYELESAIAN MASALAH KUADRAT TERKECIL NONLINEAR DENGAN FUNGSI B-SPLINE

SKRIPSI

oleh:
IVAN LUTHFI IHWANI
125090400111008

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2016

PENYELESAIAN MASALAH KUADRAT TERKECIL NONLINEAR DENGAN FUNGSI B-SPLINE

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

oleh:
IVAN LUTHFI IHWANI
125090400111008

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2016

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

PENYELESAIAN MASALAH KUADRAT TERKECIL NONLINEAR DENGAN FUNGSI B-SPLINE

oleh:
IVAN LUTHFI IHWANI
125090400111008

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji pada tanggal 1 Februari 2016 dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Pembimbing

Dra. Trisilowati, M.Sc., Ph.D.
NIP. 196309261989032001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si., M.Si., Ph.D.
NIP. 197509082000031003

LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	**: Ivan Luthfi Ihwani**
NIM	**: 125090400111008**
Jurusan	**: Matematika**
Penulis Skripsi berjudul	**: Penyelesaian Masalah Kuadrat Terkecil Nonlinear dengan Fungsi B-Spline**

dengan ini menyatakan bahwa:

1. **isi skripsi yang saya buat adalah benar-benar karya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain, selain nama-nama yang termaktub di isi dan tertulis di Daftar Pustaka dalam skripsi ini.**
2. **Apabila di kemudian hari ternyata skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala resiko yang akan saya terima.**

Demikian pernyatan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 1 Februari 2016
Yang menyatakan,

(Ivan Luthfi Ihwani)
NIM. 125090400111008

PENYELESAIAN MASALAH KUADRAT TERKECIL NONLINEAR DENGAN FUNGSI B-SPLINE

ABSTRAK

Pada skripsi ini dibahas penyelesaian masalah kuadrat terkecil nonlinear menggunakan fungsi B-spline. Pada tahap pertama, dikonstruksi fungsi B-spline. Selanjutnya, fungsi B-spline diaplikasikan ke dalam metode kuadrat terkecil. Fungsi B-spline pada metode ini merupakan kombinasi linear fungsi-fungsi basis B-spline kubik. Berbeda dari metode-metode kuadrat terkecil nonlinear lainnya, proses penyelesaian masalah kuadrat terkecil nonlinear menggunakan fungsi B-spline tidak memerlukan titik penduga awal dan membentuk sistem persamaan linear. Solusi sistem persamaan linear tersebut merupakan koefisien-koefisien kombinasi linear fungsi-fungsi basis. Berdasarkan simulasi numerik diketahui bahwa panjang partisi dan banyak data berpengaruh terhadap kinerja metode ini.

Kata kunci: fungsi B-spline, fungsi basis B-spline kubik, metode kuadrat terkecil.

SOLVING NONLINEAR LEAST SQUARES PROBLEM WITH B-SPLINE FUNCTION

ABSTRACT

In this final project, a nonlinear least squares problem using B-spline function is discussed. Firstly, B-spline function is constructed. B-spline function is then applied to the least squares method. B-spline function in this method is a linear combination of cubic B-spline basis functions. Different from other nonlinear least squares methods, the solution process of nonlinear least squares problem using B-spline function does not require an initial guess and forms a system of linear equations. Coefficients of the linear combination of basis functions are the solution of this system. Based on numerical simulation, it shows that the length of partition and the number of data affect the performance of this method.

Keywords: B-spline function, cubic B-spline basis function, least squares method.

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, puji syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT yang telah memberikan penulis kesabaran, kemampuan, dan kesempatan untuk menyelesaikan skripsi yang berjudul **"Penyelesaian Masalah Kuadrat Terkecil Nonlinear dengan Fungsi B-Spline"**. Skripsi ini tidak dapat diselesaikan dengan baik tanpa bantuan, bimbingan dan motivasi dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada:

1. Dra. Trisilowati, M.Sc., Ph.D. selaku Dosen Pembimbing atas arahan, masukan, dan kesabaran yang telah diberikan kepada penulis selama pengerjaan dan penyusunan skripsi ini.
2. Dr. Wuryansari Muharini K., M.Si. dan Syaiful Anam, S.Si., M.T., Ph.D. selaku dosen penguji atas segala saran dan bimbingan yang diberikan untuk perbaikan skripsi ini.
3. Drs. Imam Nurhadi Purwanto, M.T. selaku Dosen Penasehat Akademik penulis atas masukan dan arahan selama kuliah.
4. Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si., M.Si., Ph.D. selaku Ketua Jurusan Matematika dan Dr. Isnani Darti, S.Si., M.Si. selaku Ketua Program Studi Matematika.
5. Seluruh dosen Jurusan Matematika yang telah memberikan ilmunya kepada penulis, serta segenap staf dan karyawan TU Jurusan Matematika atas segala bantuannya.
6. Suparyati, S.Pd. (Ibu), Roshan Fikri (Kakak), Roshanita Fitriani (Kakak), Rahman Hadi, S.Pd. (Kakak), dan seluruh keluarga besar yang selalu mendukung, mendoakan, memotivasi, dan selalu ada saat penulis berada dalam kesulitan maupun kebahagiaan.
7. Teman-teman Matematika 2012 atas semua motivasi, semangat, keceriaan, dan bantuannya selama ini.
8. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Semoga Allah SWT memberikan anugerah, rahmat, dan barokah-Nya kepada semua pihak yang telah membantu menyelesaikan skripsi ini. Penulis menyadari pada skripsi ini masih terdapat kekurangan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran yang bersifat membangun. Kritik dan saran dapat disampaikan melalui email ke alamat ivanluthfi5@gmail.com.

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi berbagai pihak, serta menjadi sumber inspirasi untuk penulisan skripsi selanjutnya.

Malang, 1 Februari 2016

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

DAFTAR LAMPIRAN

Halaman

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Dalam suatu penelitian, sering digunakan data numerik untuk mencari hubungan antar peubah-peubah yang diamati. Hubungan tersebut biasanya dinyatakan dalam suatu fungsi agar dapat digunakan untuk memprediksi nilai fungsi di suatu titik tertentu. Banyak metode yang dapat digunakan untuk menentukan fungsi yang menjadi hampiran data, salah satunya adalah metode kuadrat terkecil.

Metode kuadrat terkecil merupakan alat dasar untuk pencocokan kurva dan aproksimasi fungsi. Kesesuaian antara model dan data hasil pengamatan diukur melalui nilai terkecil dari jumlah kuadrat galat, dengan galat merupakan jarak antara nilai pengamatan dan nilai yang diberikan oleh model. Metode ini pertama kali diperkenalkan oleh Carl Friederich Gauss pada tahun 1809 (Bonnans dkk., 2006).

Masalah kuadrat terkecil terdiri dari dua jenis, yaitu masalah kuadrat terkecil linear dan masalah kuadrat terkecil nonlinear (Leader, 2004). Masalah kuadrat terkecil nonlinear merupakan analisis kuadrat terkecil yang digunakan untuk melakukan *fitting* atas sekumpulan pengamatan dengan suatu model nonlinear. Dalam masalah kuadrat terkecil nonlinear, akan ditentukan vektor parameter model yang menghasilkan kecocokan terbaik antara data hasil pengamatan dengan prediksi model.

Pada umumnya, masalah kuadrat terkecil nonlinear diselesaikan dengan metode-metode iterasi, seperti metode Gauss-Newton dan metode Lavenberg-Marquardt (Leader, 2004). Metode tersebut hanya cocok digunakan saat titik penduga awal dekat dengan solusi eksak. Untuk dapat memilih titik penduga awal yang dekat dengan solusi eksak, diperlukan informasi tertentu mengenai perilaku solusi eksak. Namun, tidak semua kasus memberikan informasi solusi eksak.

Berdasarkan hal tersebut, dalam skripsi ini diulas kembali artikel tentang penyelesaian masalah kuadrat terkecil nonlinear menggunakan fungsi B-spline yang ditulis oleh Izadian dkk. pada tahun 2012. Metode ini bukan merupakan metode iterasi, sehingga tidak memerlukan titik penduga awal. Pada tahap pertama dikonstruksikan fungsi B-spline. Selanjutnya dipaparkan cara menyelesaikan masalah kuadrat terkecil nonlinear dengan fungsi B-spline. Pada bagian akhir dilakukan simulasi untuk mengetahui kinerja metode ini dalam penyelesaian masalah kuadrat terkecil nonlinear.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, diperoleh rumusan masalah yang akan diselesaikan dalam skripsi ini.

1) Bagaimana konstruksi fungsi B-spline?
2) Bagaimana penyelesaian masalah kuadrat terkecil nonlinear menggunakan fungsi B-spline?
3) Bagaimana kinerja metode kuadrat terkecil B-spline dalam penyelesaian masalah kuadrat terkecil nonlinear?

1.3 Tujuan

Berdasarkan rumusan masalah di atas, tujuan yang ingin dicapai dalam skripsi ini adalah sebagai berikut.

1) Mengkonstruksi fungsi B-spline.
2) Menyelesaikan masalah kuadrat terkecil nonlinear dengan fungsi B-spline.
3) Mengetahui kinerja metode kuadrat terkecil B-spline dalam penyelesaian masalah kuadrat terkecil nonlinear.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Dalam bab ini disajikan definisi, teorema, dan contoh sebagai dasar teori untuk memudahkan pembaca dalam memahami isi skripsi ini. Dasar teori meliputi: interpolasi, optimasi, metode kuadrat terkecil, dan regresi.

2.1 Interpolasi

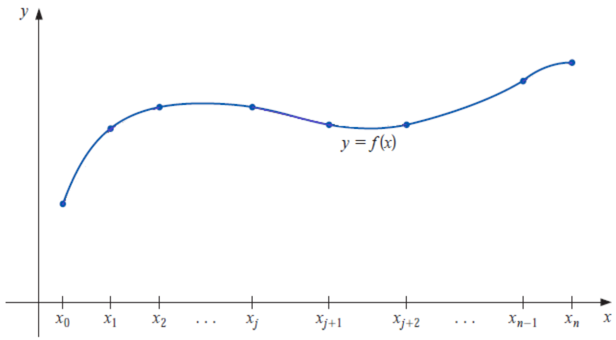
Interpolasi adalah teknik menentukan suatu fungsi $f(x)$ yang melalui sekumpulan titik berhingga $(x_i,\ y_i)$, dengan $i = 1,2,\dots,m$ dan $x_1 < x_2 < \cdots < x_m$. Fungsi $f(x)$ disebut sebagai interpolan. Macam-macam metode interpolasi antara lain: metode interpolasi Newton, metode interpolasi Lagrange, dan metode interpolasi spline (Chapra, 2012).

2.1.1 Interpolasi Spline Kubik

Diberikan suatu fungsi $f(x)$ yang terdefinisi pada interval $[a,b]$ dan sekumpulan simpul $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Interpolan spline kubik $S(x)$ terhadap $f(x)$ adalah fungsi yang memenuhi ketentuan berikut (Burden dan Faires, 2011).

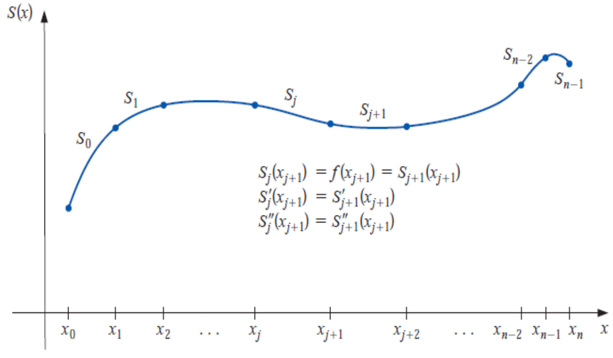
1) $S(x)$ adalah suatu polinomial kubik pada subinterval $[x_j, x_{j+1}]$, dinyatakan dengan $S_j(x)$ untuk setiap $j = 0,\ 1,\ \dots,\ n-1$. Polinomial kubik tersebut dapat ditulis sebagai
$$S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3;$$
2) $S_j(x_j) = f(x_j)$ dan $S_j(x_{j+1}) = f(x_{j+1})$ untuk setiap $j = 0,\ 1,\ \dots,\ n-1$;
3) $S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1})$ untuk setiap $j = 0, 1, \dots, n-2$;
4) $S'_{j+1}(x_{j+1}) = S'_j(x_{j+1})$ untuk setiap $j = 0, 1, \dots, n-2$;
5) $S''_{j+1}(x_{j+1}) = S''_j(x_{j+1})$ untuk setiap $j = 0, 1, \dots, n-2$;
6) Salah satu kondisi batas berikut harus terpenuhi:
   (i). $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$, ini disebut batas alami (*natural boundary*);
   (ii). $S'(x_0) = f'(x_0)$ dan $S'(x_n) = f'(x_n)$, ini disebut batas terapit (*clamped boundary*).

Spline yang memenuhi kondisi batas alami disebut spline alami (*natural spline*). Sedangkan spline yang memenuhi kondisi batas terapit disebut spline terapit (*clamped spline*). Dalam interpolasi spline terapit diperlukan informasi fungsi f untuk memperoleh nilai turunan pertama f pada ujung-ujung simpul. Gambar 2.1 mengilustrasikan fungsi $f(x)$ yang terdefinisi pada interval $[a,b]$ dan sekumpulan simpul $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.



Gambar 2.1 Fungsi $f(x)$ pada interval $[a,b]$.

Gambar 2.2 mengilustrasikan pendekatan fungsi $f(x)$ dengan interpolan spline kubik $S(x)$.



Gambar 2.2 Interpolan spline kubik $S(x)$ terhadap $f(x)$.

Contoh 2.1.1 (Spline Alami)

Berikut ini diberikan contoh interpolan spline kubik alami yang melewati titik-titik (1,2), (2,3), dan (3,5). Spline ini berisi dua buah polinomial kubik. Pertama pada subinterval [1,2], dinyatakan dengan

$$S_0(x) = a_0 + b_0(x-1) + c_0(x-1)^2 + d_0(x-1)^3,$$

dan yang lainnya pada subinterval [2,3], dinyatakan dengan

$$S_1(x) = a_1 + b_1(x-2) + c_1(x-2)^2 + d_1(x-2)^3.$$

Terdapat 8 koefisien yang harus ditentukan dengan 8 kondisi yang diperlukan. Empat kondisi diperoleh berdasarkan ketentuan bahwa pada suatu simpul nilai spline harus bersesuaian dengan nilai fungsi sehingga

$$\begin{aligned} S_0(1) &= f(1) = a_0 = 2, \\ S_0(2) &= f(2) = a_0 + b_0 + c_0 + d_0 = 3, \\ S_1(2) &= f(2) = a_1 = 3, \\ \text{dan } S_1(3) &= f(3) = a_1 + b_1 + c_1 + d_1 = 5. \end{aligned}$$

Dua kondisi diperoleh berdasarkan ketentuan bahwa $S'_0(2) = S'_1(2)$ dan $S''_0(2) = S''_1(2)$ sehingga

$$\begin{aligned} S'_0(2) = S'_1(2):\ & b_0 + 2c_0 + 3d_0 = b_1 \\ \text{dan } S''_0(2) = S''_1(2):\ & 2c_0 + 6d_0 \qquad = 2c_1. \end{aligned}$$

Dua kondisi terakhir diperoleh berdasarkan kondisi batas alami, yaitu

$$\begin{aligned} S''_0(1) = 0:\ & 2c_0 \qquad = 0 \\ \text{dan } S''_1(3) = 0:\ & 2c_1 + 6d_1 = 0. \end{aligned}$$

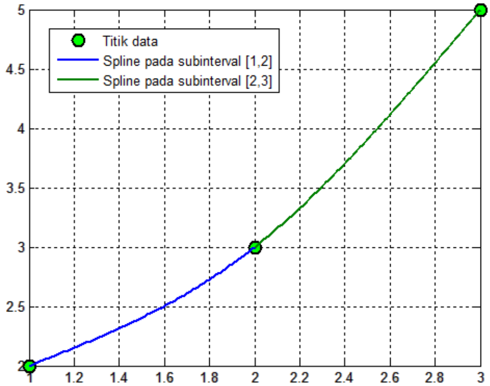
Dengan menyelesaikan sistem persamaan

$$\begin{aligned} & a_0 && = 2, \\ & a_0 + b_0 + c_0 + d_0 && = 3, \\ & a_1 && = 3, \\ & a_1 + b_1 + c_1 + d_1 && = 5, \\ & b_0 + 2c_0 + 3d_0 && = b_1, \\ & 2c_0 + 6d_0 && = 2c_1, \\ & 2c_0 && = 0, \\ \text{dan } & 2c_1 + 6d_1 && = 0, \end{aligned}$$

diperoleh spline

$$S(x) = \begin{cases} 2 + \frac{3}{4}(x-1) + \frac{1}{4}(x-1)^3, x \in [1,2] \\ 3 + \frac{3}{2}(x-2) + \frac{3}{4}(x-2)^2 - \frac{1}{4}(x-2)^3, x \in [2,3] \end{cases}.$$

Gambar 2.3 mengilustrasikan interpolan spline kubik alami yang kontinu di titik-titik (1,2), (2,3), dan (3,5).



Gambar 2.3 Interpolan spline kubik alami pada interval [1,3].

Perhatikan bahwa interpolan spline kubik ini kontinu pada interval [1,3].

Contoh 2.1.2 (Spline Terapit)

Berikut ini diberikan contoh interpolan spline kubik terapit yang melewati titik-titik (1,2), (2,3), dan (3,5). Pada contoh ini diketahui $S'(1) = f'(1) = 2$ dan $S'(3) = f'(3) = 1$. Spline ini berisi dua buah polinomial kubik. Pertama pada subinterval [1,2], dinyatakan dengan

$$S_0(x) = a_0 + b_0(x-1) + c_0(x-1)^2 + d_0(x-1)^3,$$

dan yang lainnya pada subinterval [2,3], dinyatakan dengan

$$S_1(x) = a_1 + b_1(x-2) + c_1(x-2)^2 + d_1(x-2)^3.$$

Terdapat 8 koefisien yang harus ditentukan dengan 8 kondisi yang diperlukan. Enam kondisi diperoleh berdasarkan ketentuan yang sama dengan spline alami. Dua kondisi terakhir diperoleh berdasarkan kondisi batas terapit, yaitu

$$S'_0(1) = f'(1) = 2: \quad b_0 = 2$$
$$\text{dan } S'_1(3) = f'(3) = 1: \quad b_1 + 2c_1 + 3d_1 = 1.$$

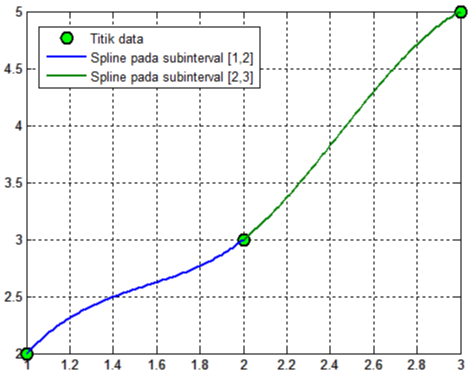
Dengan menyelesaikan sistem persamaan

$$\begin{aligned} a_0 &= 2, \\ a_0 + b_0 + c_0 + d_0 &= 3, \\ a_1 &= 3, \\ a_1 + b_1 + c_1 + d_1 &= 5, \\ b_0 + 2c_0 + 3d_0 &= b_1, \\ 2c_0 + 6d_0 &= 2c_1, \\ b_0 &= 2, \\ \text{dan } b_1 + 2c_1 + 3d_1 &= 1, \end{aligned}$$

diperoleh spline

$$S(x) = \begin{cases} 2 + 2(x-1) - \frac{5}{2}(x-1)^2 + \frac{3}{2}(x-1)^3, x \in [1,2] \\ 3 + \frac{3}{2}(x-2) + 2(x-2)^2 - \frac{3}{2}(x-2)^3, x \in [2,3] \end{cases}.$$

Gambar 2.4 mengilustrasikan interpolan spline kubik terapit yang kontinu di titik-titik (1,2), (2,3), dan (3,5).



