PENENTUAN SPEKTRUM DAN DIAMETER GRAF MENGGUNAKAN NILAI EIGEN

SKRIPSI

oleh:

IGAKU AYU KINANTHI

105090401111001

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS BRAWIJAYA

MALANG

2014

PENENTUAN SPEKTRUM DAN DIAMETER GRAF MENGGUNAKAN NILAI EIGEN

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

oleh:

IGAKU AYU KINANTHI
105090401111001

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2014

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

PENENTUAN SPEKTRUM DAN DIAMETER GRAF MENGGUNAKAN NILAI EIGEN

oleh:
IGAKU AYU KINANTHI
105090401111001

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji
pada tanggal 24 Juli 2014
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Dosen Pembimbing

Drs. Marsudi, MS
NIP. 196101171988021002

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Dr. Abdul Rouf Alghofari, M. Sc.
NIP. 196709071992031001

LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	**: Igaku Ayu Kinanthi**
NIM	**: 105090401111001**
Jurusan	**: Matematika**
Penulis skripsi berjudul	**:Penentuan Spektrum dan Diameter Graf Menggunakan Nilai Eigen**

dengan ini menyatakan bahwa:

1. **skripsi ini adalah benar-benar karya saya sendiri dan bukan hasil plagiat dari karya orang lain. Karya-karya yang tercantum dalam Daftar Pustaka skripsi ini semata-mata digunakan sebagai acuan atau referensi,**
2. **apabila di kemudian hari diketahui bahwa isi skripsi saya merupakan hasil plagiat, maka saya bersedia menanggung akibat hukum dari keadaan tersebut.**

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 24 Juli 2014
yang menyatakan,

(Igaku Ayu Kinanthi)
NIM. 105090401111001

PENENTUAN SPEKTRUM DAN DIAMETER GRAF MENGGUNAKAN NILAI EIGEN

ABSTRAK

Graf merupakan salah satu aplikasi yang ada dalam aljabar linear. Graf digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek tersebut. Pada skripsi ini dibahas mengenai graf, matriks, nilai eigen dan vektor eigen. Pencarian nilai eigen dan vektor eigen digunakan untuk memperoleh spektrum graf dan diameter graf. Dengan memuat nilai eigen pada baris pertama dan banyaknya basis ruang vektor eigen pada baris kedua, diperoleh spektrum graf. Pada diameter graf diperoleh jarak maksimum dari semua pasangan simpul.

Kata kunci: diameter graf, graf, matriks *adjacent*, matriks Laplace, nilai eigen, spektrum graf.

ON DETERMINING SPECTRUM AND DIAMETER OF GRAPH WITH EIGENVALUE

ABSTRACT

Graph is one of the applications in linear algebra. Graph is use to representation discrete objects and connection between that objects. This final project discusses about a problem in spectral graph. In spectral graph discusses about graph, matrices, eigenvalue and eigenvector. Finding eigenvalue and eigenvector are use to obtain spectrum of graph and diameter of graph. With eigenvalue on first line and the quantity of eigenvector space bases on second line, spectrum of graph can be obtained. In diameter of graph obtained maximum distance every pair of vertex.

Keywords: adjacent matrix, diameter of graph, eigenvalue, graph, Laplacian matrix, spectrum of graph.

KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur ke hadirat Allah SWT yang telah memberikan bimbingan dan petunjuk-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “Penentuan Spektrum dan Diameter Graf Menggunakan Nilai Eigen” dengan baik. Shalawat serta salam selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW sebagai suri tauladan bagi penulis.

Skripsi ini tidak dapat diselesaikan dengan baik tanpa bantuan, bimbingan serta motivasi dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Drs. Marsudi, MS. selaku dosen pembimbing skripsi atas segala bimbingan, motivasi, kritikan, saran, waktu, serta kesabaran yang telah diberikan selama pembimbingan skripsi ini dan juga selalu mendorong penulis untuk menyelesaikan skripsi ini.
2. Kwardiniya Andawaningtyas, S.Si., M.Si dan Dr. Sobri Abusini, MT. selaku dosen penguji atas segala saran yang diberikan untuk perbaikan skripsi ini.
3. Dr. Abdul Rouf Alghofari, M. Sc. selaku Ketua Jurusan Matematika dan Dr. Sobri Abusini MT. selaku Ketua Program Studi Matematika.
4. Nur Shofianah, S.Si., M.Si., selaku dosen pembimbing akademik penulis di kampus yang telah membimbing penulis sejak awal kuliah.
5. Semua bapak/ibu dosen Jurusan Matematika yang telah memberikan ilmunya kepada penulis, serta segenap staf dan karyawan TU Jurusan Matematika atas segala bantuannya.
6. Mama, Papa dan Adik Dhimas Tegar yang tercinta atas segala doa dan dukungan yang tiada henti diberikan kepada penulis hingga akhir skripsi.
7. Septianto, Rosalina, Aprilia, Ayu Desi, dan Ruvita atas segala doa dan semangat yang terus diberikan kepada penulis hingga penulis menyelesaikan skripsi.
8. Teman-teman Matematika A 2010 atas doa, dukungan dan kebersamaan selama 4 tahun ini.
9. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Semoga Allah SWT memberikan anugerah dan barokah-Nya kepada semua pihak yang turut membantu menyelesaikan skripsi ini. Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih terdapat kekurangan, untuk itu penulis mengharapkan kritik dan saran melalui email penulis igakuayu@gmail.com. Akhir kata, semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak.

Malang, 24 Juli 2014

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR SIMBOL

Simbol	Keterangan
A_G	: matriks *adjacent*
C_n	: graf lingkaran dengan n simpul
$\deg(G)$	: derajat *(degree)* graf
D_G	: matriks diagonal
$\mathbb{D}(G)$	: diameter graf
E	: sisi *(Edges)*
G	: graf
L_G	: matriks Laplace
$m(\lambda_n)$	: banyaknya basis untuk ruang vektor eigen
P_n	: graf lintasan dengan n simpul
$spec(G)$	: spektrum graf
V	: simpul *(Vertex)*
λ_{n-1}	: nilai eigen terbesar
λ_1	: nilai eigen kedua terbesar

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Dalam perkembangan ilmu di bidang matematika dikenal satu percabangan ilmu yaitu aljabar linear. Dalam aljabar linear istilah matriks, nilai eigen, vektor eigen dan masih banyak istilah lagi merupakan salah satu pokok bahasan yang dibahas di bidang matematika. Dari aljabar linear diperoleh banyak aplikasi, salah satu aplikasinya adalah graf.

Teori graf merupakan pokok bahasan yang sudah lama ada dan sampai saat ini memiliki banyak terapan. Graf digunakan untuk mempresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut. Representasi visual dari graf adalah menyatakan objek dengan titik sedangkan hubungan antar objek dinyatakan dengan garis (Munir, 2010).

Pada graf yang merupakan aplikasi dari aljabar linear dapat diperoleh matriks. Matriks yang digunakan dalam skripsi ini adalah matriks Laplace dan matriks *adjacent*. Pada matriks Laplace yang dihasilkan dari sebuah graf merupakan salah satu pokok bahasan yang ada pada graf spektral. Pada graf spektral matriks Laplace selalu dihubungkan dalam mencari nilai eigen.

Nilai eigen yang didapat kemudian diperluas pembahasannya dengan dapatnya ditemukan spektrum dari graf dan diameter dari graf tersebut. Untuk menemukan spektrum graf dan diameter graf dari nilai eigen tadi dapat diperoleh vektor eigennya, lalu kemudian dapat diperoleh spektrum graf dan diameter graf (Chung, 1994).

Pada skripsi ini akan dibahas sebagian kecil dari graf spektral, yaitu hanya membahas nilai eigen dari matriks Laplace yang dapat menemukan spektrum dan diameter dari graf. Pada penelitian sebelumnya oleh Lovasz (2007) yang dibahas adalah pencarian nilai eigen dari sebuah graf. Pada skripsi ini dicari manfaat dari pencarian nilai eigen yaitu dapat diperoleh spektrum sebuah graf dan diameter dengan menggunakan nilai eigen.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dijelaskan, permasalahan yang akan dibahas dalam skripsi ini adalah sebagai berikut.

