

**PERBANDINGAN MODEL *GENERALIZED MICHAELIS-
MENTEN* (GMM) DAN *RICHARDS* PADA PERTUMBUHAN
KACANG TANAH (*Arachis hypogaea* L.)**

SKRIPSI

**Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Statistika**

oleh:
CARLIN SONIAWINDA
105090500111013



**PROGRAM STUDI STATISTIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2014**

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

PERBANDINGAN MODEL *GENERALIZED MICHAELIS-MENTEN* (GMM) DAN *RICHARDS* PADA PERTUMBUHAN KACANG TANAH (*Arachis hypogaea* L.)

oleh:
CARLIN SONIAWINDA
105090500111013

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji
pada tanggal 18 Juni 2014
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Statistika

Dosen Pembimbing

Dr. Ir. Ni Wayan Surva Wardhani, MS
NIP. 195511021981032001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Dr. Abdul Rouf Alghofari, Msc
NIP. 196709071992031001

LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Carlin Soniawinda
NIM : 105090500111013
Jurusan : Matematika
Penulis Skripsi Berjudul :

PERBANDINGAN MODEL *GENERALIZED MICHAELIS-MENTEN* (GMM) DAN *RICHARDS* PADA PERTUMBUHAN KACANG TANAH (*Arachis hypogaea* L.)

Dengan ini menyatakan bahwa:

1. Isi dari Skripsi yang saya buat adalah benar-benar karya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain, selain nama-nama yang tercantum di isi dan tertulis di daftar pustaka dalam Skripsi ini.
2. Apabila di kemudian hari ternyata Skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala resiko yang akan saya terima.

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 18 Juni 2014
Yang menyatakan,

(Carlin Soniawinda)
NIM. 105090500111013

PERBANDINGAN MODEL *GENERALIZED MICHAELIS-MENTEN* (GMM) DAN *RICHARDS* PADA PERTUMBUHAN KACANG TANAH (*Arachis hypogaea* L.)

ABSTRAK

Generalized Michaelis Menten (GMM) merupakan salah satu model untuk mengetahui pola pertumbuhan hewan maupun tanaman. Dalam penelitian ini, model tersebut dibandingkan dengan model *Richards* karena keduanya memiliki titik belok yang fleksibel dan memiliki empat parameter. Penelitian ini bertujuan untuk menjelaskan pola pertumbuhan kacang tanah dengan model GMM dan *Richards*, menentukan mana yang lebih baik serta menghitung laju pertumbuhan maksimum kacang tanah. Data yang digunakan adalah tinggi kacang tanah varietas Domba yang diamati selama tiga belas minggu. Pendugaan parameter diperoleh dari Metode Kuadrat Terkecil (MKT) dengan iterasi *Levenberg-Marquardt*. Berdasarkan R^2_{adj} , kedua model memberikan hasil sama baik, sedangkan dilihat dari nilai AIC_C , model *Richards* lebih baik dalam menjelaskan pertumbuhan kacang tanah dibandingkan model GMM. Kacang tanah mencapai pertumbuhan maksimum pada minggu ke 4-5 yaitu pada saat fase pembentukan bunga. Pemberian perlakuan khusus dapat dilakukan sebelum laju pertumbuhan kacang tanah mencapai maksimum.

Kata Kunci: *Generalized Michaelis-Menten, Richards, Laju Pertumbuhan*

COMPARISON OF *GENERALIZED MICHAELIS MENTEN* (GMM) AND *RICHARDS* IN DESCRIBING GROWTH OF PEANUTS (*Arachis hypogaea* L.)

ABSTRACT

GMM model is one of several growth models that have been developed to determine the growth pattern in both animals and plants. In this study, GMM model was compared to Richards as both have flexible inflection point and same number of parameters (4). This study aimed to describe the growth pattern of peanuts using Richards and GMM model and determine which is better and find out when peanuts maximum growth rate occur. The data used was height of Domba peanuts cultivar observed in thirteen weeks. Ordinary Least Square (OLS) is used to estimate the parameters of model with Levenberg-Marquardt iteration. Based on R_{adj}^2 , both models give equally good results while AIC_C of Richards model is smaller than GMM, this indicates that Richards model is better in explaining the growth of peanuts compared to GMM. Peanuts achieve maximum growth at week 4-5 which is the onset of blooms. Special treatments should be given before peanuts achieve maximum growth rate.

Keywords: Generalized Michaelis-Menten, Richards, Growth Rate

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadiran Allah SWT atas berkat, rahmat, dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “Perbandingan Model *Generalized Michaelis-Menten* (GMM) dan *Richards* pada Pertumbuhan Kacang Tanah (*Arachis hypogaea* L.)”.

Dalam penyusunan skripsi ini penulis memperoleh banyak bantuan dari berbagai pihak, baik berupa bimbingan maupun saran. Dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih kepada :

1. Dr. Ir. Ni Wayan Surya Wardhani, MS selaku dosen pembimbing atas waktu, nasehat dan bimbingan yang telah diberikan.
2. Dr. Ir. Maria Bernadetha Mitakda dan Prof. Ir. Loekito Adi Soehono, M. Agr selaku Penguji I dan Penguji II yang telah memberikan masukan dan nasehat kepada penulis.
3. Dr. Abdul Rouf Alghofari, MSc selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Brawijaya Malang.
4. Bapak dan Ibu Dosen Statistika atas ilmu yang diberikan selama kuliah.
5. Ibu, Bapak, kakak, adik dan keluarga atas doa dan dukungannya.
6. Lintang, Eriza dan Reta atas waktu, bantuan, dukungan dan kebersamaan yang diberikan.
7. Mbak Navi, Mbak Frida, Mbak Witra, Ulfa, Retno dan Lia yang telah memberikan saran dan bantuan dalam penulisan skripsi ini.
8. Mima, Anda, Vallen, Luluk, Azza, Izza dan Nungki atas kebersamaan, dukungan dan semangat yang diberikan.
9. Keluarga HIMAMASTA “MASTASAGA” dan teman-teman Statistika angkatan 2009, 2010 dan 2011 atas kebersamaan, bantuan dan semangat yang diberikan.
10. Semua pihak yang telah membantu penulisan skripsi ini yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Penulis menyadari keterbatasan dalam penulisan skripsi ini. Oleh karena itu saran atau kritik yang membangun akan sangat berguna bagi penulis untuk mengembangkan kemampuan menulis ilmiah. Semoga skripsi ini bermanfaat bagi para pembaca.

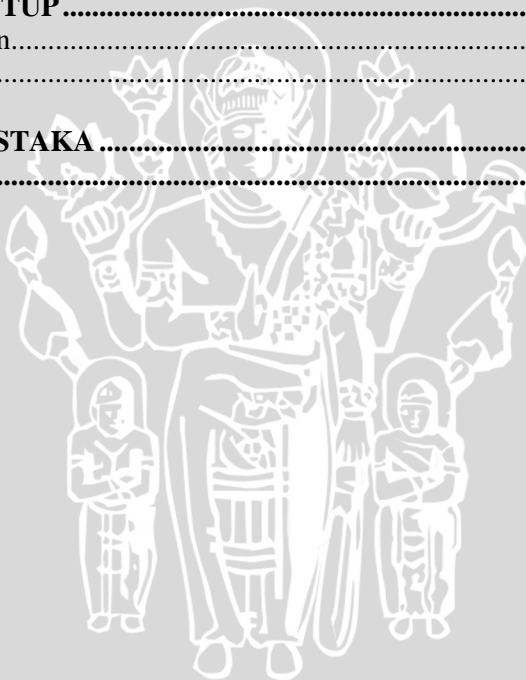
Malang, 1 Juli 2014

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN	ii
LEMBAR PERNYATAAN	iii
ABSTRAK	iv
ABSTRACT	v
KATA PENGANTAR	vi
DAFTAR ISI	vii
DAFTAR GAMBAR	ix
DAFTAR TABEL	x
DAFTAR LAMPIRAN	xi
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah.....	2
1.3 Batasan Masalah	3
1.4 Tujuan	3
1.5 Manfaat	3
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	5
2.1 Model Regresi Nonlinier	5
2.2 Model Pertumbuhan.....	6
2.2.1 Model GMM	7
2.2.2 Model <i>Richards</i>	10
2.3 Pendugaan Parameter Model Nonlinier	12
2.4 Iterasi <i>Levenberg-Marquardt</i>	13
2.5 Penentuan Penduga Awal Parameter	14
2.6 Pengujian Asumsi	14
2.6.1 Asumsi Kenormalan Galat	15
2.6.2 Kehomogenan Ragam Galat.....	15
2.7 Pemeriksaan Kebaikan Model	16
2.7.1 Koefisien Determinasi Disesuaikan (R^2_{adj})	16
2.7.2 <i>Akaike Information Criterion (AIC)</i>	16
2.8 Pertumbuhan Kacang Tanah (<i>Arachis hypogaea</i> L.).....	17
BAB III METODE PENELITIAN	19
3.1 Sumber Data	19
3.2 Metode Penelitian	19

BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN.....	23
4.1 Diagram Pencar.....	23
4.2 Pendugaan Parameter Model Regresi Nonlinier.....	23
4.3 Pengujian Asumsi.....	27
4.3.1 Asumsi Kenormalan Galat.....	27
4.3.2 Asumsi Kehomogenan Ragam Galat.....	27
4.4 Pemeriksaan Keباikan Model.....	28
4.5 Laju Pertumbuhan.....	29
4.5.1 Laju Pertumbuhan Absolut.....	29
4.5.2 Laju Pertumbuhan Relatif.....	29
4.5.3 Laju Pertumbuhan Maksimum.....	30
 BAB V PENUTUP.....	 33
5.1 Kesimpulan.....	33
5.2 Saran.....	33
 DAFTAR PUSTAKA.....	 35
LAMPIRAN.....	39



DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Model Sederhana Sistem Pertumbuhan.....	6
Gambar 2.2	Model GMM	9
Gambar 2.3	Model <i>Richards</i>	11
Gambar 3.1	Diagram Alir Tahapan Analisis.....	21
Gambar 4.1	Diagram Pencar Tinggi Kacang Tanah (cm) terhadap Umur (mst)	23
Gambar 4.2	Diagram Pencar antara Umur dengan Tinggi Kacang Tanah Pengamatan dan Hasil Prediksi Model	27
Gambar 4.3	Kurva Laju Pertumbuhan Absolut.....	29
Gambar 4.4	Kurva Laju Pertumbuhan Relatif	30



DAFTAR TABEL

Tabel 4.1	Penduga Awal Parameter	24
Tabel 4.2	Model GMM dan <i>Richards</i>	24
Tabel 4.3	Tinggi Kacang Tanah Hasil Pengamatan dan Pre- diksi Model.....	26
Tabel 4.4	Hasil Pengujian Kenormalan Galat	27
Tabel 4.5	Hasil Pengujian Kehomogenan Ragam Galat	28
Tabel 4.6	Nilai R_{adj}^2 dan AIC_c	28
Tabel 4.7	Laju Pertumbuhan Maksimum	30



DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1	Rata-Rata Tinggi Kacang Tanah (cm)	39
Lampiran 2	Penurunan Model Pertumbuhan	40
Lampiran 3	Proses Perhitungan Penduga Awal.....	44
Lampiran 4	Hasil Pendugaan Parameter.....	48
Lampiran 5	Hasil Pengujian Asumsi Kenormalan Galat.....	52
Lampiran 6	Perhitungan Nilai Q	53
Lampiran 7	Perhitungan R^2_{adj} dan AIC_C	55
Lampiran 8	Proses Iterasi <i>Levenberg-Marquardt</i>	57



BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Analisis regresi merupakan salah satu metode statistika yang banyak diterapkan dalam berbagai bidang. Analisis regresi merupakan teknik yang mempelajari tentang hubungan antara dua atau lebih peubah yang diamati. Dalam penerapannya, tidak semua hubungan antar peubah tersebut berupa hubungan linier sehingga digunakan model regresi nonlinier. Model regresi nonlinier seringkali digunakan untuk menerangkan pola pertumbuhan. Model-model pertumbuhan telah diterapkan dalam banyak bidang, antara lain botani, kehutanan, zoologi dan ekologi yang meliputi pertumbuhan organisme, tanaman, pohon, hewan dan manusia.

Pertumbuhan dapat didefinisikan sebagai penambahan ukuran tubuh per satuan waktu. Pemodelan kurva pertumbuhan sangat berguna dalam melihat pola pertumbuhan sepanjang waktu (Liu *et al.*, 2011). Nilai titik belok dan laju pertumbuhan dapat digunakan untuk mengevaluasi efek dari perbedaan sistem manajemen pemeliharaan, kebutuhan makanan yang diberikan dan hasil dari pemeliharaan burung puyuh (Narinc *et al.*, 2010).

Beberapa model pertumbuhan telah dikembangkan untuk mengetahui pola pertumbuhan baik pada hewan maupun tanaman, seperti model *Generalized Michaelis-Menten* (GMM). Untuk mengevaluasi model ini, López *et al.* (2000) membandingkannya dengan model pertumbuhan yang sudah sering digunakan, yaitu *Gompertz* dan *Richards*. Perbandingan di antara ketiga model diterapkan pada data pertumbuhan hewan, yaitu ikan, tikus, tikus besar, hamster, marmut, kelinci, kucing, anjing, ayam *broiler*, kalkun, domba, kambing, babi, kuda dan sapi. Uji kelayakan model dengan R^2 menunjukkan bahwa GMM dan *Richards* memberikan hasil sama baik dan sedikit lebih unggul daripada *Gompertz*.

Dalam penelitian ini, model pertumbuhan yang akan dibandingkan adalah GMM dan *Richards*. Kedua model dapat dibandingkan karena sama-sama memiliki titik belok yang fleksibel dan memiliki empat parameter. Kuhl *et al.* (2003) menjelaskan bahwa membandingkan dua model dengan parameter berbeda kurang tepat karena semakin banyak parameter dalam model maka semakin dekat penduga parameter dengan parameter (bias kecil).

Model GMM belum pernah diterapkan pada pertumbuhan tanaman. Untuk itu, penulis menggunakan model GMM untuk memodelkan pertumbuhan kacang tanah. Sebagaimana model *Richards* dikembangkan untuk mempelajari pertumbuhan tanaman dari persamaan *Von Bertalanffy* yang menjelaskan tentang pertumbuhan hewan dan memberikan hasil baik. (France and Thornley, 1984).

Kacang tanah (*Arachis hypogaea* L.) merupakan tanaman polong-polongan atau legum kedua terpenting setelah kedelai di Indonesia. Tanaman ini berasal dari Brasilia, Amerika Selatan namun saat ini telah menyebar ke seluruh dunia yang beriklim tropis atau subtropis. Kacang tanah penting karena selain dapat dikonsumsi karena mengandung protein tinggi juga dimanfaatkan sebagai campuran pakan ternak dan limbahnya yang berupa brangkasan dapat dimanfaatkan sebagai pupuk organik.

Wibawana (2005) dan Hayati, dkk., (2012) menyebutkan bahwa varietas kacang tanah berpengaruh nyata terhadap tinggi kacang tanah. Disebutkan juga bahwa tinggi tanaman dan jumlah cabang berkaitan dengan jumlah polong per tanaman karena tinggi tanaman dan jumlah cabang merupakan tolok ukur dalam pembentukan polong. Prasasti (2013) menyebutkan bahwa peningkatan tinggi tanaman akan berpengaruh terhadap berat kering akar dan tajuk tanaman. Berat kering tanaman mencerminkan pertumbuhan tanaman dan banyaknya unsur hara yang terserap. Semakin tinggi serapan air dan unsur hara oleh tanaman menyebabkan proses metabolisme dan fotosintesis semakin baik sehingga dapat meningkatkan pertumbuhan dan hasil tanaman. Dalam tulisan ini digunakan kacang tanah varietas Domba untuk memodelkan pertumbuhan dengan model GMM dan *Richards*.

GMM dan *Richards* adalah model yang memiliki kurva sigmoid yang menggambarkan laju pertumbuhan lambat di awal kemudian mencapai maksimum saat titik belok dan akan melambat di akhir. Penelitian ini menggunakan data sekunder berupa tinggi kacang tanah (cm) selama tiga belas minggu.

1.2 Rumusan Masalah

1. Apakah model pertumbuhan *Generalized Michaelis-Menten* dan *Richards* dapat menggambarkan dengan baik pertumbuhan kacang tanah?

2. Model pertumbuhan manakah yang lebih baik untuk menjelaskan pertumbuhan kacang tanah?
3. Pada umur berapakah kacang tanah mencapai laju pertumbuhan maksimum?

1.3 Batasan Masalah

1. Metode iterasi yang digunakan untuk menduga parameter model adalah Metode Kuadrat Terkecil (MKT) dengan iterasi *Levenberg-Marquardt*.
2. Indikator model terbaik adalah nilai R_{adj}^2 dan AIC_C .
3. Varietas kacang tanah yang diuji adalah varietas Domba.