Gambar 2.4 Interpolan spline kubik terapit pada interval [1,3].

2.2 Optimasi

Optimasi adalah meminimumkan atau memaksimumkan suatu fungsi tujuan (*objective function*) berdasarkan peubah-peubah yang tidak diketahui. Berdasarkan kondisi peubah-peubah fungsi tujuan, optimasi dibedakan menjadi dua, yaitu optimasi terkendala (*constrained optimization*) dan optimasi tanpa kendala (*unconstrained optimization*) (Nocedal dan Wright, 1999). Pada skripsi ini optimasi yang akan dilakukan adalah optimasi tanpa kendala.

2.2.1 Optimasi Tanpa Kendala

Dalam permasalahan optimasi tanpa kendala, suatu fungsi tujuan diminimumkan berdasarkan peubah-peubah riil tanpa kendala. Secara matematis dapat ditulis sebagai

$$\min_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}),$$

dengan $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ adalah vektor riil yang memuat $n \geq 1$ peubah dan $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ adalah suatu fungsi mulus (Nocedal dan Wright, 1999).

2.2.2 Minimum Global

Suatu fungsi riil $f(\boldsymbol{x})$ mencapai nilai minimum global di $\boldsymbol{x}^*$ jika $f(\boldsymbol{x}^*) \leq f(\boldsymbol{x})$ untuk semua $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ (Nocedal dan Wright, 1999).

2.2.3 Minimum Lokal

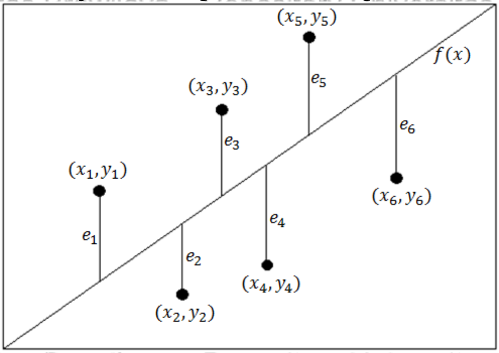
Suatu fungsi riil $f(\boldsymbol{x})$ mencapai nilai minimum lokal di $\boldsymbol{x}^*$ jika terdapat persekitaran (*neighborhood*) $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{R}^n$ terhadap $\boldsymbol{x}^*$ sedemikian sehingga $f(\boldsymbol{x}^*) \leq f(\boldsymbol{x})$ untuk semua $\boldsymbol{x} \in \mathcal{N}$ (Nocedal dan Wright, 1999).

Teorema 2.2.1 (Syarat Perlu Orde Pertama)

Jika fungsi $f(\boldsymbol{x})$ mencapai nilai minimum lokal di $\boldsymbol{x}^*$, dengan $f'(\boldsymbol{x})$ kontinu pada suatu persekitaran terbuka (*open neighborhood*) terhadap $\boldsymbol{x}^*$, maka $\nabla f(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{0}$ (Nocedal dan Wright, 1999).

2.3 Metode Kuadrat Terkecil (*Least Squares Method*)

Metode kuadrat terkecil menggunakan asumsi bahwa kurva pendekatan terbaik adalah kurva yang mempunyai jumlah kuadrat galat minimum (*least squares error*) terhadap data (Leader, 2004). Misal diberikan data (x_1, y_1), (x_2, y_2), …, (x_n, y_n) dengan x adalah peubah bebas dan y adalah peubah tak bebas. Gambar 2.5 merupakan ilustrasi jarak setiap titik terhadap kurva hampiran.



Gambar 2.5 Analisis kurva terhadap data pengamatan.

Kurva $f(x)$ mempunyai deviasi galat pada setiap titik data, yaitu $e_1 = y_1 - f(x_1)$, $e_2 = y_2 - f(x_2)$, …, $e_n = y_n - f(x_n)$. Jumlah kuadrat galat dapat dinyatakan sebagai

$$F = \sum_{i=1}^{n} {e_i}^2 = \sum_{i=1}^{n} [y_i - f(x_i)]^2.$$

Semakin kecil nilai jumlah kuadrat galat, kesesuaian antara kurva pendekatan terhadap data pengamatan akan semakin baik.

2.4 Regresi

Regresi merupakan suatu teknik pencocokan kurva yang menggunakan prinsip metode kuadrat terkecil. Beberapa tipe regresi antara lain regresi persamaan linear dan regresi persamaan kuadrat.

2.4.1 Regresi Persamaan Linear

Bentuk umum persamaan linear adalah

$$y = ax + b.$$

Pada regresi ini akan ditentukan nilai-nilai parameter a dan b berdasarkan sekumpulan data yang diberikan (titik (x, y) sebanyak m). Jumlah kuadrat galat persamaan linear tersebut terhadap data dinyatakan sebagai

$$F = \sum_{i=1}^{m}(y_i - ax_i - b)^2.$$

Minimasi F terhadap parameter a dan b menghasilkan persamaan $\frac{\partial F}{\partial a} = \frac{\partial F}{\partial b} = 0$.

$\frac{\partial F}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a}\left[\sum_{i=1}^{m}(y_i - ax_i - b)^2\right] = 0$, membentuk persamaan

$$\sum_{i=1}^{m}(y_i - ax_i - b)(-x_i) = 0$$

$$a\sum_{i=1}^{m} x_i{}^2 + b\sum_{i=1}^{m} x_i = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i. \qquad (2.1)$$

$\frac{\partial F}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial b}\left[\sum_{i=1}^{m}(y_i - ax_i - b)^2\right] = 0$, membentuk persamaan

$$\sum_{i=1}^{m}(y_i - ax_i - b)(-1) = 0$$

$$a\sum_{i=1}^{m} x_i + mb = \sum_{i=1}^{m} y_i. \qquad (2.2)$$

Persamaan (2.1) dan (2.2) membentuk suatu sistem persamaan linear (SPL), yaitu

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{m} x_i{}^2 & \sum_{i=1}^{m} x_i \\ \sum_{i=1}^{m} x_i & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{m} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{m} y_i \end{bmatrix}. \qquad (2.3)$$

Penyelesaian SPL (2.3) menghasilkan nilai-nilai parameter a dan b.

2.4.2 Regresi Persamaan Kuadrat

Bentuk umum persamaan kuadrat adalah

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Pada regresi ini akan ditentukan nilai-nilai parameter a, b, dan c berdasarkan sekumpulan data yang diberikan (titik (x, y) sebanyak m). Jumlah kuadrat galat persamaan kuadrat tersebut terhadap data dinyatakan sebagai

$$F = \sum_{i=1}^{m}(y_i - ax_i{}^2 - bx_i - c)^2.$$

Minimasi F terhadap parameter a, b, dan c menghasilkan persamaan $\frac{\partial F}{\partial a} = \frac{\partial F}{\partial b} = \frac{\partial F}{\partial c} = 0$.

$\frac{\partial F}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a}\left[\sum_{i=1}^{m}(y_i - a{x_i}^2 - bx_i - c)^2\right] = 0$, membentuk persamaan

$$\sum_{i=1}^{m}(y_i - a{x_i}^2 - bx_i - c)(-{x_i}^2) = 0$$

$$a\sum_{i=1}^{m}{x_i}^4 + b\sum_{i=1}^{m}{x_i}^3 + c\sum_{i=1}^{m}{x_i}^2 = \sum_{i=1}^{m}{x_i}^2 y_i. \tag{2.4}$$

$\frac{\partial F}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial b}\left[\sum_{i=1}^{m}(y_i - a{x_i}^2 - bx_i - c)^2\right] = 0$, membentuk persamaan

$$\sum_{i=1}^{m}(y_i - a{x_i}^2 - bx_i - c)(-x_i) = 0$$

$$a\sum_{i=1}^{m}{x_i}^3 + b\sum_{i=1}^{m}{x_i}^2 + c\sum_{i=1}^{m}x_i = \sum_{i=1}^{m}x_i y_i. \tag{2.5}$$

$\frac{\partial F}{\partial c} = \frac{\partial}{\partial c}\left[\sum_{i=1}^{m}(y_i - a{x_i}^2 - bx_i - c)^2\right] = 0$, membentuk persamaan

$\sum_{i=1}^{m}(y_i - a{x_i}^2 - bx_i - c)(-1) = 0$ atau

$$a\sum_{i=1}^{m}{x_i}^2 + b\sum_{i=1}^{m}x_i + mc = \sum_{i=1}^{m}y_i. \tag{2.6}$$

Seperti halnya pada regresi persamaan linear, ketiga persamaan (2.4), (2.5), dan (2.6) juga membentuk suatu SPL, yaitu

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{m}{x_i}^4 & \sum_{i=1}^{m}{x_i}^3 & \sum_{i=1}^{m}{x_i}^2 \\ \sum_{i=1}^{m}{x_i}^3 & \sum_{i=1}^{m}{x_i}^2 & \sum_{i=1}^{m}x_i \\ \sum_{i=1}^{m}{x_i}^2 & \sum_{i=1}^{m}x_i & m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{m}{x_i}^2 y_i \\ \sum_{i=1}^{m}x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{m}y_i \end{bmatrix}. \tag{2.7}$$

Penyelesaian SPL (2.7) menghasilkan nilai-nilai parameter a, b, dan c.

2.4.3 Regresi yang Diperumum

Sebelumnya telah dijelaskan dua tipe regresi, yaitu regresi persamaan linear dan regresi persamaan kuadrat. Dua tipe regresi tersebut, dapat diperumum menjadi model regresi berikut (Chapra, 2012).

$$y = a_0 z_0 + a_1 z_1 + a_2 z_2 + \cdots + a_n z_n + e, \tag{2.8}$$

dengan z_0, z_1, z_2, ..., z_n merupakan fungsi-fungsi basis sebanyak $n + 1$. Model (2.8) dapat digunakan dalam regresi persamaan linear maupun regresi persamaan multilinear apabila $z_0 = 1$, $z_1 = x_1$, $z_2 = x_2$, …, $z_n = x_n$. Selain itu, model (2.8) juga dapat digunakan dalam regresi persamaan parabola maupun regresi persamaan polinomial apabila fungsi-fungsi basis merupakan monomial sederhana, yaitu $z_0 = 1, z_1 = x, z_2 = x^2, \ldots, z_n = x^n$.

Persamaan (2.8) dapat dinyatakan dalam bentuk matriks, yaitu

$$\{y\} = [Z]\{a\} + \{e\},$$

dengan $[Z]$ menyatakan matriks yang berisi hasil perhitungan nilai-nilai fungsi basis pada peubah-peubah bebas yang diberikan. Matriks Z dapat dituliskan sebagai

$$Z = \begin{bmatrix} z_{01} & z_{11} & \cdots & z_{n1} \\ z_{02} & z_{12} & \cdots & z_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{0m} & z_{1m} & \cdots & z_{nm} \end{bmatrix},$$

dengan n adalah banyak peubah pada model dan m adalah banyak data. Karena $m \geq n + 1$, terdapat kemungkinan bahwa $[Z]$ bukan merupakan matriks persegi.

Vektor kolom $\{y\}$ berisi nilai-nilai titik y:

$$\{y\}^t = [y_1 \; y_2 \ldots \; y_m],$$

vektor kolom $\{a\}$ berisi parameter-parameter yang tidak diketahui:

$$\{a\}^t = [a_0 \; a_1 \ldots \; a_n],$$

dan vektor kolom $\{e\}$ berisi elemen-elemen galat:

$$\{e\}^t = [e_1 \; e_2 \ldots \; e_m].$$

Jumlah kuadrat elemen-elemen galat pada model ini dinyatakan sebagai

$$F = \sum_{i=1}^{m} \left(y_i - \sum_{j=0}^{n} a_j z_{ji} \right)^2. \qquad (2.9)$$

Persamaan (2.9) dapat diminimumkan dengan cara menghitung turunan parsialnya terhadap setiap parameter dan membuat hasil turunan-turunan parsial tersebut menjadi nol. Selanjutnya diperoleh sistem persamaan yang dapat ditulis dalam bentuk matriks berikut.

$$\left[[Z]^t [Z] \right] \{a\} = \{ [Z]^t \{y\} \}. \qquad (2.10)$$

Perhatikan kembali bahwa bentuk sistem persamaan (2.10) sebenarnya ekuivalen dengan bentuk sistem persamaan yang diperoleh pada penurunan rumus regresi persamaan linear dan regresi persamaan kuadrat.

BAB III
HASIL DAN PEMBAHASAN

Dalam bab ini dibahas penyelesaian masalah kuadrat terkecil menggunakan fungsi B-spline. Pertama, dikonstruksi fungsi B-spline yang akan diaplikasikan pada metode kuadrat terkecil. Kemudian, dibuktikan kriteria-kriteria yang memenuhi fungsi basis B-spline kubik. Selanjutnya, dipaparkan cara menyelesaikan masalah kuadrat terkecil dengan fungsi B-spline. Pada tahap terakhir, dilakukan beberapa simulasi numerik untuk memperlihatkan kinerja metode ini.

3.1 Fungsi B-Spline

Berikut ini akan dikonstruksi fungsi B-spline. Pertama, diberikan partisi-partisi seragam yang terbentuk dari sekumpulan simpul $t_1 < t_2 < \cdots < t_N$ pada sumbu x, dengan $N \geq 5$ dan $x \in \mathbb{R}$. Selanjutnya, didefinisikan fungsi basis B-spline kubik sebagai berikut (Izadian dkk., 2012).

$$Q_j(x) = \begin{cases} Q_{j,1}(x), & x \in [t_j, \quad t_{j+1}] \\ Q_{j,2}(x), & x \in [t_{j+1}, t_{j+2}] \\ Q_{j,3}(x), & x \in [t_{j+2}, t_{j+3}] \\ Q_{j,4}(x), & x \in [t_{j+3}, t_{j+4}] \\ 0, & x \in \mathbb{R} - [t_j, t_{j+4}] \end{cases} , \tag{3.1}$$

dengan

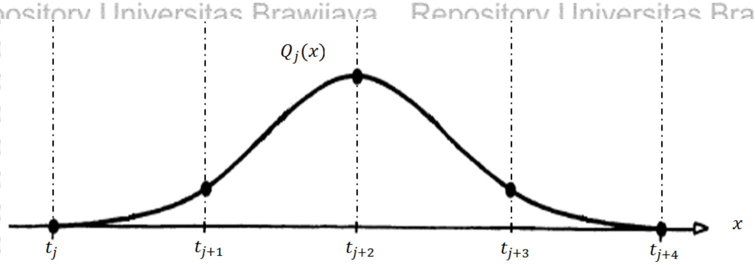
$$Q_{j,1}(x) = \frac{1}{4h^3}\left(x - t_j\right)^3,$$

$$Q_{j,2}(x) = \frac{1}{4h^3}\left(h^3 + 3h^2\left(x - t_{j+1}\right) + 3h\left(x - t_{j+1}\right)^2 - 3\left(x - t_{j+1}\right)^3\right),$$

$$Q_{j,3}(x) = \frac{1}{4h^3}\left(h^3 + 3h^2\left(t_{j+3} - x\right) + 3h(t_{j+3} - x)^2 - 3(t_{j+3} - x)^3\right),$$

$$Q_{j,4}(x) = \frac{1}{4h^3}\left(t_{j+4} - x\right)^3,$$

$j = 1, 2, \ldots, n$, $n = N - 4$, dan $h = t_{j+1} - t_j$. Banyak fungsi basis dinyatakan dengan n, fungsi basis ke j dinyatakan dengan $Q_j(x)$, banyak simpul dinyatakan dengan N, dan panjang partisi dinyatakan dengan h. Gambar 3.1 mengilustrasikan suatu fungsi basis B-spline kubik $Q_j(x)$.



Gambar 3.1 Fungsi basis B-spline kubik $Q_j(x)$.

Pada Gambar 3.1 diperlihatkan bahwa suatu fungsi basis B-spline kubik $Q_j(x)$ memuat paling sedikit lima buah simpul yaitu t_j, t_{j+1}, t_{j+2}, t_{j+3}, dan t_{j+4}. Nilai fungsi basis B-spline kubik $Q_j(x)$ pada interval $\mathbb{R} - [t_j, t_{j+4}]$ adalah nol.

Fungsi B-spline merupakan kombinasi linear dari fungsi-fungsi basisnya. Fungsi B-spline dengan fungsi basis persamaan (3.1) dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$f(x) = a_1 Q_1(x) + a_2 Q_2(x) + \cdots + a_n Q_n(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j Q_j(x), \quad (3.2)$$

dengan a_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, merupakan parameter-parameter yang tidak diketahui. Tujuan utama metode kuadrat terkecil dengan fungsi B-spline adalah menentukan nilai parameter-parameter ini agar terbentuk kurva B-spline yang paling mendekati data.

3.2 Kriteria Fungsi Basis B-Spline Kubik

Fungsi basis B-spline kubik memenuhi kriteria interpolan spline kubik, antara lain: kontinu, turunan pertama kontinu, turunan kedua kontinu, dan merupakan spline alami. Pada subbab ini akan dibuktikan bahwa fungsi basis B-spline (3.1) memenuhi kriteria-kriteria tersebut.

3.2.1 Kontinu

Fungsi basis B-spline $Q_j(x)$ kontinu pada interval $[t_j, t_{j+4}]$. Untuk membuktikannya, cukup dengan menunjukkan kekontinuan $Q_j(x)$ pada simpul t_{j+1}, t_{j+2}, dan t_{j+3}.

1) $Q_j(x)$ kontinu pada simpul t_{j+1}, hal ini berarti

$$
\begin{aligned}
Q_{j,2}(t_{j+1}) &= Q_{j,1}(t_{j+1}),\\
\frac{1}{4h^3}\left(h^3 + 3h^2(t_{j+1} - t_{j+1}) + 3h(t_{j+1} - t_{j+1})^2 - 3(t_{j+1} - t_{j+1})^3\right) &= \frac{1}{4h^3}(t_{j+1} - t_j)^3,\\
\frac{1}{4h^3}h^3 &= \frac{1}{4h^3}(t_{j+1} - t_j)^3,\\
\frac{1}{4h^3}h^3 &= \frac{1}{4h^3}h^3,\\
\frac{1}{4} &= \frac{1}{4}.
\end{aligned}
$$

Terbukti bahwa $Q_{j,2}(t_{j+1}) = Q_{j,1}(t_{j+1})$.

2) $Q_j(x)$ kontinu pada simpul t_{j+2}, hal ini berarti

$$
\begin{aligned}
Q_{j,3}(t_{j+2}) &= Q_{j,2}(t_{j+2}),\\
\frac{1}{4h^3}\left(h^3 + 3h^2(t_{j+3} - t_{j+2}) + 3h(t_{j+3} - t_{j+2})^2 - 3(t_{j+3} - t_{j+2})^3\right) &= \frac{1}{4h^3}\left(h^3 + 3h^2(t_{j+2} - t_{j+1}) + 3h(t_{j+2} - t_{j+1})^2 - 3(t_{j+2} - t_{j+1})^3\right),\\
\frac{1}{4h^3}(h^3 + 3h^3 + 3h^3 - 3h^3) &= \frac{1}{4h^3}(h^3 + 3h^3 + 3h^3 - 3h^3),\\
\frac{1}{4h^3}4h^3 &= \frac{1}{4h^3}4h^3,\\
1 &= 1.
\end{aligned}
$$

Terbukti bahwa $Q_{j,3}(t_{j+2}) = Q_{j,2}(t_{j+2})$.

3) $Q_j(x)$ kontinu pada simpul t_{j+3}, hal ini berarti

$$Q_{j,4}(t_{j+3}) = Q_{j,3}(t_{j+3}),$$

$$\frac{1}{4h^3}(t_{j+4}-t_{j+3})^3 = \frac{1}{4h^3}(h^3+3h^2(t_{j+3}-t_{j+3})+ 3h(t_{j+3}-t_{j+3})^2-3(t_{j+3}-t_{j+3})^3),$$

$$\frac{1}{4h^3}h^3 = \frac{1}{4h^3}h^3,$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Terbukti bahwa $Q_{j,4}(t_{j+3}) = Q_{j,3}(t_{j+3})$.

