BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Diferensial

Persamaan yang memuat turunan suatu fungsi yang tak diketahui disebut persamaan diferensial. Pada persamaan diferensial, orde adalah tingkat tertinggi dari turunan yang terdapat pada persamaan. Secara umum, persamaan diferensial orde n memiliki bentuk

$$F\left[t, x(t), x'(t), x''(t), \ldots, x^{(n)}(t)\right] = 0, \tag{2.1}$$

dengan F adalah fungsi yang terdiri dari $(n+2)$ variabel dan turunan ke-n adalah turunan tertinggi pada persamaan (Edwards dan Penney, 2001).

2.2 Sistem Dinamik

Sistem dinamik adalah suatu sistem yang dapat diketahui kondisinya pada masa yang akan datang jika diberikan kondisi pada masa sekarang atau pada masa yang lalu. Sistem dinamik dinyatakan dalam bentuk persamaan diferensial sebagai berikut

$$\frac{d\overline{x}}{dt} = f(\vec{x}), \tag{2.2}$$

dengan $\vec{x}(t) \in R^n$ merupakan solusi sistem (2.2) pada saat t (Nagle dan Saff, 2004).

2.2.1 Sistem Otonomus

Sistem persamaan diferensial orde satu berdimensi tiga yang memiliki bentuk

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= F_1(x, y, z), \\ \frac{dy}{dt} &= F_2(x, y, z), \\ \frac{dz}{dt} &= F_3(x, y, z), \end{aligned} \tag{2.3}$$

dengan F_i tidak bergantung secara eksplisit terhadap variabel bebas t, untuk $i = 1, 2, 3$, disebut sistem otonomus (Boyce dan Diprima, 2009).

2.2.2 Titik Kesetimbangan

Titik kesetimbangan suatu sistem otonomus adalah titik yang menyebabkan sistem tersebut tidak mengalami perubahan sepanjang waktu. Titik (x^*, y^*, z^*) disebut titik kesetimbangan sistem (2.3) jika

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= F_1(x, y, z) = 0, \\
\frac{dy}{dt} &= F_2(x, y, z) = 0, \\
\frac{dz}{dt} &= F_3(x, y, z) = 0.
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

Pada kondisi $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = 0$, solusi $x^*(t)$, $y^*(t)$, dan $z^*(t)$ tidak mengalami perubahan nilai seiring dengan peningkatan nilai t (Boyce dan Diprima, 2009).

2.2.3 Kestabilan Titik Kesetimbangan Sistem Otonomus Linear

Suatu sistem otonomus dikatakan linear jika tidak terdapat operasi non linear antara variabel tak bebasnya. Perhatikan sistem otonomus linear berikut.

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= ax + by + cz, \\
\frac{dy}{dt} &= ex + fy + gz, \\
\frac{dz}{dt} &= hx + iy + jz,
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

dengan $a, b, c, e, f, g, h, i, j \in R$. Sistem (2.5) dapat dinyatakan dalam bentuk matriks sebagai

$$
\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dx}{dt} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},
$$

dengan $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ h & i & j \end{bmatrix}$ disebut matriks koefisien sistem (2.5) dan $\det(A) \neq 0$. Menurut Edwards dan Penney (2001) jenis kestabilan sistem otonomus linear (2.5) dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen maktriks A seperti diberikan pada Teorema 2.2.3.1 berikut

Teorema 2.2.3.1
Misalkan λ_1, λ_2, dan λ_3 adalah nilai-nilai eigen atau akar karakteristik sistem (2.5). Titik kesetimbangan (x^*, y^*, z^*) bersifat

1. stabil, jika ketiga nilai eigen λ_1, λ_2, dan λ_3 mempunyai bagian real yang tak positif.
2. tidak stabil, jika sedikitnya satu nilai eigen mempunyai bagian real yang positif.

2.2.4 Kriteria Kestabilan Routh-Hurwitz

Jika suatu sistem linear mempunyai persamaan karakteristik berbentuk

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_n\lambda + a_n = 0, \qquad (2.6)$$

maka kestabilan titik kesetimbangannya dapat ditentukan dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz tanpa harus menentukan nilai eigen matriks koefisien sistem seperti yang dinyatakan dalam Teorema 2.2.4.1.