1.4 Tujuan

1. Menjelaskan pola pertumbuhan kacang tanah dengan menggunakan model pertumbuhan GMM dan *Richards*.
2. Menentukan model pertumbuhan yang lebih baik untuk menjelaskan pertumbuhan kacang tanah.
3. Menentukan laju pertumbuhan maksimum kacang tanah.

1.5 Manfaat

Dari penelitian ini diharapkan dapat menduga model pertumbuhan yang tepat untuk menjelaskan laju pertumbuhan pada kacang tanah dan menentukan waktu efektif pertumbuhan kacang tanah sehingga dapat menjadi informasi bagi petani kacang tanah agar dapat melakukan tindakan seperti pemupukan dan pemberian air tepat waktu untuk mendapatkan hasil produksi optimum.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



BAB II TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Model Regresi Nonlinier

Dilihat dari kelinieran parameter, model regresi dapat dikelompokkan menjadi linier dan nonlinier. Model regresi linier dapat dinyatakan dalam persamaan (2.1) (Draper dan Smith, 1992).

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_k X_k + \varepsilon \quad (2.1)$$

Bila model tidak dapat dinyatakan dengan persamaan (2.1) maka model tersebut dinamakan model nonlinier seperti persamaan (2.2).

$$Y = f(X, \theta) + \varepsilon \quad (2.2)$$

di mana f adalah fungsi regresi yang memuat parameter θ yang akan diduga dan ε adalah galat yang diasumsikan menyebar normal dengan rata-rata 0 dan ragam σ^2 .

Terdapat dua macam model nonlinier yaitu nonlinier dalam peubah dan nonlinier dalam parameter. Persamaan (2.3) dan (2.4) berturut-turut adalah contoh model nonlinier dalam peubah dan model nonlinier dalam parameter (Gujarati dan Porter, 2010:50).

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1^2 + \varepsilon \quad (2.3)$$

$$Y = \beta_0 + \sqrt{\beta_1} X_1 + \varepsilon \quad (2.4)$$

Suatu fungsi dikatakan linier dalam parameter, bila parameter berpangkat satu dan tidak dikalikan maupun dibagi dengan parameter lain dan dikatakan linier dalam peubah jika peubah berpangkat satu. Bila model linier dalam parameter diturunkan terhadap parameter bukan merupakan fungsi dari parameter lain. Model nonlinier dalam parameter akan dibahas dalam penelitian ini.

Model nonlinier dalam parameter dibedakan menjadi dua, yaitu model yang secara intrinsik linier (*intrinsically linear*) dan nonlinier (*intrinsically nonlinear*). Model intrinsik linier adalah model yang dapat ditransformasi menjadi bentuk linier seperti persamaan (2.5), sedangkan model intrinsik nonlinier adalah model yang tidak dapat ditransformasi menjadi bentuk linier seperti persamaan (2.7) (Draper dan Smith, 1992).

$$Y = e^{(\theta_1 + \theta_2 t^2 + \varepsilon)} \quad (2.5)$$

Persamaan (2.5) dapat diubah menjadi bentuk linier dengan melakukan transformasi logaritma basis e sehingga menjadi persamaan (2.6). Berbeda dengan persamaan (2.5), persamaan (2.7) tidak dapat diubah ke dalam bentuk linier walaupun telah dilakukan transformasi logaritma.

$$\ln Y = \theta_1 + \theta_2 t^2 + \varepsilon \quad (2.6)$$

$$Y = \frac{\theta_1}{\theta_1 + \theta_2} (e^{-\theta_2 t} - e^{-\theta_1 t}) + \varepsilon \quad (2.7)$$

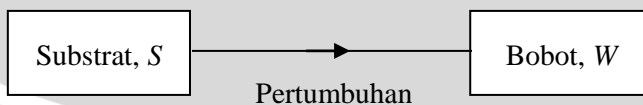
Dalam penelitian ini digunakan model intrinsik nonlinier, yaitu model GMM dan *Richards*.

2.2 Model Pertumbuhan

Fungsi pertumbuhan telah dipakai secara luas untuk menggambarkan pertumbuhan. Suatu model pertumbuhan dikatakan baik jika dapat merangkum informasi yang dihasilkan dari pengamatan pada hewan ke dalam satu himpunan parameter yang bermakna biologis (López *et al.*, 2000). Fungsi pertumbuhan nonlinier dapat dikelompokkan dalam tiga kategori:

1. Menggambarkan perilaku yang terus menurun, seperti monomolekuler. Pada fungsi monomolekuler tidak terdapat titik belok sehingga pertumbuhan akan terus mengalami perlambatan sampai tinggi/berat maksimum tercapai.
2. Menjelaskan kurva sigmoid dengan titik belok tetap, seperti *Gompertz* ($1/e$ tinggi/berat maksimum) dan *logistik* (0.5 tinggi/berat maksimum).
3. Menjelaskan kurva sigmoid dengan titik belok bervariasi, seperti *Richards*, *Janoschek* dan model *France*.

Model pertumbuhan dilandasi pada asumsi bahwa sistem tertutup tanpa *input* maupun *output*, pertumbuhan secara konstan bekerja pada laju (kenaikan bobot (W, kg) per satuan waktu) proporsional terhadap level substrat S (kg) seperti pada Gambar 2.1.



Gambar 2.1. Model Sederhana Sistem Pertumbuhan (France and Thornley, 1984)

France and Thornley (1984) menjelaskan bahwa berdasarkan asumsi tidak terdapat penambahan atau pengurangan material dari sistem maka:

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= -\frac{dS}{dt} \\ \frac{dW}{dt} + \frac{dS}{dt} &= \frac{d}{dt}(W + S) = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

sehingga

$$W + S = \text{konstanta} = W_0 + S_0 = W_t + S_t = C \quad (2.9)$$

W_0 dan S_0 adalah nilai awal dari W dan S pada saat $t = 0$; W_t dan S_t adalah nilai akhir W dan S pada saat $t \rightarrow \infty$ dan C konstanta.

Laju pertumbuhan merupakan fungsi v dari W dan S , yaitu:

$$\frac{dW}{dt} = v(W, S) \quad (2.10)$$

Pada persamaan (2.9), $S = C - W$, dengan mensubstitusikan S pada persamaan (2.10) maka diperoleh:

$$\frac{dW}{dt} = v(W, C - W) = h(W) \quad (2.11)$$

di mana h adalah fungsi yang hanya mengandung peubah W . Fungsi v pada persamaan (2.10) menentukan bentuk persamaan (2.11) dan dengan melakukan integrasi diperoleh model pertumbuhan.

2.2.1 Model GMM

Model GMM adalah hasil pengembangan persamaan *Michaelis-Menten* dari enzim kinetik. Pengembangan model ini dikenalkan oleh López *et al.* (2000) dan diterapkan pada pertumbuhan ikan, hewan ternak dan hewan percobaan yang dibandingkan dengan model pertumbuhan *Gompertz* dan *Richards*.

Model GMM adalah hasil penurunan persamaan (2.12) terhadap waktu (umur):

$$\frac{dH}{dt} = \mu S \quad (2.12)$$

di mana

$$\mu = \frac{ct^{c-1}}{(K^c + t^c)} \quad (2.13)$$

Dengan substitusi μ pada persamaan (2.13), menuliskan S sebagai $H_f - H$ dan mengintegrasikan persamaan (2.12) menghasilkan:

$$\int_{H_0}^H (H_f - H)^{-1} dH = \int_0^t ct^{c-1} (K^c + t^c)^{-1} dt \quad (2.14)$$

dan diperoleh model GMM:

$$H(t) = \frac{H_0 K^c + H_f t^c}{K^c + t^c} \quad (2.15)$$

di mana

$H(t)$: tinggi tanaman pada umur ke- t

H_0 : tinggi awal

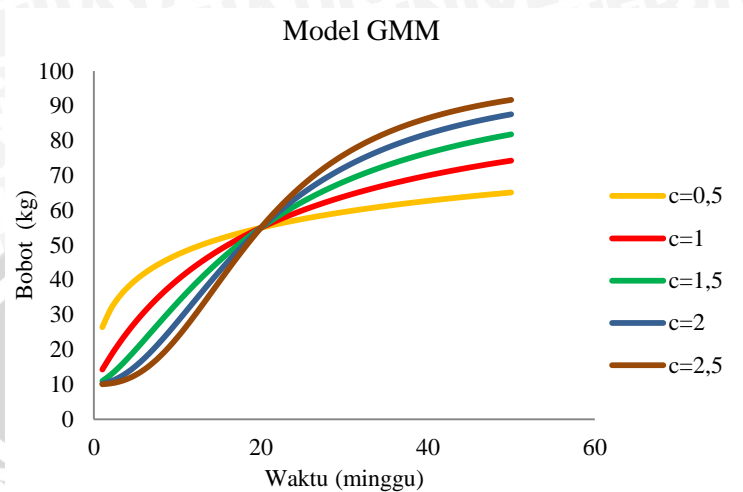
H_f : tinggi maksimum

K : saat di mana tinggi tanaman mencapai setengah tinggi maksimum

c : parameter titik belok

t : umur tanaman

Proses integrasi persamaan (2.14) untuk menghasilkan model GMM (2.15) disajikan pada Lampiran 2. López *et al.* (2000) menerapkan model GMM pada pertumbuhan hewan dengan mengukur bobot setiap minggu. Model GMM disajikan pada Gambar 2.2 untuk berbagai nilai c .