Jadi fungsi basis B-spline $Q_j(x)$ kontinu pada interval $\left[t_j, t_{j+4}\right]$.

3.2.2 Turunan Pertama Kontinu

Turunan pertama fungsi basis B-spline $Q_j(x)$ kontinu pada interval $\left[t_j, t_{j+4}\right]$. Untuk membuktikannya, cukup dengan menunjukkan kekontinuan $Q'_j(x)$ pada simpul t_{j+1}, t_{j+2}, dan t_{j+3}.

1) $Q'_j(x)$ kontinu pada simpul t_{j+1}, hal ini berarti

$$Q'_{j,2}(t_{j+1}) = Q'_{j,1}(t_{j+1}),$$

$$\frac{1}{4h^3}(3h^2+6h(t_{j+1}-t_{j+1})- 9(t_{j+1}-t_{j+1})^2) = \frac{1}{4h^3}3(t_{j+1}-t_j)^2,$$

$$\frac{1}{4h^3}3h^2 = \frac{1}{4h^3}3h^2,$$

$$\frac{3}{4h} = \frac{3}{4h}.$$

Terbukti bahwa $Q'_{j,2}(t_{j+1}) = Q'_{j,1}(t_{j+1})$.

2) $Q'_j(x)$ kontinu pada simpul t_{j+2}, hal ini berarti

$$Q'_{j,3}(t_{j+2}) = Q'_{j,2}(t_{j+2}),$$

$$\frac{1}{4h^3}(-3h^2-6h(t_{j+3}-t_{j+2})+ 9(t_{j+3}-t_{j+2})^2) = \frac{1}{4h^3}(3h^2+6h(t_{j+2}-t_{j+1}) -9(t_{j+2}-t_{j+1})^2),$$

$$\frac{1}{4h^3}(-3h^2-6h^2+9h^2) = \frac{1}{4h^3}(3h^2+6h^2-9h^2),$$

$$0 = 0.$$

Terbukti bahwa $Q'_{j,3}(t_{j+2}) = Q'_{j,2}(t_{j+2})$.

3) $Q'_j(x)$ kontinu pada simpul t_{j+3}, hal ini berarti

$$Q'_{j,4}(t_{j+3}) = Q'_{j,3}(t_{j+3}),$$

$$\frac{1}{4h^3}(-3(t_{j+4}-t_{j+3})^2) = \frac{1}{4h^3}(-3h^2 - 6h(t_{j+3}-t_{j+3}) + 9(t_{j+3}-t_{j+3})^2),$$

$$\frac{1}{4h^3}(-3h^2) = \frac{1}{4h^3}(-3h^2),$$

$$-\frac{3}{4h} = -\frac{3}{4h}.$$

Terbukti bahwa $Q'_{j,4}(t_{j+3}) = Q'_{j,3}(t_{j+3})$.

Jadi turunan pertama fungsi basis B-spline $Q_j(x)$ kontinu pada interval $[t_j, t_{j+4}]$.

3.2.3 Turunan Kedua Kontinu

Turunan kedua fungsi basis B-spline $Q_j(x)$ kontinu pada interval $[t_j, t_{j+4}]$. Untuk membuktikannya, cukup dengan menunjukkan kekontinuan $Q''_j(x)$ pada simpul t_{j+1}, t_{j+2}, dan t_{j+3}.

1) $Q''_j(x)$ kontinu pada simpul t_{j+1}, hal ini berarti

$$Q''_{j,2}(t_{j+1}) = Q''_{j,1}(t_{j+1}),$$

$$\frac{1}{4h^3}(6h - 18(t_{j+1}-t_{j+1})) = \frac{1}{4h^3}(6(t_{j+1}-t_j)),$$

$$\frac{1}{4h^3}6h = \frac{1}{4h^3}6h,$$

$$\frac{3}{2h^2} = \frac{3}{2h^2}.$$

Terbukti bahwa $Q''_{j,2}(t_{j+1}) = Q''_{j,1}(t_{j+1})$.

2) $Q''_j(x)$ kontinu pada simpul t_{j+2}, hal ini berarti

$$Q''_{j,3}(t_{j+2}) = Q''_{j,2}(t_{j+2}),$$

$$\frac{1}{4h^3}(6h - 18(t_{j+3}-t_{j+2})) = \frac{1}{4h^3}(6h - 18(t_{j+2}-t_{j+1})),$$

$$\frac{1}{4h^3}(6h - 18h) = \frac{1}{4h^3}(6h - 18h),$$

$\frac{1}{4h^3}(-12h) \qquad = \frac{1}{4h^3}(-12h),$

$-\frac{3}{h^2} \qquad = -\frac{3}{h^2}.$

Terbukti bahwa $Q''_{j,3}(t_{j+2}) = Q''_{j,2}(t_{j+2})$.

3) $Q''_j(x)$ kontinu pada simpul t_{j+3}, hal ini berarti

$Q''_{j,4}(t_{j+3}) \qquad = Q''_{j,3}(t_{j+3}),$

$\frac{1}{4h^3}(6(t_{j+4} - t_{j+3})) = \frac{1}{4h^3}(6h - 18(t_{j+3} - t_{j+3})),$

$\frac{1}{4h^3}6h \qquad = \frac{1}{4h^3}6h,$

$\frac{3}{2h^2} \qquad = \frac{3}{2h^2}.$

Terbukti bahwa $Q''_{j,4}(t_{j+3}) = Q''_{j,3}(t_{j+3})$.

Jadi turunan kedua fungsi basis B-spline $Q_j(x)$ kontinu pada interval $[t_j, t_{j+4}]$.

3.2.4 Spline Alami

Suatu fungsi basis B-spline kubik $Q_j(x)$ merupakan spline alami karena memenuhi kondisi batas alami pada ujung-ujung simpulnya, yaitu $Q''_j(t_j) = Q''_j(t_{j+4}) = 0$. Berikut akan ditunjukkan bahwa fungsi basis B-spline kubik $Q_j(x)$ memenuhi kondisi batas alami.

1) Untuk $x = t_j$,

$Q''_j(t_j) = Q''_{j,1}(t_j) = \frac{1}{4h^3}(6(t_j - t_j)) = 0.$

2) Untuk $x = t_{j+4}$,

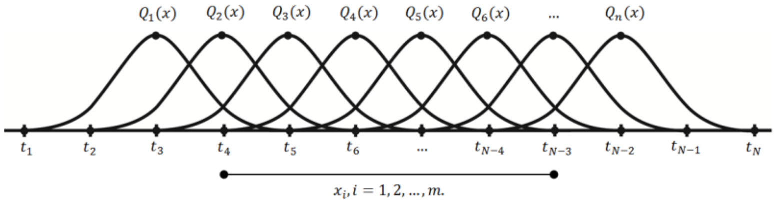
$Q''_j(t_{j+4}) = Q''_{j,4}(t_{j+4}) = \frac{1}{4h^3}(6(t_{j+4} - t_{j+4})) = 0.$

Terbukti bahwa $Q''_j(t_j) = Q''_j(t_{j+4}) = 0$.

3.3 Penyelesaian Masalah Kuadrat Terkecil dengan Fungsi B-Spline

Pada pembahasan sebelumnya telah dijelaskan tentang fungsi B-spline. Pada tahap ini fungsi B-spline diaplikasikan dalam metode kuadrat terkecil.

Diberikan sekumpulan data sebanyak m, (x_i, y_i) dengan $i = 1, 2, \dots, m$, dan $x_1 < x_2 < \cdots < x_m$. Data tersebut akan didekati dengan fungsi B-spline (3.2). Gambar 3.2 mengilustrasikan letak titik-titik x_i, $i = 1, 2, \dots, m$, simpul-simpul t_j, $j = 1, 2, \dots, N$, dan fungsi-fungsi basis B-spline $Q_j(x)$, $j = 1, 2, \dots, n$.



Gambar 3.2 Letak fungsi-fungsi basis yang diimplementasikan pada data.

Perhatikan bahwa letak titik-titik x_i, $i = 1, 2, \dots, m$, berada pada interval $[t_4, t_{N-3}]$. Hal ini dilakukan agar setiap titik x_i, $i = 1, 2, \dots, m$, berada di setiap bagian fungsi basis B-spline (3.1).

Untuk menyelesaikan masalah kuadrat terkecil dengan fungsi B-spline, pertama, dibentuk jumlah kuadrat galat sebagai berikut.

$$\begin{aligned} F(a_1, a_2, \dots, a_n) &= \sum_{i=1}^{m} (y_i - f(x_i))^2 \\ &= \sum_{i=1}^{m} \left(y_i - \sum_{j=1}^{n} a_j Q_j(x_i)\right)^2, \end{aligned} \tag{3.3}$$

dengan a_j, $j = 1, 2, \dots, n$, merupakan parameter-parameter yang tidak diketahui. Selanjutnya akan ditentukan nilai setiap parameter tersebut dengan cara meminimumkan persamaan (3.3), yaitu dengan membuat gradien F sama dengan nol, secara matematis ditulis sebagai

$$\nabla F(a_1, a_2, \dots, a_n) = \mathbf{0}. \tag{3.4}$$

Persamaan (3.3) dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned} F(a_1, a_2, \dots, a_n) &= \sum_{i=1}^{m} (y_i - f(x_i))^2 \\ &= (y_1 - f(x_1))^2 + (y_2 - f(x_2))^2 \\ &\quad + \cdots + (y_m - f(x_m))^2 \\ &= (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{f})^t (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{f}), \end{aligned} \tag{3.5}$$

dengan $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$ dan $\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_m) \end{bmatrix}$. Dari persamaan (3.4) dan (3.5) diperoleh

$$\begin{aligned} \nabla F(a_1, a_2, \dots, a_n) = \nabla[(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{f})^t(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{f})] &= \boldsymbol{0} \\ \nabla\left[\textstyle\sum_{i=1}^{m}(y_i - f(x_i))^2\right] &= \boldsymbol{0} \\ \nabla\left[\textstyle\sum_{i=1}^{m}\left(y_i - \sum_{j=1}^{n} a_j Q_j(x_i)\right)^2\right] &= \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} -2Q_1(x_1)\left(y_1 - \sum_{j=1}^{n} a_j Q_j(x_1)\right) - \cdots - 2Q_1(x_m)\left(y_m - \sum_{j=1}^{n} a_j Q_j(x_m)\right) \\ -2Q_2(x_1)\left(y_1 - \sum_{j=1}^{n} a_j Q_j(x_1)\right) - \cdots - 2Q_2(x_m)\left(y_m - \sum_{j=1}^{n} a_j Q_j(x_m)\right) \\ \vdots \\ -2Q_n(x_1)\left(y_1 - \sum_{j=1}^{n} a_j Q_j(x_1)\right) - \cdots - 2Q_n(x_m)\left(y_m - \sum_{j=1}^{n} a_j Q_j(x_m)\right) \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$$

$$-2\begin{bmatrix} Q_1(x_1)\left(y_1 - \sum_{j=1}^{n} a_j Q_j(x_1)\right) + \cdots + Q_1(x_m)\left(y_m - \sum_{j=1}^{n} a_j Q_j(x_m)\right) \\ Q_2(x_1)\left(y_1 - \sum_{j=1}^{n} a_j Q_j(x_1)\right) + \cdots + Q_2(x_m)\left(y_m - \sum_{j=1}^{n} a_j Q_j(x_m)\right) \\ \vdots \\ Q_n(x_1)\left(y_1 - \sum_{j=1}^{n} a_j Q_j(x_1)\right) + \cdots + Q_n(x_m)\left(y_m - \sum_{j=1}^{n} a_j Q_j(x_m)\right) \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$$

$$\begin{bmatrix} Q_1(x_1)\left(y_1 - \sum_{j=1}^{n} a_j Q_j(x_1)\right) + \cdots + Q_1(x_m)\left(y_m - \sum_{j=1}^{n} a_j Q_j(x_m)\right) \\ Q_2(x_1)\left(y_1 - \sum_{j=1}^{n} a_j Q_j(x_1)\right) + \cdots + Q_2(x_m)\left(y_m - \sum_{j=1}^{n} a_j Q_j(x_m)\right) \\ \vdots \\ Q_n(x_1)\left(y_1 - \sum_{j=1}^{n} a_j Q_j(x_1)\right) + \cdots + Q_n(x_m)\left(y_m - \sum_{j=1}^{n} a_j Q_j(x_m)\right) \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$$

$$\begin{bmatrix} Q_1(x_1) & \cdots & Q_1(x_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_n(x_1) & \cdots & Q_n(x_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 - \sum_{j=1}^{n} a_j Q_j(x_1) \\ y_2 - \sum_{j=1}^{n} a_j Q_j(x_2) \\ \vdots \\ y_m - \sum_{j=1}^{n} a_j Q_j(x_m) \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$$

$$\begin{bmatrix} Q_1(x_1) & \cdots & Q_1(x_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_n(x_1) & \cdots & Q_n(x_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 - f(x_1) \\ y_2 - f(x_2) \\ \vdots \\ y_m - f(x_m) \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$$

atau

$$D\boldsymbol{f}^t \cdot (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{f}) = \boldsymbol{0}, \tag{3.6}$$

dengan $Df^t = \begin{bmatrix} Q_1(x_1) & \cdots & Q_1(x_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_n(x_1) & \cdots & Q_n(x_m) \end{bmatrix}$. Selanjutnya, persamaan (3.6) menjadi

$$\begin{aligned} D\boldsymbol{f}^t \cdot (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{f}) &= \boldsymbol{0} \\ D\boldsymbol{f}^t \cdot \boldsymbol{y} - D\boldsymbol{f}^t \cdot \boldsymbol{f} &= \boldsymbol{0} \\ D\boldsymbol{f}^t \cdot \boldsymbol{f} &= D\boldsymbol{f}^t \cdot \boldsymbol{y} \end{aligned}$$

atau

$$\begin{bmatrix} Q_1(x_1) & \cdots & Q_1(x_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_n(x_1) & \cdots & Q_n(x_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1(x_1) & \cdots & Q_1(x_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_n(x_1) & \cdots & Q_n(x_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Q_1(x_1) & \cdots & Q_1(x_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_n(x_1) & \cdots & Q_n(x_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1(x_1)y_1 + \cdots + Q_1(x_m)y_m \\ Q_2(x_1)y_1 + \cdots + Q_2(x_m)y_m \\ \vdots \\ Q_n(x_1)y_1 + \cdots + Q_n(x_m)y_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Q_1(x_1) & \cdots & Q_1(x_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_n(x_1) & \cdots & Q_n(x_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m Q_1(x_i)y_i \\ \sum_{i=1}^m Q_2(x_i)y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^m Q_n(x_i)y_i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Q_1(x_1) & \cdots & Q_1(x_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_n(x_1) & \cdots & Q_n(x_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n a_j Q_j(x_1) \\ \sum_{j=1}^n a_j Q_j(x_2) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_j Q_j(x_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m Q_1(x_i)y_i \\ \sum_{i=1}^m Q_2(x_i)y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^m Q_n(x_i)y_i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Q_1(x_1) & \cdots & Q_1(x_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_n(x_1) & \cdots & Q_n(x_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1Q_1(x_1) + a_2Q_2(x_1) + \cdots + a_nQ_n(x_1) \\ a_1Q_1(x_2) + a_2Q_2(x_2) + \cdots + a_nQ_n(x_2) \\ \vdots \\ a_1Q_1(x_m) + a_2Q_2(x_m) + \cdots + a_nQ_n(x_m) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m Q_1(x_i)y_i \\ \sum_{i=1}^m Q_2(x_i)y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^m Q_n(x_i)y_i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Q_1(x_1) & \dots & Q_1(x_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_n(x_1) & \dots & Q_n(x_m) \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} Q_1(x_1) & \dots & Q_n(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_1(x_m) & \dots & Q_n(x_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{m} Q_1(x_i) y_i \\ \sum_{i=1}^{m} Q_2(x_i) y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{m} Q_n(x_i) y_i \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{bmatrix} Q_1(x_1) & \dots & Q_1(x_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_n(x_1) & \dots & Q_n(x_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1(x_1) & \dots & Q_n(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_1(x_m) & \dots & Q_n(x_m) \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{m} Q_1(x_i) y_i \\ \sum_{i=1}^{m} Q_2(x_i) y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{m} Q_n(x_i) y_i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{m} (Q_1(x_i))^2 & \sum_{i=1}^{m} Q_1(x_i) Q_2(x_i) \dots & \sum_{i=1}^{m} Q_1(x_i) Q_n(x_i) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{m} Q_n(x_i) Q_1(x_i) & \sum_{i=1}^{m} Q_n(x_i) Q_2(x_i) \dots & \sum_{i=1}^{m} (Q_n(x_i))^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{m} Q_1(x_i) y_i \\ \sum_{i=1}^{m} Q_2(x_i) y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{m} Q_n(x_i) y_i \end{bmatrix}. \tag{3.7}$$

Persamaan (3.7) dapat dinyatakan menjadi $A \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, dengan

$$A = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{m} (Q_1(x_i))^2 & \sum_{i=1}^{m} Q_1(x_i) Q_2(x_i) \dots & \sum_{i=1}^{m} Q_1(x_i) Q_n(x_i) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{m} Q_n(x_i) Q_1(x_i) & \sum_{i=1}^{m} Q_n(x_i) Q_2(x_i) \dots & \sum_{i=1}^{m} (Q_n(x_i))^2 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \text{ dan } \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{m} Q_1(x_i) y_i \\ \sum_{i=1}^{m} Q_2(x_i) y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{m} Q_n(x_i) y_i \end{bmatrix}.$$

Perhatikan kembali bahwa bentuk $A \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ merupakan sistem persamaan linear (SPL), dengan A merupakan matriks koefisien berukuran $n \times n$. Sistem ini mempunyai solusi bila dan hanya bila matriks A merupakan matriks non singular. Penyelesaian sistem ini menghasilkan nilai vektor $\boldsymbol{x}$ yang merupakan nilai parameter-parameter fungsi B-spline (3.2).

3.4 Simulasi Numerik

Simulasi numerik dilakukan untuk enam kasus. Pada kasus 1, 2, dan 3 diberikan sembarang data numerik. Pada kasus 4, 5, dan 6 diberikan data numerik yang berasal dari suatu fungsi tertentu, yaitu $g(x) = e^{2x}(x^3 + 2x^2 - 11)$. Data untuk kasus 1, 2, dan 3 masing-masing sebanyak sepuluh titik ($m = 10$), dua puluh titik ($m = 20$), dan tiga puluh titik ($m = 30$). Demikian pula data untuk kasus 4, 5, dan 6 masing-masing sebanyak sepuluh titik ($m = 10$), dua puluh titik ($m = 20$), dan tiga puluh titik ($m = 30$). Pada setiap kasus diuji beberapa panjang partisi (h), yaitu $h = 0.5$, $h = 0.2$, dan $h = 0.1$. Simulasi-simulasi ini dilakukan untuk mengetahui pengaruh m dan h terhadap kinerja metode ini. Indikator kinerja metode ini didasarkan pada nilai jumlah kuadrat galat (F) dan perilaku kurva B-spline. Semakin kecil F dan kurva B-spline tidak berfluktuasi maka semakin baik kinerja metode ini. *Listing* dan *output* program untuk simulasi-simulasi ini disajikan pada Lampiran 1 dan 2.

3.4.1 Kasus 1

Pada kasus ini diberikan sebarang data numerik sebanyak sepuluh titik ($m = 10$), seperti ditunjukkan pada Tabel 3.1.

Tabel 3.1 Data numerik untuk kasus 1.

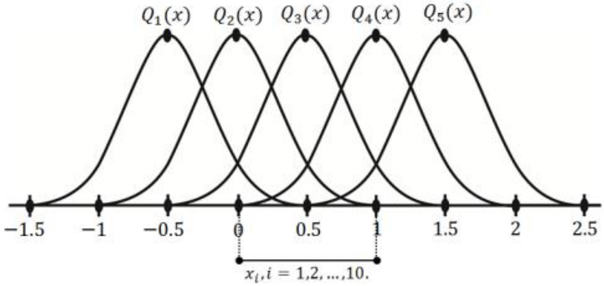
x	0	0.15	0.33	0.42	0.51	0.63	0.72	0.84	0.92	1
y	0.2	0.34	0.42	0.55	0.56	0.53	0.45	0.32	0.37	0.4

Percobaan pertama menggunakan $h = 0.5$ sehingga diperoleh simpul-simpul yang diberikan pada Tabel 3.2.