1. Bagaimana menentukan spektrum graf dengan menggunakan nilai eigen?
2. Bagaimana menentukan diameter graf dengan menggunakan nilai eigen?

1.3 Batasan Masalah

Dari permasalahan yang telah dirumuskan sebelumnya, maka diberikan batasan masalah untuk menghindari melebarnya masalah. Batasan masalah dalam skripsi ini adalah graf yang dibahas merupakan graf sederhana.

1.4 Tujuan

Sesuai dengan rumusan masalah yang diberikan, maka tujuan penulisan skripsi ini adalah sebagai berikut.

1. Menentukan spektrum graf menggunakan nilai eigen,
2. Menentukan diameter graf dengan menggunakan nilai eigen.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Skripsi ini memerlukan beberapa definisi untuk memudahkan pembahasan mengenai nilai eigen yang diperoleh dari matriks Laplace dan matriks *adjacent* dari graf.

2.1 Dasar Aljabar Linear

Sebelum masuk lebih jauh tentang aljabar linier yang dihubungkan dengan graf, maka dibahas terlebih dahulu dasar-dasar dari aljabar linear untuk memudahkan pemahaman.

Definisi 2.1.1 (Matriks)
Suatu matriks *(matrix)* berukuran $m \times n$ adalah suatu jajaran bilangan berbentuk persegi panjang yang terdiri dari m baris dan n kolom. Matriks tersebut ditulis dalam bentuk,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

(Kolman, 1970)

Contoh 2.1.1
Matriks A sebagai berikut,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 5 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

merupakan matriks berukuran 2×3.

Definisi 2.1.2 (Matriks simetrik / *symmetric matrix*)
Suatu matriks bujur sangkar A adalah simetrik *(symmetric)* jika $A = A^T$.

(Anton dan Rorres, 2004)

Contoh 2.1.2
Matriks A dengan ukuran 3×3 sebagai berikut,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

merupakan matriks simetrik.

Definisi 2.1.3 (Matriks diagonal / *diagonal matrix*)
Suatu matriks bujursangkar yang semua entrinya yang tidak terletak pada diagonal utama adalah nol disebut matriks diagonal *(diagonal matrix).*

(Anton dan Rorres, 2004)

Contoh 2.1.3
Matriks identitas I dengan ukuran 3×3 merupakan matriks diagonal.

Definisi 2.1.4 (Nilai eigen dan vektor eigen)
Jika A adalah sebuah matriks $n \times n$, maka sebuah vektor taknol pada R^n disebut vektor eigen *(eigenvector)* dari A jika Ax adalah sebuah kelipatan skalar dari x; jelasnya,

$$Ax = \lambda x \tag{2.1}$$

untuk skalar sebarang λ. Skalar λ disebut nilai eigen *(eigenvalue)* dari A, dan x disebut sebagai vektor eigen dari A yang terkait dengan λ.

(Anton dan Rorres, 2004)

Contoh 2.1.4
Matriks A dengan ukuran 2×2 sebagai berikut,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

diperoleh vektor $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ yang merupakan vektor eigen terkait dengan nilai eigen $\lambda = 3$.

Definisi 2.1.5 (Matriks semidefinit positif)
Sebuah matriks simetrik A dikatakan semidefinit positif jika $\forall x \in \mathbb{R}^n$,

$$x^T A x \geq 0 \tag{2.2}$$

(Kelner, 2009)

Contoh 2.1.5
Matriks A dengan ukuran 2×2 sebagai berikut,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

merupakan matriks semidefinit positif.

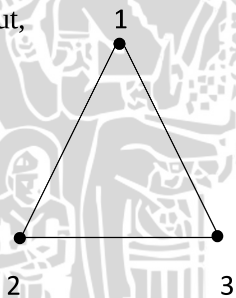
2.2 Graf

Lebih dahulu akan dijelaskan definisi mengenai graf yang digunakan untuk memudahkan pemahaman.

Definisi 2.2.1 (Graf / *graph*)
Suatu graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E), ditulis dengan notasi $G = (V, E)$, yang dalam hal ini V adalah himpunan tidak-kosong dari simpul-simpul *(vertices)* dan E adalah himpunan sisi *(edges)* yang menghubungkan sepasang simpul.

(Munir, 2010)

Contoh 2.2.1
Graf G_1 sebagai berikut,



merupakan sebuah graf.

Definisi 2.2.2 (Graf sederhana / *simple graph*)
Graf yang tidak mengandung gelang *(loop)* maupun sisi ganda *(multiple edges)* disebut graf sederhana.

(Munir, 2010)

Contoh 2.2.2
Graf G_1 sesuai dengan Contoh 2.2.1 merupakan graf sederhana.

Definisi 2.2.3 (Graf tak-berarah / *undirected graph*)
Graf yang sisinya tidak mempunyai orientasi arah disebut graf tak-berarah.

(Munir, 2010)

Contoh 2.2.3
Graf G_1 sesuai dengan Contoh 2.2.1 merupakan graf tak-berarah.

Definisi 2.2.4 (Lintasan / *path*)
Lintasan yang panjangnya n dari simpul awal v_0 ke simpul tujuan v_n di dalam graf ialah barisan berselang-seling simpul-simpul dan sisi-sisi yang berbentuk $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_n$ sedemikian sehingga $e_1 = (v_0, v_1), e_2 = (v_1, v_2), \ldots, e_n = (v_{n-1}, v_n)$ adalah sisi-sisi dari graf.

(Munir, 2010)

Contoh 2.2.4
Graf G_1 sesuai dengan Contoh 2.2.1 dapat diperoleh lintasan 1-2-3.

Definisi 2.2.5 (Terhubung / *connected*)
Graf tak-berarah G disebut graf terhubung *(connected graph)* jika untuk setiap pasang simpul u dan v di dalam himpunan V terdapat lintasan dari u ke v (yang juga harus berarti ada lintasan dari u ke v). Jika tidak, maka G disebut graf tak terhubung *(disconnected graph)*.

(Munir, 2010)

Contoh 2.2.5
Graf G_1 sesuai dengan Contoh 2.2.1 merupakan graf terhubung.

Definisi 2.2.6 (Bertetangga / *adjacent*)
Dua buah simpul pada graf tak-berarah G dikatakan bertetangga *(adjacent)* bila keduanya terhubung langsung dengan sebuah sisi. Dengan kata lain, u bertetangga dengan v jika (u, v) adalah sebuah sisi pada graf G.

(Munir, 2010)

Contoh 2.2.6
Graf G_1 sesuai dengan Contoh 2.2.1 dapat diperoleh,simpul 1 dan 2 bertetangga, simpul 1 dan 3 bertetangga dan simpul 2 dan 3 bertetangga.

Definisi 2.2.7 (Matriks *adjacent* / *adjacency matrix*)
Misalkan G adalah sebuah graf (sederhana dan tak berarah) dengan himpunan simpul $V(G) = \{1, \dots, n\}$. Matriks *adjacent* dari G ditunjukkan sebagai matriks $n \times n$, $A_G = \left(A_{ij}\right)$, yang mana

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jika } i \text{ dan } j \text{ bertetangga} \\ 0, & \text{selainnya} \end{cases}$$

(Lovasz, 2007)

Contoh 2.2.7
Graf G_1 sesuai dengan Contoh 2.2.1 dapat diperoleh matriks *adjacent* sebagai berikut,

$$A_G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Definisi 2.2.8 (Bersisian / *incident*)
Untuk sembarang sisi $e = (u, v)$, sisi e dikatakan bersisian dengan simpul u dan simpul v.

(Munir, 2010)

Contoh 2.2.8
Graf G_1 sesuai dengan Contoh 2.2.1,dapat diperoleh sisi (1,2) bersisian dengan simpul 1 dan 2.

Definisi 2.2.9 (Derajat / *degree*)
Derajat suatu simpul pada graf tak-berarah adalah jumlah sisi yang bersisian dengan simpul tersebut. Dinotasikan, deg_i menyatakan derajat simpul i.

(Munir, 2010)

Contoh 2.2.9
Graf G_1 sesuai dengan Contoh 2.2.1 dapat diperoleh, $deg_1 = 2$, $deg_2 = 2$, dan $deg_3 = 2$.

