EKSISTENSI TITIK TETAP DALAM RUANG METRIK PARSIAL

SKRIPSI

oleh:
AHMAD KHAIRUL UMAM
0910940002-94

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2014

EKSISTENSI TITIK TETAP DALAM RUANG METRIK PARSIAL

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

oleh:
AHMAD KHAIRUL UMAM
0910940002-94

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2014

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

EKSISTENSI TITIK TETAP DALAM RUANG METRIK PARSIAL

oleh:

AHMAD KHAIRUL UMAM
0910940002-94

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji
pada tanggal 24 Juni 2014
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Pembimbing

Drs. Mohamad Muslikh, M.Si.
NIP. 195910311989121001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Dr. Abdul Rouf Alghofari, M.Sc.
NIP. 196709071992031001

LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	**: Ahmad Khairul Umam**
NIM	**: 0910940002**
Jurusan	**: Matematika**
Penulis skripsi berjudul	**: Eksistensi Titik Tetap dalam Ruang Metrik Parsial**

Dengan ini menyatakan bahwa :

1. **Skripsi ini adalah hasil pemikiran saya, bukan hasil plagiat dari tulisan orang lain. Rujukan-rujukan yang tercantum pada daftar pustaka hanya digunakan sebagai acuan atau referensi.**
2. **Apabila suatu saat nanti diketahui bahwa isi skripsi saya merupakan hasil plagiat, maka saya bersedia menanggung akibat hukum dari keadaan tersebut.**

Demikian pernyataan ini dibuat dengan penuh kesadaran.

Malang, 24 Juni 2014
yang menyatakan,

Ahmad Khairul Umam
NIM 0910940002

EKSISTENSI TITIK TETAP DALAM RUANG METRIK PARSIAL

ABSTRAK

Dalam skripsi ini dipelajari eksistensi dan ketunggalan titik tetap suatu pemetaan dalam ruang metrik parsial yang dilengkapi 2 metrik parsial.

Kata kunci : titik tetap, ruang metrik parsial, metrik parsial.

THE EXISTENCE OF FIXED POINT IN
THE PARTIAL METRIC SPACES

ABSTRACT

This thesis studies about the existence and singularity fixed point a mapping in the partial metric spaces with two partial metrics.

Keyword : fixed point, partial metric spaces, partial metrics.

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT karena limpahan rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan judul “Eksistensi Titik Tetap dalam Ruang Metrik Parsial”.

Skripsi ini disusun sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains dalam bidang Matematika. Skripsi ini juga dapat selesai karena bimbingan dan motivasi dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan rasa terima kasih yang tulus kepada

1. Drs. Mohamad Muslikh. M.Si. selaku dosen pembimbing, atas segala bimbingan, motivasi, bantuan, serta kesabaran yang telah diberikan selama penulisan skripsi ini,
2. Dr. Abdul Rouf Alghofari, M.Sc. dan Sa’adatul Fitri, S.Si., M.Sc. selaku dosen penguji, atas segala kritik dan saran yang telah diberikan untuk perbaikan skripsi ini,
3. Dr. Abdul Rouf Alghofari, M.Sc. selaku Ketua Jurusan Matematika dan juga selaku dosen Penasihat Akademik, Dr. H. Sobri Abusini, MT. selaku Ketua Program Studi Matematika.
4. seluruh dosen Jurusan Matematika yang telah memberikan ilmunya kepada penulis, serta segenap staf dan karyawan TU Jurusan Matematika atas segala bantuannya,
5. H. Muh. Supardi (Bapak), Hj. Siti Zulaikhah (Ibu), Muh. Qori’ Ayatullah (Kakak), Abdurrahman Aziz (adik) dan seluruh keluarga besar atas segala doa, bantuan, dan motivasi yang tak pernah habis diberikan,
6. semua teman-teman Matematika angkatan 2009 atas semangat dan bantuan yang telah diberikan serta kebersamaannya selama ini,
7. Titis Risty Andari selaku teman yang selalu memberikan bantuan, motivasi dan doa dalam rangka menyelesaikan skripsi ini,
8. keluarga besar HMI Cabang Malang Komisariat Mipa Brawijaya atas kebersamaan kekeluargaan yang dibangun,
9. semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Semoga Allah SWT memberikan anugerah dan barokah-Nya kepada semua pihak yang telah membantu menyelesaikan skripsi ini. Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan, oleh karena itu kritik dan saran yang membangun sangat penulis harapkan.

Akhir kata, Semoga skripsi ini bermanfaat bagi semua pihak, serta menjadi sumber inspirasi untuk penulisan skripsi selanjutnya.

Malang, 24 Juni 2014

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR SIMBOL

$\forall$	: untuk setiap
$\mathbb{N}$	: himpunan bilangan asli
$\in$	: anggota himpunan
$\mathbb{R}$	: himpunan bilangan real
$<$	: kurang dari
$>$	: lebih dari
$\geq$	: lebih dari sama dengan
$\leq$	: kurang dari sama dengan
$\Longrightarrow$	: implikasi
$\Leftrightarrow$	: biimplikasi
(X, d)	: ruang metrik
$d(x, y)$	: metrik (fungsi jarak titik x dan y)
$\langle x_n \rangle$	: barisan x_n
ε	: epsilon
δ	: delta
$g \circ f$	: komposisi g dengan f
$x*$	: titik tetap
log	: logaritma
(X, p)	: ruang metrik parsial
$p(x, y)$	: metrik parsial
$d_p(x, y)$	: metrik yang dibangun oleh metrik parsial
$\mathcal{T}(p)$	: topologi metrik parsial

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Titik tetap memiliki peranan yang sangat penting dalam menyelesaikan beberapa masalah matematis. Beberapa permasalahan matematis yang dapat diselesaikan dengan prinsip titik tetap antara lain masalah persamaan linier, persamaan differensial biasa, persamaan differensial parsial dan persamaan integral.

Salah satu teorema titik tetap yang terkenal adalah teorema titik tetap banach. Teorema tersebut menjamin eksistensi dan ketunggalan titik tetap untuk fungsi yang terdefinisi dalam ruang lengkap dan fungsi yang kontraktif (Oltra, 2004).

Dalam skripsi ini dipelajari eksistensi dan ketunggalan titik tetap suatu pemetaan dalam ruang metrik parsial yang dilengkapi 2 metrik parsial (Karapinar, 2011).

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, dapat disusun rumusan masalah sebagai berikut.

1. Bagaimana definisi ruang metrik parsial?
2. Bagaimana kekonvergenan barisan di dalam ruang metrik parsial?
3. Bagaimana eksistensi dan ketunggalan titik tetap suatu pemetaan di dalam ruang metrik parsial?

1.3 Batasan Masalah

Pada skripsi ini, pembahasan dibatasi hanya pada ruang metrik parsial.

1.4 Tujuan

Tujuan dari penulisan skripsi ini adalah sebagai berikut.

