STRONG α-REVERSIBLE RING

SKRIPSI

Oleh :

TITIS RISTY ANDARI
105090400111023

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2014

STRONG α-REVERSIBLE RING

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

oleh:
TITIS RISTY ANDARI
105090400111023

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2014

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

STRONG α-REVERSIBLE RING

oleh:
TITIS RISTY ANDARI
105090400111023

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji
pada tanggal 6 Agustus 2014
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Pembimbing

Dra. Ari Andari, M.S.
NIP. 196105161987012001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Dr. Abdul Rouf Alghofari, M.Sc.
NIP. 196709071992031001

LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	**: Titis Risty Andari**
NIM	**: 105090400111023**
Jurusan	**: Matematika**
Penulis skripsi berjudul	**: *Strong α-Reversible Ring***

Dengan ini menyatakan bahwa :

1. **Skripsi ini adalah hasil pemikiran saya, bukan hasil plagiat dari tulisan orang lain. Rujukan-rujukan yang tercantum pada daftar pustaka hanya digunakan sebagai acuan atau referensi.**
2. **Apabila suatu saat nanti diketahui bahwa isi skripsi saya merupakan hasil plagiat, maka saya bersedia menanggung akibat hukum dari keadaan tersebut.**

Demikian pernyataan ini dibuat dengan penuh kesadaran.

Malang, 6 Agustus 2014
yang menyatakan,

Titis Risty Andari
NIM 105090400111023

STRONG α-REVERSIBLE RING

ABSTRAK

Misalkan R adalah ring dengan endomorfisma α. Endomorfisma α dalam ring R disebut *strong reversible* kanan jika $x\alpha(y) = 0$ maka $yx = 0$ dan disebut *strong reversible* kiri jika $\alpha(x)y = 0$ maka $yx = 0$ untuk $x, y \in R$. Ring R disebut *strong* α-*reversible* jika endomorfisma α dalam ring R *strong reversible* kiri dan kanan. Dalam skripsi ini dipelajari ring reversibel dengan endomorfisma α serta sifat-sifat yang berhubungan dengan ring *strong* α-*reversible*. Jika R reversibel dan α-reversibel maka R *strong* α-*reversible*.

Kata kunci : endomorfisma, ring reversibel, ring Armendariz.

STRONG α-REVERSIBLE RING

ABSTRACT

Let R be a ring with an endomorphism α. An endomorphism α of a ring R is called strong right reversible if $x\alpha(y) = 0$ then $yx = 0$ and if $\alpha(x)y = 0$ then $yx = 0$ for $x, y \in R$. A ring R is called strong α-reversible if there exist a strong right (resp., left) reversible endomorphism α of R. This thesis studies about reversible ring with endomorphism α also related properties with strong α-reversible ring. If R *reversible* and α*-reversible* then R *strong* α*-reversible*.

Keyword : endomorphism, *reversible ring*, *Armendariz ring.*

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT karena limpahan rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan judul “*Strong α-reversible ring*”.

Skripsi ini disusun sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains dalam bidang Matematika. Skripsi ini juga dapat selesai karena bimbingan dan motivasi dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan rasa terima kasih yang tulus kepada

1. Dra. Ari Andari. M.S. selaku dosen pembimbing, atas segala bimbingan, motivasi, bantuan, serta kesabaran yang telah diberikan selama penulisan skripsi ini,
2. Dr. Abdul Rouf Alghofari, M.Sc. selaku dosen penguji dan Ketua Jurusan Matematika serta Drs. Bambang Sugandi, M.Si. selaku dosen penguji, atas segala kritik dan saran yang telah diberikan untuk perbaikan skripsi ini,
3. Dr. H. Sobri Abusini, MT. selaku Ketua Program Studi Matematika, Kwardiniya A., S.Si., M.Si. selaku dosen Penasihat Akademik,
4. Seluruh dosen Jurusan Matematika yang telah memberikan ilmunya kepada penulis, serta segenap staf dan karyawan TU Jurusan Matematika atas segala bantuannya,
5. Supri Maryono (Bapak), Sumiati (Ibu), Gigih Wicaksono (adik), Agis Prayoga (adik) dan seluruh keluarga besar atas segala doa, bantuan, dan motivasi yang tak pernah habis diberikan,
6. Semua teman-teman Matematika angkatan 2010 atas semangat dan bantuan yang telah diberikan serta kebersamaannya selama ini,
7. Ahmad Khairul Umam selaku teman yang selalu memberikan bantuan, motivasi dan doa dalam rangka menyelesaikan skripsi ini,
8. Keluarga besar HMI Cabang Malang atas kebersamaan kekeluargaan yang dibangun,
9. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Semoga Allah SWT memberikan anugerah dan barokah-Nya kepada semua pihak yang telah membantu menyelesaikan skripsi ini. Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih terdapat kekurangan, oleh karena itu kritik dan saran yang membangun sangat penulis harapkan.

Akhir kata, Semoga skripsi ini bermanfaat bagi semua pihak, serta menjadi sumber inspirasi untuk penulisan skripsi selanjutnya.

Malang, 6 Agustus 2014

Penulis

DAFTAR ISI

Halaman

HALAMAN JUDUL .... **i**
LEMBAR PENGESAHAN .... **iii**
LEMBAR PERNYATAAN .... **v**
ABSTRAK .... **vii**
ABSTRACT .... **ix**
KATA PENGANTAR .... **xi**
DAFTAR ISI .... **xiii**
DAFTAR TABEL .... **xv**
DAFTAR NOTASI .... **xvii**

BAB I PENDAHULUAN **1**
1.1 Latar Belakang 1
1.2 Rumusan Masalah 1
1.3 Tujuan 2

BAB II TINJAUAN PUSTAKA **3**
2.1 Relasi, Pemetaan dan Operasi 3
2.2 Semigrup 4
2.3 Grup 5
2.4 Ring 8

BAB III PEMBAHASAN **23**
3.1 Ring α-reversibel 23
3.2 *Strong α-reversible Ring* 25

BAB IV KESIMPULAN DAN SARAN **35**
4.1 Kesimpulan 35
4.2 Saran 35

DAFTAR PUSTAKA **37**

DAFTAR TABEL

Halaman

Tabel 2.1 Operasi penjumlahan dan pergandaan pada G 7
Tabel 2.2 Operasi penjumlahan dan pergandaan pada $\mathbb{Z}_4$ 9

DAFTAR NOTASI

Notasi	Keterangan
$\mathbb{Z}$	Himpunan bilangan bulat
$\mathbb{Z}^+$	Himpunan bilangan bulat positif
$\mathbb{Z}_n$	Himpunan bilangan bulat modulo n
$\in$	Elemen (anggota)
$\exists$	Terdapat
$\subseteq$	Himpunan bagian
$\emptyset$	Himpunan kosong
$\forall$	Untuk setiap
$\neq$	Tidak sama dengan
$A \times B$	Hasil Ganda Cartesius A dan B
$f: A \to B$	Pemetaan dari A ke B
$M_n(\mathbb{Z})$	Himpunan semua matriks berukuran $n \times n$ dengan entri bilangan bulat
$A_{n\times n}$	Matriks berukuran $n \times n$
a_{ij}	Entri suatu matriks pada baris ke i dan kolom ke j
$*$	Sebarang operasi biner
$+$	Operasi penjumlahan biasa
$\bullet$	Operasi pergandaan biasa
$(S,*)$	Semigrup dengan operasi biner $*$
$(G,*)$	Grup dengan operasi biner $*$
$(H,*)$	Subgrup dari $(G,*)$
$(R,+,\bullet)$	Ring
$(U,+,\bullet)$	Subring dari $(R,+,\bullet)$
$R[x]$	Ring Polinomial
$R[x;\alpha]$	Ring Skew polinomial

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Aljabar merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang mengalami perkembangan pesat. Dalam aljabar, dibahas bermacam-macam struktur aljabar yang masing-masing memiliki sifat yang berbeda. Struktur aljabar dibangun oleh tiga komponen, yaitu himpunan tidak kosong, operasi biner dan aksioma. Suatu struktur aljabar adalah himpunan yang tidak kosong dengan paling sedikit satu atau lebih operasi biner dan memenuhi aksioma–aksioma tertentu. Struktur aljabar yang akan ditinjau disini adalah ring, yaitu suatu himpunan yang tidak kosong dilengkapi dengan dua buah operasi biner dan memenuhi aksioma-aksioma tertentu.

Dalam perkembangan stuktur aljabar diperkenalkan beberapa macam dari ring antara lain ring reversibel. Pada tahun 1999 diperkenalkan ring reversibel oleh Cohn, yang merupakan perluasan dari ring tereduksi. R disebut ring reversibel, jika $xy = 0$ maka $yx = 0$ untuk $x, y \in R$.

Pada tahun 2010 dalam jurnal Baser dan Kwak yang berjudul *On Strong Reversible Rings and Their Extensions* dipelajari perluasan dari ring reversibel dengan endomorfismanya. Endomorfisma α dalam ring R disebut *strong reversible* kanan jika $x\alpha(y) = 0$ maka $yx = 0$ dan disebut *strong reversible* kiri jika $\alpha(x)y = 0$ maka $yx = 0$ untuk $x, y \in R$. Ring R disebut *strong α-reversible* jika endomorfisma α dalam ring R *strong reversible* kiri dan kanan. Oleh karena itu, dalam skripsi ini dibahas definisi, proposisi, serta teorema yang berlaku pada *strong α-reversible ring*.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, permasalahan yang dibahas dalam skripsi ini adalah bagaimana definisi, proposisi, teorema dan contoh, serta bukti–bukti yang berkaitan dengan *strong α-reversible ring*.

1.3 Tujuan

Tujuan penulisan skripsi ini adalah membahas definisi, proposisi, teorema dan contoh, serta bukti – bukti yang berkaitan dengan *strong* α*-reversible ring*.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini dibahas beberapa definisi, teorema dan contoh yang digunakan sebagai dasar untuk mempelajari *strong α-reversible ring*.

2.1 Relasi, Pemetaan dan Operasi

Dalam struktur aljabar, anggota-anggotanya dapat dioperasikan dengan penjumlahan, pergandaan atau keduanya. Berikut akan diberikan definisi dari hasil ganda Cartesius, relasi, pemetaan dan operasi biner.