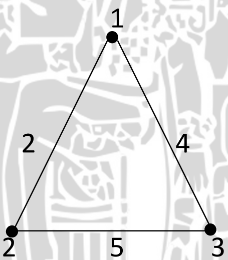
2.3 Graf Berbobot

Setelah pemaparan mengenai graf, dilanjutkan dengan penjelasan menggunakan definisi mengenai graf berbobot. Matriks yang digunakan pada graf berbobot sama dengan matriks yang digunakan pada graf biasa. Akan tetapi pada entrinya akan berbeda karena pada tiap sisi graf diberi bobot. Agar lebih memudahkan penjelasan maka akan diperjelas definisi-definisi.

Definisi 2.3.1 (Graf berbobot)
Suatu graf G didefinisikan sebagai graf berbobot tak-berarah $G = (V, E, w)$ merupakan graf biasa yang semula graf $G = (V, E)$ dengan fungsi $w : E \rightarrow \mathbb{R}^+$, dimana $\mathbb{R}^+$ dinotasikan himpunan dari angka real positif.

(Spielman, 2009)

Contoh 2.3.1
Graf G_2 sebagai berikut,



dapat diperoleh, $e_{12} = 2, e_{13} = 4, e_{23} = 5$.

Definisi 2.3.2 (Matriks *adjacent* berbobot)
Misalkan G adalah sebuah graf dengan himpunan simpul $V(G) = \{1, \dots, n\}$. Matriks *adjacent* dari graf berbobot G ditunjukkan sebagai matriks $n \times n$, $A_G = (A_{ij})$, yang mana

$$A_G(i,j) = \begin{cases} w(i,j), & \text{jika } (i,j) \in E \\ 0, & \text{selainnya} \end{cases}$$

(Spielman, 2009)

Contoh 2.3.2
Graf G_2 sesuai dengan Contoh 2.3.1 dapat diperoleh matriks *adjacent* berbobot sebagai berikut,

$$A_G = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Definisi 2.3.3 (Derajat matriks berbobot)
Derajat dari matriks berbobot graf G akan dinotasikan D_G, dan matriks diagonalnya sedemikian sehingga,

$$deg_G(i,i) = \sum_j A_G(i,j) \tag{2.3}$$

(Spielman, 2009)

Contoh 2.3.3
Graf G_2 sesuai dengan Contoh 2.3.1 dapat diperoleh matriks diagonal sebagai berikut,

$$deg_G = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

2.4 Keterhubungan Nilai Eigen dan Graf Berbobot

Berdasarkan contoh 2.3.2 dapat diketahui bahwa untuk graf berbobot $G = (V, E, w)$ maka diperoleh,

$$L_G = \sum_{(u,v)\epsilon E} w(u,v) L_{G_{u,v}}$$

matriks Laplace biasanya mengikuti persamaan diatas. Pada keterangan bahwa untuk semua $x \epsilon \mathbb{R}^V$, diperoleh

$$x^T L_G x = \sum_{(u,v)\epsilon E} w(u,v)(x(u) - x(v))^2$$

untuk vektor eigen x dari nilai eigen λ dapat memberi pengertian,

$$x^T L_G x = \lambda x^T x \geq 0$$

ini menunjukkan bahwa nilai eigen dari matriks Laplace adalah tak-negatif. Jadi, merupakan matriks semidefinit positif.

Lemma 2.4.1
Misal $G = (V, E)$ adalah sebuah graf, dan misal $0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$ adalah nilai eigen dari matriks Laplace. Maka $\lambda_2 > 0$ jika dan hanya jika G terhubung.

(Spielman, 2009)

Bukti.
(⇒) Ditunjukkan $\lambda_2 = 0$ jika G terhubung. Jika G tidak terhubung, maka dapat dijelaskan sebagai dua graf gabungan G_1 dan G_2. Setelah menomori kembali simpul, dapat dituliskan,

$$L_G = \begin{bmatrix} L_{G_1} & 0 \\ 0 & L_{G_2} \end{bmatrix}$$

Jadi, L_G memiliki paling sedikit dua orthogonal vektor eigen dari nilai eigen sama dengan 0, yaitu

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} dan \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dimana didapat partisi vektor sebagaimana didapat pada matriks L_G.

(⇐) Asumsikan bahwa G terhubung dan bahwa x adalah vektor eigen L_G dari nilai eigen 0

$$L_G x = 0$$

didapat,

$$x^T L_G x = \sum_{(u,v)\in E} (x(u) - x(v))^2 = 0$$

demikian untuk tiap pasangan simpul (u, v) terhubung dengan sisi, didapat $x(u) = x(v)$. Sebagai setiap pasangan simpul u dan v adalah terhubung dengan sebuah lintasan. Demikian x harus menjadi vektor konstan dan dapat disimpulkan bahwa ruang eigen dari nilai eigen 0 memiliki dimensi 1. ■

Definisi 2.4.1 (Jarak Graf)

Jarak pada sebuah graf G antara dua simpul u dan v ditunjukkan sebagai panjang dari lintasan terpendek menghubungkan u dan v. Dinotasikan dengan $d(u,v)$.

(Chung, 1994)

Contoh 2.4.1

Graf G_1 sesuai dengan Contoh 2.2.1 dapat diperoleh $d(1,2) = 1$, $d(1,3) = 1$, dan $d(2,3) = 1$.

Definisi 2.4.2 (Graf lingkaran / *cycle*)

Graf lingkaran *(Cycle)* adalah graf sederhana yang setiap simpulnya berderajat dua. Graf lingkaran dengan n simpul dilambangkan dengan C_n.

(Munir, 2010)

Contoh 2.4.2

Graf G_1 sesuai dengan Contoh 2.2.1 dapat diperoleh graf berderajat dua dan dinotasikan dengan C_3.

Definisi 2.4.3 (Gabungan / *union*)

Misalkan $G_1 = (V_1, E_1)$ dan $G_2 = (V_2, E_2)$ dimana V_1 dan V_2 saling asing. Gabungan dari G_1 dan G_2, $G = G_1 \cup G_2 = (V, E)$ didefinisikan sebagai graf dengan himpunan titik $v = V_1 \cup V_2$ dan himpunan garis $E = E_1 \cup E_2$.

(Vasudev, 2005)

Definisi 2.4.4 (*Joint*)

Misalkan $G_1 = (V_1, E_1)$ dan $G_2 = (V_2, E_2)$. Gabungan dari G_1 dan G_2, $G = G_1 + G_2 = (V, E)$ adalah graf $G = G_1 \cup G_2$ dan semua sisi yang menghubungkan titik di V_1 dan titik di V_2.

(Vasudev, 2005)

Definisi 2.4.5 (Graf teratur)
Graf yang setiap simpulnya mempunyai derajat yang sama disebut graf teratur. Apabila derajat setiap simpul adalah r, maka graf tersebut disebut graf teratur derajat r.

(Chartrand dan Zhang, 2005)

Definisi 2.4.6 (Matriks laplace / *laplacian matrix*)
Matriks Laplace dari graf ditunjukkan dengan matriks $n \times n$, $L_G = \left(L_{ij}\right)$, yang mana

$$L_{ij} = \begin{cases} d_{i,} & \text{jika } i = j \\ -A_{ij,} & \text{jika } i \neq j \end{cases}$$

dengan d_i merupakan derajat dari simpul i dan A_{ij} merupakan matriks *adjacent*.
Jadi, diperoleh $L_G = D_G - A_G$, dimana D_G merupakan matriks diagonal dari derajat graf G.

(Lovasz, 2007)

Definisi 2.4.7 (Spektrum Graf)
Misalkan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ adalah nilai eigen berbeda dari A,dengan $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n$, dan misalkan $m(\lambda_1), m(\lambda_2), \dots, m(\lambda_n)$ adalah banyaknya basis untuk ruang vektor eigen masing-masing λ_i, maka matriks berordo $(2 \times n)$ yang memuat $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ pada baris pertama dan $m(\lambda_1), m(\lambda_2), \dots, m(\lambda_n)$ pada baris kedua disebut spectrum graf G. Dinotasikan $Spec(G)$, dapat dituliskan,

$$Spec(G) = \begin{bmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_n \\ m(\lambda_0) & m(\lambda_1) & \cdots & m(\lambda_n) \end{bmatrix}$$

(Abdusakkir, dkk., 2009)

Definisi 2.4.8 (Diameter Graf)
Diameter dari sebuah graf G adalah jarak maksimum dari semua pasangan dari simpul di G. Dinotasikan dengan $\mathbb{D}(G)$.