Tabel 3.2 Simpul-simpul untuk $h = 0.5$.

t	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5

Gambar 3.3 mengilustrasikan letak titik-titik x_i, $i = 1, 2, \ldots, 10$, simpul-simpul t_j, $j = 1, 2, \ldots, 9$, dan fungsi-fungsi basis B-spline $Q_j(x)$, $j = 1, 2, \ldots, 5$, untuk kasus ini.



Gambar 3.3 Letak fungsi-fungsi basis untuk kasus 1 ($h = 0.5$).

Dengan menggunakan $h = 0.5$, berarti terdapat sembilan simpul ($N = 9$) dan lima fungsi basis ($n = 5$) sehingga fungsi B-spline untuk kasus ini dinyatakan sebagai berikut.

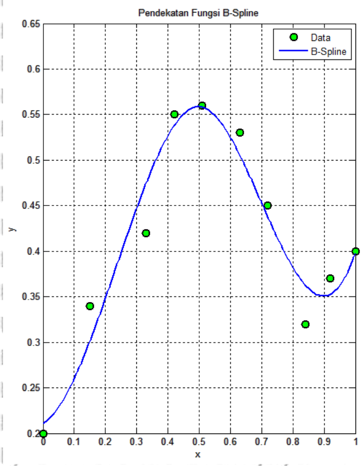
$$f(x) = a_1 Q_1(x) + a_2 Q_2(x) + \cdots + a_5 Q_5(x) = \sum_{j=1}^{5} a_j Q_j. \quad (3.8)$$

Output yang diharapkan untuk kasus ini adalah nilai optimal parameter a_j, $j = 1, 2, \ldots, 5$. SPL untuk kasus ini dinyatakan sebagai $A \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, dengan A merupakan matriks koefisien berukuran 5×5. Nilai matriks A dan vektor $\boldsymbol{b}$ dipaparkan pada Lampiran 2. Nilai determinan matriks A yang diperoleh adalah $\det(A) = 0.0016$, artinya matriks A non singular dan SPL $A \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mempunyai solusi. Dengan menyelesaikan SPL tersebut diperoleh nilai-nilai optimal parameter a_j, $j = 1, 2, \ldots, 5$, yang ditunjukkan pada Tabel 3.3.

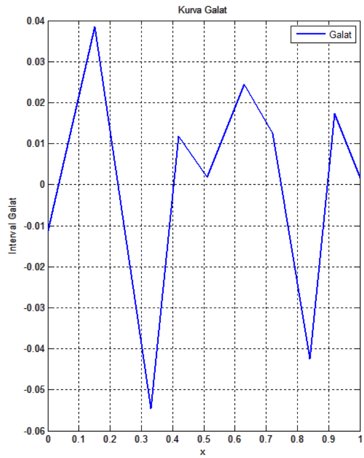
Tabel 3.3 Nilai-nilai parameter a_j, $j = 1, 2, \ldots, 5$, untuk kasus 1 ($h = 0.5$).

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
0.4526	−0.0486	0.5862	−0.0614	0.2494

Jumlah kuadrat galat yang diperoleh adalah $F = 0.0871$. Gambar 3.4 mengilustrasikan data numerik yang diberikan, kurva solusi B-spline yang diperoleh, dan kurva galat.



(a)



(b)

Gambar 3.4 Hasil simulasi numerik kasus 1 ($h = 0.5$); (a) Data numerik dan kurva solusi B-spline $f(x)$ yang diperoleh; (b) Kurva galat $f(x_i)$ terhadap y_i, dengan $i = 1, 2, \ldots, 10$.

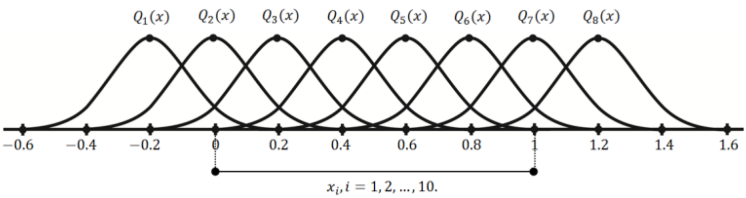
Percobaan kedua menggunakan $h = 0.2$ sehingga diperoleh simpul-simpul yang diberikan pada Tabel 3.4.

Tabel 3.4 Simpul-simpul untuk $h = 0.2$.

t	-0.6	-0.4	-0.2	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1

t	1.2	1.4	1.6

Gambar 3.5 mengilustrasikan letak titik-titik x_i, $i = 1, 2, \ldots, 10$, simpul-simpul t_j, $j = 1, 2, \ldots, 12$, dan fungsi-fungsi basis B-spline $Q_j(x)$, $j = 1, 2, \ldots, 8$, untuk kasus ini.



Gambar 3.5 Letak fungsi-fungsi basis untuk kasus 1 ($h = 0.2$).

Dengan menggunakan $h = 0.2$, berarti terdapat dua belas simpul ($N = 12$) dan delapan fungsi basis ($n = 8$) sehingga fungsi B-spline untuk kasus ini dinyatakan sebagai berikut.

$$f(x) = a_1 Q_1(x) + a_2 Q_2(x) + \cdots + a_8 Q_8(x) = \sum_{j=1}^{8} a_j Q_j. \quad (3.9)$$

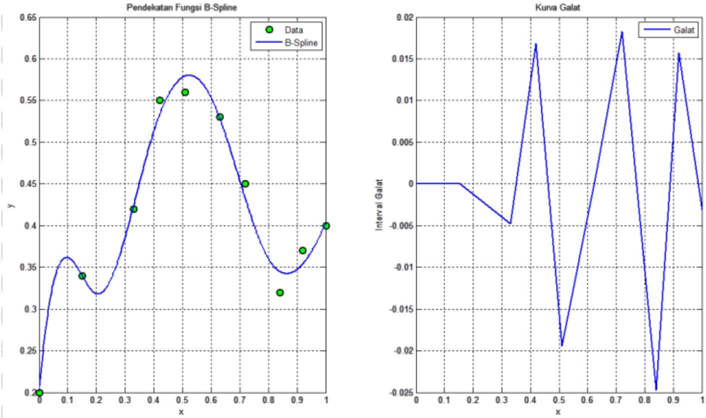
Output yang diharapkan untuk kasus ini adalah nilai optimal parameter a_j, $j = 1, 2, \ldots, 8$. SPL untuk kasus ini dinyatakan sebagai $A \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, dengan A merupakan matriks koefisien berukuran 8×8. Nilai matriks A dan vektor $\boldsymbol{b}$ dipaparkan pada Lampiran 2. Nilai determinan matriks A adalah $\det(A) = 4.9972 \times 10^{-5}$, artinya matriks A non singular sehingga SPL $A \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mempunyai solusi. Dengan menyelesaikan SPL tersebut diperoleh nilai-nilai optimal parameter a_j, $j = 1, 2, \ldots, 8$, yang ditunjukkan pada Tabel 3.5.

Tabel 3.5 Nilai-nilai parameter a_j, $j = 1, 2, \ldots, 8$, untuk kasus 1 ($h = 0.2$).

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
-0.9459	0.4061	0.1215	0.3804	0.4098	0.1944

a_7	a_8
0.2538	0.4032

Jumlah kuadrat galat yang diperoleh adalah $F = 0.0435$, lebih kecil daripada percobaan pertama. Gambar 3.6 mengilustrasikan data numerik yang diberikan, kurva solusi B-spline yang diperoleh, dan kurva galat.



(a) (b)

Gambar 3.6 Hasil simulasi numerik kasus 1 ($h = 0.2$); (a) Data numerik dan kurva solusi B-spline $f(x)$ yang diperoleh; (b) Kurva galat $f(x_i)$ terhadap y_i, dengan $i = 1, 2, \ldots, 10$.

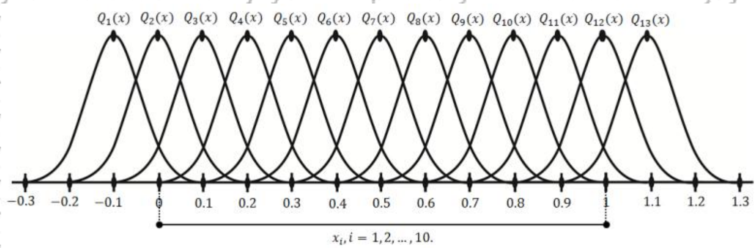
Percobaan ketiga menggunakan $h = 0.1$ sehingga diperoleh simpul-simpul yang diberikan pada Tabel 3.6.

Tabel 3.6 Simpul-simpul untuk $h = 0.1$.

t	-0.3	-0.2	-0.1	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5

t	0.6	0.7	0.8	0.9	1	1.1	1.2	1.3

Gambar 3.7 mengilustrasikan letak titik-titik x_i, $i = 1, 2, \ldots, 10$, simpul-simpul t_j, $j = 1, 2, \ldots, 17$, dan fungsi-fungsi basis B-spline $Q_j(x)$, $j = 1, 2, \ldots, 13$, untuk kasus ini.



Gambar 3.7 Letak fungsi-fungsi basis untuk kasus 1 ($h = 0.1$).

Dengan menggunakan $h = 0.1$, berarti terdapat tujuh belas simpul ($N = 17$) dan tiga belas fungsi basis ($n = 13$) sehingga fungsi B-spline untuk kasus ini dinyatakan sebagai berikut.

$$f(x) = a_1 Q_1(x) + a_2 Q_2(x) + \cdots + a_{13} Q_{13}(x) = \sum_{j=1}^{13} a_j Q_j. \quad (3.10)$$

Output yang diharapkan untuk kasus ini adalah nilai optimal parameter-parameter persamaan (3.10). SPL untuk kasus ini dinyatakan sebagai $A \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, dengan A merupakan matriks koefisien berukuran 13×13. Nilai matriks A dan vektor $\boldsymbol{b}$ dipaparkan pada Lampiran 2. Nilai determinan matriks A adalah $\det(A) = -1.5959 \times 10^{-53}$, artinya matriks A non singular sehinga SPL $A \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mempunyai solusi. Dengan menyelesaikan SPL tersebut diperoleh nilai-nilai optimal parameter a_j, $j = 1, 2, \dots, 13$, yang ditunjukkan pada Tabel 3.7.

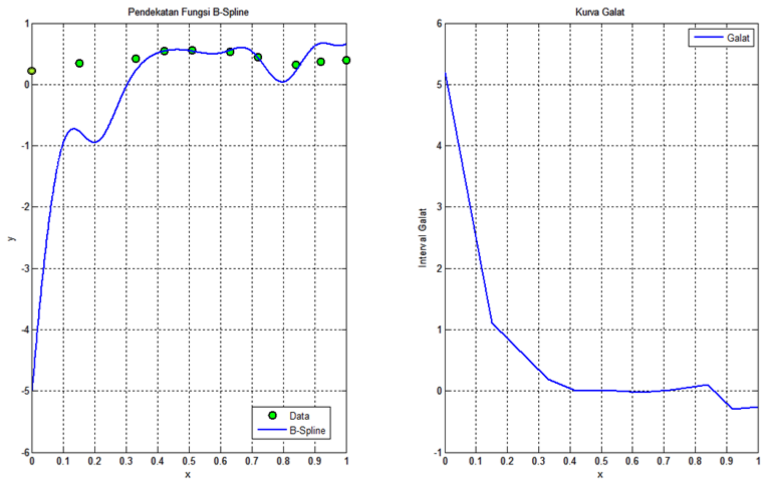
Tabel 3.7 Nilai-nilai parameter a_j, $j = 1, 2, \dots, 13$, untuk kasus 1 ($h = 0.1$).

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
−8.1758	−2.9697	0.0493	−0.9919	0.1270	0.3828

a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}
0.3828	0.2813	0.5313	−0.25	0.625	0.25

a_{13}
1

Jumlah kuadrat galat yang diperoleh adalah $F = 5.3367$, lebih besar daripada percobaan pertama dan kedua. Gambar 3.8 mengilustrasikan data numerik yang diberikan, kurva solusi B-spline yang diperoleh, dan kurva galat.



(a) (b)

Gambar 3.8 Hasil simulasi numerik kasus 1 ($h = 0.1$); (a) Data numerik dan kurva solusi B-spline $f(x)$ yang diperoleh; (b) Kurva galat $f(x_i)$ terhadap y_i, dengan $i = 1, 2, \ldots, 10$.

Pada percobaan pertama dan kedua diketahui bahwa dengan h yang diperkecil diperoleh F yang semakin kecil. Namun, pada percobaan ketiga diketahui bahwa dengan h yang lebih kecil dari percobaan sebelumnya diperoleh F yang lebih besar. Kurva B-spline berfluktuasi pada percobaan kedua dan ketiga.

3.4.2 Kasus 2

Pada kasus ini diberikan sebarang data numerik sebanyak dua puluh titik ($m = 20$), seperti ditunjukkan pada Tabel 3.8.

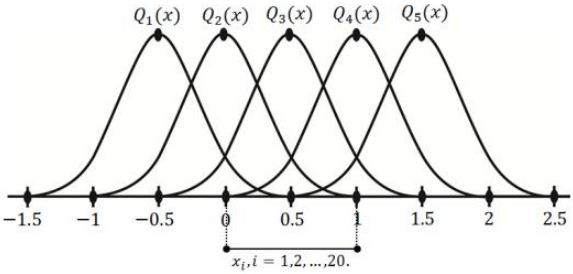
Tabel 3.8 Data numerik untuk kasus 2.

x	0	0.05	0.1	0.17	0.2	0.22	0.3	0.35
y	0	0.055	0.089	0.135	0.185	0.225	0.27	0.3

x	0.4	0.48	0.5	0.54	0.6	0.69	0.7	0.71
y	0.33	0.35	0.362	0.355	0.365	0.36	0.34	0.321

x	0.8	0.84	0.9	1
y	0.292	0.228	0.185	0.12

Percobaan pertama menggunakan $h = 0.5$ sehingga diperoleh simpul-simpul yang sama seperti yang diberikan pada Tabel 3.2. Gambar 3.9 mengilustrasikan letak titik-titik x_i, $i = 1, 2, \dots, 20$, simpul-simpul t_j, $j = 1, 2, \dots, 9$, dan fungsi-fungsi basis B-spline $Q_j(x)$, $j = 1, 2, \dots, 5$, untuk kasus ini.



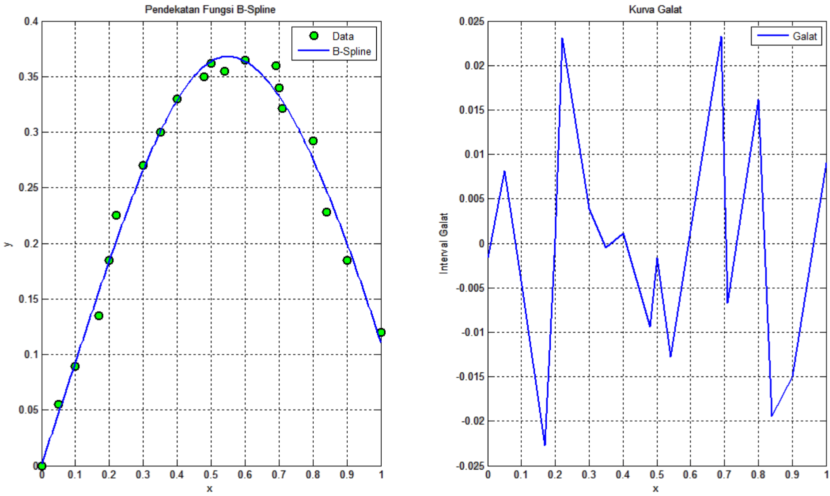
Gambar 3.9 Letak fungsi-fungsi basis untuk kasus 2 ($h = 0.5$).

SPL, fungsi B-spline, dan *output* yang diharapkan untuk percobaan ini analog dengan kasus 1 percobaan pertama. Nilai determinan matriks A adalah $\det(A) = 0.0280$. Nilai-nilai optimal parameter a_j, $j = 1, 2, \dots, 5$, ditunjukkan pada Tabel 3.9.

Tabel 3.9 Nilai-nilai parameter a_j, $j = 1, 2, \dots, 5$, untuk kasus 2 ($h = 0.5$).

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
-0.2455	-0.0235	0.3460	0.0940	-0.2784

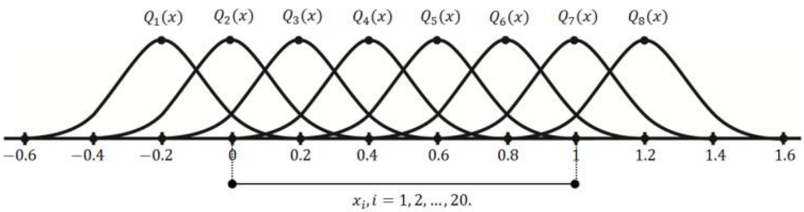
Jumlah kuadrat galat yang diperoleh adalah $F = 0.0548$. Gambar 3.10 mengilustrasikan data numerik yang diberikan, kurva solusi B-spline yang diperoleh, dan kurva galat.



(a) (b)

Gambar 3.10 Hasil simulasi numerik kasus 2 ($h = 0.5$); (a) Data numerik dan kurva solusi B-spline $f(x)$ yang diperoleh; (b) Kurva galat $f(x_i)$ terhadap y_i, dengan $i = 1, 2, \ldots, 20$.

Percobaan kedua menggunakan $h = 0.2$ sehingga diperoleh simpul-simpul yang sama seperti yang diberikan pada Tabel 3.4. Gambar 3.11 mengilustrasikan letak titik-titik x_i, $i = 1, 2, \ldots, 20$, simpul-simpul t_j, $j = 1, 2, \ldots, 12$, dan fungsi-fungsi basis B-spline $Q_j(x)$, $j = 1, 2, \ldots, 8$, untuk kasus ini.



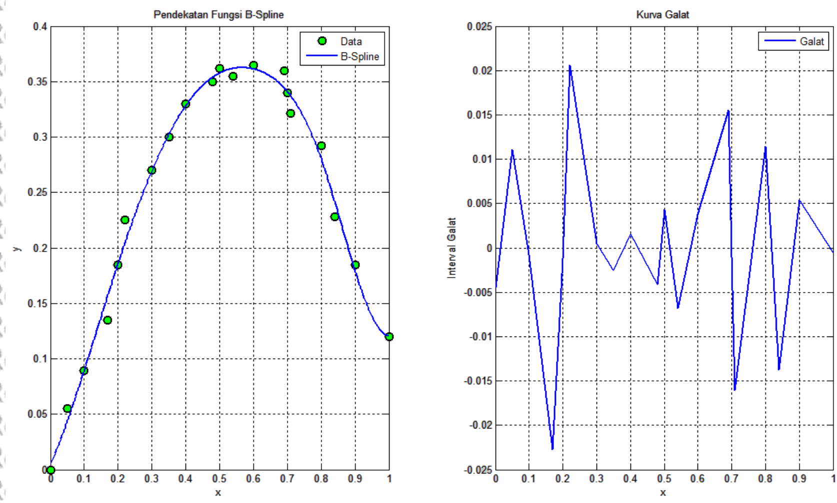
Gambar 3.11 Letak fungsi-fungsi basis untuk kasus 2 ($h = 0.2$).

SPL, fungsi B-spline, dan *output* yang diharapkan untuk percobaan ini analog dengan kasus 1 percobaan kedua. Nilai determinan matriks A adalah $\det(A) = 0.0216$. Nilai-nilai optimal parameter a_j, $j = 1, 2, \ldots, 8$, yang diperoleh ditunjukkan pada Tabel 3.10.

Tabel 3.10 Nilai-nilai parameter a_j, $j = 1, 2, \ldots, 8$, untuk kasus 2 ($h = 0.2$).