Definisi 2.1.1 Hasil Ganda Cartesius
Misalkan A dan B adalah himpunan tidak kosong. Himpunan semua pasangan terurut (a, b) dengan $a \in A$ dan $b \in B$ disebut hasil ganda Cartesius antara himpunan A dan B yang dinotasikan sebagai berikut:

$$A \times B = \{(a, b) |\, a \in A, b \in B\}.$$

(Bhattacharya, dkk., 1994)

Definisi 2.1.2 Relasi
Misalkan A dan B adalah himpunan tidak kosong dan R adalah himpunan bagian dari $A \times B$. Maka R disebut relasi dari A ke B.

(Bhattacharya, dkk., 1994)

Definisi 2.1.3 Pemetaan
Misalkan A dan B adalah himpunan tidak kosong. Pemetaan f dari A ke B adalah suatu relasi dari A ke B sedemikian sehingga untuk setiap $a \in A$ terdapat satu $b \in B$ dengan $(a, b) \in f$, selanjutnya dituliskan sebagai $f(a) = b$. Secara umum dikenal dua macam pemetaan yaitu:

(i) f disebut pemetaan satu-satu (injektif) jika untuk setiap $a, b \in A$ dengan $a \neq b$ maka $f(a) \neq f(b)$,

(ii) f disebut pemetaan onto (surjektif) jika untuk setiap $b \in B$ terdapat $a \in A$ sedemikian sehingga $b = f(a)$.

Jika f merupakan pemetaan injektif dan surjektif, maka f disebut sebagai pemetaan bijektif.

(Bhattacharya, dkk., 1994)

Definisi 2.1.4 Operasi Biner
Misalkan S adalah himpunan tidak kosong. Operasi biner $*$ pada himpunan S adalah pemetaan dari $S \times S$ ke S, atau dituliskan sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
*: S \times S &\to S \\
(a,b) &\mapsto *(a,b) = a * b = c.
\end{aligned}
$$

(Bhattacharya, dkk., 1994)

2.2 Semigrup

Semigrup adalah suatu struktur aljabar yang sederhana dan merupakan suatu himpunan tidak kosong yang di dalamnya terdapat satu operasi biner yang memenuhi beberapa aksioma. Definisi, contoh serta teorema yang berkaitan dengan semigrup diberikan sebagai berikut.

Definisi 2.2.1 Semigrup
Misalkan S merupakan himpunan tidak kosong yang didefinisikan dengan operasi biner $*$. $(S,*)$ disebut semigrup jika dan hanya jika S memenuhi aksioma-aksioma sebagai berikut:

1. $(S,*)$ tertutup.
   Jika setiap $a, b \in S$ maka $a * b \in S$
2. $(S,*)$ assosiatif.
   Jika setiap $a, b, c \in S$ maka $(a * b) * c = a * (b * c)$.

(Durbin, 1992)

Contoh 2.2.2
Diberikan himpunan $M_2(\mathbb{Z}^+)$ didefinisikan sebagai berikut:

$$M_2(\mathbb{Z}^+) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{Z}^+ \right\},$$

dimana $\mathbb{Z}^+$ merupakan himpunan bilangan bulat positif. Maka $M_2(\mathbb{Z}^+)$ terhadap operasi pergandaan dinotasikan $(M_2(\mathbb{Z}^+), \bullet)$ merupakan semigrup.
Bukti:
i. Tertutup.
   Misalkan diambil

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix}, A, B \in M_2(\mathbb{Z}^+)$$

$$A \bullet B = \begin{pmatrix} ac+be & ad+bf \\ cc+de & cd+df \end{pmatrix}.$$

Karena $(ac+be), (ad+bf), (cc+de), (cd+df) \in \mathbb{Z}^+$ maka $A \bullet B \in M_2(\mathbb{Z}^+)$.

ii. Assosiatif.

Misalkan diambil

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} g & h \\ i & j \end{pmatrix}, A, B, C \in M_2(\mathbb{Z}^+)$.

$$\begin{aligned}(A \bullet B) \bullet C &= \begin{pmatrix} ac+be & ad+bf \\ cc+de & cd+df \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g & h \\ i & j \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} acg+beg+adi+bfi & ach+beh+adj+bfj \\ ccg+deg+cdi+dfi & cch+deh+cdj+dfj \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} cg+di & ch+dj \\ eg+fi & eh+fj \end{pmatrix} \\ &= A \bullet (B \bullet C).\end{aligned}$$

Dengan cara yang sama berlaku $\forall A, B, C \in M_2(\mathbb{Z}^+)$. Dari (i) dan (ii) terbukti bahwa $(M_2(\mathbb{Z}^+), \bullet)$ merupakan semigrup.

Definisi 2.2.3 Subsemigrup

Misalkan $(S,*)$ adalah semigrup dan P adalah himpunan bagian dari S. Jika $(P,*)$ merupakan semigrup, maka $(P,*)$ disebut subsemigrup dari $(S,*)$.

(Whitelaw, 1995)

2.3 Grup

Grup merupakan struktur aljabar yang lebih sempit dari semigrup, karena suatu himpunan dapat disebut sebagai suatu grup harus merupakan semigrup, mempunyai elemen identitas dan setiap elemennya mempunyai invers. Definisi, contoh, serta teorema yang berkaitan dengan grup diberikan sebagai berikut.

Definisi 2.3.1 Grup

Grup merupakan pasangan terurut $(G,*)$ dimana G merupakan himpunan tidak kosong dan $*$ merupakan operasi biner pada G. Himpunan G disebut grup terhadap operasi biner $*$ jika dan hanya jika memenuhi aksioma berikut:

i. Tertutup, $\forall a, b \in G$ berlaku $a * b \in G$.
ii. Assosiatif, $(a * b) * c = a * (b * c), \forall a, b, c \in G$.

iii. Mempunyai elemen identitas, terdapat $e \in G$ sehingga $\forall a \in G$ berlaku $e * a = a * e = a$.

iv. Mempunyai invers, $\forall a \in G$ terdapat $a' \in G$ sehingga berlaku $a * a' = a' * a = e$.

(Dummit and Foote, 2002)

Berdasarkan Definisi 2.3.1 grup di atas, dapat disimpulkan bahwa suatu grup pasti merupakan semigrup. Akan tetapi tidak berlaku sebaliknya, yaitu tidak semua semigrup merupakan suatu grup. Contohnya $(\mathbb{Z}^+, +)$ merupakan semigrup karena setiap elemen di $\mathbb{Z}^+$ tertutup dan assosiatif terhadap operasi penjumlahan. Namun $(\mathbb{Z}^+, +)$ bukan merupakan suatu grup karena elemen-elemen di $\mathbb{Z}^+$ tidak mempunyai invers.

Contoh 2.3.2

Himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dengan operasi penjumlahan adalah suatu grup.

Bukti:

i. Tertutup.
Ambil $a, b \in \mathbb{Z}$, berlaku $a + b \in \mathbb{Z}$.

ii. Assosiatif.
Ambil $a, b, c \in \mathbb{Z}$, maka

$$\begin{aligned}(a+b)+c &= a+b+c \\ &= a+(b+c).\end{aligned}$$

iii. Terdapat elemen identitas $e = 0$ terhadap operasi penjumlahan, karena $a + 0 = 0 + a = a$, untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$.

iv. Setiap elemen mempunyai invers. Ambil $a \in \mathbb{Z}$, maka terdapat $-a \in \mathbb{Z}$ sehingga berlaku $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

Dari i, ii, iii dan iv terbukti bahwa $(\mathbb{Z}, +)$ adalah grup.

Contoh 2.3.3

Misalkan $G = \{-1,1\}$ dengan operasi penjumlahan dan pergandaan yang disajikan dalam Tabel 2.1.

Tabel 2.1 Operasi penjumlahan dan pergandaan pada G

+	-1	1
-1	-2	0
1	0	2

●	-1	1
-1	1	-1
1	-1	1

Maka $(G, \bullet)$ merupakan suatu grup, akan tetapi $(G, +)$ bukan merupakan suatu grup.

Bukti:

Akan dibuktikan bahwa $(G, \bullet)$ adalah grup. Dengan menggunakan Tabel 2.1, berikut ini dapat dibuktikan bahwa $(G, \bullet)$ adalah grup.

i. Tertutup.
Ambil $a, b \in G$. Berdasarkan Tabel 2.1 terlihat bahwa $(G, \bullet)$ tertutup, karena hasil dari $(G, \bullet)$ adalah $\{-1,1\}$.

ii. Assosiatif.
Ambil $a, b, c \in G$. Misalkan $a = -1, b = -1$ dan $c = 1 \in G$. Berdasarkan Tabel 2.1 diperoleh

$$(ab)c = \big((-1)(-1)\big)1 = (1)(1) = 1.$$
$$a(bc) = -1\big((-1)(1)\big) = (-1)(-1) = 1.$$

Jadi $(ab)c = a(bc) = 1$. Hal ini juga berlaku untuk setiap $a, b, c \in G$ sedemikian sehingga diperoleh $(ab)c = a(bc)$.

iii. Terdapat elemen identitas $e = 1$, karena
$(1)(a) = (a)(1) = a$, untuk setiap $a \in G$.

iv. Setiap elemen mempunyai invers. Berdasarkan Tabel 2.1 diperoleh bahwa $(-1)(-1) = 1 = e$ dan $(1)(1) = 1 = e$. Berarti $(-1)^{-1} = -1$ dan $(1)^{-1} = 1$. Jadi setiap elemen di G mempunyai invers.

Karena $(G, \bullet)$ memenuhi semua aksioma-aksioma dari suatu grup, maka $(G, \bullet)$ adalah grup. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $(G, +)$ bukan grup. Berdasarkan Tabel 2.1, operasi penjumlahan terhadap himpunan $G = \{-1,1\}$ menghasilkan $\{-2,0,2\} \notin G = \{-1,1\}$, maka $G = \{-1,1\}$ tidak tertutup. Jadi $(G, +)$ bukan grup.

Definisi 2.3.4 Grup Komutatif

Suatu $(G,*)$ disebut grup komutatif jika $a * b = b * a$ untuk setiap $a, b \in G$.