Teorema 2.2.4.1
Dengan menggunakan koefisien-koefisien persamaan (2.6) dibangun m matriks, dengan $m = n - 1$, yaitu

$$H_1 = [a_1], H_2 = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{bmatrix}, H_3 = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{bmatrix}, \ldots,$$

$$H_m = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_m \end{bmatrix}.$$

Titik kesetimbangan sistem linear berdimensi n bersifat stabil jika dan hanya jika determinan matriks Routh-Hurwitz positif, yakni

$$|H_i| > 0 \text{ untuk } i = 1, 2, 3, \ldots, m$$

(Murray, 2002).

Untuk suatu sistem linear tiga dimensi yang mempunyai persamaan karateristik berbentuk

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0,$$

syarat agar titik kesetimbangan sistem bersifat stabil adalah

$$(i) \quad |H_1| = a_1 > 0,$$

$$(ii) \quad |H_2| = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = a_1a_2 - a_3 > 0.$$

2.3 Persamaan Diferensial Tundaan

Persamaan diferensial dengan tundaan dinyatakan dalam bentuk

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k}{dt^k} x(t) + \sum_{k=0}^{m} b_k \frac{d^k}{dt^k} x(t-\tau) = 0, \tag{2.7}$$

dengan τ adalah waktu tunda dan $\frac{d^0}{dt^0}x(t) = x(t)$. Misalkan $x(t) = e^{\lambda t}$, maka

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k e^{\lambda t} + \sum_{k=0}^{m} b_k \lambda^k e^{\lambda(t-\tau)} = 0$$

$$e^{\lambda t}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k + \sum_{k=0}^{m} b_k \lambda^k e^{-\lambda\tau}\right) = 0.$$

Karena $e^{\lambda t} \neq 0$, maka

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k + \sum_{k=0}^{m} b_k \lambda^k e^{-\lambda\tau} = 0. \tag{2.8}$$

Persamaan (2.8) disebut persamaan karakteristik untuk persamaan (2.7). Misalkan

$$P_1(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k \quad \text{dan} \quad P_2(\lambda) = \sum_{k=0}^{m} b_k \lambda^k,$$

maka persamaan (2.9) dapat dituliskan kembali sebagai

$$P_1(\lambda) + P_2(\lambda)e^{-\lambda\tau} = 0 \tag{2.9}$$

(Kuang, 1993).

2.4 Eksistensi Nilai Kritis Tundaan

Misalkan terdapat sistem persamaan diferensial tundaan linear yang memiliki persamaan karakteristik seperti persamaan (2.9), yaitu

$$P_1(\lambda) + P_2(\lambda)e^{-\lambda\tau} = 0.$$

Nilai kritis tundaan (τ_0) sistem tersebut adalah suatu nilai yang menandai perubahan kestabilan solusi saat nilai τ melampaui τ_0. Apabila sistem memiliki nilai eigen $\lambda_j = u_j \pm iv_j$, dengan $j = 1, 2, 3$, maka akan terjadi perubahan kestabilan ketika nilai u_j berubah tanda. Untuk mengamati eksistensi nilai kritis tundaan, terlebih dahulu ditentukan akar persamaan karakteristik yang bernilai imajiner murni ($\lambda = \pm iv_j$). Oleh karena itu, penentuan nilai kritis tundaan dilakukan dengan mensubstitusikan $\lambda = iv$ pada persamaan (2.9), sehingga diperoleh

$$P_1(iv) + P_2(iv)e^{-iv\tau} = 0.$$

Jika bagian polinomial dipisah menjadi bagian real dan imajiner serta suku eksponennya diubah dalam bentuk trigonometri, maka diperoleh

$$R_1(v) + iQ_1(v) + (R_2(v) + iQ_2(v))(\cos v\tau - i \sin v\tau) = 0, \tag{2.10}$$

dengan

$$R_1(v) = \sum j(-1)^{j+1} a_j v^{2j}; \quad Q_1(v) = \sum j(-1)^j a_{j+1} v^{2j+1}$$

$$R_2(v)=\sum j(-1)^{j+1}b_j v^{2j}; \quad Q_2(v)=\sum j(-1)^j b_{j+1}v^{2j+1}.$$