(Chung, 1994)

Diameter graf (nilai eigen dan jarak antara dua subset)

Diameter dari sebuah graf dinotasikan dengan $\mathbb{D}(G)$ yang merupakan jarak maksimum dari semua pasangan di G. Misalkan M merupakan matriks $n \times n$ dengan baris dan kolom ditunjukkan dengan simpul dari G. Andaikan G memenuhi aturan bahwa $M(u, v) = 0$ jika u dan v tidak *adjacent*. Andaikan dapat ditunjukkan bahwa untuk beberapa bilangan t, dan beberapa polinomial $P_t(x)$ dari derajat t dimana polinomial $P_t(x)$ adalah $(1 + x)^t$, kemudian diperoleh

$$P_t(M)(u, v) \neq 0 \qquad \text{untuk } u \text{ dan } v$$

maka kita dapat menyimpulkan bahwa diameter $\mathbb{D}(G)$ memenuhi,

$$\mathbb{D}(G) \leq t$$

(Chung,1994)

Teorema 2.4.1

Jika G merupakan graf teratur dengan n simpul yang bukan merupakan graf tidak lengkap. Maka,

$$\mathbb{D}(G) \leq \left\lceil \frac{\log(n-1)}{\log \frac{\lambda_{n-1} + \lambda_1}{\lambda_{n-1} - \lambda_1}} \right\rceil$$

(Chung, 1994)

Bukti.

Andaikan diperoleh M yang diperoleh dari jumlahan matriks *adjacent* dan matriks identitas dan polynomial $p_t(x)$ menjadi $(1 + x)^t$ ketaksamaan mengikuti graf sederhana (biasa) yang mana bukan merupakan graf lengkap sehingga diperoleh,

$$\mathbb{D}(G) \leq \left\lceil \frac{\log(n-1)}{\log \frac{1}{1-\lambda}} \right\rceil$$

pada dasarnya λ bergantung pada λ_1. Dimisalkan, diperoleh $\lambda = \lambda_1$, jika $1 - \lambda \geq \lambda_{n-1} - 1$ dengan menggunakan *"spectrum shifting"* (Chung, 1994) maka ditunjukkan $\lambda = \frac{2\lambda_1}{(\lambda_{n-1}+\lambda_1)} \geq \frac{2\lambda_1}{(2+\lambda_1)}$.

Kemudian substitusikan $\lambda = \frac{2\lambda_1}{(\lambda_{n-1}+\lambda_1)}$ ke $\mathbb{D}(G) \leq \left\lceil \frac{\log(n-1)}{\log\frac{1}{1-\lambda}} \right\rceil$,

$$\mathbb{D}(G) \leq \left\lceil \frac{\log(n-1)}{\log\frac{1}{1-\lambda}} \right\rceil$$

$$\mathbb{D}(G) \leq \left\lceil \frac{\log(n-1)}{\log\frac{1}{1-\frac{2\lambda_1}{\lambda_{n-1}+\lambda_1}}} \right\rceil$$

$$\mathbb{D}(G) \leq \left\lceil \frac{\log(n-1)}{\log\frac{1}{\frac{\lambda_{n-1}+\lambda_1-2\lambda_1}{\lambda_{n-1}+\lambda_1}}} \right\rceil$$

$$\mathbb{D}(G) \leq \left\lceil \frac{\log(n-1)}{\log\frac{1}{\frac{\lambda_{n-1}-\lambda_1}{\lambda_{n-1}+\lambda_1}}} \right\rceil$$

$$\mathbb{D}(G) \leq \left\lceil \frac{\log(n-1)}{\log\frac{\lambda_{n-1}+\lambda_1}{\lambda_{n-1}-\lambda_1}} \right\rceil$$

■

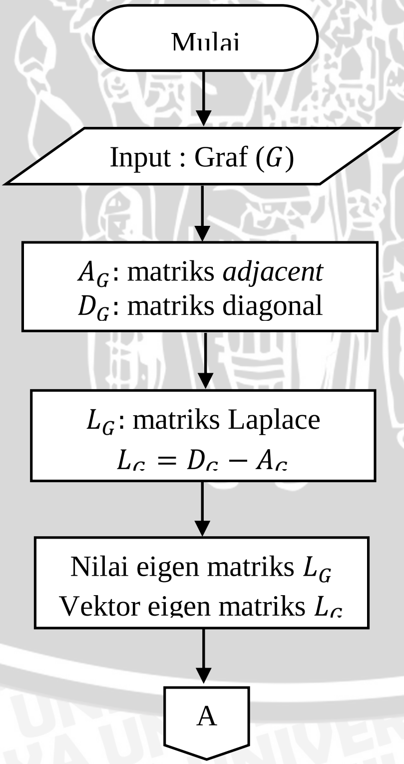
BAB III
METODE PENELITIAN

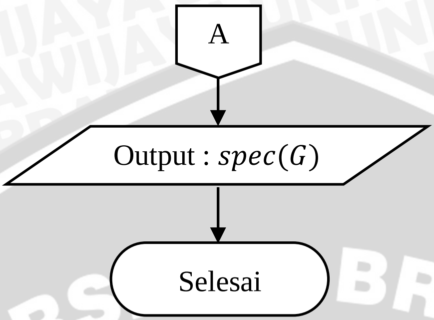
3.1 Langkah-Langkah Penelitian

Metode penelitian ini adalah studi literatur mengenai nilai eigen, vektor eigen, graf, spektrum graf dan diameter graf. Adapun langkah-langkah yang ditempuh untuk mengerjakan penelitian ini adalah

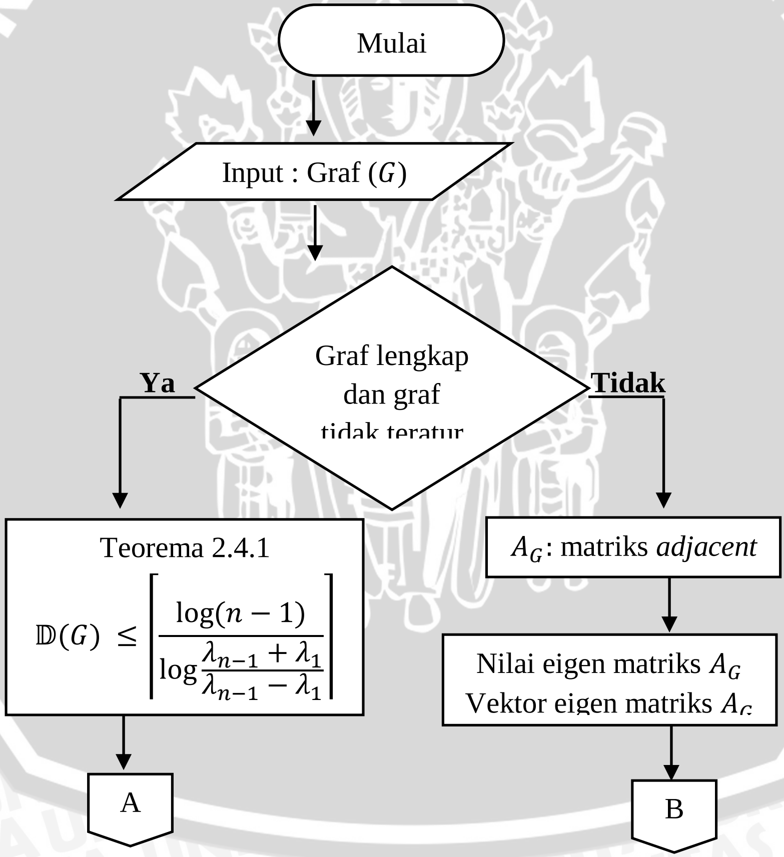
1. Merumuskan masalah
2. Menentukan metode untuk menyelesaikan masalah
3. Studi literatur
4. Pengaplikasian metode
5. Interpretasi hasil
6. Kesimpulan