1. Mengetahui definisi ruang metrik parsial.
2. Mengetahui kekonvergenan barisan di dalam ruang metrik parsial.
3. Mengetahui eksistensi dan ketunggalan titik tetap suatu pemetaan di dalam ruang metrik parsial.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Ruang Metrik

Definisi 2.1.1 (Ruang Metrik)
Diberikan himpunan tidak kosong X. Fungsi $d : X \text{ x } X \rightarrow \mathbb{R}$ disebut metrik pada X jika memenuhi aksioma-aksioma :
M1. $d(x,y) \geq 0$ untuk setiap $x,y \in X$;
M2. $d(x,y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$;
M3. $d(x,y) = d(y,x)$ untuk setiap $x,y \in X$;
M4. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ untuk setiap x,y dan $z \in X$.

Himpunan X yang dilengkapi dengan fungsi jarak d, disebut ruang metrik dan dinyatakan dengan (X,d) (*Muslikh, 2012*).

2.2 Barisan

Definisi 2.2.1 (Barisan)
Diberikan ruang metrik X dan himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$. Barisan titik di dalam ruang metrik X adalah fungsi $f : \mathbb{N} \rightarrow X$ dengan $f(n) = x_n \in X$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ (*Muslikh, 2012*).

Definisi 2.2.2 (Kekonvergenan Barisan)
Suatu barisan $\langle x_n \rangle$ di dalam ruang metrik (X,d) dikatakan konvergen jika terdapat suatu titik $x \in X$ sedemikian rupa sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $N \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq N$ berlaku

$$d(x_n, x) < \varepsilon$$

(*Muslikh, 2012*).

Teorema 2.2.3
Jika barisan $\langle x_n \rangle$ dalam (X,d) konvergen maka limit barisannya tunggal (*Soemantri 1988*).

Bukti:
Misalkan $\langle x_n \rangle$ konvergen ke titik x dan y, akan dibuktikan $x = y$ (tunggal). Diberikan sebarang $\varepsilon > 0$. Karena x_n konvergen ke x dan y maka terdapat $N_1 \in \mathbb{N}$ dan $N_2 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq N_1$ berlaku

$$d(x_n, x) < \varepsilon/2, \tag{1}$$

dan untuk setiap $n \geq N_2$ berlaku

$$d(x_n, y) < \varepsilon/2. \qquad (2)$$

Jika bilangan N = maks $\{N_1, N_2\}$ maka dari ketaksamaan (1), (2) dan ketaksamaan segitiga diperoleh

$$d(x,y) \leq d(x_n, x) + d(x_n, y) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

untuk setiap $n \geq N$. Jadi $d(x,y) < \varepsilon$. Karena $\varepsilon > 0$ sebarang maka $x = y$ (tunggal).

Definisi 2.2.4 (Barisan Cauchy)
Barisan $\langle x_n \rangle$ di dalam ruang metrik (X,d) dikatakan barisan Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n, \ m \geq N$ berlaku

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon$$ (*Muslikh, 2012*).

Teorema 2.2.5

Setiap barisan yang konvergen dalam suatu metrik (X,d) merupakan barisan Cauchy (*Soemantri 1988*).

Bukti:

Misalkan $x_n \rightarrow x$. Maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq N$ berlaku

$$d(x_n, x) < \varepsilon/2,$$

ambil $m > n \geq N$, maka juga berlaku $d(x_m, x) < \varepsilon/2$. Dengan pertidaksamaan segitiga, maka untuk $m, n \geq N$ berlaku

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Dengan demikian, $\langle x_n \rangle$ adalah barisan Cauchy. Teorema di atas tidak berlaku sebaliknya.

2.3 Ruang metrik yang lengkap

Definisi 2.3.1 (Kelengkapan)
Ruang metrik dikatakan lengkap jika setiap barisan Cauchy di dalamnya konvergen (*Muslikh, 2012*).

2.4 Pemetaan

Definisi 2.4.1 (Pemetaan)

Fungsi f dari himpunan A ke dalam himpunan B adalah suatu pengawanan sedemikian sehingga untuk setiap elemen $x \in A$ dikawankan secara tunggal dengan elemen $y \in B$. Ditulis $y = f(x)$ dan $f(x)$ dinamakan nilai f di x, ditulis $f : A \rightarrow B$ (*Muslikh, 2012*).

Definisi 2.4.2 (Pemetaan Kontinu)

Misalkan $X = (X,d)$ dan $Y = (Y,d)$ merupakan ruang metrik. $f : X \rightarrow Y$ dikatakan kontinu pada suatu titik $x_0 \in X$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga

$$d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

untuk setiap x yang memenuhi

$$d(x, x_0) < \delta.$$

f dikatakan kontinu di X jika f kontinu disetiap titik pada X (*Kreyszig, 1978*).

Definisi 2.4.3 (Komposisi Pemetaan)

Dimisalkan fungsi $f : A \rightarrow B$ dan $g : B \rightarrow C$, selanjutnya dapat kita definisikan fungsi baru $h : A \rightarrow C$ dengan formula $h(x) = g\{f(x)\}$. Fungsi h yang demikian disebut komposisi g dengan f dan dinotasikan dengan $g \circ f$ (*Muslikh, 2012*).

Definisi 2.4.4 (Pemetaan Kontraksi)

Misalkan ruang metrik (X,d). Pemetaan $f : X \rightarrow X$ dinamakan pemetaan kontraksi, jika ada suatu bilangan riil c dengan $0 \leq c < 1$ sedemikian sehingga :

$$d(f(x), f(y)) \leq cd(x,y), \forall\, x, y \in X \qquad \text{(Kreyszig, 1978).}$$

Lemma 2.4.5

Jika $f : X \to X$ suatu kontraksi, maka f kontinu (*Kreyszig, 1978*).

Bukti:

Ambil sebarang $x_0 \in X$. Untuk $\varepsilon > 0$ pilih $\delta < \varepsilon / k > 0$, sehingga $d(x,x_0) < \delta$. Karena f merupakan pemetaan kontraksi maka

$$d(f(x),f(x_0)) \leq kd(x,x_0)$$

untuk setiap x, $x_0 \in X$ dan dengan nilai $d(x,x_0) < \delta$ maka

$$\begin{aligned} d(f(x),f(x_0)) &\leq kd(x,x_0) \\ &\leq k\delta \\ &< k\,\varepsilon / k \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

Jadi untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta < \varepsilon / k > 0$ sehingga

$$d(f(x),f(x_0)) < \varepsilon.$$

Menurut definisi 2.4.2 maka f adalah pemetaan yang kontinu.

2.5 Titik Tetap

Definisi 2.5.1 (Titik Tetap)

Diberikan ruang metrik (X,d) dan suatu pemetaan $f : X \to X$. Titik $x \in X$ disebut titik tetap f jika $x = f(x)$ (*Takashi dan Hiroyuki, 2010*).

Teorema 2.5.2 (Titik Tetap Banach pada Ruang Metrik)

Misalkan (X,d) adalah ruang metrik lengkap. Jika $f : X \to X$ adalah pemetaan kontraksi pada X, maka f mempunyai titik tetap yang tunggal (*Kreyszig, 1978*).