Agar persamaan (2.10) dipenuhi, bagian real dan imajiner harus sama dengan nol sehingga

$$R_1(v)+R_2(v)\cos v\tau+Q_2(v)\sin v\tau=0$$

$$Q_1(v)-R_2(v)\sin v\tau+Q_2(v)\cos v\tau=0,$$

atau

$$\begin{aligned} -R_1(v)&=R_2(v)\cos v\tau+Q_2(v)\sin v\tau\\ Q_1(v)&=R_2(v)\sin v\tau-Q_2(v)\cos v\tau \end{aligned} \tag{2.11}$$

Jika persamaan (2.11) dikuadratkan, maka diperoleh

$$\begin{aligned} (R_1(v))^2=&(R_2(v))^2\cos^2 v\tau+(Q_2(v))^2\sin^2 v\tau\\ &+2R_2(v)Q_2(v)\sin v\tau\cos v\tau, \end{aligned} \tag{2.12}$$

dan

$$\begin{aligned} (Q_1(v))^2=&(R_2(v))^2\sin^2 v\tau+(Q_2(v))^2\cos^2 v\tau\\ &-2R_2(v)Q_2(v)\sin v\tau\cos v\tau. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Selanjutnya, kedua persamaan (2.12) dan (2.13) dijumlahkan sehingga diperoleh

$$(R_1(v))^2+(Q_1(v))^2=(R_2(v))^2+(Q_2(v))^2 \tag{2.14}$$

Misal v_0 memenuhi persamaan (2.14), maka persamaan (2.11) dapat ditulis kembali dalam v_0 dengan $d=\sqrt{(R_2(v))^2+(Q_2(v))^2}$ sebagai

$$\begin{aligned} -R_1(v_0)&=d\left(\frac{R_2(v_0)}{d}\cos v_0\tau+\frac{Q_2(v_0)}{d}\sin v_0\tau\right)\\ Q_1(v_0)&=d\left(\frac{R_2(v_0)}{d}\sin v_0\tau-\frac{Q_2(v_0)}{d}\cos v_0\tau\right). \end{aligned}$$

Misal $\frac{R_2(v_0)}{d}=\cos\beta$ dan $\frac{Q_2(v_0)}{d}=\sin\beta$, maka

$$-R_1(v_0)=d(\cos\beta\cos v_0\tau+\sin\beta\sin v_0\tau) \tag{2.15}$$

$$Q_1(v_0)=d(\cos\beta\sin v_0\tau-\sin\beta\cos v_0\tau) \tag{2.16}$$

Dengan menggunakan sifat-sifat trigonometri diperoleh

$$-R_1(v_0) = d\cos(v_0\tau - \beta)$$
$$Q_1(v_0) = d\sin(v_0\tau - \beta).$$

Nilai τ^* dapat diperoleh dari persamaan (2.15) dan (2.16), yaitu dengan mengalikan (2.15) dengan $\cos\beta$ dan (2.16) dengan $\sin\beta$ kemudian kedua persamaan dikurangkan, sehingga diperoleh

$$-R_1(v_0)\cos\beta - Q_1(v_0)\sin\beta = d\cos^2\beta\cos v_0\tau + d\sin^2\beta\cos v_0\tau$$
$$-R_1(v_0)\cos\beta - Q_1(v_0)\sin\beta = d\cos v_0\tau$$
$$v_0\tau = \arccos\left\{\frac{-R_1(v_0)\cos\beta - Q_1(v_0)\sin\beta}{d}\right\} + 2n\pi,$$
$$\tau_n^* = \frac{1}{v_0}\arccos\left\{\frac{-R_1(v_0)\cos\beta - Q_1(v_0)\sin\beta}{d}\right\} + \frac{2n\pi}{v_0}, \quad (2.17)$$
$$n = 0, 1, 2, \ldots$$

Persamaan (2.17) menunjukkan terdapat tak berhingga τ^* yang memenuhi persamaan (2.9). Karena terdapat tak berhingga nilai n, dipilih $n = 0$ agar efektif. Nilai $\tau^* = \tau_0$ inilah yang merupakan titik kritis tundaan. Setelah titik kritis tundaan τ^* ditemukan, selanjutnya akan ditentukan apakah τ^* memenuhi kondisi transversal.