Gambar 2.2. Model GMM

Sumber: López *et al.* (2000)

Laju pertumbuhan absolut adalah pertambahan tinggi tanaman pada setiap satuan waktu (Hunt, 2003) yang diukur dengan persamaan (2.16).

$$\frac{dH}{dt} = \frac{ct^{c-1}(H_f - H)}{K^c + t^c} \quad (2.16)$$

Laju pertumbuhan relatif adalah perubahan laju pertumbuhan setiap satuan waktu yang dinyatakan dalam persamaan (2.17).

$$\frac{dH}{dt} \left(\frac{1}{H} \right) = \frac{ct^{c-1}(H_f - H)}{K^c + t^c} \frac{K^c + t^c}{H_0 K^c + H_f t^c} = \frac{ct^{c-1}(H_f - H)}{H_0 K^c + H_f t^c} \quad (2.17)$$

Titik belok atau laju pertumbuhan maksimum terjadi saat $\frac{d^2H}{dt^2} = 0$ jika nilai $c > 1$. Titik belok pada model GMM (t^*, H^*) adalah

$$t^* = K \left[\frac{(c-1)}{(c+1)} \right]^{\frac{1}{c}} \quad (2.18)$$

pada

$$H^* = \frac{\left(1 + \frac{1}{c}\right)H_0 + \left(1 - \frac{1}{c}\right)H_f}{2} \quad (2.19)$$

2.2.2 Model Richards

Model *Richards* dikembangkan untuk mempelajari pertumbuhan tanaman berdasarkan persamaan *Von Bertalanffy* yang menjelaskan pertumbuhan hewan dan memberikan hasil baik (France and Thornley, 1984). Menurut Fekedulegn *et al.* (1999), bentuk umum model *Richards* seperti pada persamaan (2.20).

$$H(t) = \frac{\alpha}{[1 + \beta e^{-kt}]^{1/m}} \quad (2.20)$$

di mana

$H(t)$: tinggi tanaman pada umur ke- t

α : tinggi maksimum

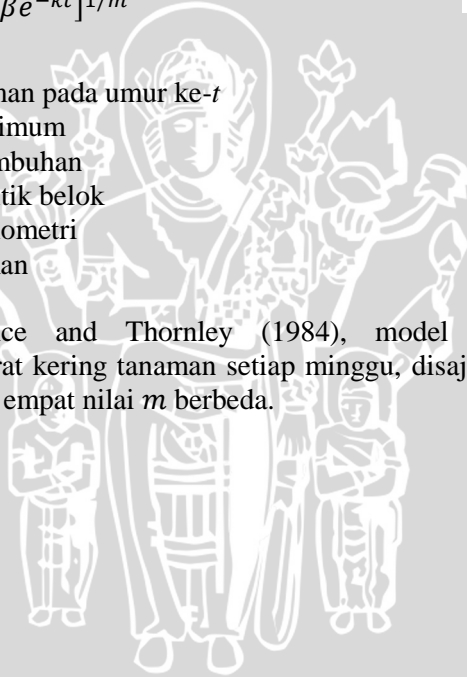
β : skala pertumbuhan

k : parameter titik belok

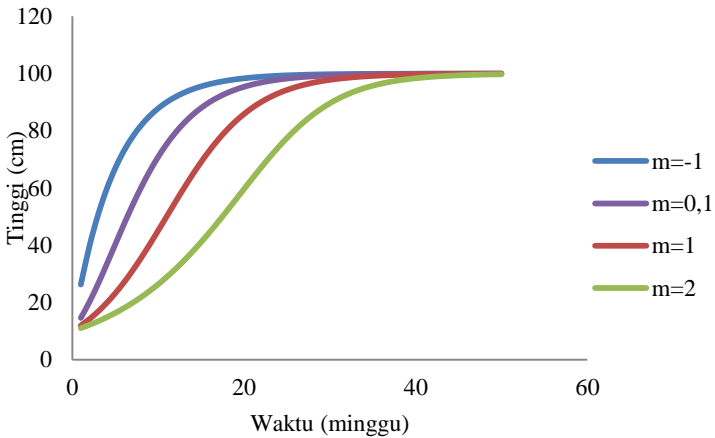
m : konstanta alometri

t : umur tanaman

Dalam France and Thornley (1984), model *Richards* diterapkan pada berat kering tanaman setiap minggu, disajikan pada Gambar 2.3 dengan empat nilai m berbeda.



Model Richards



Gambar 2.3. Model *Richards*

Sumber: France and Thornley (1984)

Laju pertumbuhan absolut model *Richards* adalah

$$\frac{dH}{dt} = \frac{k\alpha\beta e^{-kt}}{m} (1 + \beta e^{-kt})^{-\left(\frac{1}{m}+1\right)} \quad (2.21)$$

dan laju pertumbuhan relatif

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} \left(\frac{1}{H}\right) &= \frac{k\alpha\beta e^{-kt}}{m} (1 + \beta e^{-kt})^{-\left(\frac{1}{m}+1\right)} \frac{[1 + \beta e^{-kt}]^{1/m}}{\alpha} \\ &= \frac{k\beta e^{-kt}}{m(1 + \beta e^{-kt})} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Laju pertumbuhan maksimum terjadi saat $\frac{d^2H}{dt^2} = 0$ dan pada model *Richards* terjadi saat t^* :

$$t^* = \frac{1}{k} \ln \frac{\beta}{m} \quad (2.23)$$

pada

$$H^* = \frac{\alpha}{(1 + m)^{1/m}} \quad (2.24)$$

Sama dengan GMM, model *Richards* memiliki empat parameter. Model *Richards* merupakan generalisasi model pertumbuhan lain, seperti model *Monomolecular*, *Logistic* dan *Gompertz*, yang membedakan model *Richards* dengan model lain adalah parameter m (France and Thornley, 1984).

Model *Richards* memiliki titik belok fleksibel, berbeda dari model *Monomolecular* yang tidak mempunyai titik belok atau *Logistic* dan *Gompertz* yang sama-sama memiliki titik belok tetap, pada 0.5 tinggi maksimum dan 0.368 tinggi maksimum (France and Thornley, 1984). Inilah yang membuat model *Richards* dapat dibandingkan dengan GMM karena keduanya memiliki titik belok fleksibel dengan syarat $c > 1$ dan $m > 1$.

2.3 Pendugaan Parameter Model Nonlinier

Bentuk model nonlinier menurut Fekedulegn *et al.* (1999) adalah:

$$y_i = f(t_i, \theta) + \varepsilon_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.25)$$

di mana

y_i : respon ke- i

t_i : prediktor ke- i

θ : vektor parameter θ_j yang akan diduga, $j = 1, 2, \dots, p$

ε_i : galat ke- i

p : banyaknya parameter

n : banyaknya pengamatan

Penduga bagi θ_j dihasilkan dengan meminimumkan jumlah kuadrat galat (JKG).

$$JKG = \sum_{i=1}^n [y_i - f(t_i, \theta)]^2 \quad (2.26)$$

JKG diturunkan secara parsial terhadap θ yang menghasilkan p persamaan normal yang harus diselesaikan. Persamaan normal tersebut mempunyai bentuk seperti persamaan (2.27).

$$-2 \sum_{i=1}^n \{y_i - f(t_i, \hat{\theta})\} = 0 \quad (2.27)$$

Penentuan nilai $\hat{\theta}$ melalui penyelesaian persamaan (2.27) tidak mudah. Oleh karena itu, dibutuhkan metode iterasi untuk meminimumkan JKG. Metode iterasi *Levenberg-Marquardt* dipilih karena merupakan penyempurnaan terhadap metode iterasi *Gauss-Newton* dan *Steepest Descent* (Draper dan Smith, 1992).

2.4 Iterasi *Levenberg-Marquardt*

Iterasi *Levenberg-Marquardt* baik dalam menghasilkan kekonvergenan dan proses konvergensi lebih cepat dibandingkan dengan metode lain (Draper dan Smith, 1992).