Bukti:

Ambil $x_0 \in X$ dan dibentuk barisan $\langle x_n \rangle$ dengan suku-suku sebagai berikut

$$x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \ldots, x_n = f(x_{n-1}).$$

Akan ditunjukkan bahwa $\langle x_n \rangle$ adalah barisan Cauchy.

$$\begin{aligned} d(x_{m+1}, x_m) &= d(f(x_m), f(x_{m-1})) \\ &\leq \alpha d(x_m, x_{m-1}) \\ &= \alpha d(f(x_{m-1}), f(x_{m-2})) \\ &\leq \alpha^2 d(x_{m-1}, x_{m-2}) \\ &\quad . \\ &\quad . \\ &\quad . \\ &\leq \alpha^m d(x_1, x_0). \end{aligned} \tag{3}$$

Ambil ε > 0, karena *f* kontraksi maka

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x,y),$$

dimana $0 \leq \alpha < 1$. Ambil bilangan n, $m \in \mathbb{N}$, dengan $n > m$ maka dengan sifat ketaksamaan segitiga pada metrik dan ketaksamaan (3), didapatkan

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \ldots + d(x_{n-2}, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq (\alpha^m + \alpha^{m+1} + \ldots + \alpha^{n-2} + \alpha^{n-1})\, d(x_1, x_0) \\ &\leq \alpha^m (1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{n-m-1})\, d(x_1, x_0) \\ &= \alpha^m \sum_{i=0}^{n-m-1} \alpha^i \; d(x_1, x_0) \\ &\leq \alpha^m \sum_{i=1}^{\infty} \alpha^i \; d(x_1, x_0) \end{aligned} \tag{4}$$

Karena $0 \leq \alpha < 1$, maka deret $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha^i$ pada ketaksamaan (4) konvergen ke $\dfrac{1}{1-\alpha}$ sehingga didapat

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{\alpha^m}{1-\alpha}\ d(x_1, x_0)$$

untuk $n > m \geq N$.

Misal $d(x_1, x_0) = c$, maka

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{c\alpha^m}{1-\alpha}$$

dipilih $N \in \mathbb{N}$ dengan

$$N < {}^{\alpha}\log\frac{\varepsilon(1-\alpha)}{c}$$

Maka diperoleh

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{c\alpha^m}{1-\alpha} \leq \frac{c\alpha^N}{1-\alpha} < \frac{c}{1-\alpha}\ \frac{\varepsilon(1-\alpha)}{c} = \varepsilon$$

dengan demikian $\langle x_n \rangle$ barisan Cauchy.

Karena X lengkap, $\langle x_n \rangle$ konvergen, katakan $x_n \rightarrow x$. Akan ditunjukkan bahwa x adalah titik tetap dari pemetaan f. Dari sifat ketaksamaan segitiga pada definisi (2.1.1) dan prinsip kontraksi (2.4.2), didapatkan :

$$\begin{aligned} d(x,f(x)) &\leq d(x,x_n) + d(x_n,f(x)) \\ &\leq d(x,x_n) + \alpha d(x_{n-1},x). \end{aligned}$$

Karena $x_n \longrightarrow x$, berlaku :

$$d(x,f(x)) < \varepsilon/2 + \alpha(\varepsilon/2) = (1 + \alpha)(\varepsilon/2) < 2(\varepsilon/2) = \varepsilon.$$

Karena $\varepsilon > 0$ sebarang, $d(x,f(x)) = 0$. Berdasarkan sifat metrik didapatkan $x = f(x)$. Jadi, menurut definisi (2.5.1), x merupakan titik tetap dari pemetaan kontraksi f.

Andaikan x dan y adalah titik tetap dari f, sehingga berlaku

$$x = f(x) \text{ dan } y = f(y)`$$

dengan demikian

$$d(x,y) = d(f(x),f(y)) \leq \alpha d(x,y).$$

Karena α adalah bilangan real yang tetap, haruslah $d(x,y) = 0$. Sehingga berdasarkan sifat metrik didapatkan $y = x$. Dengan demikian terbukti bahwa pemetaan kontraksi pada X yang lengkap mempunyai titik tetap yang tunggal.

BAB III
PEMBAHASAN

3.1. Ruang Metrik Parsial

Definisi 3.1.1 (Ruang Metrik Parsial)
Sebuah ruang metrik parsial adalah sepasang (X, p) dimana X adalah himpunan tak kosong dan fungsi $p : X \text{ x } X \rightarrow \mathbb{R}^+$ yang memenuhi:
(PM1) $p(x,y) = p(y,x)$ (simetri)
(PM2) $p(x,x) = p(x,y) = p(y,y)$ jika dan hanya jika $x = y$ (kesamaan)
(PM3) $p(x,x) \leq p(y,x)$ (jarak ke diri sendiri kecil)
(PM4) $p(x,z) + p(y,y) \leq p(x,y) + p(y,z)$ (ketaksamaan segitiga)
Untuk semua $x, y, z \in X$.

Lemma 3.1.2
Misalkan (X,p) adalah sebuah ruang metrik parsial yang lengkap. Maka pernyataan-pernyataan berikut berlaku.

i. Jika $p(x,y) = 0$ maka $x = y$
ii. Jika $x \neq y$, maka $p(x,y) > 0$

Bukti:

i. Diberikan $p(x,y) = 0$. Dari (PM3), sehingga $p(x,x) \leq p(x,y) = 0$ dan $p(y,y) \leq p(x,y) = 0$. Jadi, $p(x,x) = p(x,y) = p(y,y)$. Sebab itu, dari (PM2) diperoleh $x = y$.
ii. Diberikan $x \neq y$. Dari definisi $p(x,y) \geq 0$ untuk semua $x, y \in X$. Asumsikan $p(x,y) = 0$. Dari bagian (i), $x = y$ yang merupakan sebuah kontradiksi. Oleh sebab itu, $p(x,y) > 0$ pada saat $x \neq y$.

Contoh 3.1.3
Misal $X = \mathbb{R}$. Didefinisikan fungsi $p : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ sebagai berikut:

$$p(x,y) = \frac{|x-y| + |x| + |y|}{2}, \forall\, x, y \in \mathbb{R},$$

maka p merupakan metrik parsial.
Bukti:
Ambil sebarang $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$. Akan ditunjukkan p adalah metrik parsial

i. $p(x,y) = \dfrac{|x-y|+|x|+|y|}{2}$

$= \dfrac{|y-x|+|y|+|x|}{2}$

$= p(y,x)$

ii. ($\Longrightarrow$) $p(x,x) = p(x,y) = \ p(y,y)$, menjadi

$$\frac{|x-x|+|x|+|x|}{2} = \frac{|x-y|+|x|+|y|}{2} = \frac{|y-y|+|y|+|y|}{2}.$$

Sehingga diperoleh

$$|x| = \frac{|x-y|+|x|+|y|}{2} \tag{5}$$

$$|y| = \frac{|x-y|+|x|+|y|}{2} \tag{6}$$

maka $|x| = |y|$.