(Fraleigh, 1994)

Contoh 2.3.5
Misalkan $G = \{-1,1\}$. Maka $(G, \bullet)$ merupakan suatu grup komutatif.
Bukti:
Dari Contoh 2.3.3 sudah dibuktikan bahwa $(G, \bullet)$ adalah grup. Sehingga tinggal dibuktikan sifat komutatif dari grup tersebut. Ambil $a, b \in G$. Misalkan $a = -1$ dan $b = 1$. Berdasarkan Tabel 2.1 diperoleh $ab = (-1)(1) = -1$ dan $ba = (1)(-1) = -1$. Sehingga $ab = ba = -1$. Hal ini juga berlaku untuk setiap $a, b \in G$ sedemikian sehingga diperoleh $ab = ba$. Karena grup tersebut memenuhi sifat komutatif, jadi $(G, \bullet)$ adalah grup komutatif.

2.4 Ring

Ring merupakan struktur aljabar yang terdiri dari himpunan tidak kosong dengan dua operasi biner yaitu terhadap operasi penjumlahan dan perkalian. Definisi, contoh serta teorema yang berkaitan dengan ring diberikan sebagai berikut.

Definisi 2.4.1 Ring
Ring adalah himpunan tidak kosong R dengan dua operasi biner yaitu penjumlahan dan pergandaan sedemikian sehingga berlaku:
1. $(R, +)$ merupakan suatu grup komutatif,
2. $(R, \bullet)$ merupakan semigrup,
3. $(R, +, \bullet)$ memenuhi hukum distributif yaitu untuk setiap $a, b, c \in R$ berlaku:
   $(a + b)c = (ac) + (bc)$ dan $a(b + c) = (ab) + (ac)$.

(Bhattacharya, 1994)

Contoh 2.4.2
Diberikan $\mathbb{Z}_4 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$ dengan operasi penjumlahan dan pergandaan yang disajikan dalam Tabel 2.2 dibawah ini. Maka $(\mathbb{Z}_4, +, \bullet\ )$ merupakan suatu ring.

Tabel 2.2 Operasi penjumlahan dan pergandaan pada $\mathbb{Z}_4$

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$

$\bullet$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Bukti:
Dengan menggunakan Tabel 2.2, dapat dibuktikan bahwa $(\mathbb{Z}_4, +, \bullet)$ adalah ring.

1. $(\mathbb{Z}_4, +)$ adalah grup komutatif.
   (i) Tertutup.
   Ambil $a, b \in \mathbb{Z}_4$. Berdasarkan Tabel 2.2 terlihat bahwa $(\mathbb{Z}_4, +)$ tertutup, karena hasil dari $(\mathbb{Z}_4, +)$ adalah $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$.
   (ii) Assosiatif.
   Ambil $a, b, c \in \mathbb{Z}_4$. Misalkan $a = \bar{0}$, $b = \bar{1}$ dan $c = \bar{2}$. Berdasarkan Tabel 2.2 diperoleh
   $$(a + b) + c = (\bar{0} + \bar{1}) + \bar{2} = \bar{1} + \bar{2} = \bar{3}.$$
   $$a + (b + c) = \bar{0} + (\bar{1} + \bar{2}) = \bar{0} + \bar{3} = \bar{3}.$$
   Jadi $(a + b) + c = a + (b + c) = \bar{3}$. Hal ini juga berlaku untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}_4$ sedemikian sehingga $(a + b) + c = a + (b + c)$.
   (iii) Mempunyai elemen identitas $e = \bar{0}$ terhadap operasi penjumlahan, karena $a + \bar{0} = \bar{0} + a = a$, untuk setiap $a \in \mathbb{Z}_4$.
   (iv) Setiap elemen mempunyai invers.
   Berdasarkan Tabel 2.2 invers dari $\bar{0}$ adalah $\bar{0}$, invers dari $\bar{1}$ adalah $\bar{3}$, invers dari $\bar{2}$ adalah $\bar{2}$, invers dari $\bar{3}$ adalah $\bar{1}$.
   (v) Komutatif.
   Ambil $a, b \in \mathbb{Z}_4$. Misalkan $a = \bar{0}$ dan $b = \bar{1}$. Berdasarkan Tabel 2.2 diperoleh
   $$a + b = \bar{0} + \bar{1} = \bar{1}.$$
   $$b + a = \bar{1} + \bar{0} = \bar{1}.$$

Jadi $a + b = b + a = \bar{1}$. Hal ini juga berlaku untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}_4$ sedemikian sehingga $a + b = b + a$.

2. $(\mathbb{Z}_4, \bullet)$ adalah semigrup.
   (i) Tertutup.
   Ambil $a, b \in \mathbb{Z}_4$. Berdasarkan Tabel 2.2 terlihat bahwa $(\mathbb{Z}_4, \bullet)$ tertutup, karena hasil dari $(\mathbb{Z}_4, \bullet)$ adalah $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$.
   (ii) Assosiatif.
   Ambil $a, b, c \in \mathbb{Z}_4$. Misalkan $a = \bar{0}$, $b = \bar{1}$ dan $c = \bar{2}$. Berdasarkan Tabel 2.2 diperoleh
   $$(ab)c = \big((\bar{0})(\bar{1})\big)(\bar{2}) = (\bar{0})(\bar{2}) = \bar{0}.$$
   $$a(bc) = (\bar{0})\big((\bar{1})(\bar{2})\big) = (\bar{0})(\bar{2}) = \bar{0}.$$
   Jadi $(ab)c = a(bc) = \bar{0}$. Hal ini juga berlaku untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}_4$ sedemikian sehingga $(ab)c = a(bc)$.
3. $(\mathbb{Z}_4, +, \bullet)$ memenuhi hukum distributif.
   Ambil $a, b, c \in \mathbb{Z}_4$. Misalkan $a = \bar{0}$, $b = \bar{1}$ dan $c = \bar{2}$. Berdasarkan Tabel 2.2 diperoleh
   Distributif kanan:
   $$(a + b)c = (\bar{0} + \bar{1})(\bar{2}) = (\bar{1})(\bar{2}) = \bar{2}$$
   $$(ac) + (bc) = \big((\bar{0})(\bar{2})\big) + \big((\bar{1})(\bar{2})\big) = \bar{0} + \bar{2} = \bar{2}.$$
   Distributif kiri:
   $$a(b + c) = (\bar{0})(\bar{1} + \bar{2}) = (\bar{0})(\bar{3}) = \bar{0}.$$
   $$(ab) + (ac) = \big((\bar{0})(\bar{1})\big) + \big((\bar{0})(\bar{2})\big) = (\bar{0})(\bar{0}) = \bar{0}.$$
   Jadi, $(a + b)c = (ac) + (bc) = \bar{2}$ dan $a(b + c) = (ab) + (ac) = \bar{0}$. Hal ini juga berlaku untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}_4$ sedemikian sehingga $(a + b)c = (ac) + (bc)$ dan $a(b + c) = (ab) + (ac)$.

Karena $(\mathbb{Z}_4, +, \bullet)$ memenuhi semua aksioma-aksioma dari suatu ring. Jadi $(\mathbb{Z}_4, +, \bullet)$ adalah ring.

Contoh 2.4.3

Diberikan $R = \{0,1\}$. $(R, +, \bullet)$ bukan merupakan suatu ring karena tidak tertutup terhadap operasi penjumlahan. Misalkan diambil $1 + 1 = 2 \notin R$. Contoh $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$, $(\mathbb{Z}_2, +, \bullet)$ merupakan suatu ring karena memenuhi semua aksioma-aksioma dari suatu ring.

Definisi 2.4.4 Ring Komutatif
Misalkan $(R, +, \bullet)$ adalah ring. $(R, +, \bullet)$ disebut ring komutatif jika berlaku sifat $a \bullet b = b \bullet a$ untuk setiap $a, b \in R$.

(Dummit dan Foote, 2002)

Definisi 2.4.5 Subring
Misalkan $(R, +, \bullet)$ adalah ring dan U adalah himpunan bagian dari R. $U \neq \emptyset$, maka $(U, +, \bullet)$ disebut sebagai subring dari $(R, +, \bullet)$ jika $(U, +, \bullet)$ juga merupakan suatu ring.

(Dummit dan Foote, 2002)

Teorema 2.4.6
Misalkan $(R, +, \bullet)$ adalah ring dan U adalah himpunan bagian dari\`R. $(U, +, \bullet)$ disebut sebagai subring dari $(R, +, \bullet)$ jika dan hanya jika untuk setiap $a, b \in U$ berlaku:

(i) $U \neq \emptyset$.
(ii) $a - b \in U$.
(iii) $ab \in U$.

(Dummit dan Foote, 2002)

Bukti:

($\Longrightarrow$) Diketahui $(R, +, \bullet)$ adalah ring dan U adalah himpunan bagian dari R. Akan dibuktikan untuk setiap $a, b \in U$ berlaku $U \neq \emptyset, a - b \in U$, dan $ab \in U$. Berdasarkan Definisi 2.4.5, $(U, +, \bullet)$ membentuk ring dengan operasi yang sama dengan operasi di $(R, +, \bullet)$. Karena $(U, +, \bullet)$ adalah ring, sehingga $U \neq \emptyset$, jadi (i) terpenuhi. Sekarang ambil sebarang $a, b \in U$. $b \in U$ dan $(U, +, \bullet)$ adalah ring, berarti $-b \in U$. Karena $a, -b \in U$ dan $(U, +, \bullet)$ adalah ring, sehingga $a + (-b) = a - b \in U$, jadi (ii) terpenuhi. Selanjutnya, ambil sebarang $a, b \in U$. Karena $(U, +, \bullet)$ adalah ring, sehingga $ab \in U$, jadi (iii) terpenuhi.

($\Longleftarrow$) Sebaliknya diketahui $U \neq \emptyset$, $a - b \in U$ dan $ab \in U$ untuk setiap $a, b \in U$. Akan dibuktikan bahwa $(U, +, \bullet)$ adalah subring dari $(R, +, \bullet)$. $U \neq \emptyset$, untuk setiap $a, b \in U$ berlaku $a - b \in U$ menunjukkan bahwa $(U, +)$ adalah subgrup dari grup $(R, +)$, oleh karena itu $(U, +)$ adalah grup. Karena U adalah himpunan bagian dari R, sehingga sifat komutatif yang berlaku di R juga berlaku di U. Selanjutnya untuk setiap $a, b \in U$ berlaku $ab \in U$ menunjukkan bahwa $(U, \bullet)$ adalah subsemigrup dari $(R, \bullet)$ oleh karena itu $(U, \bullet)$ adalah semigrup. Karena U adalah himpunan bagian dari R, sehingga sifat distributif yang berlaku di R juga berlaku di U. Jadi $(U, +, \bullet)$ adalah subring dari $(R, +, \bullet)$.