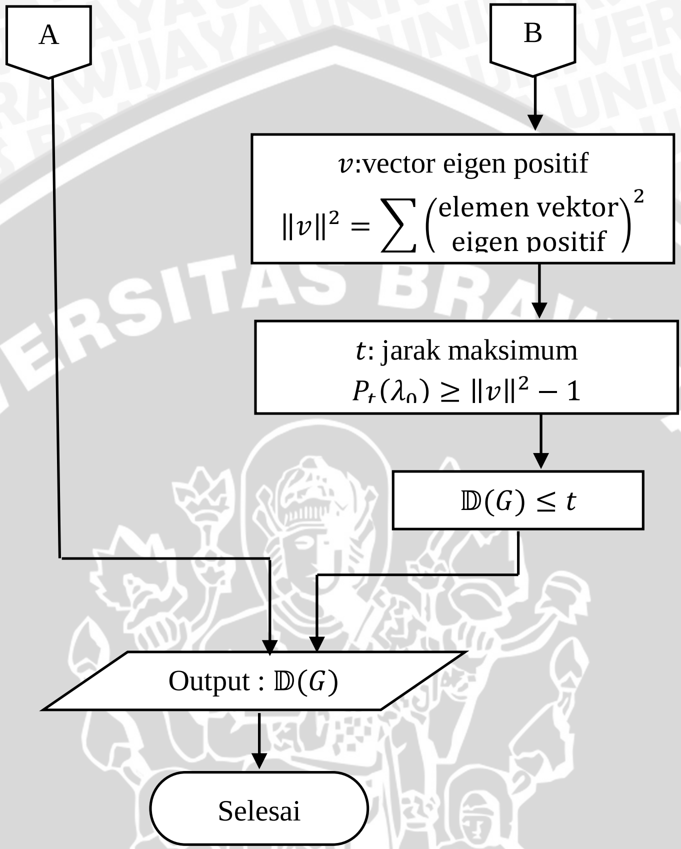
3.2 Diagram Alir Spektrum Graf





3.3 Diagram Alir Diameter Graf



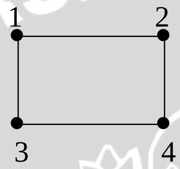

A
B
v:vector eigen positif
$\|v\|^2 = \sum \begin{pmatrix} \text{elemen vektor} \\ \text{eigen positif} \end{pmatrix}^2$
t: jarak maksimum
$P_t(\lambda_0) \geq \|v\|^2 - 1$
$\mathbb{D}(G) \leq t$
Output : $\mathbb{D}(G)$
Selesai

BAB IV
PEMBAHASAN

4.1 Pembahasan Graf tak Berbobot

Pada bab ini akan dibahas beberapa contoh graf tak berbobot yang berkaitan dengan spektrum graf dan diameter graf.

4.1.1 Graf lingkaran dengan 4 simpul (C_4)



Gambar 1. Graf G_1 merupakan graf lingkaran (C_4).

(1) Matriks Laplace

Berdasarkan graf lingkaran C_4 diperoleh,

$$D_G = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad A_G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

maka dapat diperoleh pula matriks Laplace,

$$L_G = D_G - A_G$$

$$L_G = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(2) Nilai eigen matriks Laplace

Setelah diperoleh matriks Laplace maka akan dicari nilai eigen dan vektor eigen yang terkait untuk mencari spektrum graf dan diameter graf.

$$\det(\lambda I - L_G) = 0$$

$$\det\begin{bmatrix} \lambda-2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda-2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \lambda-2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \lambda-2 \end{bmatrix} = 0$$

Kemudian diperoleh nilai eigen, $\lambda_0 = 4$, $\lambda_1 = 2$ dan $\lambda_2 = 0$. Dari nilai eigen yang telah diperoleh dapat pula diperoleh vektor eigen yang terkait.

Untuk $\lambda_0 = 4$, dapat diperoleh vektor eigen

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

untuk $\lambda_1 = 2$, dapat diperoleh vektor eigen

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{dan} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

untuk $\lambda_2 = 0$, dapat diperoleh vektor eigen

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(3) Spektrum graf

Berdasarkan perhitungan nilai eigen dan vektor eigen matriks Laplace dapat diperoleh, untuk $\lambda_0 = 4$ diperoleh 1 basis ruang vektor eigen, untuk $\lambda_1 = 2$ diperoleh 2 basis ruang vektor eigen dan untuk $\lambda_2 = 0$ diperoleh 1 basis ruang vektor eigen. Jadi, spektrum graf dapat dituliskan sebagai berikut

$$spec\ (C_4) = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(4) Diameter graf

Berdasarkan Teorema 2.4.1, penentuan diameter suatu graf dapat menggunakan rumus

$$\mathbb{D}(G) \leq \left\lceil \frac{\log(n-1)}{\log \frac{\lambda_{n-1} + \lambda_1}{\lambda_{n-1} - \lambda_1}} \right\rceil.$$

Dengan adanya rumus dari Teorema 2.4.1 diameter graf C_4 yaitu,

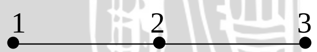
$$\mathbb{D}(G) \leq \left\lceil \frac{\log(n-1)}{\log \frac{\lambda_{n-1} + \lambda_1}{\lambda_{n-1} - \lambda_1}} \right\rceil$$

$$\mathbb{D}(G) \leq \left\lceil \frac{\log(4-1)}{\log \frac{4+2}{4-2}} \right\rceil$$

$$\mathbb{D}(G) \leq 1$$

Jika menggunakan rumus Teorema 2.4.1 pada hasil diameter harus ditambahkan dengan 1. Jadi, dengan diperolehnya $\mathbb{D}(G) \leq 2$ maka dapat disimpulkan jarak maksimum pada graf C_4 adalah 2.

4.1.2 Graf lintasan dengan 3 simpul $(\boldsymbol{P_3})$



Gambar 2. Graf G_2merupakan graf lintasan $(\boldsymbol{P_3})$.

(1) Matriks Laplace

Berdasarkan graf lintasan P_3 diperoleh,

$$D_G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_{G=} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

maka dapat diperoleh pula matriks Laplace,

$$L_G = D_G - A_G$$
$$L_G = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(2) Nilai eigen

Setelah diperoleh matriks *adjacent* dan matriks Laplace maka akan dicari nilai eigen dan vektor eigen yang terkait untuk matriks *adjacent* dan matriks Laplace untuk mencari spektrum graf dan diameter graf.

Lebih dahulu dicari nilai eigen dari matriks Laplace,

$$\det(\lambda I - L_G) = 0$$
$$\det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda - 2 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda - 1 \end{bmatrix} = 0$$

Kemudian diperoleh nilai eigen, $\lambda_0 = 3, \lambda_1 = 1$ dan $\lambda_2 = 0$. Dari nilai eigen yang telah diperoleh dapat pula diperoleh vektor eigen yang terkait.

Untuk $\lambda_0 = 3$, dapat diperoleh vektor eigen

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

untuk $\lambda_1 = 1$, dapat diperoleh vektor eigen

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

untuk $\lambda_2 = 0$, dapat diperoleh vektor eigen

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya dicari nilai eigen matriks *adjacent*,

$$\det(\lambda I - A_G) = 0$$
$$\det\begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{bmatrix} = 0$$

Kemudian diperoleh nilai eigen, $\lambda_0 = \sqrt{2}$, $\lambda_1 = 0$ dan $\lambda_2 = -\sqrt{2}$. Dari nilai eigen yang telah diperoleh dapat pula diperoleh vektor eigen yang terkait.