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
-0.0561	-0.0144	0.1315	0.2333	0.2494	0.2142	0.0160	0.2042

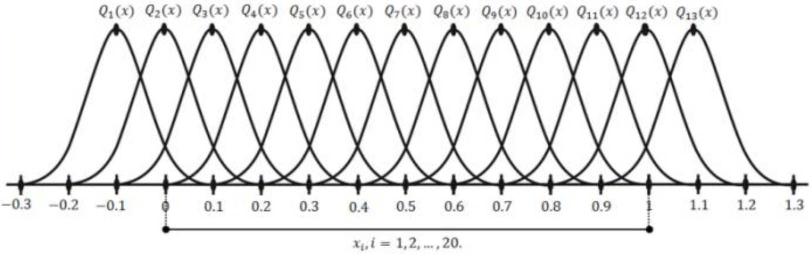
Jumlah kuadrat galat yang diperoleh adalah $F = 0.0452$, lebih kecil dari percobaan pertama. Gambar 3.12 mengilustrasikan data numerik yang diberikan, kurva solusi B-spline yang diperoleh, dan kurva galat.



(a) (b)

Gambar 3.12 Hasil simulasi numerik kasus 2 ($h = 0.2$); (a) Data numerik dan kurva solusi B-spline $f(x)$ yang diperoleh; (b) Kurva galat $f(x_i)$ terhadap y_i, dengan $i = 1, 2, \ldots, 20$.

Percobaan ketiga menggunakan $h = 0.1$ sehingga diperoleh simpul-simpul yang sama seperti yang diberikan pada Tabel 3.6. Gambar 3.13 mengilustrasikan letak titik-titik x_i, $i = 1, 2, \ldots, 20$, simpul-simpul t_j, $j = 1, 2, \ldots, 17$, dan fungsi-fungsi basis B-spline $Q_j(x)$, $j = 1, 2, \ldots, 13$, untuk kasus ini.



Gambar 3.13 Letak fungsi-fungsi basis untuk kasus 2 ($h = 0.1$).

SPL, fungsi B-spline, dan *output* yang diharapkan untuk percobaan ini analog dengan kasus 1 percobaan ketiga. Nilai determinan matriks A adalah $\det(A) = 1.0134 \times 10^{-4}$. Nilai-nilai optimal parameter a_j, $j = 1, 2, \ldots, 13$, ditunjukkan pada Tabel 3.11.

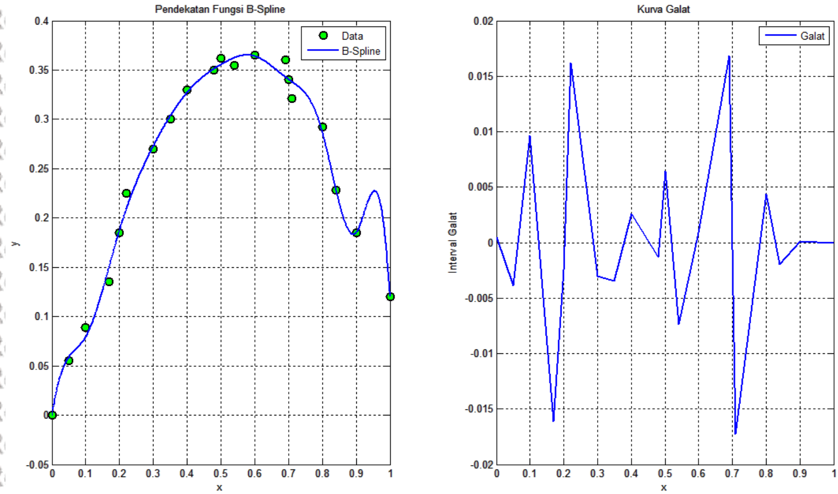
Tabel 3.11 Nilai-nilai parameter a_j, $j = 1, 2, \ldots, 13$, untuk kasus 2 ($h = 0.1$).

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
-0.2533	0.0548	0.0324	0.1333	0.1842	0.2219

a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}
0.2379	0.2485	0.2246	0.2158	0.0629	0.2721

a_{13}
-0.6713

Jumlah kuadrat galat yang diperoleh adalah $F = 0.0369$, lebih kecil daripada percobaan pertama dan kedua. Gambar 3.14 mengilustrasikan data numerik yang diberikan, kurva solusi B-spline yang diperoleh, dan kurva galat.



(a) (b)

Gambar 3.14 Hasil simulasi numerik kasus 2 ($h = 0.1$); (a) Data numerik dan kurva solusi B-spline $f(x)$ yang diperoleh; (b) Kurva galat $f(x_i)$ terhadap y_i, dengan $i = 1, 2, \dots, 20$.

Berdasarkan percobaan pertama, kedua, dan ketiga diketahui bahwa dengan h yang diperkecil diperoleh F yang semakin kecil. Kurva B-spline pada percobaan petama dan kedua tidak berfluktuasi, sedangkan kurva B-spline pada percobaan ketiga berfluktuasi.

3.4.3 Kasus 3

Pada kasus ini diberikan sebarang data numerik sebanyak tiga puluh titik ($m = 30$), seperti ditunjukkan pada Tabel 3.12.

Tabel 3.12 Data numerik untuk kasus 3.

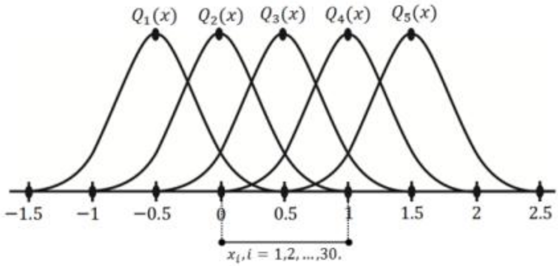
x	0.02	0.05	0.07	0.1	0.15	0.17	0.2	0.22
y	0	0.055	0.123	0.089	0.1	0.135	0.185	0.225

x	0.25	0.3	0.32	0.35	0.37	0.4	0.44	0.48
y	0.27	0.3	0.344	0.33	0.35	0.362	0.355	0.365

x	0.5	0.54	0.6	0.65	0.69	0.7	0.71	0.74
y	0.36	0.34	0.321	0.338	0.346	0.362	0.3	0.292

x	0.78	0.8	0.84	0.9	0.95	1
y	0.252	0.358	0.228	0.185	0.1	0.12

Percobaan pertama menggunakan $h = 0.5$ sehingga diperoleh simpul-simpul yang sama seperti yang diberikan pada Tabel 3.2. Gambar 3.15 mengilustrasikan letak titik-titik x_i, $i = 1, 2, \dots, 30$, simpul-simpul t_j, $j = 1, 2, \dots, 9$, dan fungsi-fungsi basis B-spline $Q_j(x)$, $j = 1, 2, \dots, 5$, untuk kasus ini.



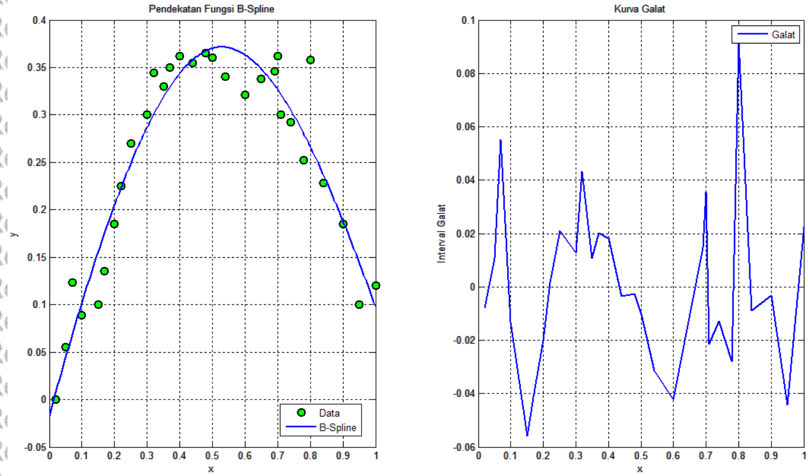
Gambar 3.15 Letak fungsi-fungsi basis untuk kasus 3 ($h = 0.5$).

SPL, fungsi B-spline, dan *output* yang diharapkan untuk percobaan ini analog dengan kasus 1 percobaan pertama. Nilai determinan matriks A adalah $\det(A) = 0.1138$. Nilai-nilai optimal parameter a_j, $j = 1, 2, \dots, 5$, ditunjukkan pada Tabel 3.13.

Tabel 3.13 Nilai-nilai parameter a_j, $j = 1, 2, \dots, 5$, untuk kasus 3 ($h = 0.5$).

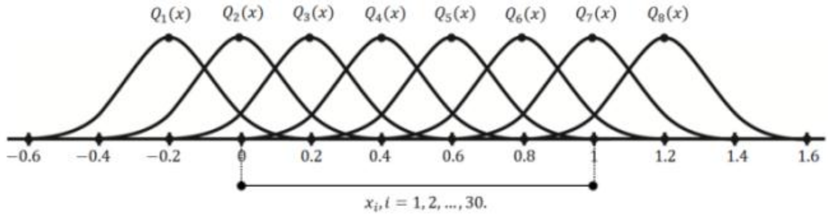
a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
-0.4915	0.0200	0.3444	0.0834	-0.2871

Jumlah kuadrat galat yang diperoleh adalah $F = 0.1695$. Gambar 3.16 mengilustrasikan data numerik yang diberikan, kurva solusi B-spline yang diperoleh, dan kurva galat.



Gambar 3.16 Hasil simulasi numerik kasus 3 ($h = 0.5$); (a) Data numerik dan kurva solusi B-spline $f(x)$ yang diperoleh; (b) Kurva galat $f(x_i)$ terhadap y_i, dengan $i = 1, 2, \dots, 30$.

Percobaan kedua menggunakan $h = 0.2$ sehingga diperoleh simpul-simpul yang sama seperti yang diberikan pada Tabel 3.4. Gambar 3.17 mengilustrasikan letak titik-titik x_i, $i = 1, 2, \dots, 30$, simpul-simpul t_j, $j = 1, 2, \dots, 12$, dan fungsi-fungsi basis B-spline $Q_j(x)$, $j = 1, 2, \dots, 8$, untuk kasus ini.



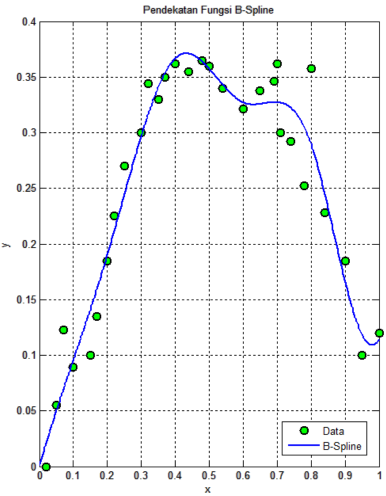
Gambar 3.17 Letak fungsi-fungsi basis untuk kasus 3 ($h = 0.2$).

SPL, fungsi B-spline, dan *output* untuk percobaan ini analog dengan kasus 1 percobaan kedua. Nilai determinan matriks A yang diperoleh adalah $\det(A) = 0.1625$. Nilai-nilai optimal parameter untuk kasus ini ditunjukkan pada Tabel 3.14.

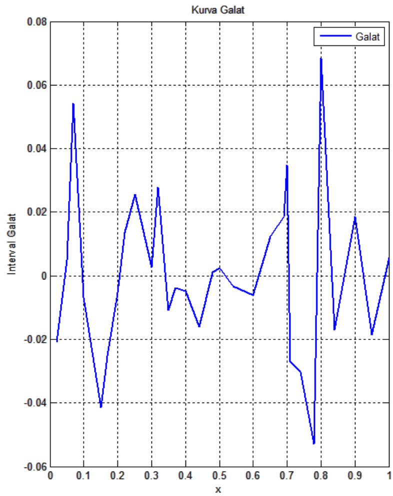
Tabel 3.14 Nilai-nilai parameter a_j, $j = 1, 2, \ldots, 8$, untuk kasus 3 ($h = 0.2$).

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
-0.1687	0.0141	0.1141	0.2906	0.1909	0.2540	-0.0480	0.3954

Jumlah kuadrat galat yang diperoleh adalah $F = 0.1405$, lebih kecil daripada percobaan pertama. Gambar 3.18 mengilustrasikan data numerik yang diberikan, kurva solusi B-spline yang diperoleh, dan kurva galat.



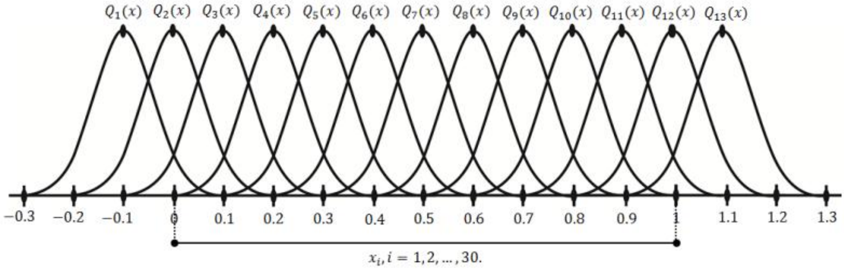
(a)



(b)

Gambar 3.18 Hasil simulasi numerik kasus 3 ($h = 0.2$); (a) Data numerik dan kurva solusi B-spline $f(x)$ yang diperoleh; (b) Kurva galat $f(x_i)$ terhadap y_i, dengan $i = 1, 2, \ldots, 30$.

Percobaan ketiga menggunakan $h = 0.1$ sehingga diperoleh simpul-simpul yang sama seperti yang diberikan pada Tabel 3.6. Gambar 3.19 mengilustrasikan letak titik-titik x_i, $i = 1, 2, \ldots, 30$, simpul-simpul t_j, $j = 1, 2, \dots, 17$, dan fungsi-fungsi basis B-spline $Q_j(x), j = 1, 2, \dots, 13$, untuk kasus ini.



Gambar 3.19 Letak fungsi-fungsi basis untuk kasus 3 ($h = 0.1$).

SPL, fungsi B-spline, dan *output* percobaan ini analog dengan kasus 1 percobaan ketiga. Nilai determinan matriks A adalah $\det(A) = 0.0280$. Nilai-nilai optimal parameter yang diperoleh ditunjukkan pada Tabel 3.15.

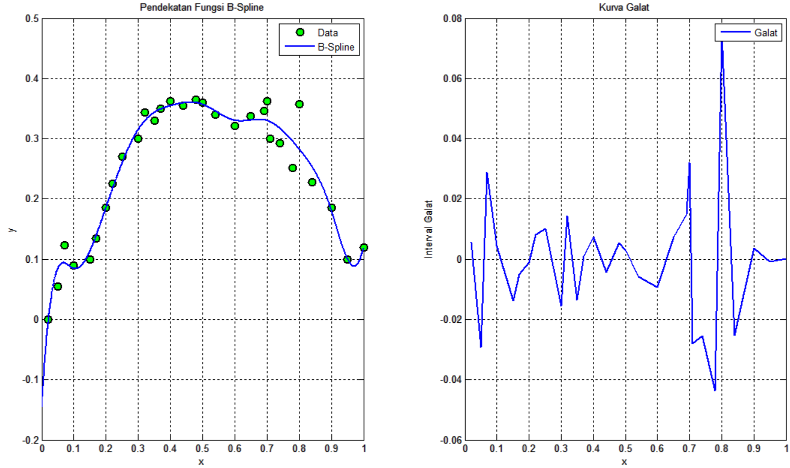
Tabel 3.15 Nilai-nilai parameter a_j, $j = 1, 2, \dots, 13$, untuk kasus 3 ($h = 0.1$).

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
−1.1885	0.1473	0.0163	0.1257	0.2247	0.2372

a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}
0.2448	0.2116	0.2296	0.1901	0.1412	−0.0289

a_{13}
0.4542

Jumlah kuadrat galat yang diperoleh adalah $F = 0.1181$, lebih kecil daripada percobaan pertama dan kedua. Gambar 3.20 mengilustrasikan data numerik yang diberikan, kurva solusi B-spline yang diperoleh, dan kurva galat.



(a) (b)

Gambar 3.20 Hasil simulasi numerik kasus 3 ($h = 0.1$); (a) Data numerik dan kurva solusi B-spline $f(x)$ yang diperoleh; (b) Kurva galat $f(x_i)$ terhadap y_i, dengan $i = 1, 2, \ldots, 30$.

Berdasarkan percobaan pertama, kedua, dan ketiga diketahui bahwa dengan h yang diperkecil diperoleh F yang semakin kecil dan kurva B-spline pada setiap percobaan tidak berfluktuasi.

3.4.4 Kasus 4

Pada kasus ini diberikan data numerik yang berasal dari fungsi $g(x)$ sebanyak sepuluh titik ($m = 10$), seperti ditunjukkan pada Tabel 3.16.

Tabel 3.16 Data numerik untuk kasus 4.

x	0	0.1111	0.2222	0.3333	0.4444
$g(x)$	−11	−13.7048	−16.9847	−20.9201	−25.5822

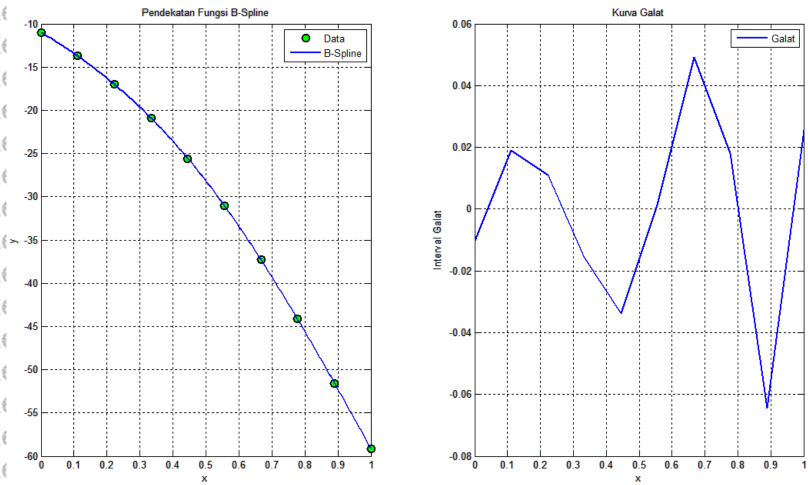
x	0.5556	0.6667	0.7778	0.8889	1
$g(x)$	−31.0190	−37.2341	−44.1537	−51.5783	−59.1124

Percobaan pertama menggunakan $h = 0.5$. Kasus ini analog dengan kasus 1 percobaan pertama. Nilai determinan matriks A adalah $\det(A) = 0.0018$. Nilai-nilai parameter a_j, $j = 1, 2, \dots, 5$, yang diperoleh untuk kasus ini ditunjukkan pada Tabel 3.17.

Tabel 3.17 Nilai-nilai parameter a_j, $j = 1, 2, \dots, 5$, untuk kasus 4 ($h = 0.5$).

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
-1.8130	-6.3370	-16.7984	-39.1768	-63.0462

Jumlah kuadrat galat yang diperoleh adalah $F = 0.0976$. Gambar 3.21 mengilustrasikan data numerik yang diberikan, kurva solusi B-spline yang diperoleh, dan kurva galat.



(a) (b)

Gambar 3.21 Hasil simulasi numerik kasus 4 ($h = 0.5$); (a) Data numerik dan kurva solusi B-spline $f(x)$ yang diperoleh; (b) Kurva galat $f(x_i)$ terhadap $g(x_i)$, dengan $i = 1, 2, \dots, 10$.