Dari (6) dan $|x| = |y|$ menjadi

$$|y| = \frac{|x-y|+|x|+|y|}{2} = \frac{|x-y|+|y|+|y|}{2} =$$

$$= \frac{|x-y|+2|y|}{2} = \frac{|x-y|}{2} + |y|.$$

Sehingga diperoleh

$$\frac{|x-y|}{2} = 0$$

$$|x-y| = 0,$$

maka $x = y$.

$(\Leftarrow)\ x = y$

$$p(x,x) = p(y,y) = \frac{|y-y|+|y|+|y|}{2} = |y|$$

$$p(x,y) = p(y,y) = |y|.$$

Jadi $p(x,x) = p(x,y) = p(y,y)$.

iii. $p(x,x) = |x| = \left|\frac{x-y+y+x}{2}\right| = \frac{1}{2}|x-y+x+y|$

$$\leq \frac{|x-y|+|x+y|}{2} \leq \frac{|x-y|+|x|+|y|}{2} = p(x,y)$$

iv. $p(x,z) + p(y,y) = \frac{|x-z|+|x|+|z|}{2} + |y|$

$$= \frac{|x-z|+|x|+|z|+2|y|}{2}$$

$$= \frac{|x-y+y-z|+|x|+|z|+2|y|}{2}$$

$$\leq \frac{|x-y|+|y-z|+|x|+|z|+2|y|}{2}$$

$$= \frac{|x-y|+|x|+|y|}{2}$$

$$+ \frac{|y-z|+|y|+|z|}{2}$$

$$= p(x,y) + p(y,z).$$

Karena memenuhi empat aksioma pada definisi 3.1.1 maka $p(x,y) = \frac{|x-y|+|x|+|y|}{2}$ merupakan metrik parsial.

Selanjutnya akan ditunjukkan $p(x,y) = \frac{|x-y|+|x|+|y|}{2}$ bukan metrik. $p(x,y)$ bukan metrik karena tidak memenuhi aksioma (M2) yaitu $d(x,y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$. Ketika $x = y$ maka $p(x,y)$ $= p(y,y) = \frac{|y-y|+|y|+|y|}{2} = \frac{2|y|}{2} = |y|$ (hasilnya tidak selalu 0).

Contoh 3.1.4

Misalkan (X,p) ruang metrik parsial. Fungsi $d_p : X \times X \to \mathbb{R}^+$ didefinisikan

$$d_p(x,y) = 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y)$$

adalah metrik dalam X.

Bukti:

i. $d_p(x,y) = 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y) \geq 0$

ii. a. $d_p(x,y) = 0$

$d_p(x,y) = 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y) = 0$

dari (PM3), agar $2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y) = 0$ haruslah

$p(x,x) = p(x,y) = p(y,y)$ sehingga x = y,

b. $x = y$

$$\begin{aligned} d_p(x,y) &= 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y) \\ &= 2p(y,y) - 2p(y,y) \\ &= 0 \end{aligned}$$

iii. $d_p(x,y) = 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y)$

dari (PM1) menjadi

$$\begin{aligned} d_p(x,y) &= 2p(y,x) - p(y,y) - p(x,x) \\ &= d_p(y,x) \end{aligned}$$

iv.
$$\begin{aligned} d_p(x,y) &= 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y) \\ &= 2p(x,y) - p(x,x) - 2p(z,z) + 2p(z,z) - p(y,y) \\ &= 2p(x,y) + 2p(z,z) - p(x,x) - 2p(z,z) - p(y,y) \end{aligned}$$

dari (PM4) menjadi

$$\begin{aligned} d_p(x,y) &\leq 2p(x,z) + 2p(z,y) - p(x,x) - 2p(z,z) - p(y,y) \\ &= 2p(x,z) - p(x,x) - p(z,z) + 2p(z,y) - p(z,z) - p(y,y) \\ &= d_p(x,z) + d_p(z,y) \end{aligned}$$

Definisi 3.1.5

Misalkan (X,p) adalah ruang metrik parsial. Topologi yang dihasilkan oleh basis bola buka metrik parsial $\mathfrak{B} = \{B_p(x,\varepsilon) : x \in X, \varepsilon > 0\}$ disebut sebagai topologi yang diinduksi oleh p dan dikenal sebagai suatu topologi metrik parsial $\mathcal{T}(p)$. Bola terbuka berbentuk $B_p(x,\varepsilon) = \{y \in X : p(x,y) < p(x,x) + \varepsilon\}$ untuk semua $x \in X$ dan $\varepsilon > 0$. Bola tertutup berbentuk $B_p[x,\varepsilon] = \{y \in X : p(x,y) \leq p(x,x) + \varepsilon\}$ untuk semua $x \in X$ dan $\varepsilon > 0$.

3.2. Barisan

Definisi 3.2.1 (Kekonvergenan Barisan)

Barisan titik $\langle x_n \rangle$ di dalam ruang metrik parsial (X, p) dikatakan konvergen ke $a \in X$, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ maka terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $n \geq N$ berlaku

$$p(x_n, a) - p(a, a) < \varepsilon.$$

Barisan $\langle x_n \rangle$ yang konvergen ke a dapat ditulis

$$\lim_{n \to \infty} p(x_n, a) = p(a, a).$$

Definisi 3.2.2 (Konvergen Sejati)

Barisan titik $\langle x_n \rangle$ di dalam ruang metrik parsial (X, p) dikatakan konvergen sejati ke $a \in X$, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ maka terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $n \geq N$ berlaku

$$p(x_n, a) - p(a, a) < \varepsilon$$

Dan

$$p(x_n, x_n) - p(a, a) < \varepsilon.$$

.

Definisi 3.2.3 (Barisan Cauchy)

Barisan titik $\langle x_n \rangle$ di dalam ruang metrik parsial (X, p) dikatakan Cauchy jika terdapat $\alpha \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sehingga untuk semua $n, m > N$,

$$|p(x_n, x_m) - \alpha| < \varepsilon.$$

Dengan kata lain, $\langle x_n \rangle$ adalah Cauchy jika barisan $p(x_n, x_m)$ konvergen ke α untuk $n, m \to \infty$, atau $\lim_{n,m \to \infty} p(x_n, x_m) = \alpha$. Jika (X, p) adalah ruang metrik maka $\alpha = 0$.

Lemma 3.2.4

Suatu barisan $\langle x_n \rangle$ di dalam (X,p) merupakan barisan Cauchy jika dan hanya jika $\langle x_n \rangle$ adalah Cauchy dalam sebuah ruang metrik (X,d_p) dimana $d_p(x,y) = 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y)$.