Untuk $\lambda_0 = \sqrt{2}$, dapat diperoleh vektor eigen

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \end{bmatrix},$$

untuk $\lambda_1 = 0$, dapat diperoleh vektor eigen

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

untuk $\lambda_2 = -\sqrt{2}$, dapat diperoleh vektor eigen

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(3) Spektrum graf

Berdasarkan perhitungan nilai eigen dan vektor eigen matriks Laplace dapat diperoleh, untuk $\lambda_0 = 3$ diperoleh 1 basis ruang vektor eigen, untuk $\lambda_1 = 1$ diperoleh 1 basis ruang vektor eigen dan untuk

$\lambda_2 = 0$ diperoleh 1 basis ruang vektor eigen. Jadi, spektrum graf dapat dituliskan sebagai berikut

$$spec\ (P_3) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(4) Diameter graf

Berdasarkan perhitungan nilai eigen dan vektor eigen matriks *adjacent* dapat diperoleh vektor eigen bernilai positif yang nantinya digunakan untuk mencari diameter graf.

$$\|v\|^2 = \left(\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2}\right)^2$$

$$\|v\|^2 = 4$$

$$P_t(\lambda_0) \geq \|v\|^2 - 1$$
$$P_t(\lambda_0) \geq 3$$

$t = 0$
$P_0(\lambda_0) = (1 + \lambda_0)^0$
$P_0(\lambda_0) = 1$

$P_0(\lambda_0) \geq 3$
$1 \geq 3$ (tidak memenuhi)

$t = 1$
$P_1(\lambda_0) = (1 + \lambda_0)^1$
$P_1(\lambda_0) = 2{,}4142$

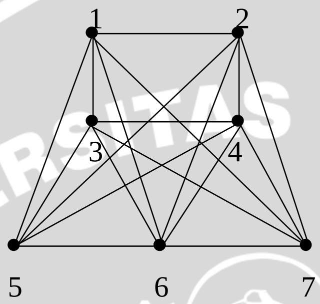
$P_1(\lambda_0) \geq 3$
$2{,}4142 \geq 3$ (tidak memenuhi)

$t = 2$
$P_2(\lambda_0) = (1 + \lambda_0)^2$
$P_2(\lambda_0) = 5{,}8284$

$P_2(\lambda_0) \geq 3$
$5{,}8284 \geq 3$ (memenuhi)

Jadi, dengan diperolehnya $\mathbb{D}(G) \leq 2$ maka dapat disimpulkan jarak maksimum pada graf P_3 adalah 2.

4.1.3 Graf *Joint* dengan 7 simpul $(\boldsymbol{P_3} + \boldsymbol{C_4})$



Gambar 3. Graf G_3 merupakan graf joint $(\boldsymbol{P_3} + \boldsymbol{C_4})$.

1) Matriks Laplace

Berdasarkan graf *Joint* $P_3 + C_4$ diperoleh,

$$D_G = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A_G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

maka dapat diperoleh pula matriks Laplace,

$$L_G = D_G - A_G$$

$$L_G = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 5 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 5 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

(2) Nilai eigen

Setelah diperoleh matriks *adjacent* dan matriks Laplace maka akan dicari nilai eigen dan vektor eigen yang terkait untuk matriks *adjacent* dan matriks Laplace untuk mencari spektrum graf dan diameter graf.

Lebih dahulu dicari nilai eigen dari matriks Laplace,

$$\det(\lambda I - L_G) = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} \lambda-5 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-5 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \lambda-5 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \lambda-5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \lambda-5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \lambda-6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & \lambda-5 \end{bmatrix} = 0$$

Kemudian diperoleh nilai eigen dengan menggunakan software Maple, $\lambda_0 = 7$, $\lambda_1 = 5$ dan $\lambda_2 = 0$. Dari nilai eigen yang telah diperoleh dapat pula diperoleh vektor eigen yang terkait.

Untuk $\lambda_0 = 7$, dapat diperoleh vektor eigen

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ dan } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

untuk $\lambda_1 = 5$, dapat diperoleh vektor eigen

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ dan } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

untuk $\lambda_2 = 0$, dapat diperoleh vektor eigen

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya dicari nilai eigen matriks *adjacent*,

$$\det(\lambda I - A_G) = 0$$

$$\det\begin{bmatrix} \lambda & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & \lambda & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & \lambda & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \lambda & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & \lambda \end{bmatrix} = 0$$

Kemudian diperoleh nilai eigen dengan menggunakan software Maple, $\lambda_0 = 2 + \sqrt{10}, \lambda_1 = 2 - \sqrt{10}, \lambda_2 = 0$ dan $\lambda_3 = -2$. Dari nilai eigen yang telah diperoleh dapat pula diperoleh vektor eigen yang terkait.

Untuk $\lambda_0 = 2 + \sqrt{10}$, dapat diperoleh vektor eigen

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\sqrt{10} \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\sqrt{10} \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\sqrt{10} \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\sqrt{10} \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\sqrt{10} \\ 1 \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\sqrt{10} \end{bmatrix},$$

untuk $\lambda_1 = 2 - \sqrt{10}$, dapat diperoleh vektor eigen

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} - \frac{1}{6}\sqrt{10} \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{6}\sqrt{10} \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{6}\sqrt{10} \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{6}\sqrt{10} \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{6}\sqrt{10} \\ 1 \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{6}\sqrt{10} \end{bmatrix},$$

untuk $\lambda_2 = 0$, dapat diperoleh vektor eigen

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ dan } \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

untuk $\lambda_3 = -2$, dapat diperoleh vektor eigen

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ dan } \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(3) Spektrum graf

Berdasarkan perhitungan nilai eigen dan vektor eigen matriks Laplace dapat diperoleh, untuk $\lambda_0 = 7$ diperoleh 1 basis ruang vektor eigen, untuk $\lambda_1 = 5$ diperoleh 1 basis ruang vektor eigen dan untuk $\lambda_2 = 0$ diperoleh 1 basis ruang vektor eigen. Jadi, spektrum graf dapat dituliskan sebagai berikut

$$spec\ (P_3) = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

(4) Diameter graf

Berdasarkan perhitungan nilai eigen dan vektor eigen matriks *adjacent* dapat diperoleh vektor eigen bernilai positif yang nantinya digunakan untuk mencari diameter graf.

$$\|v\|^2 = \left(\sqrt{\begin{array}{c}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\sqrt{10}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\sqrt{10}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\sqrt{10}\right)^2 + \\ \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\sqrt{10}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\sqrt{10}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\sqrt{10}\right)^2 \\ +1^2+1^2+1^2+1^2+1^2+1^2+1^2+1^2\end{array}}\right)^2$$

$$\|v\|^2 = 13{,}1623$$

$$P_t(\lambda_0) \geq \|v\|^2 - 1$$
$$P_t(\lambda_0) \geq 12{,}1623$$

$t = 0$
$P_0(\lambda_0) = (1+\lambda_0)^0$
$P_0(\lambda_0) = 1$

$P_0(\lambda_0) \geq 12{,}1623$
$1 \geq 12{,}1623$ (tidak memenuhi)

$t = 1$
$P_1(\lambda_0) = (1+\lambda_0)^1$
$P_1(\lambda_0) = 6{,}1623$

$P_1(\lambda_0) \geq 12{,}1623$
$6{,}1623 \geq 12{,}1623$ (tidak memenuhi)

$t = 2$
$P_2(\lambda_0) = (1+\lambda_0)^2$
$P_2(\lambda_0) = 37{,}9737$

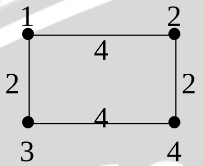
$P_2(\lambda_0) \geq 12{,}1623$
$37{,}9737 \geq 12{,}1623$ (memenuhi)
Jadi, dengan diperolehnya $\mathbb{D}(G) \leq 2$ maka dapat disimpulkan jarak maksimum pada graf $P_3 + C_4$ adalah 2.

4.2 Pembahasan Graf Berbobot

Pada bab ini akan dibahas beberapa contoh graf berbobot yang berkaitan dengan spektrum graf dan diameter graf.

4.2.1 Graf lingkaran dengan 4 simpul (C_4)

.



Gambar 4. Graf G_4merupakan graf lingkaran (C_4).

(1) Matriks Laplace

Berdasarkan graf lingkaran berbobot C_4 diperoleh dengan cara yang sama dengan graf lingkaran tidak berbobot maka matriks Laplace sebagai berikut,

$$L_G = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & -2 & -4 & 2 \end{bmatrix}.$$

(2) Nilai eigen matriks Laplace

Setelah diperoleh matriks Laplace maka akan dicari nilai eigen dan vektor eigen yang terkait dengan cara yang sama dengan pencarian nilai eigen pada graf tidak berbobot untuk mencari spektrum graf dan diameter graf.

Kemudian diperoleh nilai eigen, $\lambda_0 = 8$, $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 0$, dan $\lambda_3 = -4$. Dari nilai eigen yang telah diperoleh dapat pula diperoleh vektor eigen yang terkait.