Menurut Sanjoyo (2006), bentuk iterasi *Levenberg-Marquardt* adalah:

$$\theta^{(q+1)} = \theta^{(q)} - [\mathbf{Z}(\theta^{(q)})' \mathbf{Z}(\theta^{(q)}) + \lambda^{(q)} \mathbf{I}]^{-1} [\mathbf{Z}(\theta^{(q)})' (H(t) - f(t, \theta^{(q)}))] \quad (2.28)$$

$q = 1, 2, \dots, s$

di mana

$$\mathbf{Z}(\theta)_{(n \times p)} = \frac{\partial f(t, \theta)}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(t_1, \theta)}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial f(t_1, \theta)}{\partial \theta_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f(t_n, \theta)}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial f(t_n, \theta)}{\partial \theta_p} \end{bmatrix}_{(n \times p)}$$

di mana

p : banyaknya parameter

$\mathbf{Z}(\theta)$: matriks turunan parsial

\mathbf{I} : matriks identitas berordo p

$\lambda^{(q)}$: akar ciri positif minimum matriks $[\mathbf{Z}(\theta^{(q)})' \mathbf{Z}(\theta^{(q)})]$

Disebutkan dalam Sanjoyo (2006) bahwa setiap langkah di mana penduga awal parameter diubah dan menyebabkan perubahan selisih penduga parameter pada dua langkah berurutan dinamakan iterasi. Proses ini dilakukan sampai selisih antara hasil iterasi ke- $(q + 1)$ dan ke- q mendekati nol atau cukup kecil (Draper dan Smith, 1992).

2.5 Penentuan Penduga Awal Parameter

Pendugaan parameter pada model menggunakan metode iterasi *Levenberg-Marquardt* dilakukan dengan menghitung nilai penduga awal parameter dan turunan parsial dari masing-masing parameter. Nilai awal yang baik dapat membuat proses iterasi konvergen lebih cepat dalam menghasilkan solusi. Beberapa cara dalam memperoleh penduga awal parameter dalam model nonlinier adalah (Draper dan Smith, 1992)

1. Jika terdapat p parameter, substitusikan p pengamatan (H_i, t_i) ke dalam model yang terbentuk dengan mengabaikan galatnya. Selanjutnya, selesaikan p persamaan yang diperoleh untuk mendapatkan penduga awal parameter model. Nilai-nilai t_i yang terpisah jauh memberikan hasil lebih baik.
2. Sebagai alternatif pendekatan (1), perhatikan respons untuk t_i mendekati nol atau tak hingga dan substitusikan ke dalam model untuk memperoleh nilai duga parameter.

Menurut Fekedulegn *et al.* (1999), urutan yang paling efisien dalam menentukan nilai awal parameter adalah α , k , m dan β . Parameter yang paling mudah ditentukan adalah α , yaitu nilai pertumbuhan maksimum.

$$\alpha = \lim_{t \rightarrow \infty} H(t) \quad (2.29)$$

Pendugaan terhadap nilai k dilandasi pada persamaan (2.30).

$$k = \frac{(\omega_2 - \omega_1)}{(t_2 - t_1)\alpha} \quad (2.30)$$

di mana ω_1 dan ω_2 merupakan berat dengan selisih terbesar pada selang waktu t_1 dan t_2 . Konstanta alometri, $m > 0$, sedangkan nilai β diperoleh dari substitusi dua persamaan. Hasil dari nilai-nilai tersebut selanjutnya akan digunakan untuk menduga nilai parameter melalui proses iterasi.

2.6 Pengujian Asumsi

Pengujian asumsi merupakan salah satu bagian dalam analisis regresi yang berlaku bagi regresi linier maupun nonlinier. Asumsi tersebut adalah galat menyebar normal dengan rata-rata nol dan ragam konstan dan saling bebas satu sama lain. Model pertumbuhan nonlinier melibatkan data deret waktu sehingga terdapat kecenderungan galat berkorelasi sehingga asumsi nonautokorelasi dilanggar (Draper dan Smith, 1992). Oleh karena itu, terdapat dua

asumsi yang harus dipenuhi yaitu asumsi kenormalan galat dan kehomogenan ragam galat.

2.6.1 Asumsi Kenormalan Galat

Pengujian asumsi kenormalan dilakukan untuk membuktikan bahwa galat menyebar normal. Salah satu cara untuk menguji asumsi kenormalan galat adalah dengan menggunakan uji *Kolmogorov-Smirnov* berdasarkan hipotesis:

H_0 : Galat menyebar normal

H_1 : Galat tidak menyebar normal

$$D_{maks} = Maks[|F_n(t) - F_0(t)|] \quad (2.31)$$

di mana

D_{maks} : nilai deviasi maksimum antara fungsi sebaran empiris dan fungsi sebaran normal

$F_n(t)$: fungsi sebaran kumulatif hasil pengamatan (fungsi sebaran empiris)

$F_0(t)$: fungsi sebaran kumulatif distribusi normal

Terima H_0 jika $D_{maks} < D(0.05)$ maka galat menyebar normal (Daniel, 1989).

2.6.2 Asumsi Kehomogenan Ragam Galat

Kehomogenan ragam galat berarti ragam galat konstan dari satu pengamatan ke pengamatan lain. Bila asumsi kehomogenan ragam galat tidak terpenuhi maka penduga parameter tidak efisien. (Gujarati dan Porter, 2010).

Pengujian terhadap kehomogenan ragam galat dilakukan dengan uji *Szroeter* berlandaskan hipotesis (Dielman, 1991):

H_0 : Ragam galat konstan

H_1 : Ragam galat tidak konstan

$$Q = \left[\frac{6n}{n^2 - 1} \right]^{1/2} \left[\frac{\sum_{i=1}^n i \hat{e}_i^2}{\sum_{i=1}^n \hat{e}_i^2} - \frac{n+1}{2} \right] \sim Z \quad (2.32)$$

di mana

n : banyaknya pengamatan

e_i : galat ke- i ($i=1, 2, \dots, n$)

H_0 diterima jika $Q \leq Z_{0,05}$, menunjukkan ragam galat konstan. Uji *Szroeter* mengasumsikan bahwa semua pengamatan disusun dari pengamatan yang memiliki ragam kecil hingga ragam besar. Diasumsikan bahwa meningkatnya nilai peubah penjelas akan meningkatkan ragam. Oleh karena itu, data diurutkan berdasarkan nilai peubah penjelas. Asumsi ini sesuai dengan data pertumbuhan karena semakin meningkat umur maka tinggi tanaman atau berat hewan akan semakin meningkat sampai batas tertentu.

2.7 Pemeriksaan Kebaikan Model

2.7.1 Koefisien Determinasi Disesuaikan (R_{adj}^2)

Pemeriksaan kebaikan model dilakukan untuk mengetahui seberapa besar keragaman data dapat dijelaskan oleh model. Menurut Draper dan Smith (1992), R_{adj}^2 mengukur proporsi keragaman yang dapat dijelaskan oleh model yang telah disesuaikan dengan melibatkan derajat bebas galat dan total. Semakin tinggi nilai R_{adj}^2 maka model semakin baik.

$$R_{adj}^2 = 1 - \frac{JKG/(n-p)}{JKT/(n-1)} = 1 - \frac{KTG}{KTT} \quad (2.33)$$

di mana

- n : banyaknya pengamatan
- p : banyaknya parameter
- JKG : Jumlah Kuadrat Galat
- JKT : Jumlah Kuadrat Total
- KTG : Kuadrat Tengah Galat
- KTT : Kuadrat Tengah Total

2.7.2 Akaike Information Criterion (AIC)

AIC digunakan sebagai alat untuk mengukur kebaikan model di mana model dengan nilai *AIC* terkecil menunjukkan model terbaik (Hu, 2007). Pada MKT, *AIC* dinyatakan dalam persamaan (2.34) dengan asumsi galat berdistribusi normal dengan ragam konstan.

$$AIC = 2p + n \ln JKG - n \ln n \quad (2.34)$$

Untuk contoh berukuran kecil sehingga $\frac{n}{p} < 40$ digunakan *AIC* terkoreksi (AIC_C).

$$AIC_c = AIC + \frac{2p(p+1)}{n-p-1} \quad (2.35)$$

2.8 Pertumbuhan Kacang Tanah (*Arachis hypogaea* L.)

Kacang tanah memerlukan tanah yang ringan, gembur dan cukup mengandung unsur hara. Namun pada tanah yang berat, kacang tanah masih dapat tumbuh asalkan pengolahan tanah dilakukan dengan baik. Derajat keasaman tanah yang baik adalah pH 6-6.5. Pada tanah masam diperlukan pengapuran untuk dapat menghasilkan polong yang baik (Augstburger *et al.*, 2000)

Mengetahui fase pertumbuhan kacang tanah penting untuk menetapkan jadwal: pengairan, penyiangan dan pemanenan. Bila tidak diberikan pada fase yang tepat akan memberikan respon berbeda dibandingkan dengan pemberian perlakuan sesuai dengan fase pertumbuhan tanaman.