Bukti:

($\Longrightarrow$) Pertama ditunjukkan bahwa setiap barisan Cauchy dalam (X,p) adalah barisan Cauchy dalam (X,d_p). Diberikan $\langle x_n \rangle$ merupakan barisan Cauchy dalam (X,p), maka ada $a \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga, diberikan $\varepsilon > 0$, ada $N \in \mathbb{N}$ dengan $\left| p(x_n, x_m) - a \right| < \varepsilon/2$ untuk semua $n,m \geq N$. Karena itu

$$\begin{aligned}
d_p(x_n, x_m) &= 2p(x_n, x_m) - p(x_n, x_n) - p(x_m, x_m) \\
&= p(x_n, x_m) + p(x_n, x_m) - p(x_n, x_n) - p(x_m, x_m) \\
&= p(x_n, x_m) + p(x_n, x_m) - p(x_n, x_n) - p(x_m, x_m) - 2a \\
&\quad +2a \\
&= p(x_n, x_m) - a + p(x_n, x_m) - a - (p(x_n, x_n) - a) \\
&\quad - (p(x_m, x_m) - a) \\
&= [(p(x_n, x_m) - a) - (p(x_n, x_n) - a)] + [(p(x_n, x_m) - a) - \\
&\quad (p(x_m, x_m) - a)] \\
&\leq \left| (p(x_n, x_m) - a) - (p(x_n, x_n) - a) \right| + \left| (p(x_n, x_m) - a) \right. \\
&\quad \left. - (p(x_m, x_m) - a) \right| \\
&< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon
\end{aligned}$$

untuk semua $n,m \geq N$. Oleh karena itu $\langle x_n \rangle$ adalah barisan Cauchy dalam (X,d_p).

($\Longleftarrow$) Sekarang akan dibuktikan bahwa setiap barisan Cauchy $\langle x_n \rangle$ dalam (X,d_p) adalah barisan Cauchy dalam (X,p). Diberikan ε = ½, maka ada $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $d_p(x_n, x_m) <$ ½ untuk $m,n \geq n_0$. Oleh karena itu diperoleh

$$\begin{aligned}
p(x_n, x_n) &= p(x_n, x_n) - p(x_{n_0}, x_{n_0}) + p(x_{n_0}, x_{n_0}) \\
&\leq \left| p(x_n, x_n) - p(x_{n_0}, x_{n_0}) \right| + p(x_{n_0}, x_{n_0}) \\
&= \left| p(x_n, x_n) + d_p(x_n, x_{n_0}) + p(x_n, x_n) - 2p(x_n, x_{n_0}) \right| \\
&\quad + p(x_{n_0}, x_{n_0})
\end{aligned}$$

$= \left| d_p(x_n, x_{n_0}) + 2p(x_n, x_n) - 2p(x_n, x_{n_0}) \right| + p(x_{n_0}, x_{n_0})$
$\leq \left| d_p(x_n, x_{n_0}) + 2p(x_n, x_{n_0}) - 2p(x_n, x_n) \right| + p(x_{n_0}, x_{n_0})$
$\leq \left| d_p(x_n, x_{n_0}) + 2p(x_n, x_{n_0}) - p(x_n, x_n) - p(x_{n_0}, x_{n_0}) \right|$
$+ p(x_{n_0}, x_{n_0})$
$= 2d_p(x_n, x_{n_0}) + p(x_{n_0}, x_{n_0})$
$< 1 + p(x_{n_0}, x_{n_0})$.

Maka dari itu barisan $\langle p(x_n, x_n)\rangle$ terbatas dalam $\mathbb{R}$ dan juga ada $a \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga subbarisan $\langle p(x_{n_k}, x_{n_k})\rangle$ konvergen ke a. Disisi yang lain, karena $\langle x_n\rangle$ barisan Cauchy di (X,d_p), diberikan $\varepsilon > 0$ ada $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $d_p(x_n, x_m) < \varepsilon/2$ untuk semua $m,n \geq n_\varepsilon$. Hingga diperoleh

$$\left| p(x_n, x_n) - p(x_m, x_m) \right| \leq 2d_p(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Itulah, barisan $\langle p(x_n, x_n)\rangle$ Cauchy di $\mathbb{R}$. Oleh karena itu

$$\lim_{n\to\infty} p(x_n, x_n) = a.$$

Disisi lain, karena

$$\begin{aligned}
\left| p(x_n, x_m) - a \right| &= \left| 2p(x_n, x_m) - p(x_n, x_n) - p(x_m, x_m) + \right. \\
&\quad \left. p(x_n, x_n) + p(x_m, x_m) - p(x_n, x_m) - a \right| \\
&\leq \left| 2p(x_n, x_m) - p(x_n, x_n) - p(x_m, x_m) \right| + \\
&\quad \left| p(x_n, x_n) + p(x_m, x_m) - p(x_n, x_m) - a \right| \\
&= d_p(x_n, x_m) + \left| p(x_n, x_n) + p(x_m, x_m) - \right. \\
&\quad \left. p(x_n, x_m) - a \right| \\
&\leq d_p(x_n, x_m) + \left| p(x_n, x_n) + p(x_n, x_m) - \right. \\
&\quad \left. p(x_n, x_m) - a \right| \\
&= d_p(x_n, x_m) + \left| p(x_n, x_n) - a \right| \\
&< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Diperoleh $\lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m) = a$ dan juga $\langle x_n\rangle$ adalah barisan Cauchy di (X,p).

3.3. Ruang Metrik Parsial yang Lengkap

Definisi 3.3.1 (Kelengkapan)
Ruang metrik parsial (X,p) dikatakan lengkap jika setiap barisan Cauchy $\langle x_n \rangle$ dalam X konvergen.

Definisi 3.3.2
Barisan Cauchy $\langle x_n \rangle$ dikatakan konvergen jika ada $x \in X$ sedemikian sehingga $\lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m) = \lim_{n\to\infty} p(x_n, x) = p(x, x)$.

Lemma 3.3.3
Ruang metrik parsial (X,p) lengkap jika dan hanya jika ruang metrik (X,d_p) lengkap dimana $d_p(x,y) = 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y)$.
Bukti:

$(\Longrightarrow)$ Pertama dibuktikan bahwa kelengkapan (X,p) menyatakan kelengkapan (X,d_p). Tentu saja, jika $\langle \boldsymbol{x_n} \rangle$ barisan Cauchy di (X,p), maka barisan tersebut juga barisan Cauchy di (X,d_p). Karena (X,p) lengkap, dapat ditarik kesimpulan bahwa ada $x \in X$ sedemikian sehingga $\lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m) = \lim_{n\to\infty} p(x_n, x) = p(x, x)$. Maka, diberikan $\varepsilon > 0$, ada $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga

$$\max\{\left|p(x_n, x) - p(x_n, x_n)\right|, \left|p(x_n, x) - p(x, x)\right|\} < \varepsilon/2$$

untuk setiap $n \geq n_\varepsilon$. Sebagai sebuah akibat diperoleh

$$\begin{aligned} d_p(x_n, x) &= 2p(x_n, x) - p(x_n, x_n) - p(x, x) \\ &= p(x_n, x) - p(x_n, x_n) + p(x_n, x) - p(x, x) \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned}$$

untuk setiap $n \geq n_\varepsilon$. Oleh karena itu (X,d_p) lengkap.