Contoh 2.4.7

Diberikan $U = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ adalah himpunan bagian dari $\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$. Maka $(U, +, \bullet)$ merupakan subring dari $(\mathbb{Z}_4, +, \bullet)$.

Bukti:

Dari Contoh 2.4.2 sudah dibuktikan bahwa $(\mathbb{Z}_4, +, \bullet)$ adalah ring, dan $U = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ adalah himpunan bagian dari $\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$, sekarang akan dibuktikan bahwa $(U, +, \bullet)$ adalah subring dari $(\mathbb{Z}_4, +, \bullet)$ dengan menggunakan Teorema 2.4.6 sebagai berikut.

(i) $U \neq \emptyset$, syarat terpenuhi karena $U = \{\bar{0}, \bar{2}\}$.

(ii) Misalkan $\bar{0}, \bar{2} \in U$. Maka:

$$\bar{2} - \bar{0} = \bar{2}$$
$$\bar{2} - \bar{2} = \bar{0}$$
$$\bar{0} - \bar{2} = \bar{2}$$

Sehingga $\bar{0}, \bar{2} \in U$. Jadi jika $a, b \in U$ maka $a - b \in U$.

(iii) Misalkan $\bar{0}, \bar{2} \in U$, maka:

$$(\bar{2})(\bar{0}) = \bar{0}$$
$$(\bar{2})(\bar{2}) = \bar{0}$$
$$(\bar{0})(\bar{2}) = \bar{0}$$

Sehingga $\bar{0}, \bar{2} \in U$. Jadi jika $a, b \in U$ maka $ab \in U$.

Karena syarat (i), (ii), (iii) terpenuhi, maka U adalah subring dari $\mathbb{Z}_4$. Contoh 2.4.7 di atas juga dapat dibuktikan bahwa $U = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ merupakan subring dari $\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ dengan menunjukkan operasi yang sama pada $\mathbb{Z}_4$ terhadap operasi penjumlahan dan perkalian. Sehingga $(U, +)$ adalah grup komutatif, $(U, \bullet)$ adalah semigrup dan $(U, +, \bullet)$ memenuhi hukum distributif. Karena $(U, +, \bullet)$ memenuhi semua aksioma-aksioma dari suatu ring, sehingga $(U, +, \bullet)$ adalah subring dari $(\mathbb{Z}_4, +, \bullet)$.

Definisi 2.4.8 Ring Reversibel

Misalkan R adalah ring. R disebut ring reversibel jika $xy = 0$ maka $yx = 0$ untuk setiap $x, y \in R$.

(Zhang dan Chen, 2010)

Contoh 2.4.9
Diberikan $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$. Maka $\mathbb{Z}_6$ merupakan ring reversibel.
Bukti:
Pada ring $\mathbb{Z}_6$, $xy = yx$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}_6$ karena $\mathbb{Z}_6$ merupakan ring komutatif. Jika $xy = 0$ maka $yx = 0$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}_6$. Sehingga terbukti bahwa $\mathbb{Z}_6$ merupakan ring reversibel.

Contoh 2.4.10
Diberikan ring $M_2(\mathbb{Z}) = \left\{\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \mid p, q, r, s \in \mathbb{Z}\right\}$. Maka $M_2(\mathbb{Z})$ bukan suatu ring reversibel.
Bukti:
Ambil $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $A, B \in M_2(\mathbb{Z})$, maka

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}.$$

Terbukti bahwa $AB = 0$ dan $BA \neq 0$, sehingga $M_2(\mathbb{Z})$, bukan suatu ring reversibel.

Definisi 2.4.11 Ring Polinomial
Misalkan $(R, +, \bullet)$ adalah ring dan $a_i \in R$. $R[x]$ adalah himpunan polinomial-polinomial dengan variabel x dinotasikan sebagai berikut:

$$R[x] = \left\{ \begin{matrix} \sum_{i=o}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n | a_i \in R, \\ i = 0,1,2, \ldots, n \end{matrix} \right\}.$$

Operasi yang berlaku adalah sebagai berikut:

$$f(x) = \sum_{i=o}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n, a_i \in R$$

dan

$$g(x) = \sum_{i=o}^{n} b_i x^i = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n, b_i \in R$$

yaitu

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n) + \\ &\quad (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n) \\ &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n \text{ dan} \end{aligned}$$

$$f(x) \bullet g(x) = (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n)$$
$$(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n)$$
$$= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 +$$
$$\ldots + (a_0b_n + .. + a_nb_0)x^n.$$

$(R[x], +, \bullet)$ seperti diatas membentuk suatu ring dan disebut Ring Polinomial.

(Fraleigh, 1994)

Definisi 2.4.12 Homomorfisma Ring

Diberikan ring R dan R'. Suatu pemetaan α dari R ke R' disebut homomorfisma ring jika untuk setiap $x, y \in R$, berlaku:

1. $\alpha(x + y) = \alpha(x) + \alpha(y)$
2. $\alpha(xy) = \alpha(x)\alpha(y)$.

(Fraleigh, 1994)

Contoh 2.4.13

Diberikan ring $A = \{a + b\sqrt{2} | a,\ b \in \mathbb{Z}\}$, $B = \left\{\begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| a, b\ \in \mathbb{Z}\right\}$.

Maka pemetaan α yang didefinisikan sebagai,

$$\alpha : A \to B$$
$$a + b\sqrt{2} \mapsto \alpha\left(a + b\sqrt{2}\right) = \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix}$$

merupakan suatu homomorfisma ring.

Bukti:

Akan dibuktikan bahwa α merupakan homomorfisma ring.

Misalkan diambil $x, y \in A$, dimana $x = (p + q\sqrt{2})$ dan $y = (r + s\sqrt{2})$,

$$\begin{aligned}
\alpha(x + y) &= \alpha\left((p + q\sqrt{2}) + (r + s\sqrt{2})\right) \\
&= \alpha\left((p + r) + (q + s)\sqrt{2}\right) \\
&= \begin{pmatrix} p + r & 2(q + s) \\ q + s & p + r \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} p & 2q \\ q & p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r & 2s \\ s & r \end{pmatrix} \\
&= \alpha(p + q\sqrt{2}\ ) + \alpha(r + s\sqrt{2}) \\
&= \alpha(x) + \alpha(y).
\end{aligned}$$

Jadi, $\alpha(x + y) = \alpha(x) + \alpha(y)$.

$$\begin{aligned}\alpha(xy) &= \alpha\big((p+q\sqrt{2})(r+s\sqrt{2})\big)\\ &= \alpha\big(pr+ps\sqrt{2}+qr\sqrt{2}+2qs\big)\\ &= \alpha\left((pr+2qs)+(ps+qr)\sqrt{2}\right)\\ &= \begin{pmatrix}(pr+2qs) & 2(ps+qr)\\ (ps+qr) & (pr+2qs)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}p & 2q\\ q & p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r & 2s\\ s & r\end{pmatrix}\\ &= \alpha\big(p+q\sqrt{2}\big)\alpha\big(r+s\sqrt{2}\big)\\ &= \alpha(x)\alpha(y).\end{aligned}$$

Jadi, $\alpha(xy) = \alpha(x)\alpha(y)$.
Terbukti α adalah homomorfisma ring.

Definisi 2.4.14 Endomorfisma Ring
Endomorfisma adalah suatu homomorfisma α dari R ke R, atau domain dari homomorfisma sama dengan kodomainnya.

(Fraleigh, 1994)

Contoh 2.4.15
Diberikan ring $X \times Y = \{(x,y) | x \in X, y \in Y\}$, dimana $X, Y \subseteq \mathbb{Z}$. Maka pemetaan α yang didefinisikan sebagai berikut merupakan suatu endomorfisma ring,

$$\begin{aligned}\alpha : X \times Y &\to X \times Y\\ (x,y) &\mapsto \alpha(x,y) = (x,0).\end{aligned}$$

Bukti:
Akan dibuktikan bahwa α merupakan endomorfisma ring.
Misalkan diambil $f, g \in X \times Y$ dimana $f = (p_1, r_1)$ dan $g = (p_2, r_2)$,

$$\begin{aligned}\alpha(f+g) &= \alpha[(p_1,r_1)+(p_2,r_2)]\\ &= \alpha[(p_1+p_2),(r_1+r_2)]\\ &= (p_1+p_2, 0)\\ &= (p_1,0)+(p_2,0)\\ &= \alpha(f)+\alpha(g).\end{aligned}$$

Jadi, $\alpha(f+g) = \alpha(f)+\alpha(g)$.

$$\begin{aligned}\alpha(fg) &= \alpha[(p_1,r_1)(p_2,r_2)]\\ &= \alpha[(p_1p_2),(r_1r_2)]\\ &= (p_1p_2, 0)\end{aligned}$$

$$= (p_1, 0)(p_2, 0)$$
$$= \alpha(f)\alpha(g).$$

Jadi, $\alpha(fg) = \alpha(f)\alpha(g)$.
Terbukti α adalah endomorfisma ring.

Definisi 2.4.16 Isomorfisma Ring
Diberikan $\alpha: R \to R'$ adalah homomorfisma ring, maka
1. α dikatakan monomorfisma jika α injektif.
2. α dikatakan epimorfisma jika α surjektif.
3. α dikatakan isomorfisma jika α bijektif.
4. α dikatakan automorfisma jika $R = R'$ dan bijektif.

(Durbin, 1992)

Definisi 2.4.17 Ring Armendariz
Misalkan R adalah ring dengan elemen identitas, $R[x]$ adalah ring polinomial. Diberikan sebarang polinomial
$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$$
$$g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m, \qquad f(x), g(x) \in R[x].$$
R disebut ring Armendariz jika $f(x)g(x) = 0$ maka $a_ib_j = 0, \forall i, j$.