2.5 Bifurkasi Hopf

Bifurkasi Hopf adalah berubahnya jenis kestabilan suatu titik kesetimbangan suatu persamaan diferensial dikarenakan munculnya sepasang nilai eigen yang bernilai imajiner murni. (Kuznetsov, 1998).

2.5.1 Kondisi Transversal

Perlu diselidiki kondisi yang dapat menyebabkan perubahan kestabilan titik kesetimbangan ketika waktu tunda berubah, yaitu kondisi yang memenuhi

$$\frac{d}{d\tau}Re(\lambda)|_{\lambda=iv^*,\tau=\tau^*} \neq 0.$$

Kondisi ini menyatakan bahwa sepasang akar imajiner murni dari persamaan karakteristik (2.10) melintasi sumbu imajiner dengan kecepatan yang tidak nol (Kuznetsov, 1998). Dengan demikian akan terjadi perubahan nilai real akar persamaan karakteristik dari negatif menuju positif atau sebaliknya.

Berikut ini ditunjukkan lemma yang menjamin terpenuhinya kondisi transversal atau *nondegeneracy.*

Lemma 2.5.1.1(Forde, 2005)
Jika $\lambda = iv^*$ dan $\tau = \tau^*$ memenuhi persamaan karakteristik (2.10), maka

$$\frac{d}{d\tau}Re(\lambda)|_{\lambda=iv^*,\tau=\tau^*} \neq 0,$$

jika dan hanya jika

$$R_1(v^*)R_1'(v^*) + Q_1(v^*)Q_1'(v^*) \neq R_2(v^*)R_2'(v^*) + Q_2(v^*)Q_2'(v^*).$$

Bukti:
Persamaan karakteristik (2.10) dapat ditulis sebagai berikut:

$$e^{-\lambda\tau} = -\frac{P_1(\lambda)}{P_2(\lambda)},$$

sehingga

$$-\lambda\tau = ln\left(-\frac{P_1(\lambda)}{P_2(\lambda)}\right).$$

Misal λ adalah $\lambda(\tau)$. Jika λ diturunkan terhadap τ maka diperoleh

$$-\lambda - \tau\frac{d\lambda}{d\tau} = \frac{P_1'(\lambda)P_2(\lambda) - P_1(\lambda)P_2'(\lambda)}{P_1(\lambda)P_2(\lambda)} \cdot \frac{d\lambda}{d\tau},$$

dimana $' = \frac{d}{d\lambda}$. Untuk $\lambda = iv^*$ dan $\tau = \tau^*$, ruas kiri persamaan adalah $-iv^* - \tau^*\frac{d\lambda}{d\tau}$. Karena iv^* imajiner dan τ^* adalah real, maka $\frac{d\lambda}{d\tau}$ imajiner jika dan hanya jika

$$\frac{P_1'(iv^*)P_2(iv^*) - P_1(iv^*)P_2'(iv^*)}{P_1(iv^*)P_2(iv^*)} \tag{2.19}$$

bernilai real. Selanjutnya harus ditunjukkan bahwa persamaan (2.19) bernilai real. Persamaan (2.19) dipisah bagian real dan imajinernya,

$$\frac{P_1'(iv^*)P_2(iv^*) - P_1(iv^*)P_2'(iv^*)}{P_1(iv^*)P_2(iv^*)}$$
$$= \frac{(Q_1' - iR_1')(R_2 + iQ_2) - (R_1 + iQ_1)(Q_2' - iR_2')}{(R_1 + iQ_1)(R_2 + iQ_2)}$$
$$= \frac{(R_1^2 + Q_1^2)(R_2'Q_2 - Q_2'R_2) + (R_2^2 + Q_2^2)(Q_1'R_1 - R_1'Q_1)}{(R_1^2 + Q_1^2)(R_2^2 + Q_2^2)}$$
$$+ i\frac{(R_1^2 + Q_1^2)(R_2'R_2 + Q_2'Q_2) - (R_2^2 + Q_2^2)(R_1'R_1 + Q_1'Q_1)}{(R_1^2 + Q_1^2)(R_2^2 + Q_2^2)}$$