$(\Longleftarrow)$ Kemudian dibuktikan bahwa kelengkapan (X,d_p) menyatakan kelengkapan (X,p). Tentu saja, jika $\langle x_n \rangle$ adalah barisan Cauchy dalam (X,d_p), maka barisannya juga barisan Cauchy di (X,p). Karena (X,d_p) lengkap, ditarik kesimpulan bahwa ada $x \in X$ sedemikian sehingga $\lim_{n\to\infty} d_p(x_n, x) = 0$. Sekarang akan diperlihatkan bahwa

$\lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x) = p(x, x)$. Diberikan $\varepsilon > 0$, maka ada $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $d_p(x_n, x) < \varepsilon$ untuk semua $n \geq N$. Hingga

$$\begin{aligned} p(x_n, x) - p(x, x) &= d_p(x_n, x) - p(x_n, x) + p(x_n, x_n) \\ &\leq d_p(x_n, x) - p(x_n, x_n) + p(x_n, x_n) \\ &= d_p(x_n, x) < \varepsilon \end{aligned}$$

untuk $n \geq N$. Ini memperlihatkan bahwa (X,p) lengkap.

Lemma 3.3.4

Jika $x_n \to z$ dalam suatu ruang metrik parsial (X,p) sedemikian sehingga $p(z,z) = 0$, maka $\lim_{n\to\infty} p(x_n, y) = p(z, y)$ untuk setiap $y \in X$.

Bukti:

Pertama, catat bahwa $\lim_{n\to\infty} p(x_n, z) = p(z, z) = 0$. Dari prinsip ketaksamaan segitiga, didapat

$p(x_n, y) \leq p(x_n, z) + p(z,y) - p(z,z) \leq p(x_n, z) + p(z,y)$

$p(x_n, y) - p(z,y) \leq p(x_n, z)$

dan

$p(z, y) \leq p(z,x_n) + p(x_n,y) - p(x_n,x_n) \leq p(x_n, z) + p(x_n,y)$

$p(z, y) - p(x_n,y) \leq p(x_n, z)$

$-p(x_n, z) \leq p(x_n,y) - p(z, y)$

$-p(x_n, z) \leq p(x_n,y) - p(z, y) \leq p(x_n, z)$

$\left| p(x_n,y) - p(z, y) \right| \leq p(x_n, z)$

$\lim_{n\to\infty} \left| p(x_n, y) - p(z, y) \right| \leq \lim_{n\to\infty} p(x_n, z)$

$\left| \lim_{n\to\infty} p(x_n, y) - p(z, y) \right| \leq \lim_{n\to\infty} p(x_n, z)$

$\left| \lim_{n\to\infty} p(x_n, y) - p(z, y) \right| = 0$

$\lim_{n\to\infty} p(x_n, y) = p(z, y)$

untuk setiap y ∈ X.

3.4. Pemetaan

Definisi 3.4.1 (Pemetaan Kontraksi)
Diberikan ruang metrik parsial (X,p). Suatu fungsi $f : X \rightarrow X$ disebut kontraksi jika terdapat $0 \leq c < 1$ sedemikian sehingga untuk semua x, $y \in X$ berlaku

$$p(f(x), f(y)) \leq cp(x,y).$$

3.5. Teorema-teorema Titik Tetap

Teorema 3.5.1

Diberikan f adalah suatu pemetaan dari ruang metrik parsial (X,p) yang lengkap ke dirinya sendiri sedemikian sehingga ada bilangan riil c dengan $0 \leq c < 1$, yang memenuhi

$$p(f(x),f(y)) \leq cp(x,y)$$

untuk semua $x,y \in X$. Maka f mempunyai titik tetap yang tunggal.

Bukti:

Ambil $x_0 \in X$ dan dibentuk barisan $\langle x_n \rangle$ dengan suku-suku sebagai berikut

$$x_0\,,\ x_1 = f(x_0),\ x_2 = f(x_1) = f(f(x_0)) = f^{\,2}(x_0),\ \ldots\ ,\ x_n = f^{\,n}(x_0)$$

Akan ditunjukkan bahwa $\langle x_n \rangle$ adalah barisan Cauchy.

$$p(x_1, x_2) = p\big(f(x_0), f(x_1)\big) \leq c\, p(x_0, x_1)$$

$$\begin{aligned} p(x_2, x_3) &= p\big(f(x_1), f(x_2)\big) \leq c\, p(x_1, x_2) \\ &\leq c\,\big(c\, p(x_0, x_1)\big) = c^2\, p(x_0, x_1) \end{aligned}$$

Secara umum diperoleh

$$p(x_n, x_{n+1}) \leq c^n p(x_0, x_1) \qquad (7)$$

Ambil $n, m \in \mathbb{N}$ dengan $n > m$, maka dengan ketaksamaan segitiga dan (7) didapatkan :

$$p(x_m, x_n) \leq p(x_m, x_{m+1}) + p(x_{m+1}, x_n) - p(x_{m+1}, x_{m+1})$$

$$
\begin{aligned}
&\leq\ c^m p(x_0,x_1) +\ p(x_{m+1},x_n) -\ p(x_{m+1},x_{m+1}) \\
&\leq\ c^m p(x_0,x_1) +\ p(x_{m+1},x_n) \\
&\leq\ c^m p(x_0,x_1) + p(x_{m+1},x_{m+2}) + p(x_{m+2},x_n) \\
&\quad - p(x_{m+2},x_{m+2}) \\
&\leq c^m p(x_0,x_1) +\ c^{m+1} p(x_0,x_1) + p(x_{m+2},x_n) \\
&\quad - p(x_{m+2},x_{m+2}) \\
&\leq c^m p(x_0,x_1) +\ c^{m+1} p(x_0,x_1) + p(x_{m+2},x_n) \\
&\leq c^m p(x_0,x_1) +\ c^{m+1} p(x_0,x_1) + p(x_{m+2},x_{m+3}) \\
&\quad + p(x_{m+3},x_n) -\ p(x_{m+3},x_{m+3}) \\
&\leq c^m p(x_0,x_1) +\ c^{m+1} p(x_0,x_1) +\ c^{m+2} p(x_0,x_1) \\
&\quad + p(x_{m+3},x_n) -\ p(x_{m+3},x_{m+3}) \\
&\leq c^m p(x_0,x_1) +\ c^{m+1} p(x_0,x_1) +\ c^{m+2} p(x_0,x_1) \\
&\quad + p(x_{m+3},x_n) \\
&\leq c^m p(x_0,x_1) +\ c^{m+1} p(x_0,x_1) +\ c^{m+2} p(x_0,x_1) \\
&\quad +\ \ldots +\ c^{n-2} p(x_0,x_1) +\ c^{n-1} p(x_0,x_1) \\
&=\ c^m\,(1 + c +\ \ldots + c^{n-m-2} +\ c^{n-m-1}) p(x_0,x_1) \\
&=\ c^m \sum_{i=0}^{n-m-1} c^i\, p(x_0,x_1) \qquad (8)
\end{aligned}
$$

Karena $0 \leq c < 1$, maka deret $\sum_{i=0}^{n-m-1} c^i$ pada ketaksamaan (8) konvergen ke $\frac{1}{1-c}$ sehingga didapat :

$$p(x_m,x_n) \leq \frac{c^m}{1-c}\, p(x_0,x_1).$$

Dimisalkan $p(x_0,x_1) = r$, untuk $n > m > N$ diperoleh

$$p(x_m, x_n) \leq \frac{rc^m}{1-c}.$$

Dipilih $N \in \mathbb{N}$ dengan

$$N <{}^{c}\log \frac{\varepsilon(1-c)}{r}$$

$$c^N < \frac{\varepsilon(1-c)}{r}$$

sehingga $\dfrac{rc^N}{1-c} < \dfrac{r}{1-c}\,\dfrac{\varepsilon(1-c)}{r} = \varepsilon.$

Maka diperoleh

$$p(x_m, x_n) \leq \frac{rc^m}{1-c} \leq \frac{rc^N}{1-c} < \varepsilon.$$

Dengan demikian $\langle x_n \rangle$ adalah barisan Cauchy.