(Zhang dan Chen, 2010)

Contoh 2.4.18
Diberikan $A = \{\bar{0}, \bar{4}\} \subseteq \mathbb{Z}_8$. Ring $M_2(A) = \left\{\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \mid p, q, r, s \in A\right\}$, maka $M_2(A)$ merupakan suatu ring Armendariz.
Bukti:
Misalkan diambil,
$$f(x) = a_0 + a_1x = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{4} & \bar{4} \\ \bar{4} & \bar{0} \end{pmatrix}x,$$
$$g(x) = b_0 + b_1x = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{4} \\ \bar{4} & \bar{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{4} & \bar{4} \\ \bar{4} & \bar{0} \end{pmatrix}x, \; f(x), g(x) \in M_2(A)[x],$$
$$f(x)g(x) = \begin{pmatrix} \bar{4} & \bar{4} \\ \bar{4} & \bar{0} \end{pmatrix}x\begin{pmatrix} \bar{4} & \bar{4} \\ \bar{4} & \bar{0} \end{pmatrix}x + \begin{pmatrix} \bar{4} & \bar{4} \\ \bar{4} & \bar{0} \end{pmatrix}x\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{4} \\ \bar{4} & \bar{0} \end{pmatrix}$$
$$+ \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{4} & \bar{4} \\ \bar{4} & \bar{0} \end{pmatrix}x + \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{4} \\ \bar{4} & \bar{0} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}x^2 + \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}x + \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}x + \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$$

$= \mathbf{0}$.

$$a_1 b_1 = \begin{pmatrix} \bar{4} & \bar{4} \\ \bar{4} & \bar{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{4} & \bar{4} \\ \bar{4} & \bar{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

$$a_1 b_0 = \begin{pmatrix} \bar{4} & \bar{4} \\ \bar{4} & \bar{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{4} \\ \bar{4} & \bar{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

$$a_0 b_1 = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{4} & \bar{4} \\ \bar{4} & \bar{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

$$a_0 b_0 = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{4} \\ \bar{4} & \bar{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Dengan cara yang sama untuk setiap $a_i, b_j \in M_2\,(A)$, maka $a_i b_j = 0$. Terbukti bahwa $f(x)g(x) = 0$ akibatnya $a_i b_j = 0$, sehingga $M_2\,(A)$ merupakan ring Armendariz.

Definisi 2.4.19 Ring Skew Polinomial

Diberikan ring R, $p_i, p_j \in R$ dan endomorfisma α pada R.
$R[x; \alpha] = \{f(x), g(x), ...\}$. $R[x; \alpha]$ disebut Ring Skew Polinomial, jika $p_i p_j = 0$ maka $\alpha(p_j) p_i = 0, \forall i, j$.

(Baser dan Kwak, 2010)

Contoh 2.4.20:

Diberikan $A = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}\} \subseteq \mathbb{Z}_9$, $M_2\,(A) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in A\right\}$ dan α endomorfisma ring yang didefinisikan oleh

$$\alpha: M_2\,(A) \to M_2\,(A)$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \boldsymbol{\alpha}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \bar{0} \\ \bar{0} & d \end{pmatrix}.$$

Maka $M_2\,(A)[x; \alpha]$ merupakan suatu Ring Skew Polinomial.

Bukti:

Akan dibuktikan α adalah endomorfisma pada $M_2\,(A)$.

Misalkan diambil

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}, \qquad P, Q \in M_2\,(A).$$

$$\alpha(P + Q) = \alpha\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\right)$$
$$= \alpha\left(\begin{pmatrix} a + e & b + f \\ c + g & d + h \end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} a+e & \bar{0} \\ \bar{0} & d+h \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a & \bar{0} \\ \bar{0} & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & \bar{0} \\ \bar{0} & h \end{pmatrix}$$
$$= \alpha(P) + \alpha(Q).$$
$$\alpha(PQ) = \alpha\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\right)$$
$$= \alpha\left(\begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}\right)$$
$$= \begin{pmatrix} ae+bg & \bar{0} \\ \bar{0} & cf+dh \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a & \bar{0} \\ \bar{0} & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & \bar{0} \\ \bar{0} & h \end{pmatrix}$$
$$= \alpha(P)\alpha(Q).$$

Jadi, α adalah homomorfisma pada $M_2\,(A)$. Karena $\alpha : M_2\,(A) \to M_2\,(A)$ maka α adalah endomorfisma.

Misalkan diambil,

$f(x) = p_0 + p_1 x$, $p_0, p_1 \in M_2\,(A)$, $f(x) \in M_2\,(A)[x]$, akan dibuktikan $M_2\,(A)[x; \alpha]$ merupakan Ring Skew Polinomial.

Misalkan diambil $p_0 = \begin{pmatrix} \bar{6} & \bar{3} \\ \bar{3} & \bar{0} \end{pmatrix}$, $p_1 = \begin{pmatrix} \bar{6} & \bar{0} \\ \bar{6} & \bar{3} \end{pmatrix}$.

$$p_0 p_1 = \begin{pmatrix} \bar{6} & \bar{3} \\ \bar{3} & \bar{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{6} & \bar{0} \\ \bar{6} & \bar{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$
$$\alpha(p_1)p_0 = \begin{pmatrix} \bar{6} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{6} & \bar{3} \\ \bar{3} & \bar{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Dengan cara yang sama berlaku untuk setiap $p_0, p_1 \in M_2\,(A)$. Terbukti bahwa untuk setiap $p_0, p_1 \in M_2\,(A)$, jika $p_0 p_1 = \mathbf{0}$ maka $\alpha(p_1)p_0 = \mathbf{0}$, sehingga $M_2\,(A)[x; \alpha]$ merupakan Ring Skew Polinomial.

Definisi 2.4.21 Ring α-*Skew* Armendariz

Misalkan R adalah ring dan α adalah endomorfisma pada R. Diberikan sebarang polinomial

$$f(x) = p_0 + p_1 x + \cdots + p_n x^n$$
$$g(x) = q_0 + q_1 x + \cdots + q_m x^m,\ f(x), g(x) \in R[x; \alpha].$$

R disebut ring α-*skew* Armendariz $\forall f(x), g(x) \in R[x;\alpha]$, jika $f(x)g(x) = 0$ maka $p_i\alpha^i(q_j) = 0, \forall i, j$.

(Zhang dan Chen, 2010)

Contoh 2.4.22:

Diberikan $A = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}\} \subseteq \mathbb{Z}_9$, $M_2(A) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in A\right\}$ dan α endomorfisma ring yang didefinisikan oleh

$$\alpha: M_2(A) \to M_2(A)$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \boldsymbol{\alpha}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \bar{0} \\ \bar{0} & d \end{pmatrix}.$$

Maka $M_2(A)$ merupakan suatu ring α-*skew* Armendariz.

Bukti:

Berdasarkan Contoh 2.4.20, α adalah endomorfisma pada $M_2(A)$.
Misalkan diambil

$$f(x) = p_0 + p_1x = \begin{pmatrix} \bar{6} & \bar{3} \\ \bar{3} & \bar{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{6} & \bar{0} \\ \bar{6} & \bar{3} \end{pmatrix}x,$$
$$g(x) = q_0 + q_1x = \begin{pmatrix} \bar{6} & \bar{3} \\ \bar{3} & \bar{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{6} \\ \bar{0} & \bar{3} \end{pmatrix}x.$$

Berdasarkan Contoh 2.4.20, $f(x), g(x) \in M_2(A)[x;\alpha]$

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \begin{pmatrix} \bar{6} & \bar{0} \\ \bar{6} & \bar{3} \end{pmatrix}x\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{6} \\ \bar{0} & \bar{3} \end{pmatrix}x + \begin{pmatrix} \bar{6} & \bar{0} \\ \bar{6} & \bar{3} \end{pmatrix}x\begin{pmatrix} \bar{6} & \bar{3} \\ \bar{3} & \bar{0} \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} \bar{6} & \bar{3} \\ \bar{3} & \bar{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{6} \\ \bar{0} & \bar{3} \end{pmatrix}x + \begin{pmatrix} \bar{6} & \bar{3} \\ \bar{3} & \bar{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{6} & \bar{3} \\ \bar{3} & \bar{0} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}x^2 + \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}x + \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}x + \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama berlaku untuk setiap $p_i, q_j \in M_2(A)$.

Selanjutnya akan dibuktikan $p_i\alpha^i(q_j) = 0$.

$$\begin{aligned} p_0\alpha(q_0) &= \begin{pmatrix} \bar{6} & \bar{3} \\ \bar{3} & \bar{0} \end{pmatrix}\alpha\begin{pmatrix} \bar{6} & \bar{3} \\ \bar{3} & \bar{0} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \bar{6} & \bar{3} \\ \bar{3} & \bar{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{6} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbf{0},\\
p_0\alpha(q_1) &= \begin{pmatrix}\bar{6} & \bar{3}\\ \bar{3} & \bar{0}\end{pmatrix}\alpha\begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{6}\\ \bar{0} & \bar{3}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\bar{6} & \bar{3}\\ \bar{3} & \bar{0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{3}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix}\\
&= \mathbf{0},\\
p_1\alpha^2(q_0) &= \begin{pmatrix}\bar{6} & \bar{0}\\ \bar{6} & \bar{3}\end{pmatrix}\alpha^2\begin{pmatrix}\bar{6} & \bar{3}\\ \bar{3} & \bar{0}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\bar{6} & \bar{0}\\ \bar{6} & \bar{3}\end{pmatrix}\alpha\left(\alpha\begin{pmatrix}\bar{6} & \bar{3}\\ \bar{3} & \bar{0}\end{pmatrix}\right)\\
&= \begin{pmatrix}\bar{6} & \bar{0}\\ \bar{6} & \bar{3}\end{pmatrix}\alpha\begin{pmatrix}\bar{6} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\bar{6} & \bar{0}\\ \bar{6} & \bar{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{6} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix}\\
&= \mathbf{0},\\
p_1\alpha^2(q_1) &= \begin{pmatrix}\bar{6} & \bar{0}\\ \bar{6} & \bar{3}\end{pmatrix}\alpha^2\begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{6}\\ \bar{0} & \bar{3}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\bar{6} & \bar{0}\\ \bar{6} & \bar{3}\end{pmatrix}\alpha\left(\alpha\begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{6}\\ \bar{0} & \bar{3}\end{pmatrix}\right)\\
&= \begin{pmatrix}\bar{6} & \bar{0}\\ \bar{6} & \bar{3}\end{pmatrix}\alpha\begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{3}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\bar{6} & \bar{0}\\ \bar{6} & \bar{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{3}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix} = \mathbf{0}.
\end{aligned}
$$

Dengan cara yang sama berlaku untuk setiap $p_i, q_j \in M_2\,(A)$.
Terbukti bahwa $f(x)g(x) = 0$ akibatnya $p_i\alpha^i(q_j) = 0$, sehingga $M_2\,(A)$ merupakan suatu ring α-*skew* armendariz.