Persamaan (2.10) bernilai real, jika

$$(R_1^2 + Q_1^2)(R_2'R_2 + Q_2'Q_2) - (R_2^2 + Q_2^2)(R_1'R_1 + Q_1'Q_1) = 0,$$

atau

$$(R_1^2 + Q_1^2)(R_2'R_2 + Q_2'Q_2) = (R_2^2 + Q_2^2)(R_1'R_1 + Q_1'Q_1). \quad (2.20)$$

Berdasarkan persamaan (2.14) dan (2.20), maka diperoleh:

$$R_1R_1' + Q_1Q_1' = R_2R_2' + Q_2Q_2'. \quad (2.21)$$

Oleh karena itu, dapat ditunjukkan

$$\frac{d}{d\tau}Re(\lambda) = 0 \Leftrightarrow R_1R_1' + Q_1Q_1' = R_2R_2' + Q_2Q_2'.$$

Dengan kata lain, terbukti bahwa

$$\frac{d}{d\tau}Re(\lambda)|_{\lambda=iv^*,\tau=\tau^*} \neq 0.$$

jika dan hanya jika

$$R_1(v^*)R_1'(v^*) + Q_1(v^*)Q_1'(v^*) \neq R_2(v^*)R_2'(v^*) + Q_2(v^*)Q_2'(v^*).$$

2.6 Fungsi Investasi, Simpanan, dan Permintaan akan Uang

Pada awalnya besarnya investasi (I), simpanan (S), dan permintaan akan uang (L) dinyatakan oleh fungsi yang secara linear hanya bergantung oleh pendapatan (Y) yaitu:

$$\begin{aligned} I(Y) &= \eta Y, \\ S(Y) &= l_1 Y, \\ L(Y) &= l_2 Y, \end{aligned} \tag{2.22}$$

dengan η, l_1, l_2 berturut-turut merupakan tingkat pertumbuhan investasi terhadap pendapatan, tingkat pertumbuhan simpanan terhadap pendapatan, dan tingkat pertumbuhan permintaan akan uang terhadap pendapatan. Semua parameter dalam model (2.22) merupakan konstanta-konstanta positif dalam interval $[0, 1]$ (Krawiec dan Szydlowski, 2001).

Setelah itu Cai (2005) menambahkan beberapa asumsi yaitu besarnya investasi (I) secara linear bergantung pada pendapatan (Y) dan berkurang oleh stok modal (K) dan suku bunga (R). Sementara itu besarnya simpanan (S) secara linear bergantung pada pendapatan (Y) dan suku bunga (R), dan besarnya permintaan akan uang (L) secara linear bergantung pada pendapatan (Y) dan berkurang oleh suku bunga (R). Fungsi investasi, simpanan dan permintaan akan uang dapat dinotasikan sebagai

$$\begin{aligned} I(Y, K, R) &= \eta Y - \delta_1 K - \beta_1 R, \\ S(Y, R) &= l_1 Y + \beta_2 R, \\ L(Y, R) &= l_2 Y - \beta_3 R, \end{aligned} \tag{2.23}$$

dengan

η =tingkat pertumbuhan investasi terhadap pendapatan

δ_1 =tingkat penurunan investasi terhadap stok modal

l_1 =tingkat pertumbuhan simpanan terhadap pendapatan

l_2 =tingkat pertumbuhan permintaan akan uang terhadap pendapatan

β_1 =tingkat penurunan investasi terhadap suku bunga

β_2 =tingkat pertumbuhan simpanan terhadap suku bunga

β_3 =tingkat penurunan permintaan akan uang terhadap suku bunga

dan $\eta, \delta_1, l_1, l_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ adalah konstanta-konstanta positif pada interval $[0, 1]$ (Cai, 2005).