Pertumbuhan kacang tanah terdiri dari fase vegetatif dan fase generatif. Fase tumbuh kacang tanah diketahui dari jumlah buku pada batang utama dan perkembangan bunga hingga menjadi polong masak, serta buku-buku pada batang utama yang mempunyai daun yang telah berkembang penuh. Karakter dan sifat itulah yang digunakan Boote (1982) untuk menghitung fase tumbuh vegetatif kacang tanah. Fase vegetatif dimulai sejak perkecambahan sampai tanaman berbunga, sedangkan fase generatif dimulai sejak timbulnya bunga sampai polong masak. Fase generatif meliputi pembungaan, pembentukan polong, pembentukan biji dan pemasakan biji. Fase reproduktif kacang tanah dibagi menjadi delapan stadia, yaitu mulai berbunga pada 28-32 hari setelah tanam (hst), pembentukan ginofor (32-36 hst), pembentukan polong (40-45 hst), polong penuh/maksimum (44-52 hst), pembentukan biji (52-57 hst), biji penuh (60-68 hst), biji mulai masak (68-75 hst) dan masak panen (80-100 hst).

Umur berbunga kacang tanah varietas Domba berkisar antara 28-32 hst dan umur panen 90-95 hst. Kacang tanah varietas ini adalah varietas kacang tanah tipe Valencia yang berbiji 3-4/polong, agak tahan terhadap penyakit karat dan bercak daun, tahan A. flavus dan toleran klorosis sehingga beradaptasi baik di lahan kering kapuran (Balitkabi, 2012).

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



BAB III METODE PENELITIAN

3.1 Sumber Data

Data (tinggi kacang tanah) bersumber pada hasil penelitian Prasasti (2013) tentang uji hayati mikoriza terhadap patogen *Sclerotium rolfsii* pada tanaman kacang tanah varietas Domba yang dilakukan pada bulan Oktober 2012 sampai April 2013. Penelitian ini menggunakan Rancangan Acak Lengkap dengan empat ulangan, faktor adalah dosis mikoriza dan patogen:

K(-) : tanpa pemberian mikoriza dan patogen

K(+) : tanpa pemberian mikoriza namun diberi patogen

10M&P : mikoriza 10 gram dan patogen

20M&P : mikoriza 20 gram dan patogen

30M&P : mikoriza 30 gram dan patogen

40M&P : mikoriza 40 gram dan patogen

50M&P : mikoriza 50 gram dan patogen

Data yang diterapkan pada model GMM dan *Richards* berasal dari perlakuan 50M&P karena peningkatan tinggi tanaman, berat kering akar dan berat kering tajuk tanaman terbesar terdapat pada perlakuan tersebut sedangkan tinggi tanaman terendah terdapat pada perlakuan 10M&P (Prasasti, 2013).

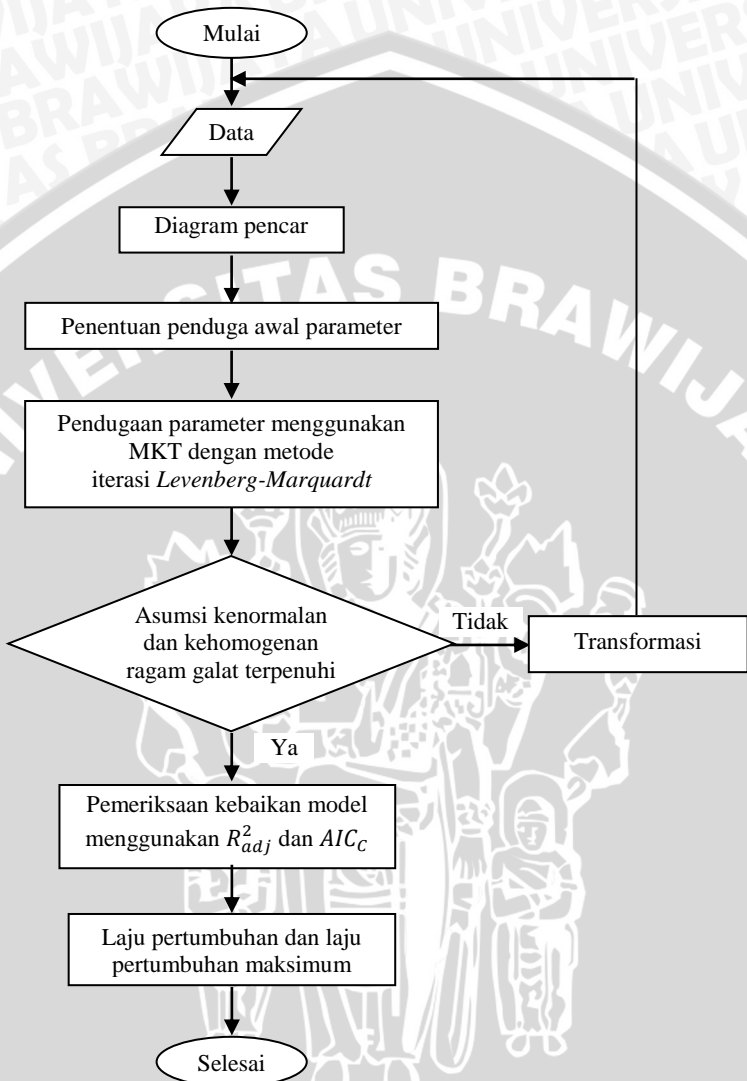
3.2 Metode Penelitian

Dalam penelitian ini, tahapan analisis data yang dilakukan adalah sebagai berikut:

1. Membuat diagram pencar antara tinggi dan umur tanaman.
2. Menentukan penduga awal parameter untuk setiap model pertumbuhan
 - a. Model GMM
 - Menentukan nilai H_0 (tinggi awal tanaman diamati) dan H_f (tinggi maksimum).
 - Menentukan t dan $H(t)$ dari dua pasang pengamatan kemudian mensubstitusikan nilai tersebut pada model sehingga diperoleh dua persamaan.
 - Dua persamaan yang diperoleh dieliminasi sehingga diperoleh nilai salah satu parameter (K).
 - Nilai K yang diperoleh dimasukkan pada salah satu persamaan untuk memperoleh nilai c .

- b. Model *Richards*
- Menentukan nilai α (tinggi maksimum) seperti pada persamaan (2.29).
 - Menentukan nilai k dengan persamaan (2.30).
 - Menentukan t dan $H(t)$ dari dua pasang pengamatan kemudian mensubstitusikan nilai tersebut pada model sehingga diperoleh dua persamaan.
 - Dua persamaan yang diperoleh dieliminasi sehingga diperoleh nilai β .
 - Nilai β yang diperoleh dimasukkan pada salah satu persamaan untuk memperoleh nilai m .
3. Melakukan pendugaan parameter menggunakan MKT dengan iterasi *Levenberg-Marquardt*.
 4. Melakukan pengujian asumsi kenormalan galat dan kehomogenan ragam galat dengan persamaan (2.31) dan (2.32). Apabila asumsi tidak terpenuhi maka perlu dilakukan transformasi.
 5. Memeriksa kebaikan model dengan R_{adj}^2 sesuai persamaan (2.33) dan AIC_C sesuai persamaan (2.35).
 6. Menghitung laju pertumbuhan setiap model, seperti pada persamaan (2.16) dan (2.21) dan laju pertumbuhan maksimum, seperti pada persamaan (2.18) dan (2.19) untuk model GMM dan persamaan (2.23) dan (2.24) untuk model *Richards*.
 7. Membandingkan kedua model untuk mendapatkan model terbaik yang dapat menjelaskan pertumbuhan kacang tanah.

Diagram alir tahapan analisis dapat dilihat pada Gambar 3.1. Tahapan analisis ini dilakukan dengan menggunakan *Microsoft Excel* dan *SPSS 21*.