Karena X lengkap, $\langle x_n \rangle$ konvergen, katakan $x_n \to x$. Akan ditunjukkkan bahwa $x \in X$ adalah titik tetap pemetaan f. Menurut definisi (3.2.1) berlaku

$$p(x_n, x) - p(x, x) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (9)$$

$$p(x_n, x) - p(x_n, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (10)$$

Untuk setiap $\varepsilon > 0$ dan $n \geq N$.

Dengan (9) dan (10) diperoleh

$$\begin{aligned}
p(f(x), x) - p(x, x) &\leq p\big(f(x), f(x_n)\big) + p(f(x_n), x) \\
&\quad - p\big(f(x_n), f(x_n)\big) - p(x, x) \\
&= \Big(p\big(f(x), f(x_n)\big) - p(x, x)\Big) \\
&\quad + \Big(p(f(x_n), x) - p\big(f(x_n), f(x_n)\big)\Big) \\
&\leq c\,\big(p(x, x_n) - p(x, x)\big) \\
&\quad + c\,\big(p(x_n, x) - p(x_n, x_n)\big) \\
&\leq c\left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\right) \leq c\,\varepsilon < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Untuk semua $n \geq N$ dan $\varepsilon > 0$, sehingga

$$p(f(x), x) - p(x, x) = 0,$$

atau

$$p(f(x),x) = p(x,x). \tag{11}$$

Demikian juga

$$\begin{aligned} p(f(x),x) - p(f(x),f(x)) &\le p\big(f(x),f(x_n)\big) + p(f(x_n),x) \\ &\quad - p\big(f(x_n),f(x_n)\big) - p\big(f(x),f(x)\big) \\ &= p\big(f(x),f(x_n)\big) - p\big(f(x),f(x)\big) \\ &\quad + p(f(x_n),x) - p\big(f(x_n),f(x_n)\big) \\ &\le c\,\big(p(x_n,x) - p(x,x)\big) \\ &\quad + c\,\big(p(x_n,x) - p(x_n,x_n)\big) \\ &\le c\left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\right) \le c\,\varepsilon < \varepsilon. \end{aligned}$$

Untuk semua $n \ge N$ dan $\varepsilon > 0$, sehingga

$$p(f(x),x) - p(f(x),f(x)) = 0,$$

atau

$$p(f(x),x) = p\big(f(x),f(x)\big). \tag{12}$$

Berdasarkan persamaan (11) dan (12), diperoleh

$$p(f(x),x) = p(x,x) = p\big(f(x),f(x)\big).$$

Menurut aksioma PM2 diperoleh $f(x) = x$, sehingga f mempunyai titik tetap $x \in X$.

Andaikan x dan y adalah titik tetap sedemikian sehingga $x = f(x)$ dan $y = f(y)$ dimana $y \in X$, akan ditunjukkan $x = y$ tunggal.

$$\begin{aligned} p(x,y) - p(y,y) &= p\big(f(x),f(y)\big) - p\big(f(y),f(y)\big) \\ &\le c\,\big(p(x,y) - p(y,y)\big). \end{aligned}$$

Karena $0 \le c < 1$, sehingga

$$p(x,y) - p(y,y) = 0,$$

atau

$$p(x,y) = p(y,y). \tag{13}$$

Demikian juga dengan

$$\begin{aligned} p(x,y) - p(x,x) &= p\big(f(x),f(y)\big) - p\big(f(x),f(x)\big) \\ &\le c\,\big(p(x,y) - p(x,x)\big). \end{aligned}$$

Karena $0 \le c < 1$, sehingga

$$p(x,y) - p(x,x) = 0,$$

atau

$$p(x,y) = p(x,x). \tag{14}$$

Berdasarkan persamaan (13) dan (14) diperoleh

$$p(x,x) = p(x,y) = p(y,y).$$

Menurut PM2 diperoleh $x = y$. Sehingga titik tetap dari pemetaan f adalah tunggal.

Teorema 3.5.2

Diberikan himpunan X yang tidak kosong, p_1, p_2 metrik parsial pada X dan $T : X \rightarrow X$, jika kriteria dibawah ini terpenuhi:

i. (X,p_1) lengkap
ii. $p_1(x,y) \leq p_2(x,y)$ untuk setiap $x,y \in X$
iii. T kontinu terhadap p_1
iv. T pemetaan kontraksi terhadap p_2, sedemikian sehingga $p_2(T(x), T(y)) \leq c p_2(x,y)$ untuk setiap $x,y \in X$, dimana $0 \leq c < 1$

maka T memiliki titik tetap yang tunggal.

Bukti:

Misalkan $x \in X$. Kita bangun suatu barisan $\langle x_n \rangle$ dengan cara berikut.

(S1) $x_0 = x$

(S2) $x_n = T(x_{n-1}) = T^n(x_0)$

untuk setiap $n \in \mathbb{R}$ maka, dari asumsi (iv) kita dapatkan

$$\begin{aligned} p_2(x_{n+1}, x_n) &= p_2(T(x_n), T(x_{n-1})) \\ &\leq c p_2(x_n, x_{n-1}) \\ &\quad . \\ &\quad . \\ &\leq c^n p_2(T(x_0), x_0) \end{aligned} \tag{15}$$