Definisi 2.4.23 Nilpoten
Elemen r dalam ring R adalah nilpoten dari R jika terdapat bilangan bulat positif n sehingga $r^n = 0$.

(Bhattacharya, 1994)

Definisi 2.4.24 Ring Tereduksi
Ring R dikatakan tereduksi jika ring tersebut tidak mempunyai elemen nilpoten tak nol (dengan kata lain elemen nilpotennya hanya elemen nol), jika $r^2 = 0$ maka $r = 0,\ r \in R$.

(Fraleigh, 1994)

Contoh 2.4.25:

a. Ring bilangan bulat $(\mathbb{Z})$ merupakan ring tereduksi karena memiliki elemen nilpoten hanya elemen nol. $\forall r \in \mathbb{Z}$, jika $r^2 = 0$ maka $r = 0$.
b. Ring bilangan bulat modulo n $(\mathbb{Z}_n)$ dengan n prima merupakan ring tereduksi karena memiliki elemen nilpoten hanya elemen nol. $\forall r \in \mathbb{Z}_n$ dengan n prima, jika $r^2 = 0$ maka $r = 0$.

Definisi 2.4.26 Ring Semiprima
Ring R dikatakan semiprima jika $aRa = \{0\}$ maka $a = 0$ untuk $a \in R$.

(Kose dkk., 2012)

Contoh 2.4.27:
Diberikan $\mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$. Maka $\mathbb{Z}_3$ merupakan ring semiprima.
Bukti:
Dengan kontraposisi, akan dibuktikan bahwa $\mathbb{Z}_3$ adalah ring semiprima, jika $a \neq \bar{0}$ maka $aRa \neq \{\bar{0}\}$.
Misalkan diambil sembarang $a \in \mathbb{Z}_3$, dimana $a \neq \bar{0}$ dan $r \neq \bar{0}$.

$$\begin{aligned} \bar{1}.\bar{1}.\bar{1} &= \bar{1}.\bar{1} = \bar{1} \\ \bar{1}.\bar{2}.\bar{1} &= \bar{2}.\bar{1} = \bar{2} \\ \bar{2}.\bar{1}.\bar{2} &= \bar{2}.\bar{2} = \bar{1} \\ \bar{2}.\bar{2}.\bar{2} &= \bar{1}.\bar{2} = \bar{2} \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama untuk setiap $a \neq \bar{0}$ maka $aRa \neq \{\bar{0}\}$ atau jika $aRa = \{\bar{0}\}$ maka $a = \bar{0}$ untuk $a \in \mathbb{Z}_3$. Maka $\mathbb{Z}_3$ merupakan ring semiprima.

BAB III
PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas mengenai definisi, teorema, proposisi dan contoh yang berkaitan dengan *strong α-reversible ring* beserta bukti-buktinya.

3.1 Ring α-reversibel

Definisi 3.1.1 Ring α-reversibel
Misalkan R adalah ring dan α adalah endomorfisma pada R.
α reversibel kanan jika $xy = 0$, maka $y\alpha(x) = 0$ dan α reversibel kiri jika $xy = 0$, maka $\alpha(y)x = 0$, untuk setiap $x, y \in R$.
R disebut α-reversibel jika ada endomorfisma α yang reversibel kanan dan kiri.

(Baser dan Kwak, 2010)

Contoh 3.1.2
Diberikan $A = \{\bar{0}, \bar{4}\} \subseteq \mathbb{Z}_8$, ring $M_2\,(A) = \left\{\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \mid p, q, r, s \in A\right\}$, dan α endomorfisma ring yang didefinisikan oleh

$$\alpha: M_2\,(A) \to M_2\,(A)$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \boldsymbol{\alpha}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}.$$

Maka $M_2\,(A)$ merupakan suatu ring α-reversibel.
Bukti:
Misalkan diambil $X = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{4} \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} \bar{4} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$.

1. α reversibel kanan

$$XY = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{4} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

$$Y\alpha(X) = \begin{pmatrix} \bar{4} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}\left(\alpha\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{4} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \bar{4} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

2. α reversibel kiri

$$\alpha(Y)X = \left(\alpha\begin{pmatrix} \bar{4} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{4} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Dengan cara yang sama berlaku untuk setiap $X, Y \in M_2\,(A)$. Sehingga terbukti bahwa R merupakan suatu ring α-reversibel.

Contoh 3.1.3

Diberikan ring $\mathbb{Z}$. Jika $R = \left\{\begin{pmatrix} p & q \\ 0 & s \end{pmatrix} \mid p, q, s \in \mathbb{Z}\right\}$ dan α endomorfisma ring yang didefinisikan oleh

$$\alpha: R \to R$$
$$\begin{pmatrix} p & q \\ 0 & s \end{pmatrix} \mapsto \boldsymbol{\alpha}\begin{pmatrix} p & q \\ 0 & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Maka α reversibel kanan, tetapi R tidak α- reversibel.

Bukti:

Misalkan diambil $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. α reversibel kanan

$$XY = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

$$Y\alpha(X) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\left(\alpha\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

2. α tidak reversibel kiri

$$\alpha(Y)X = \left(\alpha\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}.$$

Terbukti bahwa jika $XY = 0$ maka $Y\alpha(X) = \mathbf{0}$, sehingga α reversibel kanan tetapi R tidak α-reversibel karena $\alpha(Y)X \neq \mathbf{0}$.

Definisi 3.1.4 Ring $\boldsymbol{\alpha}$-rigid

Misalkan R adalah ring dan α adalah endomorfisma pada R.
α disebut rigid jika $x\alpha(x) = 0$ maka $x = 0$, untuk setiap $x \in R$ dan R disebut ring α-rigid jika ada endomorfisma α rigid di R.

Contoh 3.1.5

Diberikan ring $X \times Y = \{(x, y)|x \in X, y \in Y\}$, dimana $X, Y \subseteq \mathbb{Z}$. Maka ring $X \times Y$ dengan pemetaan α yang didefinisikan sebagai berikut merupakan suatu ring α-rigid,

$$\alpha : X \times Y \to X \times Y$$
$$(x, y) \mapsto \alpha(x, y) = (x, 0).$$

Bukti:

Ambil $(x, y) \in X \times Y$, jika
$(x, y)\alpha(x, y) = (x, y)(x, 0) = (xx, y0) = (x^2, 0) = (0,0) = 0.$
Karena $x^2 = 0$ maka $x = 0$. Terbukti bahwa $X \times Y$ adalah ring

α-rigid.

Proposisi 3.1.6
Misalkan R adalah ring dan α adalah endomorfisma pada R.

(1) R memenuhi jika $x\alpha(y) = 0$ maka $yx = 0$ untuk $x, y \in R$, jika dan hanya jika R α-reversibel kanan dan α monomorfisma.

(2) R adalah ring α-rigid jika dan hanya jika R adalah ring semiprima yang memenuhi jika $x\alpha(y) = 0$ maka $yx = 0$ untuk $x, y \in R$.

Bukti:

(1) ($\Rightarrow$) Misalkan bahwa R memenuhi jika $x\alpha(y) = 0$ maka $yx = 0$ untuk $x, y \in R$. Misalkan $xy = 0$ maka $\alpha(xy) = 0$ dan demikian $\alpha(x)\alpha(y) = 0$. Kita dapat $\alpha(x) = 0$ atau $\alpha(y) = 0$. Sehingga kita peroleh $y\alpha(x) = 0$. Jadi R α-reversibel kanan. Jika $\alpha(x) = \alpha(y)$ maka $\alpha(x - y) = 0$, dengan demikian $x = y$. Jadi α monomorfisma.

($\Leftarrow$) Diberikan bahwa R α-reversibel kanan dengan α monomorfisma. Misalkan $xy = 0$ maka $\alpha(xy) = \alpha(x)\alpha(y) = 0$ karena α monomorfisma yaitu jika $x \neq y$ maka $\alpha(x) \neq \alpha(y)$, didapat $x\alpha(y) = 0$ dan $yx = 0$. Sehingga terbukti bahwa R memenuhi jika $x\alpha(y) = 0$ maka $yx = 0$ untuk $x, y \in R$.

(2) ($\Rightarrow$) Misalkan $\alpha(yx)\alpha\big(\alpha(yx)\big) = \alpha(y)\alpha\big(x\alpha(y)\big)\alpha\big(\alpha(x)\big) = 0$. Karena R α-rigid, maka $\alpha(yx) = 0$ jadi $yx = 0$. Oleh karena itu R semiprima, jika $xRx = \{0\}$ maka $x = 0$ dan memenuhi jika $x\alpha(y) = 0$ maka $yx = 0$ untuk $x, y \in R$.

($\Leftarrow$) Misalkan $x\alpha(x) = 0$ untuk $x \in R$ maka $x = 0$ atau $\alpha(x) = 0$. Karena R ring semiprima, jika $xRx = \{0\}$ maka $x = 0$ dan memenuhi jika $x\alpha(y) = 0$ maka $yx = 0$ untuk $x, y \in R$. Sehingga terbukti bahwa R adalah ring α-rigid.

Akibat 3.1.7
Misalkan R adalah suatu ring. R tereduksi jika dan hanya jika R semiprima dan reversibel.

Bukti:

($\Rightarrow$) Diberikan R ring tereduksi. Jika $x^n = 0$ maka $x = 0, x \in R$, $n \in \mathbb{Z}^+$. Misalkan $x = 0$ maka $xRx = 0$. Karena $xRx = 0$ dan $x = 0$ maka R adalah semiprima. Karena R adalah ring asosiatif, $x(Rx) = 0$ maka $(Rx)x = 0$. Sehingga terbukti bahwa R reversibel.

($\Leftarrow$) Diberikan R semiprima dan reversibel. Misalkan $x(Rx) = (Rx)x = 0$. Karena $Rx^2 = 0$, sehingga didapat jika $x^2 = 0$ maka $x = 0$. Sehingga terbukti bahwa R tereduksi.

3.2 *Strong α-reversible Ring*

Definisi 3.2.1 *Strong α-reversible Ring*
Misalkan R adalah ring dan α adalah endomorfisma pada R.
α disebut *strong reversible* kanan jika $x\alpha(y) = 0$ maka $yx = 0$ dan α disebut *strong reversible* kiri jika $\alpha(x)y = 0$ maka $yx = 0$,
Untuk setiap $x, y \in R$. Maka R disebut *strong α-reversible ring* jika ada endomorfisma α yang *strong reversible* kanan dan kiri.