Untuk $\lambda_0 = 8$, dapat diperoleh vektor eigen

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

untuk $\lambda_1 = 4$, dapat diperoleh vektor eigen

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

untuk $\lambda_2 = 0$, dapat diperoleh vektor eigen

$$\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

untuk $\lambda_3 = -4$, dapat diperoleh vektor eigen

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(3) Spektrum graf

Berdasarkan perhitungan nilai eigen dan vektor eigen matriks Laplace dapat diperoleh, untuk $\lambda_0 = 8$ diperoleh 1 basis ruang vektor eigen, untuk $\lambda_1 = 4$ diperoleh 2 basis ruang vektor eigen, $\lambda_2 = 0$ diperoleh 1 basis ruang vektor eigen dan untuk $\lambda_3 = -4$ diperoleh 1 basis ruang vektor eigen. Jadi, spektrum graf dapat dituliskan sebagai berikut

$$spec\ (C_4) = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(4) Diameter graf

Berdasarkan Teorema 2.4.1, penentuan diameter suatu graf dapat menggunakan rumus

$$\mathbb{D}(G) \le \left\lceil \frac{\log(n-1)}{\log \frac{\lambda_{n-1}+\lambda_1}{\lambda_{n-1}-\lambda_1}} \right\rceil.$$

Dengan adanya rumus dari Teorema 2.4.1 diameter graf C_4 yaitu,

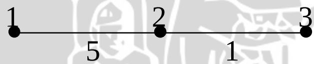
$$\mathbb{D}(G) \le \left\lceil \frac{\log(n-1)}{\log \frac{\lambda_{n-1}+\lambda_1}{\lambda_{n-1}-\lambda_1}} \right\rceil$$

$$\mathbb{D}(G) \le \left\lceil \frac{\log(4-1)}{\log \frac{4+2}{4-2}} \right\rceil$$

$$\mathbb{D}(G) \le 1$$

Jika menggunakan rumus Teorema 2.4.1 pada hasil diameter harus ditambahkan dengan 1. Jadi, dengan diperolehnya $\mathbb{D}(G) \le 2$ maka dapat disimpulkan jarak maksimum pada graf C_4 adalah 2.

4.2.2 Graf lintasan dengan 3 simpul $(\boldsymbol{P_3})$



Gambar 5. Graf G_5merupakan graf lintasan $(\boldsymbol{P_3})$.

(1) Matriks Laplace

Berdasarkan graf lintasan berbobot P_3 diperoleh dengan cara yang sama dengan graf lintasan tidak berbobot maka matriks Laplace sebagai berikut,

$$L_G = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ -5 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(2) Nilai eigen

Setelah diperoleh matriks *adjacent* dan matriks Laplace maka akan dicari nilai eigen dan vektor eigen yang terkait dengan cara yang sama dengan pencarian nilai eigen pada graf tidak berbobot untuk mencari spektrum graf dan diameter graf.

Lebih dahulu dicari nilai eigen dari matriks Laplace. Kemudian diperoleh nilai eigen dari matriks Laplace, $\lambda_0 = \frac{3+\sqrt{105}}{2}$, $\lambda_1 = 1$ dan $\lambda_2 = \frac{3-\sqrt{105}}{2}$. Dari nilai eigen yang telah diperoleh dapat pula diperoleh vektor eigen yang terkait.

Untuk $\lambda_0 = \frac{3+\sqrt{105}}{2}$, dapat diperoleh vektor eigen

$$\begin{bmatrix} \frac{-5+5\sqrt{105}}{-52} \\ 1 \\ \frac{1-\sqrt{105}}{52} \end{bmatrix},$$

untuk $\lambda_1 = 1$, dapat diperoleh vektor eigen

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix},$$

untuk $\lambda_2 = \frac{3-\sqrt{105}}{2}$, dapat diperoleh vektor eigen

$$\begin{bmatrix} \frac{5+5\sqrt{105}}{52} \\ 1 \\ \frac{1+\sqrt{105}}{52} \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya dicari nilai eigen matriks *adjacent*. Kemudian diperoleh nilai eigen, $\lambda_0 = \sqrt{26}$, $\lambda_1 = 0$ dan $\lambda_2 = -\sqrt{26}$. Dari nilai eigen yang telah diperoleh dapat pula diperoleh vektor eigen yang terkait.

Untuk $\lambda_0 = \sqrt{26}$, dapat diperoleh vektor eigen

$$\begin{bmatrix} \frac{5\sqrt{26}}{26} \\ 1 \\ \frac{\sqrt{26}}{26} \end{bmatrix},$$

untuk $\lambda_1 = 0$, dapat diperoleh vektor eigen

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix},$$

untuk $\lambda_2 = -\sqrt{26}$, dapat diperoleh vektor eigen

$$\begin{bmatrix} -\frac{5\sqrt{26}}{26} \\ 1 \\ -\frac{\sqrt{26}}{26} \end{bmatrix}.$$

(3) Spektrum graf

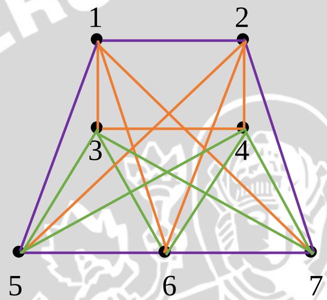
Berdasarkan perhitungan nilai eigen dan vektor eigen matriks Laplace dapat diperoleh, untuk $\lambda_0 = \frac{3+\sqrt{105}}{2}$ diperoleh 1 basis ruang vektor eigen, untuk $\lambda_1 = 1$ diperoleh 2 basis ruang vektor eigen dan $\lambda_2 = \frac{3-\sqrt{105}}{2}$ diperoleh 1 basis ruang vektor eigen. Jadi, spektrum graf dapat dituliskan sebagai berikut

$$spec\ (P_3) = \begin{bmatrix} \frac{3+\sqrt{105}}{2} & 1 & \frac{3-\sqrt{105}}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(4) Diameter graf

Berdasarkan perhitungan nilai eigen dan vektor eigen matriks *adjacent* dapat diperoleh vektor eigen bernilai positif yang nantinya digunakan untuk mencari diameter graf. Dengan cara yang sama pada graf tidak berbobot untuk mencari diameter graf, maka diperoleh $\mathbb{D}(G) \leq 2$ maka dapat disimpulkan jarak maksimum pada graf P_3 adalah 2.

4.2.3 Graf *Joint* dengan 7 simpul $(\boldsymbol{P_3 + C_4})$



Gambar 6. Graf G_6 merupakan graf joint $(\boldsymbol{P_3 + C_4})$.

Keterangan:

: memiliki bobot 1

: memiliki bobot 2

: memiliki bobot 3

(1) Matriks Laplace

Berdasarkan graf *joint* berbobot $P_3 + C_4$ diperoleh dengan cara yang sama dengan graf *joint* tidak berbobot maka matriks Laplace sebagai berikut,

$$L_G = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -2 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ -1 & 5 & 0 & -2 & -2 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 5 & -2 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & -2 & 5 & -3 & -3 & -3 \\ -1 & -2 & -3 & -3 & 5 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & -3 & -3 & -1 & 6 & -1 \\ -2 & -1 & -3 & -3 & 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

(2) Nilai eigen

Setelah diperoleh matriks *adjacent* dan matriks Laplace maka akan dicari nilai eigen dan vektor eigen yang terkait dengan cara yang sama dengan pencarian nilai eigen pada graf tidak berbobot untuk mencari spektrum graf dan diameter graf.

Lebih dahulu dicari nilai eigen dari matriks Laplace. Kemudian diperoleh nilai eigen dengan menggunakan software Maple $\lambda_0 = 11{,}2994$, $\lambda_1 = 8{,}6691$, $\lambda_2 = 7{,}1504$, $\lambda_3 = 5{,}4760$, $\lambda_4 = 5{,}3021$, $\lambda_5 = 3{,}8549$ dan $\lambda_6 = -5{,}7519$. Dari nilai eigen yang telah diperoleh dapat pula diperoleh vektor eigen yang terkait.