Ambil $n, m \in \mathbb{N}$ dengan $n > m$, maka dengan ketaksamaan segitiga dan (15) didapatkan :

$$\begin{aligned} p_2(x_m, x_n) &\leq p_2(x_m, x_{m+1}) + p_2(x_{m+1}, x_n) - p_2(x_{m+1}, x_{m+1}) \\ &\leq c^m p_2(x_0, x_1) + p_2(x_{m+1}, x_n) - p_2(x_{m+1}, x_{m+1}) \\ &\leq c^m p_2(x_0, x_1) + p_2(x_{m+1}, x_n) \\ &\leq c^m p_2(x_0, x_1) + p_2(x_{m+1}, x_{m+2}) + p_2(x_{m+2}, x_n) \\ &\quad - p_2(x_{m+2}, x_{m+2}) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq c^m p_2(x_0,x_1) + c^{m+1} p_2(x_0,x_1) + p_2(x_{m+2},x_n) \\
&\quad - p_2(x_{m+2},x_{m+2}) \\
&\leq c^m p_2(x_0,x_1) + c^{m+1} p_2(x_0,x_1) + p_2(x_{m+2},x_n) \\
&\leq c^m p_2(x_0,x_1) + c^{m+1} p_2(x_0,x_1) + p_2(x_{m+2},x_{m+3}) \\
&\quad + p_2(x_{m+3},x_n) - p_2(x_{m+3},x_{m+3}) \\
&\leq c^m p_2(x_0,x_1) + c^{m+1} p_2(x_0,x_1) + c^{m+2} p_2(x_0,x_1) \\
&\quad + p_2(x_{m+3},x_n) - p_2(x_{m+3},x_{m+3}) \\
&\leq c^m p_2(x_0,x_1) + c^{m+1} p_2(x_0,x_1) + c^{m+2} p_2(x_0,x_1) \\
&\quad + p_2(x_{m+3},x_n) \\
&\leq c^m p_2(x_0,x_1) + c^{m+1} p_2(x_0,x_1) + c^{m+2} p_2(x_0,x_1) \\
&\quad + \ldots + c^{n-2} p_2(x_0,x_1) + c^{n-1} p_2(x_0,x_1) \\
&= c^m \left(1 + c + \ldots + c^{n-m-2} + c^{n-m-1}\right) p_2(x_0,x_1) \\
&= c^m \sum_{i=0}^{n-m-1} c^i \, p_2(x_0,x_1). \qquad (16)
\end{aligned}
$$

Karena $0 \leq c < 1$, maka deret $\sum_{i=0}^{n-m-1} c^i$ pada ketaksamaan (16) konvergen ke $\frac{1}{1-c}$ sehingga didapat :

$$p_2(x_m,x_n) \leq \frac{c^m}{1-c} p_2(x_0,x_1).$$

Dimisalkan $p_2(x_0,x_1) = r$, untuk $n > m > N$ diperoleh

$$p_2(x_m,x_n) \leq \frac{rc^m}{1-c}.$$

Dipilih $N \in \mathbb{N}$ dengan

$$N < {}^c\log \frac{\varepsilon(1-c)}{r}$$

$$c^N < \frac{\varepsilon(1-c)}{r}$$

sehingga $\frac{rc^N}{1-c} < \frac{r}{1-c}\frac{\varepsilon(1-c)}{r} = \varepsilon.$
Maka diperoleh

$$p_2(x_m, x_n) \leq \frac{rc^m}{1-c} \leq \frac{rc^N}{1-c} < \varepsilon.$$

Sehingga $\lim_{n,m\to\infty} p_2(x_n, x_m) = 0$, dengan demikian $\langle x_n \rangle$ adalah barisan Cauchy dalam (X,p_2). Dari asumsi (ii) $\lim_{n,m\to\infty} p_1(x_n, x_m) = 0$, yaitu $\langle x_n \rangle$ adalah barisan Cauchy dalam (X,p_1). Jadi, dari asumsi (i) dan lemma 3.2.4 dan lemma 3.3.3, konvergen dalam (x,d_{p1}) untuk titik $z \in X$ dari lemma 3.3.2 pula

$$p_1(z,z) = \lim_{n\to\infty} p_1(x_n, z) = \lim_{n,m\to\infty} p_1(x_n, x_m). \qquad (17)$$

Karena $\lim_{n,m\to\infty} p_1(x_n, x_m) = 0$, maka dari (17) kita punya $p_1(z,z) = 0$.

Dari kekontinuan T dan juga lemma 3.3.4, kita mendapatkan

$$\begin{aligned} p_1(z,z) &= \lim_{n\to\infty} p_1(z, x_{n+1}) = \lim_{n\to\infty} p(z, T^{n+1}(x_0)) \\ &= p_1(z,T(\lim_{n\to\infty} T^n(x_0))) = p_1(z,T(\lim_{n\to\infty} x_n)) \\ &= p_1(z,T(z)). \end{aligned}$$

Karena itu $p_1(T(z), z) = p_1(z,z) = 0$. Disebabkan Lemma 3.1.2 titik z adalah sebuah titik tetap yang tunggal dari T. Andaikan tidak yaitu terdapat $z,y \in X$ sedemikian sehingga $T(z) = z$ dan $T(y) = y$. Maka, $p_2(z, y) = p_2(T(z), T(y)) \leq cp_2(z,y)$. Demikian, $p_2(z,y) = 0$. Dari Lemma 3.1.2, $z = y$.

BAB IV
PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Diberikan f adalah suatu pemetaan dari ruang metrik parsial (X,p) yang lengkap ke dirinya sendiri sedemikian sehingga ada bilangan riil c dengan $0 \leq c < 1$, yang memenuhi

$$p(f(x),f(y)) \leq cp(x,y)$$

untuk semua $x,y \in X$. Maka f mempunyai titik tetap yang tunggal.

Begitu juga diberikan himpunan X yang tidak kosong yang dilengkapi metrik parsial p_1 & p_2 dan $T : X \to X$, jika kriteria dibawah ini terpenuhi:

v. (X,p_1) lengkap
vi. $p_1(x,y) \leq p_2(x,y)$ untuk setiap $x,y \in X$
vii. T kontinu terhadap p_1
viii. T pemetaan kontraksi terhadap p_2, sedemikian sehingga $p_2(T(x), T(y)) \leq kp_2(x,y)$ untuk setiap $x,y \in X$, dimana $0 \leq k < 1$

maka T memiliki titik tetap yang tunggal.

4.2 Saran

Eksistensi dan ketunggalan titik tetap dalam skripsi ini dibahas oleh dua teorema. Selanjutnya disarankan eksistensi dan ketunggalan titik tetap dibahas oleh teorema-teorema yang lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Bukatin, M., dkk. 2009. *Partial Metric Spaces*. The Mathematical Association of America. Hal. 708 – 718.

Karapinar, E. 2011. *Some Fixed Point Theorems on The Class of Comparable Partial Metric Spaces*. Universidad Politecnica de Valencia. Hal. 187 - 192.

Kreyszig, E. 1978. *Introductory Functional Analysis with Aplication*. John Wiley and Sons, Inc. Canada. Hal. 20, 30, 300, 303.

Muslikh, M. 2012. *Analisis Real*. UB Press. Universitas Brawijaya, Malang. Hal. 2, 3, 38, 65, 66, 81, 83.

Oltra, S. dan Valero, O. 2004. *Banach's Fixed Point Theorem for Partial Metric Spaces*. Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste. Hal. 17 - 26.

Soemantri, R. 1988. *Analisis Real I*. Universitas Terbuka, Departemen Pendidikan dan Kebudayaan. Hal 4.5, 4,25.

Takashi, S. dan Hiroyuki, Y. 2010. *Introduction to Mathematical Science Model*. Baifukan. Japan. Hal. 27.