(Baser dan Kwak, 2010)

Contoh 3.2.2
Diberikan $A = \{\bar{0}, \bar{4}\} \subseteq \mathbb{Z}_8$. Jika ring $M_2(A) = \left\{\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \mid p, q, r, s \in A\right\}$ dan α endomorfisma ring yang didefinisikan oleh

$$\alpha: M_2(A) \to M_2(A)$$
$$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \mapsto \boldsymbol{\alpha}\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & \bar{0} \\ \bar{0} & s \end{pmatrix}.$$

Maka $M_2(A)$ merupakan suatu *strong α-reversible ring*.
Bukti:
Akan dibuktikan α adalah endomorfisma pada $M_2(A)$.
Ambil $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix},\ P, Q \in M_2(A)$.

$$\begin{aligned}\alpha(P+Q) &= \alpha\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\right)\\ &= \alpha\left(\begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}\right)\\ &= \begin{pmatrix} a+e & \bar{0} \\ \bar{0} & d+h \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} a & \bar{0} \\ \bar{0} & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & \bar{0} \\ \bar{0} & h \end{pmatrix}\\ &= \alpha(P) + \alpha(Q).\end{aligned}$$

$$\alpha(PQ) \quad = \alpha\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\right)$$

$$= \alpha\left(\begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}\right)$$
$$= \begin{pmatrix} ae+bg & \bar{0} \\ \bar{0} & cf+dh \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a & \bar{0} \\ \bar{0} & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & \bar{0} \\ \bar{0} & h \end{pmatrix}$$
$$= \alpha(P)\alpha(Q).$$

Jadi, α adalah homomorfisma pada $M_2\,(A)$. Karena $\alpha{:}M_2\,(A) \to M_2\,(A)$ maka α adalah endomorfisma.

Misalkan diambil $A = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{4} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \bar{4} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$.

1. *strong α-reversible* kanan

$$A\alpha(B) = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{4} \end{pmatrix}\alpha\begin{pmatrix} \bar{4} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{4} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Maka $BA = \begin{pmatrix} \bar{4} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{4} \end{pmatrix} = 0.$

2. *strong α-reversible* kiri

$$\alpha(A)B = \alpha\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{4} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{4} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Maka $BA = \begin{pmatrix} \bar{4} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{4} \end{pmatrix} = 0$. Dengan cara yang sama berlaku $\forall A, B \in M_2\,(A)$. Terbukti $M_2\,(A)$ merupakan *strong α-reversible ring*.

Jika R reversible dan α-reversibel maka R *strong α-reversible*. Misalkan R α-reversibel, $xy = 0 \to (y\alpha(x) = 0 \wedge \alpha(y)x = 0)$ dan R reversibel,

$$xy = 0 \to yx = 0$$
$$y\alpha(x) = 0 \to \alpha(x)y = 0,$$
$$\alpha(y)x = 0 \to x\alpha(y) = 0.$$

Sehingga didapat $x\alpha(y) = 0 \wedge \alpha(x)y = 0 \to yx = 0$. Terbukti jika R reversible dan α-reversibel maka R *strong α-reversible*.

Definisi 3.2.3 Annihilator

Misalkan R adalah ring komutatif. Suatu $x \in R$ disebut annihilator kiri jika terdapat suatu elemen yang bukan nol $y \in R$, sedemikian sehingga $xy = 0$. Suatu $x \in R$ disebut annihilator kanan jika terdapat suatu elemen yang bukan nol $y \in R$, sedemikian sehingga $yx = 0$.

(Bhattacharya, 1994)

Proposisi 3.2.4

Diberikan ring R dan α adalah endomorfisma dari R, didefinisikan sebagai berikut:

$$\alpha : R \longrightarrow R$$
$$S \longmapsto \alpha(S)\ ,$$

$S \subseteq R,\ \ S \neq \emptyset$. $r_R(S)$ merupakan annihilator kanan dan $\ell_R(S)$ merupakan annihilator kiri, maka pernyataan-pernyataan berikut adalah ekuivalen:

(1) R adalah *strong α-reversible.*

(2) $\ell_R\big(\alpha(S)\big) = r_R(S), r_R\big(\alpha(S)\big) = \ell_R(S), \forall S \subseteq R$.

(3) $\forall x \in R, \ell_R\big(\alpha(x)\big) = r_R(x), r_R\big(\alpha(x)\big) = \ell_R(x)$.

(4) Untuk $X, Y \subseteq R$, $X\alpha(Y) = 0, \alpha(X)Y = 0 \Leftrightarrow YX = 0$.

Bukti:

(1) $\Longrightarrow$ (2) Ambil $x \in R$ dan $S \subseteq R$.

$x \in \ell_R\big(\alpha(S)\big) \Longrightarrow x\alpha(S) = 0$ maka menurut (1) berlaku $Sx = 0$. Sehingga $x \in r_R(S)$, didapat

$$\ell_R\big(\alpha(S)\big) \subseteq r_R(S) \qquad (i)$$

$x \in r_R(S) \Longrightarrow \alpha(S)x = 0$ maka menurut (1) berlaku $xS = 0$. Sehingga $x \in \ell_R\big(\alpha(S)\big)$ didapat

$$r_R(S) \subseteq \ell_R\big(\alpha(S)\big) \qquad (ii)$$

Jadi dari (i) dan (ii) didapat $\ell_R\big(\alpha(S)\big) = r_R(S)$.

$x \in r_R\big(\alpha(S)\big) \Longrightarrow \alpha(S)x = 0$ maka menurut (1) berlaku $xS = 0$. Sehingga $x \in \ell_R(S)$ didapat

$$r_R\big(\alpha(S)\big) \subseteq \ell_R(S) \qquad (iii)$$

$x \in \ell_R(S) \Longrightarrow x\alpha(S) = 0$ maka menurut (1) berlaku $Sx = 0$.

Sehingga $x \in r_R\big(\alpha(S)\big)$ didapat

$$\ell_R(S) \subseteq r_R\big(\alpha(S)\big) \qquad (iv)$$

Jadi dari (iii) dan (iv) didapat $r_R\big(\alpha(S)\big) = \ell_R(S)$.

(2) $\Longrightarrow$ (3) Ambil $x \in R$ dan $S \subseteq R$.

Jika $x \in \ell_R\big(\alpha(x)\big)$ maka menurut (2) berlaku

$x \in r_R(x)$, didapat $\ell_R\big(\alpha(x)\big) \subseteq r_R(x)$.

Jika $x \in r_R(x)$ maka menurut (2) berlaku

$x \in \ell_R(\alpha(x))$, didapat $r_R(x) \subseteq \ell_R(\alpha(x))$. Sehingga $\ell_R(\alpha(x)) = r_R(x)$.

Kemudian jika $x \in r_R(\alpha(x))$ maka menurut (2) berlaku $x \in \ell_R(x)$, didapat $r_R(\alpha(x)) \subseteq \ell_R(x)$.

Jika $x \in \ell_R(x)$ maka menurut (2) berlaku $x \in r_R(\alpha(x))$, didapat $\ell_R(x) \subseteq r_R(\alpha(x))$. Sehingga $r_R(\alpha(x)) = \ell_R(x)$.

(3) $\Rightarrow$ (4) Diberikan $X, Y \subseteq R$, maka $X\alpha(Y) = 0$

$\Leftrightarrow x\alpha(y) = 0, x \in X, y \in Y$

$\Leftrightarrow x \in \ell_R(\alpha(y)) = r_R(y)$

$\Leftrightarrow yx = 0$

$\Leftrightarrow YX = \sum_{x \in X, y \in Y} yx = 0.$

(4) $\Rightarrow$ (1) Jika $X, Y \subseteq R$, $\forall x \in X$ dan $\forall y \in Y$, maka menurut (4) berlaku $x\alpha(y) = 0, \alpha(x)y = 0 \Rightarrow yx = 0, \forall x, y \in R$ sehingga R adalah *strong* α*-reversible*.

Contoh 3.2.5

Diberikan ring $R = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Maka R adalah ring tereduksi komutatif. Diberikan α adalah automorfisma dari R yang didefinisikan oleh

$$\alpha : R \longrightarrow R$$
$$(x, y) \longmapsto \alpha((x, y)) = (y, x).$$

Maka R bukan *strong* α*-reversible*.

Bukti:

Untuk $x = (0,1) = y \in R$,
$x\alpha(y) = (0,1)\alpha(0,1) = (0,1)(1,0) = (0,0) = \mathbf{0}$ dan
$\alpha(x)y = \alpha(0,1)(0,1) = (1,0)(0,1) = (0,0) = \mathbf{0}$ tetapi
$yx = (0,1)(0,1) = (0,1) \neq 0$. Jadi R bukan *strong* α*-reversible*.

Proposisi 3.2.6

Diberikan ring reversibel R dengan endomorfisma α. Pernyataan-pernyataan berikut ekuivalen:

1. R adalah *strong* α*-reversible*.
2. R *strong* α*-reversible* kanan.
3. Jika $x\alpha^n(y) = 0$ atau $\alpha^n(x)y = 0$ untuk n bilangan bulat positif dan $x, y \in R$, maka $xy = 0$. Sebaliknya jika $xy = 0$ untuk $x, y \in R$ maka $x\alpha^m(y) = 0$ dan $\alpha^m(x)y = 0$ untuk beberapa m bilangan bulat positif.

4. $\forall x, y \in R, xy = 0 \Leftrightarrow x\alpha(y) = 0$.

Bukti:

(1) $\Longrightarrow$ (2) $\forall x, y \in R$, jika $x\alpha(y) = 0$ maka $yx = 0$, sehingga jelas dari Definisi 3.2.1 jika R *strong* α*-reversible* maka R *strong* α*-reversible* kanan.

(2) $\Longrightarrow$ (3) Diberikan R *strong* α*-reversible* kanan,
$x\alpha^n(y) = 0 \Longrightarrow yx = 0$ dan R reversibel
$x\alpha^n(y) = 0 \Longrightarrow \alpha^n(y)x = 0, yx = 0 \Longrightarrow xy = 0$
$\alpha^n(y)x = 0 \Longrightarrow xy = 0$
Sehingga $x\alpha^n(y) = 0 \vee \alpha^n(y)x = 0$ untuk n bilangan bulat positif dan $x, y \in R$, maka $xy = 0$.
$xy = 0 \Longrightarrow (x = 0 \vee y = 0)$
$(x = 0 \vee y) = 0 \Longrightarrow (x\alpha^m(y) = 0 \wedge \alpha^m(y)x = 0)$
untuk m bilangan bulat positif dan $x, y \in R$.