Untuk $\lambda_0 = 11{,}3$, dapat diperoleh vektor eigen

$$\begin{bmatrix} 0{,}1826 \\ 0{,}1826 \\ 0{,}4274 \\ 0{,}4274 \\ -0{,}4205 \\ -0{,}4630 \\ -0{,}4205 \end{bmatrix},$$

untuk $\lambda_1 = 8{,}7$, dapat diperoleh vektor eigen

$$\begin{bmatrix} 0{,}4463 \\ -0{,}4463 \\ -0{,}5348 \\ 0{,}5348 \\ 0{,}1216 \\ 0 \\ -0{,}1216 \end{bmatrix},$$

untuk $\lambda_2 = 7{,}2$, dapat diperoleh vektor eigen

$$\begin{bmatrix} 0{,}1764 \\ 0{,}1764 \\ -0{,}1021 \\ -0{,}1021 \\ 0{,}3988 \\ -0{,}7739 \\ 0{,}3988 \end{bmatrix}$$

untuk $\lambda_3 = 5,5$, dapat diperoleh vektor eigen

$$\begin{bmatrix} 0{,}2647 \\ -0{,}2647 \\ 0{,}3474 \\ -0{,}3474 \\ 0{,}5561 \\ 0 \\ -0{,}5561 \end{bmatrix},$$

untuk $\lambda_4 = 5{,}3$, dapat diperoleh vektor eigen

$$\begin{bmatrix} 0{,}5944 \\ 0{,}5944 \\ -0{,}3193 \\ -0{,}3193 \\ -0{,}1671 \\ 0{,}1829 \\ -0{,}1671 \end{bmatrix},$$

untuk $\lambda_5 = 3{,}9$, dapat diperoleh vektor eigen

$$\begin{bmatrix} -0{,}4803 \\ 0{,}4803 \\ -0{,}3055 \\ 0{,}3055 \\ 0{,}4195 \\ 0 \\ -0{,}4195 \end{bmatrix},$$

Untuk $\lambda_6 = -5{,}8$, dapat diperoleh vektor eigen

$$\begin{bmatrix} 0{,}2867 \\ 0{,}2867 \\ 0{,}4527 \\ 0{,}4527 \\ 0{,}3691 \\ 0{,}3915 \\ 0{,}3691 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya dicari nilai eigen matriks *adjacent* dengan menggunakan *software* Maple. Kemudian diperoleh nilai eigen, $\lambda_0 = 10{,}9152$, $\lambda_1 = 1{,}1451, \lambda_2 = -0{,}2516$, $\lambda_3 = -0{,}4760, \lambda_4 = -1{,}5481$, $\lambda_5 = -3{,}6691$ dan $\lambda_6 = -6{,}1155$. Dari nilai eigen yang telah diperoleh dapat pula diperoleh vektor eigen yang terkait.

Untuk $\lambda_0 = 10{,}9$, dapat diperoleh vektor eigen

$$\begin{bmatrix} 1{,}2842 \\ 1{,}2842 \\ 1{,}4481 \\ 1{,}4481 \\ 1{,}3626 \\ 1{,}4169 \\ 1{,}3626 \end{bmatrix},$$

untuk $\lambda_1 = 1{,}1$, dapat diperoleh vektor eigen

$$\begin{bmatrix} 0{,}4803 \\ -0{,}4803 \\ 0{,}3055 \\ -0{,}3055 \\ -0{,}4195 \\ 0 \\ 0{,}4195 \end{bmatrix},$$

untuk $\lambda_2 = -0{,}3$, dapat diperoleh vektor eigen

$$\begin{bmatrix} 0,5642 \\ 0,5642 \\ -0,3192 \\ -0,3192 \\ -0,2054 \\ 0,2741 \\ -0,2054 \end{bmatrix},$$

untuk $\lambda_3 = -0,5$, dapat diperoleh vektor eigen

$$\begin{bmatrix} -0,2647 \\ 0,2647 \\ -0,3474 \\ 0,3474 \\ -0,5561 \\ 0 \\ 0,5561 \end{bmatrix},$$

untuk $\lambda_4 = -1,5$, dapat diperoleh vektor eigen

$$\begin{bmatrix} -0,2627 \\ -0,2627 \\ 0,0941 \\ 0,0941 \\ -0,3535 \\ 0,7709 \\ -0,3535 \end{bmatrix},$$

untuk $\lambda_5 = -3,7$, dapat diperoleh vektor eigen

$$\begin{bmatrix} -0,4463 \\ 0,4463 \\ 0,5348 \\ -0,5348 \\ -0,1216 \\ 0 \\ 0,1216 \end{bmatrix},$$

untuk $\lambda_6 = -6,1$, dapat diperoleh vektor eigen

$$\begin{bmatrix} -0,1784 \\ -0,1784 \\ -0,4341 \\ -0,4341 \\ 0,4487 \\ 0,3959 \\ 0,4487 \end{bmatrix}.$$

(3) Spektrum graf

Berdasarkan perhitungan nilai eigen dan vektor eigen matriks Laplace dapat diperoleh, untuk $\lambda_0 = 11{,}3$ diperoleh 1 basis ruang vektor eigen, untuk $\lambda_1 = 8{,}7$ diperoleh 1 basis ruang vektor eigen, $\lambda_2 = 7{,}2$ diperoleh 1 basis ruang vektor eigen, $\lambda_3 = 5{,}5$ diperoleh 1 basis ruang vektor eigen, $\lambda_4 = 5{,}3$ diperoleh 1 basis ruang vektor eigen, $\lambda_5 = 3{,}9$ diperoleh 1 basis ruang vektor eigen dan untuk $\lambda_6 = -5{,}8$ diperoleh 1 basis ruang vektor eigen. Jadi, spektrum graf dapat dituliskan sebagai berikut,

$$spec\ (C_4 + P_3) = \begin{bmatrix} 11{,}3 & 8{,}7 & 7{,}2 & 5{,}5 & 5{,}3 & 3{,}9 & -5{,}8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(4) Diameter graf

Berdasarkan perhitungan nilai eigen dan vektor eigen matriks *adjacent* dapat diperoleh vektor eigen bernilai positif yang nantinya digunakan untuk mencari diameter graf. Dengan cara yang sama pada graf tidak berbobot untuk mencari diameter graf, maka diperoleh $\mathbb{D}(G) \leq 2$ maka dapat disimpulkan jarak maksimum pada graf $P_3 + C_4$ adalah 2.

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan rumusan masalah dan pembahasan yang telah dipaparkan dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut.

1. Spektrum graf merupakan matriks berordo $2 \times n$ yang memuat nilai eigen pada baris pertama dan banyaknya basis untuk ruang vektor eigen. Pembobotan pada graf tidak mempengaruhi dalam memperoleh spektrum graf.
2. Diameter graf merupakan jarak maksimum antar simpul pada sebuah graf. Untuk memperoleh diameter graf dengan menggunakan dua cara. Jika graf tersebut merupakan graf teratur dan graf tidak lengkap digunakan rumus dari Teorema 2.4.1. Jika graf tersebut tidak lengkap digunakan matriks *adjacent* untuk mencari diameter. Pada penggunaan Teorema 2.4.1 untuk pencarian diameter perlu ditambah dengan 1 agar hasilnya sesuai dengan jarak maksimum pada gambar. Pembobotan pada graf tidak mempengaruhi dalam memperoleh diameter graf.

5.2 Saran

Untuk penelitian selanjutnya, mencari manfaat nilai eigen selain untuk memperoleh spektrum graf dan diameter graf.

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir., Nilna, N., dan Fifi, F. 2009. *Teori Graf. Malang*. Uin-Malang Press

Anton, H., dan Rorres, C. 2004. *Aljabar Linier Elementer versi aplikasi-Jilid 1*. Jakarta. Erlangga.

Chartrand, G., dan Zhang, P. 2005. *Introduction to Graph Theory.* Boston. McGraw-Hill.

Chung, F. R. K. 1994. *Spectral Graph Theory*. Fresno. California State University.

Kelner, J. 2009. *Algorithmist's Toolkit Lecture.* MIT school.

Kolman, B. 1970. *Elementary Linear Algebra.* New York. Macmillan Publishers.

Lovasz, L. 2007. *Eigenvalue of Graph.* Budapest. Yale University.

Munir, R. 2010. *Matematika Diskrit Revisi Keempat*. Bandung. Informatika.

Spielman, D. A. 2009. *Spectral Graph Theory Lecture*. Yale University. http://www.cs.yale.edu/homes/spielman/spectut, diakses tanggal: 14 Maret 2014.

Vasudev, C. 2005. *Graph Theory with Application.* http://www.newagepublishers.com, diakses tanggal: 13 Juli 2014.