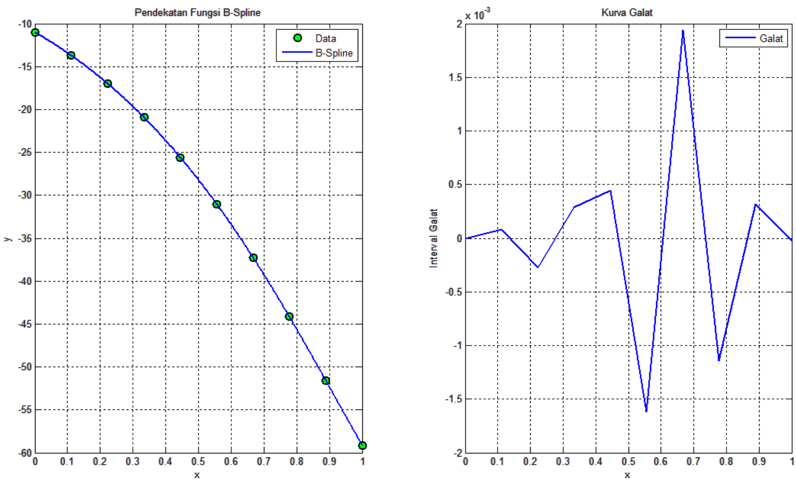
Percobaan kedua menggunakan $h = 0.2$. Kasus ini analog dengan kasus 1 percobaan kedua. Nilai determinan matriks A yang diperoleh adalah $\det(A) = 2.3654 \times 10^{-4}$. Nilai-nilai optimal parameter a_j, $j = 1, 2, \dots, 8$, ditunjukkan pada Tabel 3.18.

Tabel 3.18 Nilai-nilai parameter a_j, $j = 1, 2, \dots, 8$, untuk kasus 4 ($h = 0.2$).

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
-4.7489	-7.1577	-10.6204	-15.4744	-21.9877

a_6	a_7	a_8
-30.2216	-39.5483	-48.0348

Jumlah kuadrat galat yang diperoleh adalah $F = 0.0029$, lebih kecil daripada percobaan pertama. Gambar 3.22 mengilustrasikan data numerik yang diberikan, kurva solusi B-spline yang diperoleh, dan kurva galat.



(a) (b)

Gambar 3.22 Hasil simulasi numerik kasus 4 ($h = 0.2$); (a) Data numerik dan kurva solusi B-spline $f(x)$ yang diperoleh; (b) Kurva galat $f(x_i)$ terhadap $g(x_i)$, dengan $i = 1, 2, \dots, 10$.

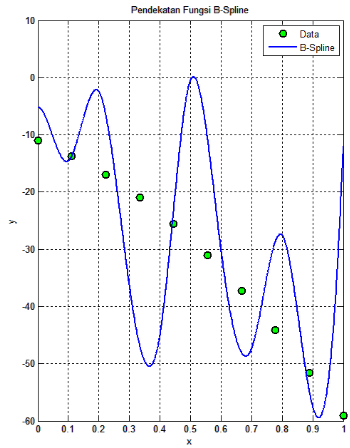
Percobaan ketiga menggunakan $h = 0.1$. Kasus ini analog dengan kasus 1 percobaan ketiga. Nilai determinan matriks A adalah $\det(A) = 3.803062 \times 10^{-18}$. Nilai-nilai optimal parameter a_j, $j = 1, 2, \dots, 13$, ditunjukkan pada Tabel 3.19.

Tabel 3.19 Nilai-nilai parameter a_j, $j = 1, 2, \ldots, 13$, untuk kasus 4 ($h = 0.1$).

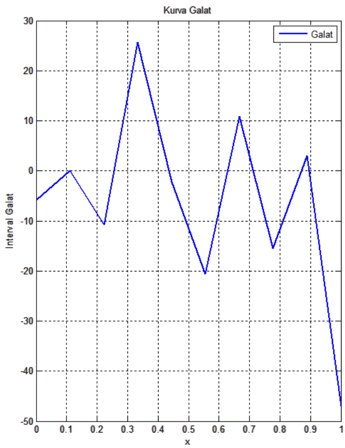
a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
-17.875	3.75	-17.75	9	-28	-42

a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}
16	-24	-40	-5.5	-48	-32	128

Jumlah kuadrat galat yang diperoleh adalah $F = 61.8323$, lebih besar daripada percobaan pertama dan kedua. Gambar 3.23 mengilustrasikan data numerik yang diberikan, kurva solusi B-spline yang diperoleh, dan kurva galat.



(a)



(b)

Gambar 3.23 Hasil simulasi numerik kasus 4 ($h = 0.1$); (a) Data numerik dan kurva solusi B-spline $f(x)$ yang diperoleh; (b) Kurva galat $f(x_i)$ terhadap $g(x_i)$, dengan $i = 1, 2, \ldots, 10$.

Pada percobaan pertama dan kedua diketahui bahwa dengan h yang diperkecil diperoleh F yang semakin kecil dan kurva B-spline tidak berfluktuasi. Sebaliknya, pada percobaan ketiga dengan h yang lebih kecil dari percobaan sebelumnya diperoleh F yang lebih besar dan kurva B-spline berfluktuasi.

3.4.5 Kasus 5

Pada kasus ini diberikan data numerik yang berasal dari fungsi $g(x)$ sebanyak dua puluh titik ($m = 20$), seperti ditunjukkan pada Tabel 3.20.

Tabel 3.20 Data numerik untuk kasus 5.

x	0	0.0526	0.1053	0.1579	0.2105
$g(x)$	-11	-12.2147	-13.5488	-15.011	-16.6099

x	0.2632	0.3158	0.3684	0.4211	0.4737
$g(x)$	-18.3542	-20.2521	-22.3109	-24.5374	-26.9367

x	0.5263	0.5789	0.6316	0.6842	0.7368
$g(x)$	-29.5119	-32.2639	-35.1899	-38.2832	-41.5317

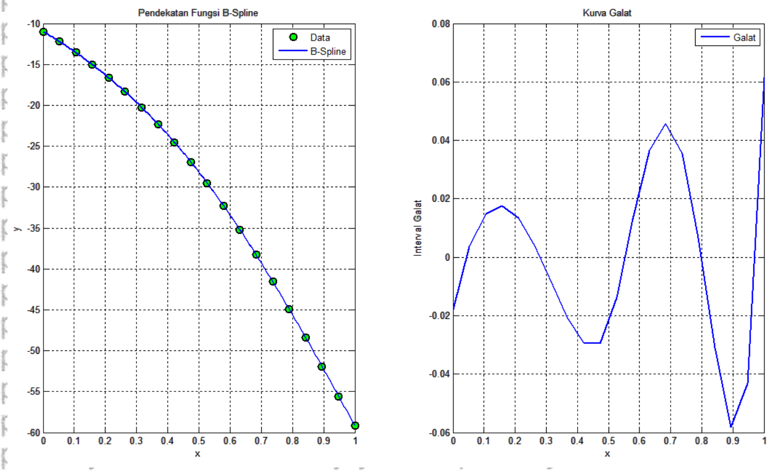
x	0.7895	0.8421	0.8947	0.9474	1
$g(x)$	-44.9164	-48.4105	-51.9767	-55.5655	-59.1124

Percobaan pertama menggunakan $h = 0.5$. Kasus ini analog dengan kasus 2 percobaan pertama. Nilai determinan matriks A yang diperoleh adalah $\det(A) = 0.0305$. Nilai-nilai optimal parameter a_j, $j = 1, 2, \dots, 5$, ditunjukkan pada Tabel 3.21.

Tabel 3.21 Nilai-nilai parameter a_j, $j = 1, 2, \dots, 5$, untuk kasus 5 ($h = 0.5$).

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
-1.7981	-6.3308	-16.808	-39.1507	-63.2847

Jumlah kuadrat galat yang diperoleh adalah $F = 0.1355$. Gambar 3.24 mengilustrasikan data numerik yang diberikan, kurva solusi B-spline yang diperoleh, dan kurva galat.



(a) (b)

Gambar 3.24 Hasil simulasi numerik kasus 5 ($h = 0.5$); (a) Data numerik dan kurva solusi B-spline $f(x)$ yang diperoleh; (b) Kurva galat $f(x_i)$ terhadap $g(x_i)$, dengan $i = 1, 2, \dots, 20$.

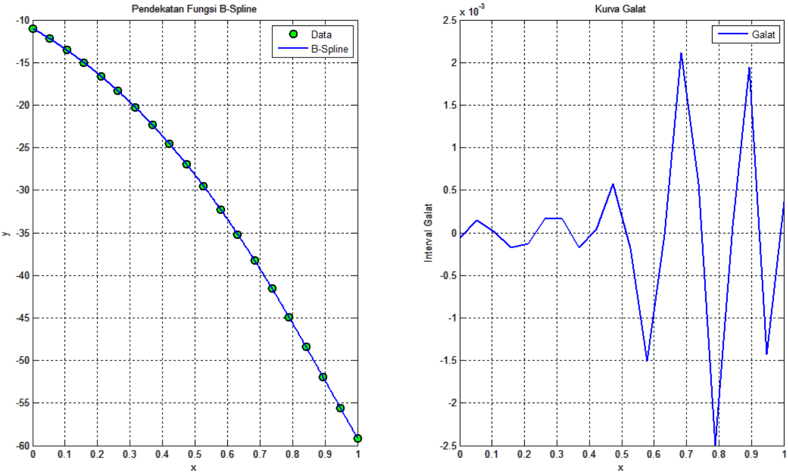
Percobaan kedua menggunakan $h = 0.2$. Kasus ini analog dengan kasus 2 percobaan kedua. Nilai determinan matriks A adalah $\det(A) = 0.0340$. Nilai-nilai optimal parameter a_j, $j = 1, 2, \dots, 8$, ditunjukkan pada Tabel 3.22.

Tabel 3.22 Nilai-nilai parameter a_j, $j = 1, 2, \dots, 8$, untuk kasus 5 ($h = 0.2$).

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
-4.7518	-7.1567	-10.6210	-15.4736	-21.9890

a_6	a_7	a_8
-30.2191	-39.5543	-48.0148

Jumlah kuadrat galat yang diperoleh adalah $F = 0.0044$, lebih kecil daripada percobaan pertama. Gambar 3.25 mengilustrasikan data numerik yang diberikan, kurva solusi B-spline yang diperoleh, dan kurva galat.



(a) (b)

Gambar 3.25 Hasil simulasi numerik kasus 5 ($h = 0.2$); (a) Data numerik dan kurva solusi B-spline $f(x)$ yang diperoleh; (b) Kurva galat $f(x_i)$ terhadap $g(x_i)$, dengan $i = 1, 2, \dots, 20$.

Percobaan ketiga menggunakan $h = 0.1$. Kasus ini analog dengan kasus 2 percobaan ketiga. Nilai determinan matriks A yang diperoleh adalah $\det(A) = 0.0020$. Nilai-nilai optimal parameter yang diperoleh untuk kasus ini ditunjukkan pada Tabel 3.23.

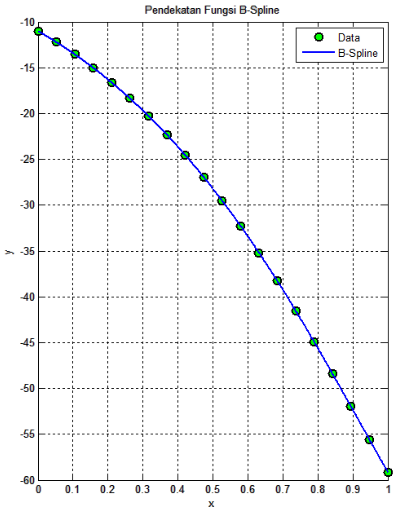
Tabel 3.23 Nilai-nilai parameter a_j, $j = 1, 2, \dots, 13$, untuk kasus 5 ($h = 0.1$).

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
-5.9555	-7.2889	-8.8888	-10.7949	-13.0469

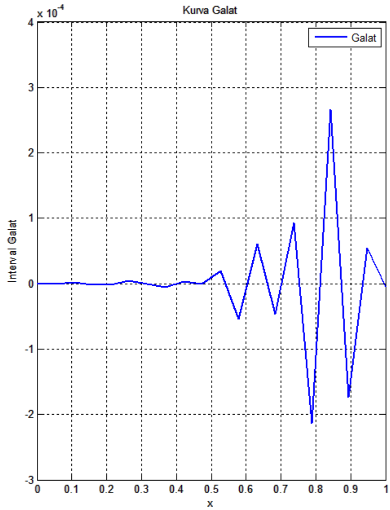
a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
-15.6821	-18.7301	-22.206	-26.1001	-30.3619

a_{11}	a_{12}	a_{13}
-34.8813	-39.4539	-43.753

Jumlah kuadrat galat yang diperoleh adalah $F = 4.0938 \times 10^{-4}$, lebih kecil daripada percobaan pertama dan kedua. Gambar 3.26 mengilustrasikan data numerik yang diberikan, kurva solusi B-spline yang diperoleh, dan kurva galat.



(a)



(b)

Gambar 3.26 Hasil simulasi numerik kasus 5 ($h = 0.1$); (a) Data numerik dan kurva solusi B-spline $f(x)$ yang diperoleh; (b) Kurva galat $f(x_i)$ terhadap $g(x_i)$, dengan $i = 1, 2, \dots, 20$.

Berdasarkan percobaan pertama, kedua, dan ketiga diketahui bahwa dengan h yang diperkecil diperoleh F yang semakin kecil. Kurva B-spline pada semua percobaan tidak berfluktuasi.

3.4.6 Kasus 6

Pada kasus ini diberikan data numerik yang berasal dari fungsi $g(x)$ sebanyak tiga puluh titik ($m = 30$), seperti ditunjukkan pada Tabel 3.24.

Tabel 3.24 Data numerik untuk kasus 6.

x	0	0.0345	0.069	0.1034	0.1379
$g(x)$	-11	-11.7828	-12.6156	-13.5007	-14.4407

x	0.1724	0.2069	0.2414	0.2759	0.3103
$g(x)$	−15.4380	−16.4951	−17.6143	−18.7980	−20.0484

x	0.3448	0.3793	0.4138	0.4483	0.4828
$g(x)$	−21.3676	−22.7576	−24.2201	−25.7566	−27.3681

x	0.5172	0.5517	0.5862	0.6207	0.6552
$g(x)$	−29.0553	−30.8184	−32.6572	−34.5705	−36.5565

x	0.6897	0.7241	0.7586	0.7931	0.8276
$g(x)$	−38.6123	−40.7342	−42.9171	−45.1542	−47.4376

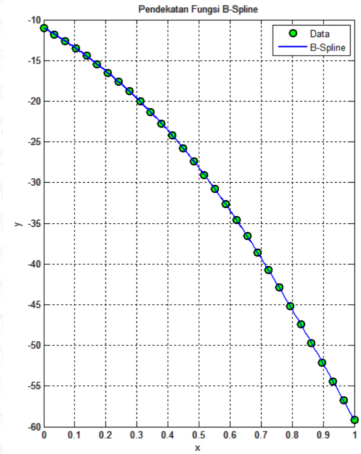
x	0.8621	0.8966	0.9310	0.9655	1
$g(x)$	−49.7571	−52.1004	−54.4529	−56.7971	−59.1124

Percobaan pertama menggunakan $h = 0.5$. Kasus ini analog dengan kasus 3 percobaan pertama. Nilai determinan matriks A adalah $\det(A) = 0.1796$. Nilai-nilai parameter a_j, $j = 1, 2, \dots, 5$, ditunjukkan pada Tabel 3.25.

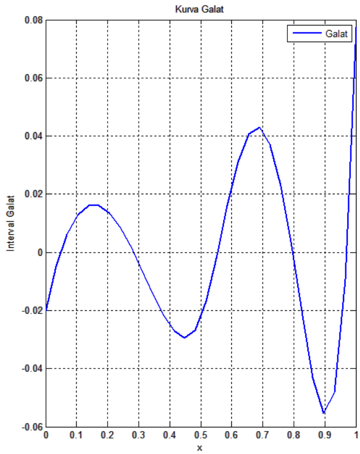
Tabel 3.25 Nilai-nilai parameter a_j, $j = 1, 2, \dots, 5$, untuk kasus 6 ($h = 0.5$).

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
−1.8036	−6.3255	−16.8142	−39.1356	−63.4033

Jumlah kuadrat galat yang diperoleh adalah $F = 0.1586$. Gambar 3.27 mengilustrasikan data numerik yang diberikan, kurva solusi B-spline yang diperoleh, dan kurva galat.



(a)



(b)

Gambar 3.27 Hasil simulasi numerik kasus 6 ($h = 0.5$); (a) Data numerik dan kurva solusi B-spline $f(x)$ yang diperoleh; (b) Kurva galat $f(x_i)$ terhadap $g(x_i)$, dengan $i = 1, 2, \dots, 30$.

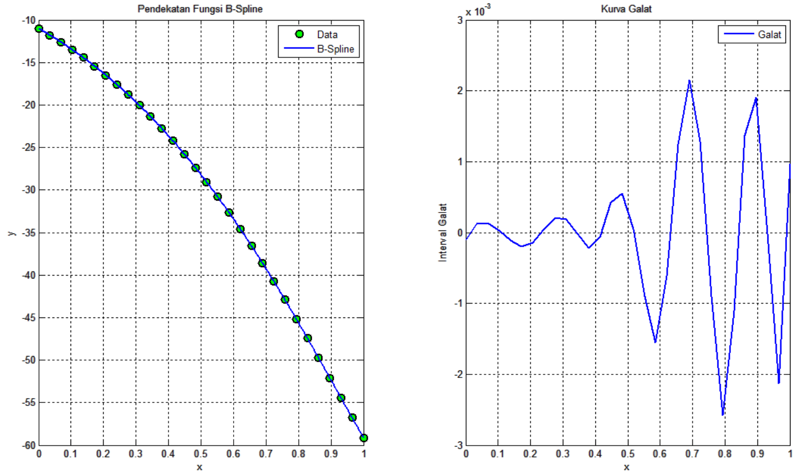
Percobaan kedua menggunakan $h = 0.2$. Kasus ini analog dengan kasus 3 percobaan kedua. Nilai determinan matriks A yang diperoleh adalah $\det(A) = 0.5516$. Nilai-nilai optimal parameter yang diperoleh untuk kasus ini ditunjukkan pada Tabel 3.26.

Tabel 3.26 Nilai-nilai parameter a_j, $j = 1, 2, \dots, 8$, untuk kasus 6 ($h = 0.2$).

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
−4.7515	−7.1568	−10.6210	−15.4736	−21.9890

a_6	a_7	a_8
−30.2191	−39.5542	−48.0176

Jumlah kuadrat galat yang diperoleh adalah $F = 0.0056$, lebih kecil daripada percobaan pertama. Gambar 3.28 mengilustrasikan data numerik yang diberikan, kurva solusi B-spline yang diperoleh, dan kurva galat.



(a) (b)

Gambar 3.28 Hasil simulasi numerik kasus 6 ($h = 0.2$); (a) Data numerik dan kurva solusi B-spline $f(x)$ yang diperoleh; (b) Kurva galat $f(x_i)$ terhadap $g(x_i)$, dengan $i = 1, 2, \ldots, 30$.

Percobaan ketiga menggunakan $h = 0.1$. Kasus ini analog dengan kasus 3 percobaan ketiga. Nilai determinan matriks A yang diperoleh adalah $\det(A) = 0.2825$. Nilai-nilai optimal parameter untuk kasus ini ditunjukkan pada Tabel 3.27.

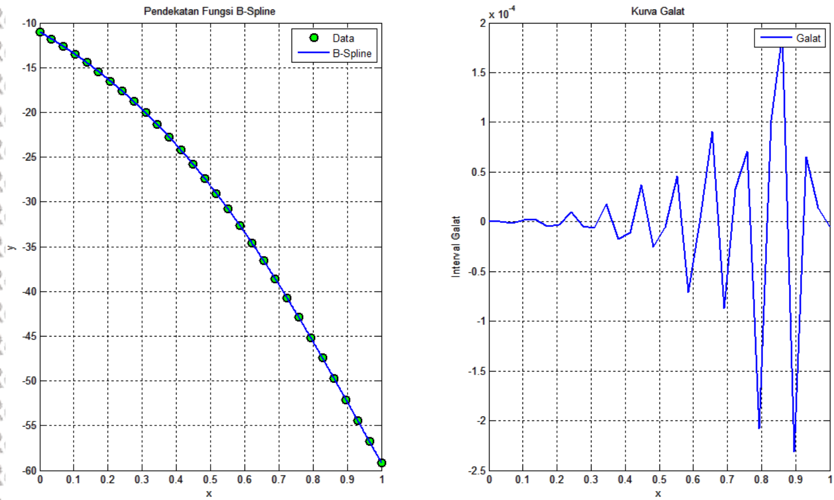
Tabel 3.27 Nilai-nilai parameter a_j, $j = 1, 2, \ldots, 13$, untuk kasus 6 ($h = 0.1$).