Gambar 3.1. Diagram Alir Tahapan Analisis

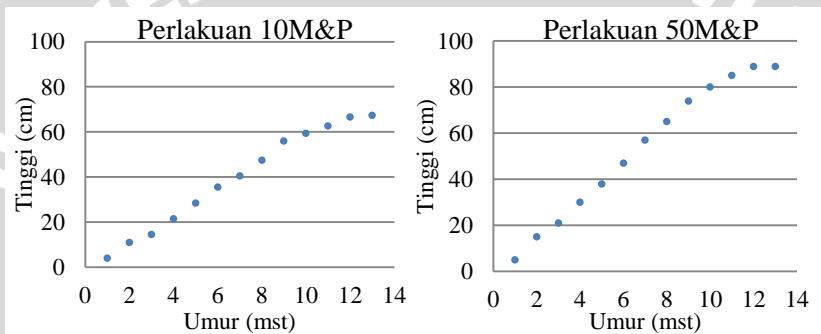
UNIVERSITAS BRAWIJAYA



BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Diagram Pencar

Kacang tanah dengan perlakuan 50M&P dipilih karena peningkatan tinggi tanaman, berat kering akar dan berat kering tajuk tanaman terbesar terdapat pada perlakuan tersebut sedangkan tinggi tanaman minimum terdapat pada perlakuan 10M&P (Prasasti, 2013). Berikut adalah diagram pencar tinggi kacang tanah terhadap umur pada perlakuan 10M&P dan 50M&P.



Gambar 4.1. Diagram Pencar Tinggi Kacang Tanah (cm) terhadap Umur (mst)

Pertumbuhan tinggi kacang tanah pada 10M&P dan 50M&P meningkat secara linier pada umur 3 sampai 11 mst (minggu setelah tanam) dan tidak terjadi penambahan tinggi dari minggu 12 ke minggu 13 setelah tanam. Pola pertumbuhan kacang tanah mendekati bentuk sigmoid sehingga diharapkan model GMM dan *Richards* dapat menggambarkan dengan baik pola pertumbuhan kacang tanah.

4.2 Pendugaan Parameter Model Regresi Nonlinier

Parameter model regresi nonlinier diduga dengan metode iterasi *Levenberg-Marquardt* yang memerlukan penduga awal. Langkah-langkah perhitungan penduga awal parameter disajikan pada Lampiran 3.

Kedua model memiliki empat parameter, yaitu H_0 (tinggi awal), H_f (tinggi maksimum), K (saat di mana tanaman mencapai setengah tinggi maksimum) dan c (parameter titik belok) untuk

GMM sedangkan α (tinggi maksimum), β (skala pertumbuhan), k (parameter titik belok) dan m (konstanta alometri) untuk *Richards*. Penduga awal parameter yang akan digunakan untuk iterasi *Levenberg-Marquardt* menghasilkan penduga konvergen yang disajikan pada Tabel 4.1. Hasil pendugaan parameter dapat dilihat pada Lampiran 4. Penduga hasil iterasi digunakan untuk membentuk model pertumbuhan yang disajikan pada Tabel 4.2.

Tabel 4.1. Penduga Parameter

Model	Parameter	Perlakuan			
		10M&P		50M&P	
		PA	PHI	PA	PHI
GMM	H_0	4	4.3	5	5.4
	H_f	67	92.4	89	122.7
	K	4.6	7.9	8.2	7.8
	c	2.49	2.1	2.56	2.0
<i>Richards</i>	α	67	76.4	89	100.8
	β	10.10	0.9	10.26	1.0
	k	0.12	0.3	0.11	0.3
	m	1.21	0.2	1.25	0.2

Keterangan:

PA : penduga awal

PHI : penduga hasil iterasi

Tabel 4.2. Model GMM dan *Richards*

Model	Perlakuan	Persamaan
GMM	10M&P	$H(t) = \frac{(4.3)7.9^{2.1} + (92.4)t^{2.1}}{7.9^{2.1} + t^{2.1}}$
	50M&P	$H(t) = \frac{(5.4)7.8^{2.0} + (122.7)t^{2.0}}{7.8^{2.0} + t^{2.0}}$
<i>Richards</i>	10M&P	$H(t) = \frac{76.4}{[1 + 0.9e^{-0.3t}]^{1/0.2}}$
	50M&P	$H(t) = \frac{100.8}{[1 + 1.0e^{-0.3t}]^{1/0.2}}$

Pada perlakuan 10M&P, model GMM menduga tinggi awal kacang tanah 4.3 cm, tinggi maksimum mencapai 92.4 cm dan setengah tinggi maksimum tercapai pada 7.9 mst sedangkan pada model *Richards* tinggi maksimum 122.7 cm dan perubahan tinggi tanaman 0.9 cm/mst.

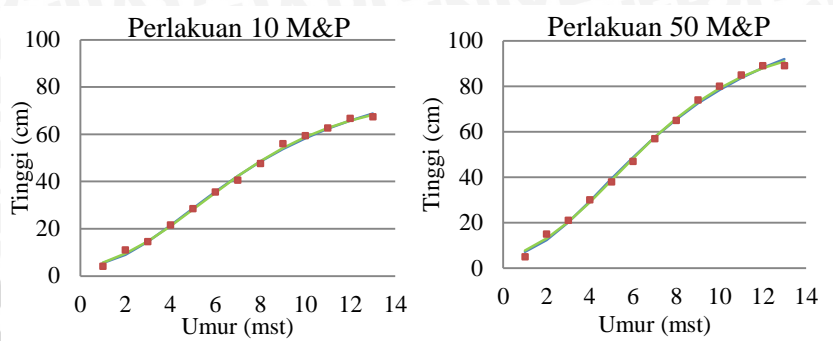
Tanaman kacang tanah yang diberi perlakuan 50M&P lebih tinggi dibandingkan dengan tanaman yang diberi perlakuan 10M&P karena pemberian mikoriza berpengaruh terhadap pertumbuhan kacang tanah. Semakin tinggi dosis mikoriza, pertumbuhan tinggi tanaman menjadi lebih cepat dan lebih besar. Tanaman yang terinfeksi mikoriza memiliki kandungan auksin lebih tinggi dibandingkan yang tidak terinfeksi. Kolonisasi mikoriza pada akar tanaman dapat memperluas bidang penyerapan akar dengan adanya hifa eksternal yang tumbuh dan berkembang melalui bulu-bulu akar (Prasasti, 2013).

Model *Richards* merupakan generalisasi model pertumbuhan lain, seperti model *Monomolecular*, *Logistic* dan *Gompertz*, yang membedakan model *Richards* dengan model lain adalah parameter m . Model *Richards* akan mendekati model *Gompertz* saat $m = 0$ (France and Thornley, 1984). Dari hasil iterasi pada model *Richards* untuk kedua perlakuan diperoleh nilai m yang sama, yaitu 0.2. Nilai c model GMM yang diperoleh pada kedua perlakuan juga hampir sama, yaitu 2. Dari gambar 4.2 dapat dilihat bahwa diagram pencar hasil pengamatan dan prediksi model berhimpit, artinya model GMM yang memiliki parameter titik belok 2 sama dengan model *Richards* dengan parameter titik belok 0.2 dan keduanya mendekati model *Gompertz*. Jadi, pada pertumbuhan kacang tanah yang diberi perlakuan 10M&P dan 50M&P, model GMM dengan parameter titik belok 2 akan mendekati model *Richards* dengan parameter titik belok 0, yaitu model *Gompertz*.

Tabel 4.3. Tinggi Kacang Tanah Hasil Pengamatan dan Prediksi Model (dalam cm)

t (mst)	10M&P			50M&P		
	$H(t)$	Prediksi Model		$H(t)$	Prediksi Model	
		GMM	<i>Richards</i>		GMM	<i>Richards</i>
1	4	5.5	5.6	5	7.2	7.7
2	11	9	9.5	15	12.4	13.1
3	15	14.6	14.7	21	20.2	20.3
4	22	21.3	21.1	30	29.5	28.9
5	29	28.6	28.1	38	39.3	38.5
6	36	35.7	35.3	47	48.8	48.3
7	41	42.4	42.3	57	57.6	57.5
8	48	48.4	48.6	65	65.5	65.9
9	56	53.8	54.2	74	72.5	73.1
10	59	58.4	58.8	80	78.5	79.2
11	63	62.4	62.7	85	83.7	84.1
12	67	65.9	65.8	89	88.1	88
13	67	68.8	68.2	89	91.9	91

Gambar 4.2 menunjukkan tinggi kacang tanah hasil pengamatan dan prediksi model. Dari gambar dapat dilihat bahwa hasil pengamatan dan penduga model berhimpit yang menunjukkan bahwa model dapat menduga tinggi kacang tanah dengan baik.