2.7 Model Siklus Bisnis *IS-LM*

Model *IS-LM* merupakan salah satu model siklus bisnis yang direpresentasikan dalam bentuk sistem dinamik dengan melibatkan fungsi investasi (I), fungsi simpanan (S), fungsi permintaan akan uang (L), dan konstanta persediaan uang (M). Kaldor memperkenalkan model siklus bisnis dalam bentuk sistem persamaan diferensial sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dt} &= \alpha[I(Y(t), K(t)) - S(Y(t), K(t))], \\ \frac{dK}{dt} &= I(Y(t), K(t)). \end{aligned} \tag{2.24}$$

Pada model (2.24), Kaldor mengasumsikan bahwa laju pendapatan sebanding dengan selisih antara investasi dengan simpanan dengan parameter α yang melambangkan percepatan yang diakibatkan oleh kelebihan atau kekurangan investasi. Hal ini mengakibatkan, jika nilai investasi kurang dari nilai simpanan maka laju pendapatan akan bernilai negatif, begitu pula sebaliknya. Sementara itu, laju pertumbuhan modal sama dengan jumlah investasi (Kaldor, 1940).

Selanjutnya, Torre (1977) memperkenalkan model yang berbeda dengan model Kaldor. Pada model Torre, terdapat suku bunga $R(t)$ dan tidak ada stok modal $K(t)$ serta menambahkan beberapa asumsi. Oleh karena itu sistem (2.24) berubah menjadi

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dt} &= \alpha[I(Y(t), R(t)) - S(Y(t), R(t))], \\ \frac{dR}{dt} &= \beta[L(Y(t), R(t)) - \overline{M}]. \end{aligned} \tag{2.25}$$

dengan $\overline{M}$ merupakan konstanta persediaan uang, β adalah percepatan akibat kelebihan atau kekurangan permintaan akan uang, dan $L(Y,R)$ merupakan fungsi permintaan akan uang.

Selanjutnya Gabisch dan Lorenz (1987) mencoba menyempurnakan sistem (2.24) dan sistem (2.25) dengan menggabungkan ide Kaldor dan Torre, serta menambahkan parameter δ yang merupakan tingkat penyusutan stok modal sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{dY}{dt} &= \alpha[I(Y(t),K(t),R(t)) - S(Y(t),R(t))],\\ \frac{dR}{dt} &= \beta[L(Y(t),R(t)) - \overline{M}],\\ \frac{dK}{dt} &= I(Y(t),K(t),R(t)) - \delta K(t).\end{aligned} \tag{2.26}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (2.23) ke persamaan (2.26) diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{dY}{dt} &= \alpha[(\eta - l_1)Y(t) - \delta_1 K(t) - (\beta_1 + \beta_2)R(t)],\\ \frac{dR}{dt} &= \beta[l_2 Y(t) - \beta_3 R(t) - \overline{M}],\\ \frac{dK}{dt} &= \eta Y(t) - \delta_1 K(t) - \delta K(t) - \beta_1 R(t).\end{aligned} \tag{2.27}$$

Kemudian Cai (2005) membuat model siklus bisnis *IS-LM* dengan menambahkan waktu tunda pada persamaan (2.27) pada laju stok modal di dalam variabel pendapatan saat pertama kali investasi dilakukan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\frac{dY}{dt} &= \alpha[(\eta - l_1)Y(t) - \delta_1 K(t) - (\beta_1 + \beta_2)R(t)],\\ \frac{dR}{dt} &= \beta[l_2 Y(t) - \beta_3 R(t) - \overline{M}],\\ \frac{dK}{dt} &= \eta Y(t-\tau) - \delta_1 K(t) - \delta K(t) - \beta_1 R(t).\end{aligned} \tag{2.28}$$

Setelah itu Kaddar dan Talibi (2008) membuat model hasil perkembangan dari model Cai (2005) dengan menambahkan waktu tunda yang tidak hanya terdapat pada variabel pendapatan tetapi terdapat pada semua variabel fungsi investasi di dalam laju stok modal dengan asumsi dibutuhkan waktu persiapan agar investasi dapat digunakan sebagai stok modal untuk produksi.

$$\begin{aligned}
\frac{dY}{dt} &= \alpha[(\eta - l_1)Y(t) - \delta_1 K(t) - (\beta_1 + \beta_2)R(t)],\\
\frac{dR}{dt} &= \beta[l_2 Y(t) - \beta_3 R(t) - \overline{M}],\\
\frac{dK}{dt} &= \eta Y(t-\tau) - \delta_1 K(t-\tau) - \beta_1 R(t-\tau) - \delta K(t).
\end{aligned} \tag{2.29}$$