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
-5.9555	-7.2889	-8.8888	-10.7949	-13.0469

a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
-15.6821	-18.7301	-22.206	-26.1001	-30.362

a_{11}	a_{12}	a_{13}
-34.8812	-39.4542	-43.7519

Jumlah kuadrat galat yang diperoleh adalah $F = 4.2361 \times 10^{-4}$, lebih kecil daripada percobaan pertama dan kedua. Gambar 3.29 mengilustrasikan data numerik yang diberikan, kurva solusi B-spline yang diperoleh, dan kurva galat.



(a) (b)

Gambar 3.29 Hasil simulasi numerik kasus 6 ($h = 0.1$); (a) Data numerik dan kurva solusi B-spline $f(x)$ yang diperoleh; (b) Kurva galat $f(x_i)$ terhadap $g(x_i)$, dengan $i = 1, 2, \ldots, 30$.

Berdasarkan percobaan pertama, kedua, dan ketiga pada kasus ini diketahui bahwa dengan h yang diperkecil diperoleh F yang semakin kecil. Selain itu, kurva B-spline semua percobaan pada kasus ini tidak berfluktuasi.

Berdasarkan semua kasus yang dibahas dalam subbab ini diketahui bahwa banyak data (m) dan panjang partisi (h) berpengaruh terhadap kinerja metode ini. Tabel 3.28 menunjukkan hasil simulasi numerik semua kasus.

Tabel 3.28 Hasil simulasi numerik semua kasus.

Kasus	m	h	$\det(A)$	F	Perilaku kurva
1	10	0.5	0.0016	0.0871	Tidak berfluktuasi
		0.2	4.9972×10^{-5}	0.0435	Berfluktuasi
		0.1	-1.5959×10^{-53}	5.3367	Berfluktuasi
2	20	0.5	0.0280	0.0548	Tidak berfluktuasi
		0.2	0.0216	0.0452	Tidak berfluktuasi
		0.1	1.0134×10^{-4}	0.0369	Berfluktuasi
3	30	0.5	0.1138	0.1695	Tidak berfluktuasi
		0.2	0.1625	0.1405	Tidak berfluktuasi
		0.1	0.0280	0.1181	Tidak berfluktuasi
4	10	0.5	0.0018	0.0976	Tidak berfluktuasi
		0.2	2.3654×10^{-4}	0.0029	Tidak berfluktuasi
		0.1	3.803062×10^{-18}	61.8323	Berfluktuasi
5	20	0.5	0.0305	0.1355	Tidak berfluktuasi
		0.2	0.0340	0.0044	Tidak berfluktuasi
		0.1	0.0020	4.0938×10^{-4}	Tidak berfluktuasi
6	30	0.5	0.1796	0.1586	Tidak berfluktuasi
		0.2	0.5516	0.0056	Tidak berfluktuasi
		0.1	0.2825	4.2361×10^{-4}	Tidak berfluktuasi

Berdasarkan Tabel 3.28, banyak data (m) berpengaruh terhadap penggunaan panjang partisi (h). Semakin banyak m maka h yang digunakan harus semakin kecil. Sebaliknya, jika m sedikit maka h tidak boleh terlalu kecil. Untuk data sebanyak m, dengan h yang diperkecil diperoleh F yang semakin kecil, namun, bila h terlalu kecil dapat mengakibatkan kurva B-spline berfluktuasi dan F membesar. Berfluktuasinya kurva B-spline ditandai dengan nilai $\det(A)$ yang mendekati nol. Berdasarkan hal tersebut, metode ini dapat bekerja dengan baik bila h disesuaikan dengan m sedemikian sehingga diperoleh F terkecil dengan kurva B-spline tidak berfluktuasi. Dengan kata lain kinerja terbaik metode ini diperoleh berdasarkan *trial and error*, yaitu dengan memperhatikan banyak data, panjang partisi, nilai jumlah kuadrat galat, dan nilai determinan matriks A.

BAB IV
PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan, telah dikonstruksi fungsi B-spline yang merupakan kombinasi linear fungsi-fungsi basis B-spline kubik. Berbeda dari metode-metode kuadrat terkecil nonlinear lainnya, proses penyelesaian masalah kuadrat terkecil nonlinear menggunakan fungsi B-spline tidak memerlukan titik penduga awal dan membentuk sistem persamaan linear. Solusi sistem persamaan linear tersebut merupakan koefisien-koefisien kombinasi linear fungsi-fungsi basis. Indikator kinerja metode ini didasarkan pada nilai jumlah kuadrat galat dan perilaku kurva B-spline. Semakin kecil nilai jumlah kuadrat galat dan kurva B-spline tidak berfluktuasi maka semakin baik kinerja metode ini. Berfluktuasinya kurva B-spline ditandai dengan nilai determinan matriks A yang mendekati nol. Berdasarkan simulasi numerik diperoleh kesimpulan bahwa banyak data dan panjang partisi berpengaruh terhadap kinerja metode ini.

4.2 Saran

Pada penelitian selanjutnya disarankan untuk menggunakan polinomial ortogonal, untuk mengetahui pengaruhnya terhadap fluktuasi kurva yang terjadi. Selain itu, penelitian ini dapat dilanjutkan dengan melakukan analisis galat agar diperoleh h optimal.

DAFTAR PUSTAKA

Bonnans, J. F., J. C. Gilbert, C. Lemaréchal, dan C. A. Sagastizábal. 2006. *Numerical Optimization: Theoretical and Practical Aspects*. Second Ed., Springer-Verlag, Inc. Berlin.

Burden, R. L. dan J. D. Faires. 2011. *Numerical Analysis*. Ninth Ed., Brooks/ Cole, Cengage Learning. Boston.

Chapra, S. C. 2012. *Applied Numerical Methods with MATLAB for Engineers and Scientists*. Third Ed., McGraw Hill, Inc. New York.

Izadian, J., N. Farahbakhsh, dan M. Jalili. 2012. Solving Nonlinear Least Squares Problems with B-Spline Functions. *Applied Mathematical Sciences* 6 (34) 1667-1676.

Leader, J. J. 2004. *Numerical Analysis and Scientific Computation*. Pearson Education, Inc. Boston.

Nocedal, J. dan S. J. Wright. 1999. *Numerical Optimization*. Springer-Verlag, Inc. New York.