(3) $\Longrightarrow$ (4) Jelas dari (3). $xy = 0 \Leftrightarrow x\alpha(y) = 0$, untuk $x, y \in R$.

(4) $\Longrightarrow$ (1) Diberikan $xy = 0 \Leftrightarrow x\alpha(y) = 0$, maka berlaku
$x\alpha(y) = 0 \Longrightarrow xy = 0$ untuk $x, y \in R$. Karena R reversibel $xy = 0 \Longrightarrow yx = 0$ dan
$x\alpha(y) = 0 \Longrightarrow \alpha(y)x = 0$ untuk $x, y \in R$. Sehingga berlaku $x\alpha(y) = 0 \Longrightarrow yx = 0$ dan
$\alpha(x)y = 0 \Longrightarrow yx = 0$.

Teorema 3.2.7

Diberikan endomorfisma α pada ring R. Anggap bahwa R adalah α*-skew Armendariz Ring*. R *strong* α*-reversible* jika dan hanya jika ring skew polinomial $R[x;\alpha]$ dari R adalah reversibel.

Bukti:

($\Longrightarrow$) Diberikan R reversibel, $f(x)g(x) = 0$ untuk $f(x) = \sum_{i=0}^{m} p_i x^i$ dan $g(x) = \sum_{j=0}^{n} q_j x^j$ dalam $R[x;\alpha]$. Karena R adalah α*-skew Armendariz*, kita peroleh $p_i\alpha^i(q_j) = 0$ untuk beberapa i dan j. Maka oleh Proposisi 3.2.6., $R[x;\alpha]$ reversibel.

($\Longleftarrow$) Diberikan $R[x;\alpha]$ reversibel maka R reversibel sebagai subring dari $R[x;\alpha]$. Misalkan bahwa $p\alpha(q) = 0, \forall p, q \in R$, $f(x) = px$ dan $g(x) = q$ dalam $R[x;\alpha]$. Maka $f(x)g(x) = p\alpha(q)x = 0 \in R[x;\alpha]$. Karena $R[x;\alpha]$ reversibel, kita peroleh $0 = g(x)f(x) = qpx$, dan juga $qp = 0$. Jadi R *strong α-reversible* kanan. Jika $qp = 0$ maka $q = 0$ atau $p = 0$, sehingga $\alpha(p)q = 0$ dan terbukti R *strong α-reversible.*

Contoh 3.2.8

Diberikan $A = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}\} \subseteq \mathbb{Z}_9$, $M_2(A) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in A\right\}$ dan α endomorfisma ring yang didefinisikan oleh

$$\alpha: M_2(A) \to M_2(A)$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \boldsymbol{\alpha}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \bar{0} \\ \bar{0} & d \end{pmatrix}.$$

$M_2(A)$ merupakan suatu α-*skew Armendariz ring*. $M_2(A)$ reversibel jika dan hanya jika $M_2(A)[x;\alpha]$ dari $M_2(A)$ adalah reversibel.

Bukti:

Misalkan diambil

$$f(x) = p_0 + p_1 x = \begin{pmatrix} \bar{6} & \bar{3} \\ \bar{3} & \bar{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{6} & \bar{0} \\ \bar{6} & \bar{3} \end{pmatrix} x,$$
$$g(x) = q_0 + q_1 x = \begin{pmatrix} \bar{6} & \bar{3} \\ \bar{3} & \bar{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{6} \\ \bar{0} & \bar{3} \end{pmatrix} x.$$

Karena $p_0, p_1, q_0, q_1 \in M_2(A)$, $M_2(A)$ reversibel dan *strong α-reversible* sehingga jika $p_i q_i = \mathbf{0}$ maka $q_i p_i = \mathbf{0}$ dan jika $p_i \alpha(q_i) = \alpha(p_i) q_i = \mathbf{0}$ maka $q_i p_i = \mathbf{0}$. Didapat

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \begin{pmatrix} \bar{6} & \bar{0} \\ \bar{6} & \bar{3} \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{6} \\ \bar{0} & \bar{3} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \bar{6} & \bar{0} \\ \bar{6} & \bar{3} \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} \bar{6} & \bar{3} \\ \bar{3} & \bar{0} \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} \bar{6} & \bar{3} \\ \bar{3} & \bar{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{6} \\ \bar{0} & \bar{3} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \bar{6} & \bar{3} \\ \bar{3} & \bar{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{6} & \bar{3} \\ \bar{3} & \bar{0} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Maka $g(x)f(x) = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{6} \\ \bar{0} & \bar{3} \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} \bar{6} & \bar{0} \\ \bar{6} & \bar{3} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \bar{6} & \bar{3} \\ \bar{3} & \bar{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{6} & \bar{0} \\ \bar{6} & \bar{3} \end{pmatrix} x +$

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{6} \\ \bar{0} & \bar{3} \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} \bar{6} & \bar{3} \\ \bar{3} & \bar{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{6} & \bar{3} \\ \bar{3} & \bar{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{6} & \bar{3} \\ \bar{3} & \bar{0} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$= \mathbf{0}.$

Terbukti bahwa $M_2\,(A)[x;\alpha]$ dari $M_2\,(A)$ adalah reversibel.

Akibat 3.2.9

Misalkan R adalah ring Armendariz. R reversibel jika dan hanya jika $R[x]$ reversibel.

Bukti:

($\Longrightarrow$) Diberikan $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i\,, g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \in R[x]$, karena R Armendariz jika $f(x)g(x) = 0$ maka $a_i b_j = 0, \forall i,\ j.$ Jika $g(x)f(x) = 0$ maka $b_j a_i = 0, \forall i,\ j$. Karena R reversibel maka $R[x]$ juga reversible.

($\Longleftarrow$) Diberikan $R[x]$ reversibel maka R reversibel sebagai subring dari $R[x]$.

Contoh 3.2.10

Diberikan $A = \{\bar{0}, \bar{3}\} \subseteq \mathbb{Z}_9$ dan ring Armendariz

$M_2\,(A) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in A\right\}$. $M_2\,(A)$ reversibel jika dan hanya jika $M_2\,(A)[x]$ reversibel.

Bukti:

Misalkan diambil,

$f(x) = a_0 + a_1 x = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{3} \\ \bar{0} & \bar{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{3} & \bar{3} \\ \bar{3} & \bar{0} \end{pmatrix} x,$

$g(x) = b_0 + b_1 x = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{3} \\ \bar{3} & \bar{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{3} & \bar{3} \\ \bar{3} & \bar{0} \end{pmatrix} x,\ f(x), g(x) \in M_2\,(A)[x],$

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \begin{pmatrix} \bar{3} & \bar{3} \\ \bar{3} & \bar{0} \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} \bar{3} & \bar{3} \\ \bar{3} & \bar{0} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \bar{3} & \bar{3} \\ \bar{3} & \bar{0} \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{3} \\ \bar{3} & \bar{0} \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{3} \\ \bar{0} & \bar{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{3} & \bar{3} \\ \bar{3} & \bar{0} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{3} \\ \bar{0} & \bar{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{3} \\ \bar{3} & \bar{0} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x)f(x) &= \begin{pmatrix} \bar{3} & \bar{3} \\ \bar{3} & \bar{0} \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} \bar{3} & \bar{3} \\ \bar{3} & \bar{0} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \bar{3} & \bar{3} \\ \bar{3} & \bar{0} \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{3} \\ \bar{0} & \bar{3} \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{3} \\ \bar{3} & \bar{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{3} & \bar{3} \\ \bar{3} & \bar{0} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{3} \\ \bar{3} & \bar{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{3} \\ \bar{0} & \bar{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{0}.$$

Dengan cara yang sama $\forall a_i, b_j \in M_2\,(A)$, jika $a_i b_j = \mathbf{0}$ maka $b_j a_i = \mathbf{0}$, sehingga $M_2\,(A)$ reversibel. Karena $f(x)g(x) = \mathbf{0}$ maka $g(x)f(x) = \mathbf{0}$ sehingga terbukti bahwa R reversibel jika dan hanya jika $R[x]$ reversibel.

BAB IV
PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan mengenai *Strong* α*-reversible ring*, dapat diambil kesimpulan bahwa untuk menentukan suatu ring yang *Strong* α*-reversible*, dapat diperiksa melalui beberapa sifat dan teorema antara lain:

1. Untuk $X, Y \subseteq R$, $X\alpha(Y) = 0, \alpha(X)Y = 0 \Leftrightarrow YX = 0$.
2. Misalkan R adalah ring reversibel. $x\alpha^n(y) = 0$, $\alpha^n(x)y = 0$ untuk n bilangan bulat positif dan $x, y \in R$, jika dan hanya jika $xy = 0$.
3. Misalkan R adalah α*-skew Armendariz Rings*. R *strong* α*-reversible* jika dan hanya jika ring skew polinomial $R[x; \alpha]$ dari R adalah reversibel.
4. Jika R reversibel dan α-reversibel maka R *strong* α*-reversible*.

4.2 Saran

Strong α*-reversible ring* disini hanya dibahas sifat-sifatnya. Selanjutnya disarankan dibahas tentang perluasan dari *strong* α*-reversible ring*.

DAFTAR PUSTAKA

Bhattacharya, P. B. Jain, S. K. Nagpaul, S. R. 1994. *Basic Abstract Algebr*a.Cambridge University Press. New York.

Dummit, D. S. dan R. M. Foote. 2002. *Abstract Algebra Second Edition*. John Wiley and Sons, Inc. New York.

Durbin, J. R. 1992. *Modern Algebra. An Introduction 3rd edition*. John Wiley and Sons, inc. New York.

Fraleigh, J. B. 1994. *A First Course in Abstract Algebra fifth Edition*. Addision Wesley Publishing Company. California.

Kose, H., 2012, *A Generalization of Reduced Rings*, Heccetteppe Journal of Mathematics and Statistics, 41(5), hal 689-696.

Math.M. Baser dan T.K. Kwak. 2010. *On strong reversible rings and their extension.* J. Korean No. 2. 119-132.

Whitelaw, T. A. 1995. *Introduction to Abstract Algebra*. Department of Mathematics University of Glasgow. Blackie Academic and Professional. New York.

Zhang C. dan Chen J. 2010.*Weak a-skew Armendariz Rings*. J. Korean Math. No.3.455-466.