LAMPIRAN

Lampiran 1. *Listing* Program

```
function q1=Q_1(h,x,t)
q1=(1/(4*h^3))*(x-t)^3;
end
function q2=Q_2(h,x,t)
q2=(1/(4*h^3))*(h^3+3*(h^2)*(x-t)+3*h*((x-t)^2)-
3*(x-t)^3);
end
function q3=Q_3(h,x,t)
q3=(1/(4*h^3))*(h^3+3*(h^2)*(t-x)+3*h*((t-x)^2)-
3*(t-x)^3);
end
function q4=Q_4(h,x,t)
q4=(1/(4*h^3))*(t-x)^3;
end
clc;
clear all;
%Data untuk kasus 1
x=[0 0.15 0.33 0.42 0.51 0.63 0.72 0.84 0.92 1];
y=[0.2 0.34 0.42 0.55 0.56 0.53 0.45 0.32 0.37 ...
    0.4];
%Data untuk kasus 2
% x=[0 0.05 0.1 0.17 0.2 0.22 0.3 0.35 0.4 0.48 ...
%     0.5 0.54 0.6 0.69 0.7 0.71 0.8 0.84 0.9 1];
% y=[0 0.055 0.089 0.135 0.185 0.225 0.27 0.3 ...
%     0.33 0.35 0.362 0.355 0.365 0.36 0.34 0.321
...
%     0.292 0.228 0.185 0.12];
%Data untuk kasus 3
% x=[0.02 0.05 0.07 0.1 0.15 0.17 0.2 0.22 0.25 ...
%   0.3 0.32 0.35 0.37 0.4 0.44 0.48 0.5 0.54 ...
%   0.6 0.65 0.69 0.7 0.71 0.74 0.78 0.8 0.84 ...
%   0.9 0.95 1];
% y=[0 0.055 0.123 0.089 0.1 0.135 0.185 0.225 ...
%   0.27 0.3 0.344 0.33 0.35 0.362 0.355 0.365 ...
%   0.36 0.34 0.321 0.338 0.346 0.362 0.3 0.292 ...
%   0.252 0.358 0.228 0.185 0.1 0.12];
%Data untuk kasus 4
% x=linspace(0,1,10);
% y=exp(2.*x).*(x.^3+2.*x.^2-11);
```

```
%Data untuk kasus 5
% x=linspace(0,1,20);
% y=exp(2.*x).*(x.^3+2.*x.^2-11);
%Data untuk kasus 6
% x=linspace(0,1,30);
% y=exp(2.*x).*(x.^3+2.*x.^2-11);
%Panjang partisi 1
% h=0.1;
%Panjang partisi 2
% h=0.2;
%Panjang partisi 3
h=0.5;
%Simpul-simpul untuk h=0.1
% t=-0.3:h:1.3;
%Simpul-simpul untuk h=0.2
% t=-0.6:h:1.6;
%Simpul-simpul untuk h=0.5
t=-1.5:h:2.5;
galat=0;
m=length(x);
%Matriks Df^t untuk h=0.1
% for i=1:m
% if x(i)<=t(1)
% Q1(i)=0;
% elseif x(i)<=t(2)
% Q1(i)=Q_1(h,x(i),t(1));
% elseif x(i)<=t(3)
% Q1(i)=Q_2(h,x(i),t(2));
% elseif x(i)<=t(4)
% Q1(i)=Q_3(h,x(i),t(4));
% elseif x(i)<=t(5)
% Q1(i)=Q_4(h,x(i),t(5));
% else
% Q1(i)=0;
% end
% end
% Q1;
% for i=1:m
% if x(i)<=t(2)
% Q2(i)=0;
% elseif x(i)<=t(3)
% Q2(i)=Q_1(h,x(i),t(2));
% elseif x(i)<=t(4)
```

```
% Q2(i)=Q_2(h,x(i),t(3));
% elseif x(i)<=t(5)
% Q2(i)=Q_3(h,x(i),t(5));
% elseif x(i)<=t(6)
% Q2(i)=Q_4(h,x(i),t(6));
% else
% Q2(i)=0;
% end
% end
% Q2;
% for i=1:m
% if x(i)<=t(3)
% Q3(i)=0;
% elseif x(i)<=t(4)
% Q3(i)=Q_1(h,x(i),t(3));
% elseif x(i)<=t(5)
% Q3(i)=Q_2(h,x(i),t(4));
% elseif x(i)<=t(6)
% Q3(i)=Q_3(h,x(i),t(6));
% elseif x(i)<=t(7)
% Q3(i)=Q_4(h,x(i),t(7));
% else
% Q3(i)=0;
% end
% end
% Q3;
% for i=1:m
% if x(i)<=t(4)
% Q4(i)=0;
% elseif x(i)<=t(5)
% Q4(i)=Q_1(h,x(i),t(4));
% elseif x(i)<=t(6)
% Q4(i)=Q_2(h,x(i),t(5));
% elseif x(i)<=t(7)
% Q4(i)=Q_3(h,x(i),t(7));
% elseif x(i)<=t(8)
% Q4(i)=Q_4(h,x(i),t(8));
% else
% Q4(i)=0;
% end
% end
% Q4;
% for i=1:m
```

```
% if x(i)<=t(5)
% Q5(i)=0;
% elseif x(i)<=t(6)
% Q5(i)=Q_1(h,x(i),t(5));
% elseif x(i)<=t(7)
% Q5(i)=Q_2(h,x(i),t(6));
% elseif x(i)<=t(8)
% Q5(i)=Q_3(h,x(i),t(8));
% elseif x(i)<=t(9)
% Q5(i)=Q_4(h,x(i),t(9));
% else
% Q5(i)=0;
% end
% end
% Q5;
% for i=1:m
% if x(i)<=t(6)
% Q6(i)=0;
% elseif x(i)<=t(7)
% Q6(i)=Q_1(h,x(i),t(6));
% elseif x(i)<=t(8)
% Q6(i)=Q_2(h,x(i),t(7));
% elseif x(i)<=t(9)
% Q6(i)=Q_3(h,x(i),t(9));
% elseif x(i)<=t(10)
% Q6(i)=Q_4(h,x(i),t(10));
% else
% Q6(i)=0;
% end
% end
% Q6;
% for i=1:m
% if x(i)<=t(7)
% Q7(i)=0;
% elseif x(i)<=t(8)
% Q7(i)=Q_1(h,x(i),t(7));
% elseif x(i)<=t(9)
% Q7(i)=Q_2(h,x(i),t(8));
% elseif x(i)<=t(10)
% Q7(i)=Q_3(h,x(i),t(10));
% elseif x(i)<=t(11)
% Q7(i)=Q_4(h,x(i),t(11));
% else
```

```
% Q7(i)=0;
% end
% end
% Q7;
% for i=1:m
% if x(i)<=t(8)
% Q8(i)=0;
% elseif x(i)<=t(9)
% Q8(i)=Q_1(h,x(i),t(8));
% elseif x(i)<=t(10)
% Q8(i)=Q_2(h,x(i),t(9));
% elseif x(i)<=t(11)
% Q8(i)=Q_3(h,x(i),t(11));
% elseif x(i)<=t(12)
% Q8(i)=Q_4(h,x(i),t(12));
% else
% Q8(i)=0;
% end
% end
% Q8;
% for i=1:m
% if x(i)<=t(9)
% Q9(i)=0;
% elseif x(i)<=t(10)
% Q9(i)=Q_1(h,x(i),t(9));
% elseif x(i)<=t(11)
% Q9(i)=Q_2(h,x(i),t(10));
% elseif x(i)<=t(12)
% Q9(i)=Q_3(h,x(i),t(12));
% elseif x(i)<=t(13)
% Q9(i)=Q_4(h,x(i),t(13));
% else
% Q9(i)=0;
% end
% end
% Q9;
% for i=1:m
% if x(i)<=t(10)
% Q10(i)=0;
% elseif x(i)<=t(11)
% Q10(i)=Q_1(h,x(i),t(10));
% elseif x(i)<=t(12)
% Q10(i)=Q_2(h,x(i),t(11));
```

```
% elseif x(i)<=t(13)
% Q10(i)=Q_3(h,x(i),t(13));
% elseif x(i)<=t(14)
% Q10(i)=Q_4(h,x(i),t(14));
% end
% end
% Q10;
% for i=1:m
% if x(i)<=t(11)
% Q11(i)=0;
% elseif x(i)<=t(12)
% Q11(i)=Q_1(h,x(i),t(11));
% elseif x(i)<=t(13)
% Q11(i)=Q_2(h,x(i),t(12));
% elseif x(i)<=t(14)
% Q11(i)=Q_3(h,x(i),t(14));
% end
% end
% Q11;
% for i=1:m
% if x(i)<=t(12)
% Q12(i)=0;
% elseif x(i)<=t(13)
% Q12(i)=Q_1(h,x(i),t(12));
% elseif x(i)<=t(14)
% Q12(i)=Q_2(h,x(i),t(13));
% end
% end
% Q12;
% for i=1:m
% if x(i)<=t(13)
% Q13(i)=0;
% elseif x(i)<=t(14)
% Q13(i)=Q_1(h,x(i),t(13));
% end
% end
% Q13;
% Q=[Q1;Q2;Q3;Q4;Q5;Q6;Q7;Q8;Q9;Q10;Q11;Q12;Q13];
%Matriks Df^t untuk h=0.2
% for i=1:m
% if x(i)<=t(1)
% Q1(i)=0;
% elseif x(i)<=t(2)
```

```
% Q1(i)=Q_1(h,x(i),t(1));
% elseif x(i)<=t(3)
% Q1(i)=Q_2(h,x(i),t(2));
% elseif x(i)<=t(4)
% Q1(i)=Q_3(h,x(i),t(4));
% elseif x(i)<=t(5)
% Q1(i)=Q_4(h,x(i),t(5));
% else
% Q1(i)=0;
% end
% end
% Q1;
% for i=1:m
% if x(i)<=t(2)
% Q2(i)=0;
% elseif x(i)<=t(3)
% Q2(i)=Q_1(h,x(i),t(2));
% elseif x(i)<=t(4)
% Q2(i)=Q_2(h,x(i),t(3));
% elseif x(i)<=t(5)
% Q2(i)=Q_3(h,x(i),t(5));
% elseif x(i)<=t(6)
% Q2(i)=Q_4(h,x(i),t(6));
% else
% Q2(i)=0;
% end
% end
% Q2;
% for i=1:m
% if x(i)<=t(3)
% Q3(i)=0;
% elseif x(i)<=t(4)
% Q3(i)=Q_1(h,x(i),t(3));
% elseif x(i)<=t(5)
% Q3(i)=Q_2(h,x(i),t(4));
% elseif x(i)<=t(6)
% Q3(i)=Q_3(h,x(i),t(6));
% elseif x(i)<=t(7)
% Q3(i)=Q_4(h,x(i),t(7));
% else
% Q3(i)=0;
% end
% end
```

```
% Q3;
% for i=1:m
% if x(i)<=t(4)
% Q4(i)=0;
% elseif x(i)<=t(5)
% Q4(i)=Q_1(h,x(i),t(4));
% elseif x(i)<=t(6)
% Q4(i)=Q_2(h,x(i),t(5));
% elseif x(i)<=t(7)
% Q4(i)=Q_3(h,x(i),t(7));
% elseif x(i)<=t(8)
% Q4(i)=Q_4(h,x(i),t(8));
% else
% Q4(i)=0;
% end
% end
% Q4;
% for i=1:m
% if x(i)<=t(5)
% Q5(i)=0;
% elseif x(i)<=t(6)
% Q5(i)=Q_1(h,x(i),t(5));
% elseif x(i)<=t(7)
% Q5(i)=Q_2(h,x(i),t(6));
% elseif x(i)<=t(8)
% Q5(i)=Q_3(h,x(i),t(8));
% elseif x(i)<=t(9)
% Q5(i)=Q_4(h,x(i),t(9));
% end
% end
% Q5;
% for i=1:m
% if x(i)<=t(6)
% Q6(i)=0;
% elseif x(i)<=t(7)
% Q6(i)=Q_1(h,x(i),t(6));
% elseif x(i)<=t(8)
% Q6(i)=Q_2(h,x(i),t(7));
% elseif x(i)<=t(9)
% Q6(i)=Q_3(h,x(i),t(9));
% end
% end
% Q6;
```

```
% for i=1:m
% if x(i)<=t(7)
% Q7(i)=0;
% elseif x(i)<=t(8)
% Q7(i)=Q_1(h,x(i),t(7));
% elseif x(i)<=t(9)
% Q7(i)=Q_2(h,x(i),t(8));
% end
% end
% Q7;
% for i=1:m
% if x(i)<=t(8)
% Q8(i)=0;
% elseif x(i)<=t(9)
% Q8(i)=Q_1(h,x(i),t(8));
% end
% end
% Q8;
% Q=[Q1;Q2;Q3;Q4;Q5;Q6;Q7;Q8];
%Matriks Df^t untuk h=0.5
for i=1:m
if x(i)<=t(1)
Q1(i)=0;
elseif x(i)<=t(2)
Q1(i)=Q_1(h,x(i),t(1));
elseif x(i)<=t(3)
Q1(i)=Q_2(h,x(i),t(2));
elseif x(i)<=t(4)
Q1(i)=Q_3(h,x(i),t(4));
elseif x(i)<=t(5)
Q1(i)=Q_4(h,x(i),t(5));
else
Q1(i)=0;
end
end
Q1;
for i=1:m
if x(i)<=t(2)
Q2(i)=0;
elseif x(i)<=t(3)
Q2(i)=Q_1(h,x(i),t(2));
elseif x(i)<=t(4)
Q2(i)=Q_2(h,x(i),t(3));
```

```
elseif x(i)<=t(5)
Q2(i)=Q_3(h,x(i),t(5));
elseif x(i)<=t(6)
Q2(i)=Q_4(h,x(i),t(6));
else
Q2(i)=0;
end
end
Q2;
for i=1:m
if x(i)<=t(3)
Q3(i)=0;
elseif x(i)<=t(4)
Q3(i)=Q_1(h,x(i),t(3));
elseif x(i)<=t(5)
Q3(i)=Q_2(h,x(i),t(4));
elseif x(i)<=t(6)
Q3(i)=Q_3(h,x(i),t(6));
elseif x(i)<=t(7)
Q3(i)=Q_4(h,x(i),t(7));
else
Q3(i)=0;
end
end
Q3;
for i=1:m
if x(i)<=t(4)
Q4(i)=0;
elseif x(i)<=t(5)
Q4(i)=Q_1(h,x(i),t(4));
elseif x(i)<=t(6)
Q4(i)=Q_2(h,x(i),t(5));
elseif x(i)<=t(7)
Q4(i)=Q_3(h,x(i),t(7));
elseif x(i)<=t(8)
Q4(i)=Q_4(h,x(i),t(8));
else
Q4(i)=0;
end
end
Q4;
for i=1:m
if x(i)<=t(5)
```

```
Q5(i)=0;
elseif x(i)<=t(6)
Q5(i)=Q_1(h,x(i),t(5));
elseif x(i)<=t(7)
Q5(i)=Q_2(h,x(i),t(6));
elseif x(i)<=t(8)
Q5(i)=Q_3(h,x(i),t(8));
elseif x(i)<=t(9)
Q5(i)=Q_4(h,x(i),t(9));
end
end
Q5;
Q=[Q1;Q2;Q3;Q4;Q5];
[n,m]=size(Q);
%Matriks A
A=Q*Q';
%Determinan matriks A
Det_A=det(A);
%Vektor b
for j=1:n
b(j,1)=0;
for i=1:m
b(j,1)=b(j,1)+Q(j,i)*y(i);
end
end
disp('A=')
disp(A)
disp(' ')
disp('Det(A)=')
disp(Det_A)
disp(' ')
disp('b=')
disp(b)
disp(' ')
%Invers matriks A
A_1=inv(A);
%Penyelesaian SPL AX=b ---->X=Invers(A)*b
X=A_1*b;
disp('X=')
disp(X)
disp(' ')
%Partisi-patisi untuk h=0.1
% xx1=linspace(0,0.1);
```

```
% xx2=linspace(0.1,0.2);
% xx3=linspace(0.2,0.3);
% xx4=linspace(0.3,0.4);
% xx5=linspace(0.4,0.5);
% xx6=linspace(0.5,0.6);
% xx7=linspace(0.6,0.7);
% xx8=linspace(0.7,0.8);
% xx9=linspace(0.8,0.9);
% xx10=linspace(0.9,1);
%Partisi-partisi untuk h=0.2
% xx1=linspace(0,0.2);
% xx2=linspace(0.2,0.4);
% xx3=linspace(0.4,0.6);
% xx4=linspace(0.6,0.8);
% xx5=linspace(0.8,1);
%Partisi-partisi untuk h=0.5
xx1=linspace(0,0.5);
xx2=linspace(0.5,1);
% %Kurva B-spine untuk h=0.1
% f1=X(1).*(1./(4.*h.^3)).*(t(5)-
xx1).^3+X(2).*(1./(4.*h.^3)).*(h.^3+3.*(h.^2).*(t(5
)-xx1)...
% +3.*h.*(t(5)-xx1).^2-3.*(t(5)-
xx1).^3)+X(3).*(1./(4.*h.^3)).*(h.^3+3.*(h.^2).*(xx
1-t(4))...
% +3.*h.*(xx1-t(4)).^2-3.*(xx1-
t(4)).^3)+X(4).*(1./(4.*h.^3)).*(xx1-t(4)).^3;
% f2=X(2).*(1./(4.*h.^3)).*(t(6)-
xx2).^3+X(3).*(1./(4.*h.^3)).*(h.^3+3.*(h.^2).*(t(6
)-xx2)...
% +3.*h.*(t(6)-xx2).^2-3.*(t(6)-
xx2).^3)+X(4).*(1./(4.*h.^3)).*(h.^3+3.*(h.^2).*(xx
2-t(5))...
% +3.*h.*(xx2-t(5)).^2-3.*(xx2-
t(5)).^3)+X(5).*(1./(4.*h.^3)).*(xx2-t(5)).^3;
% f3=X(3).*(1./(4.*h.^3)).*(t(7)-
xx3).^3+X(4).*(1./(4.*h.^3)).*(h.^3+3.*(h.^2).*(t(7
)-xx3)...
% +3.*h.*(t(7)-xx3).^2-3.*(t(7)-
xx3).^3)+X(5).*(1./(4.*h.^3)).*(h.^3+3.*(h.^2).*(xx
3-t(6))...
% +3.*h.*(xx3-t(6)).^2-3.*(xx3-
t(6)).^3)+X(6).*(1./(4.*h.^3)).*(xx3-t(6)).^3;
```

```
% f4=X(4).*(1./(4.*h.^3)).*(t(8)-
xx4).^3+X(5).*(1./(4.*h.^3)).*(h.^3+3.*(h.^2).*(t(8
)-xx4)...
% +3.*h.*(t(8)-xx4).^2-3.*(t(8)-
xx4).^3)+X(6).*(1./(4.*h.^3)).*(h.^3+3.*(h.^2).*(xx
4-t(7))...
% +3.*h.*(xx4-t(7)).^2-3.*(xx4-
t(7)).^3)+X(7).*(1./(4.*h.^3)).*(xx4-t(7)).^3;
% f5=X(5).*(1./(4.*h.^3)).*(t(9)-
xx5).^3+X(6).*(1./(4.*h.^3)).*(h.^3+3.*(h.^2).*(t(9
)-xx5)...
% +3.*h.*(t(9)-xx5).^2-3.*(t(9)-
xx5).^3)+X(7).*(1./(4.*h.^3)).*(h.^3+3.*(h.^2).*(xx
5-t(8))...
% +3.*h.*(xx5-t(8)).^2-3.*(xx5-
t(8)).^3)+X(8).*(1./(4.*h.^3)).*(xx5-t(8)).^3;
% f6=X(6).*(1./(4.*h.^3)).*(t(10)-
xx6).^3+X(7).*(1./(4.*h.^3)).*(h.^3+3.*(h.^2).*(t(1
0)-xx6)...
% +3.*h.*(t(10)-xx6).^2-3.*(t(10)-
xx6).^3)+X(8).*(1./(4.*h.^3)).*(h.^3+3.*(h.^2).*(xx
6-t(9))...
% +3.*h.*(xx6-t(9)).^2-3.*(xx6-
t(9)).^3)+X(9).*(1./(4.*h.^3)).*(xx6-t(9)).^3;
% f7=X(7).*(1./(4.*h.^3)).*(t(11)-
xx7).^3+X(8).*(1./(4.*h.^3)).*(h.^3+3.*(h.^2).*(t(1
1)-xx7)...
% +3.*h.*(t(11)-xx7).^2-3.*(t(11)-
xx7).^3)+X(9).*(1./(4.*h.^3)).*(h.^3+3.*(h.^2).*(xx
7-t(10))...
% +3.*h.*(xx7-t(10)).^2-3.*(xx7-
t(10)).^3)+X(10).*(1./(4.*h.^3)).*(xx7-t(10)).^3;
% f8=X(8).*(1./(4.*h.^3)).*(t(12)-
xx8).^3+X(9).*(1./(4.*h.^3)).*(h.^3+3.*(h.^2).*(t(1
2)-xx8)...
% +3.*h.*(t(12)-xx8).^2-3.*(t(12)-
xx8).^3)+X(10).*(1./(4.*h.^3)).*(h.^3+3.*(h.^2).*(x
x8-t(11))...
% +3.*h.*(xx8-t(11)).^2-3.*(xx8-
t(11)).^3)+X(11).*(1./(4.*h.^3)).*(xx8-t(11)).^3;
% f9=X(9).*(1./(4.*h.^3)).*(t(13)-
xx9).^3+X(10).*(1./(4.*h.^3)).*(h.^3+3.*(h.^2).*(t(
13)-xx9)...
```

```
% +3.*h.*(t(13)-xx9).^2-3.*(t(13)-
xx9).^3)+X(11).*(1./(4.*h.^3)).*(h.^3+3.*(h.^2).*(x
x9-t(12))...
% +3.*h.*(xx9-t(12)).^2-3.*(xx9-
t(12)).^3)+X(12).*(1./(4.*h.^3)).*(xx9-t(12)).^3;
% f10=X(10).*(1./(4.*h.^3)).*(t(14)-
xx10).^3+X(11).*(1./(4.*h.^3)).*(h.^3+3.*(h.^2).*(t
(14)-xx10)...
% +3.*h.*(t(14)-xx10).^2-3.*(t(14)-
xx10).^3)+X(12).*(1./(4.*h.^3)).*(h.^3+3.*(h.^2).*(
xx10-t(13))...
% +3.*h.*(xx10-t(13)).^2-3.*(xx10-
t(13)).^3)+X(13).*(1./(4.*h.^3)).*(xx10-t(13)).^3;

%Kurva B-spine untuk h=0.2
% f1=X(1).*(1./(4.*h.^3)).*(t(5)-
xx1).^3+X(2).*(1./(4.*h.^3)).*(h.^3+3.*(h.^2).*(t(5
)-xx1)...
% +3.*h.*(t(5)-xx1).^2-3.*(t(5)-
xx1).^3)+X(3).*(1./(4.*h.^3)).*(h.^3+3.*(h.^2).*(xx
1-t(4))...
% +3.*h.*(xx1-t(4)).^2-3.*(xx1-
t(4)).^3)+X(4).*(1./(4.*h.^3)).*(xx1-t(4)).^3;
% f2=X(2).*(1./(4.*h.^3)).*(t(6)-
xx2).^3+X(3).*(1./(4.*h.^3)).*(h.^3+3.*(h.^2).*(t(6
)-xx2)...
% +3.*h.*(t(6)-xx2).^2-3.*(t(6)-
xx2).^3)+X(4).*(1./(4.*h.^3)).*(h.^3+3.*(h.^2).*(xx
2-t(5))...
% +3.*h.*(xx2-t(5)).^2-3.*(xx2-
t(5)).^3)+X(5).*(1./(4.*h.^3)).*(xx2-t(5)).^3;
% f3=X(3).*(1./(4.*h.^3)).*(t(7)-
xx3).^3+X(4).*(1./(4.*h.^3)).*(h.^3+3.*(h.^2).*(t(7
)-xx3)...
% +3.*h.*(t(7)-xx3).^2-3.*(t(7)-
xx3).^3)+X(5).*(1./(4.*h.^3)).*(h.^3+3.*(h.^2).*(xx
3-t(6))...
% +3.*h.*(xx3-t(6)).^2-3.*(xx3-
t(6)).^3)+X(6).*(1./(4.*h.^3)).*(xx3-t(6)).^3;
% f4=X(4).*(1./(4.*h.^3)).*(t(8)-
xx4).^3+X(5).*(1./(4.*h.^3)).*(h.^3+3.*(h.^2).*(t(8
)-xx4)...
```

```
% +3.*h.*(t(8)-xx4).^2-3.*(t(8)-
xx4).^3)+X(6).*(1./(4.*h.^3)).*(h.^3+3.*(h.^2).*(xx
4-t(7))...
% +3.*h.*(xx4-t(7)).^2-3.*(xx4-
t(7)).^3)+X(7).*(1./(4.*h.^3)).*(xx4-t(7)).^3;
% f5=X(5).*(1./(4.*h.^3)).*(t(9)-
xx5).^3+X(6).*(1./(4.*h.^3)).*(h.^3+3.*(h.^2).*(t(9
)-xx5)...
% +3.*h.*(t(9)-xx5).^2-3.*(t(9)-
xx5).^3)+X(7).*(1./(4.*h.^3)).*(h.^3+3.*(h.^2).*(xx
5-t(8))...
% +3.*h.*(xx5-t(8)).^2-3.*(xx5-
t(8)).^3)+X(8).*(1./(4.*h.^3)).*(xx5-t(8)).^3;

%Kurva B-spine untuk h=0.5
f1=X(1).*(1./(4.*h.^3)).*(t(5)-
xx1).^3+X(2).*(1./(4.*h.^3)).*(h.^3+3.*(h.^2).*(t(5
)-xx1)...
+3.*h.*(t(5)-xx1).^2-3.*(t(5)-
xx1).^3)+X(3).*(1./(4.*h.^3)).*(h.^3+3.*(h.^2).*(xx
1-t(4))...
+3.*h.*(xx1-t(4)).^2-3.*(xx1-
t(4)).^3)+X(4).*(1./(4.*h.^3)).*(xx1-t(4)).^3;
f2=X(2).*(1./(4.*h.^3)).*(t(6)-
xx2).^3+X(3).*(1./(4.*h.^3)).*(h.^3+3.*(h.^2).*(t(6
)-xx2)...
+3.*h.*(t(6)-xx2).^2-3.*(t(6)-
xx2).^3)+X(4).*(1./(4.*h.^3)).*(h.^3+3.*(h.^2).*(xx
2-t(5))...
+3.*h.*(xx2-t(5)).^2-3.*(xx2-
t(5)).^3)+X(5).*(1./(4.*h.^3)).*(xx2-t(5)).^3;
%Galat untuk h=0.1
% for i=1:m
% err(i)=y(i)-(X(1)*Q(1,i)+X(2)*Q(2,i)+...
% X(3)*Q(3,i)+X(4)*Q(4,i)+X(5)*Q(5,i)+...
% X(6)*Q(6,i)+X(7)*Q(7,i)+X(8)*Q(8,i)+...
% X(9)*Q(9,i)+X(10)*Q(10,i)+X(11)*Q(11,i)+...
% X(12)*Q(12,i)+X(13)*Q(13,i));
% galat=galat+(err(i))^2;
% Kuadrat_galat=sqrt(galat);
% end
%Galat untuk h=0.2
```

```
% for i=1:m
% err(i)=y(i)-(X(1)*Q(1,i)+X(2)*Q(2,i)+...
% X(3)*Q(3,i)+X(4)*Q(4,i)+X(5)*Q(5,i)+...
% X(6)*Q(6,i)+X(7)*Q(7,i)+X(8)*Q(8,i));
% galat=galat+(err(i))^2;
% Kuadrat_galat=sqrt(galat);
% end
%Galat untuk h=0.5
for i=1:m
err(i)=y(i)-(X(1)*Q(1,i)+X(2)*Q(2,i)+...
X(3)*Q(3,i)+X(4)*Q(4,i)+X(5)*Q(5,i));
galat=galat+(err(i))^2;
Kuadrat_galat=sqrt(galat);
end
disp('F=')
disp(Kuadrat_galat)
subplot(1,2,1)
%Pemanggil plot untuk h=0.1
%plot(x,y,'ko',xx1,f1,'b',xx2,f2,'b',xx3,f3,'b',...
%xx4,f4,'b',xx5,f5,'b',xx6,f6,'b',xx7,f7,'b',...
%xx8,f8,'b',xx9,f9,'b',xx10,f10,'b','LineWidth',...
%2,'MarkerEdgeColor','k','MarkerFaceColor','g',...
%'MarkerSize',8)
%Pemanggil plot untuk h=0.2
%plot(x,y,'ko',xx1,f1,'b',xx2,f2,'b',xx3,f3,'b',...
%xx4,f4,'b',xx5,f5,'b','LineWidth',2,...
%'MarkerEdgeColor','k','MarkerFaceColor','g',...
%'MarkerSize',8)
%Pemanggil plot untuk h=0.5
plot(x,y,'ko',xx1,f1,'b',xx2,f2,'b','LineWidth',...
2,'MarkerEdgeColor','k','MarkerFaceColor','g',...
'MarkerSize',8)
grid on
title('Pendekatan Fungsi B-Spline')
xlabel('x'), ylabel('y'),legend('Data','B-Spline')
subplot(1,2,2)
plot(x,err,'b','LineWidth',2)
grid on
title('Kurva
Galat'),legend('Galat'),xlabel('x'),...
ylabel('Interval Galat')
```

Lampiran 2. *Output* Program

KASUS 1

Percobaan pertama dengan $h = 0.5$.

A=

0.0700	0.3318	0.1167	0.0014	0
0.3318	2.3165	1.9324	0.2521	0.0022
0.1167	1.9324	4.9328	2.5194	0.1828
0.0014	0.2521	2.5194	3.4569	0.4776
0	0.0022	0.1828	0.4776	0.0911

b=	***X=***
0.0838	0.4526
1.1577	-0.0486
2.9250	0.5862
1.8515	-0.0614
0.1919	1.2527

det(A)=	*F=*
0.0016	0.0871

Percobaan kedua dengan $h = 0.2$.

A=

Kolom 1 sampai 6

0.0625	0.2518	0.0661	0.0004	0	0
0.2518	1.2235	0.6900	0.0589	0.0007	0
0.0661	0.6900	1.2663	0.7772	0.1172	0.0010
0.0004	0.0589	0.7772	2.1767	1.0570	0.0989
0	0.0007	0.1172	1.0570	2.0414	1.0306
0	0	0.0010	0.0989	1.0306	2.1409
0	0	0	0.0010	0.1016	1.1976
0	0	0	0	0.0011	0.0980

Kolom 7 sampai 8

0	0
0	0
0	0
0.0010	0
0.1016	0.0011
1.1976	0.0980
1.8356	0.2945
0.2945	0.0654

***b*=**	***X*=**
0.0513	-0.9459
0.3652	0.4061
0.7154	0.1215
1.3987	0.3804
1.4797	0.4098
1.2196	0.1944
0.8594	0.2538
0.1206	0.4032

det(A)= 4.9972×10^{-5}

F= 0.0435

Percobaan ketiga dengan $h = 0.1$.

A=

Kolom 1 sampai 6

0.0625	0.2500	0.0625	0	0	0
0.2500	1.0010	0.2725	0.0225	0.0010	0
0.0625	0.2725	0.5791	0.5166	0.0225	0
0	0.0225	0.5166	0.5240	0.0984	0.0448
0	0.0010	0.0225	0.0984	0.8010	0.5834
0	0	0	0.0448	0.5834	1.2009
0	0	0	0.0006	0.0602	0.5843
0	0	0	0	0.0003	0.0624
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

Kolom 7 sampai 12

0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0.0006	0	0	0	0	0
0.0602	0.0003	0	0	0	0
0.5843	0.0624	0.0000	0	0	0
1.1589	0.4038	0.0450	0.0006	0	0
0.4038	0.9101	0.5835	0.0602	0.0003	0
0.0450	0.5835	1.1706	0.4483	0.0355	0.0009
0.0006	0.0602	0.4483	0.8491	0.6245	0.0672
0	0.0003	0.0355	0.6245	1.3443	0.6611
0	0	0.0009	0.0672	0.6611	1.1800
0	0	0	0.0003	0.0644	0.2508

Kolom 13

0
0
0
0
0
0
0
0
0
0.0003
0.0644
0.2508
0.0625

b=	*X*=
0.0500	-8.1758
0.2106	-2.9697
0.2944	0.0493
0.2804	-0.9919
0.4528	0.1270
0.8417	0.3828
0.8335	0.3828
0.7137	0.2813
0.7199	0.5313
0.5003	-0.2500
0.6500	0.6250
0.5620	0.2500
0.1007	1.0000

det(A)=
-1.5959×10^{-53}

F=
5.3367

Pada Lampiran 2 ini hanya ditampilkan output (nilai matriks A, vektor $\boldsymbol{b}$ dan $\boldsymbol{x}$) untuk kasus 1. Output (ukuran matriks dan vektor) untuk kasus 2, 3, 4, 5, dan 6 analog dengan kasus 1, untuk setiap percobaan h yang dilakukan. Namun, nilai-nilai matriks dan vektor pada setiap kasus tentunya berbeda.