Keterangan: ■ Hasil Pengamatan
 — Prediksi model GMM
 — Prediksi model Richards

Gambar 4.2. Diagram Pencar Tinggi Kacang Tanah Hasil Pengamatan dan Hasil Prediksi Model terhadap Umur

4.3 Pengujian Asumsi
4.3.1 Asumsi Kenormalan Galat

Pengujian kenormalan ragam galat dilakukan dengan uji *Kolmogorov-Smirnov* berdasarkan hipotesis berikut:

- H_0 : Galat menyebar normal
- H_1 : Galat tidak menyebar normal

Hasil pengujian kenormalan galat pada Lampiran 5 dan secara ringkas dapat dilihat pada Tabel 4.5. Galat kedua model pada setiap perlakuan menyebar normal.

Tabel 4.4. Hasil Pengujian Kenormalan Galat

Model	Perlakuan	Nilai p	Keputusan	Kesimpulan
GMM	10M&P	0.978	Terima H_0 pada $\alpha = 0.05$	Galat menyebarkan normal
	50M&P	0.874		
Richards	10M&P	0.954		
	50M&P	0.380		

4.3.2 Asumsi Kehomogenan Ragam Galat

Kehomogenan ragam galat diketahui melalui uji *Szroeter* berlandaskan hipotesis:

- H_0 : Ragam galat konstan
- H_1 : Ragam galat tidak konstan

Proses perhitungan nilai Q disajikan pada Lampiran 6 dan hasil pengujian kehomogenan ragam galat pada Tabel 4.6. H_0

diterima karena nilai $Q \leq Z_{0.05}$, galat model setiap perlakuan homogen.

Tabel 4.5. Hasil Pengujian Kehomogenan Ragam Galat

Model	Perlakuan	Q	$Z_{0.05}$	Keputusan	Kesimpulan
GMM	10M&P	0.1612	1.645	Terima H_0	Ragam galat homogen
	50M&P	0.0327			
<i>Richards</i>	10M&P	-0.2746			
	50M&P	-0.9636			

4.4 Pemeriksaan Kebaikan Model

Indikator kebaikan model adalah R_{adj}^2 dan AIC_C . Semakin tinggi nilai R_{adj}^2 maka model baik sebaliknya AIC_C minimum menunjukkan model terbaik. Perhitungan nilai R_{adj}^2 dan AIC_C pada Lampiran 7 dan secara ringkas disajikan pada Tabel 4.7.

Tabel 4.6. Nilai R_{adj}^2 dan AIC_C

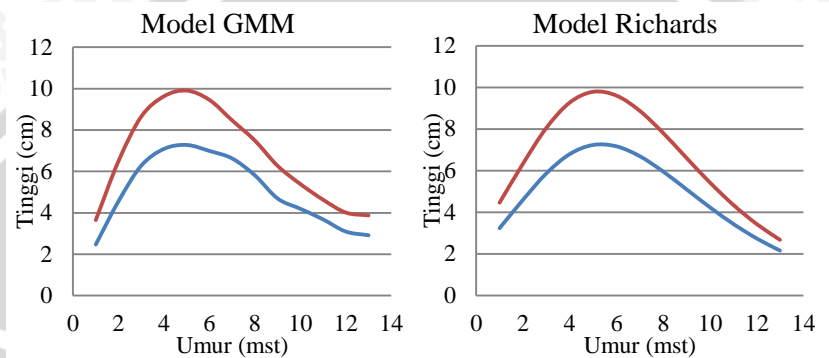
Model	Perlakuan	R_{adj}^2	AIC_C
GMM	10M&P	0.995	18.837
	50M&P	0.996	25.448
<i>Richards</i>	10M&P	0.996	15.386
	50M&P	0.997	20.498

Karena nilai R_{adj}^2 kedua model sama, maka keduanya hampir sempurna menjelaskan pertumbuhan kacang tanah sehingga digunakan indikator AIC_C minimum untuk menentukan model terbaik. Model *Richards* dapat menjelaskan pertumbuhan kacang tanah lebih baik dibandingkan GMM.

4.5 Laju Pertumbuhan

4.5.1 Laju Pertumbuhan Absolut

Laju pertumbuhan absolut dihitung berdasarkan persamaan (2.16) dan (2.21) menghasilkan kurva berikut.



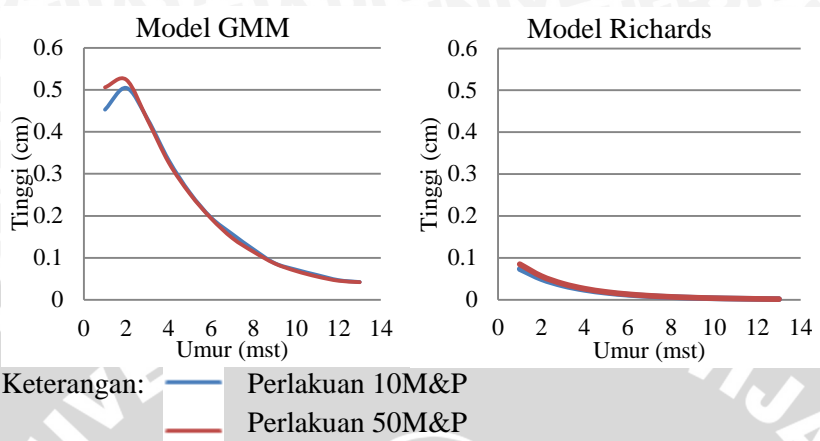
Keterangan:  Perlakuan 10M&P
 Perlakuan 50M&P

Gambar 4.3. Kurva Laju Pertumbuhan Absolut

Gambar 4.3 memperlihatkan laju pertumbuhan kacang tanah pada kedua model meningkat pada minggu awal hingga mencapai titik maksimum kemudian semakin menurun seiring bertambahnya umur kacang tanah. Pada perlakuan 10M&P, pertumbuhan maksimum kedua model terjadi pada minggu ke-4 sampai 5 setelah tanam dengan laju pertumbuhan 7-8 cm/mst sedangkan pada perlakuan 50M&P, pertumbuhan maksimum pada kedua model terjadi di waktu yang sama, yaitu pada minggu ke-5 setelah tanam. Kacang tanah yang diberi perlakuan 50M&P memiliki pertumbuhan lebih cepat dibandingkan perlakuan 10M&P. Minggu ke-4 sampai 6 adalah fase pembungaan kacang tanah yang memerlukan cukup air untuk membantu proses pembungaan.

4.5.2 Laju Pertumbuhan Relatif

Menurut Hunt (2003), laju pertumbuhan relatif adalah perubahan laju pertumbuhan setiap satuan waktu. Laju pertumbuhan relatif kacang tanah dihitung menurut persamaan (2.17) dan (2.22) ditunjukkan dalam kurva berikut.



Gambar 4.4. Kurva Laju Pertumbuhan Relatif

Laju pertumbuhan relatif pada dua model dan kedua perlakuan berpola sama, yaitu semakin menurun seiring bertambahnya umur tanaman. Pada minggu ke-13 laju pertumbuhan kacang tanah mendekati titik nol menunjukkan pertumbuhan berhenti atau tanaman kacang tanah tidak mengalami penambahan tinggi.

4.5.3 Laju Pertumbuhan Maksimum

Laju pertumbuhan maksimum terjadi saat t^* dan H^* seperti pada persamaan (2.18) dan (2.19) pada model GMM sedangkan pada model *Richards* dinyatakan dengan persamaan (2.23) dan (2.24). Laju pertumbuhan maksimum kacang tanah disajikan pada Tabel 4.8.

Tabel 4.7. Laju Pertumbuhan Maksimum

Model	Perlakuan	Umur (mst)	Tinggi (cm)
GMM	10M&P	4.8	27
	50M&P	4.6	35
<i>Richards</i>	10M&P	5.4	31
	50M&P	5.2	41

Tabel 4.8 menunjukkan, model GMM dan model *Richards* menduga pertumbuhan maksimum terjadi pada minggu ke-4 sampai 5 setelah tanam, yaitu saat kacang tanah berada pada fase pembentukan bunga. Augstburger *et al.* (2000:16) menjelaskan bahwa fase berbunga kacang tanah berlangsung setelah tanaman berumur 4-6 minggu. Periode kritis kekurangan air adalah pada

stadia awal pertumbuhan vegetatif, pembentukan bunga dan polong. Kekeringan pada salah satu stadia akan mengurangi hasil kacang tanah. Oleh karena itu, pemberian air yang cukup perlu dilakukan pada stadia itu.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



BAB V KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

1. Model GMM dan *Richards* sama baik dalam menjelaskan pertumbuhan kacang tanah karena R_{adj}^2 tinggi, yaitu sebesar 99%.
2. Berdasarkan nilai AIC_C , pertumbuhan kacang tanah perlakuan 10M&P dan 50M&P dapat dijelaskan dengan baik oleh model *Richards*. Tinggi maksimum yang dapat dicapai kacang tanah pada perlakuan 10M&P dan 50M&P berturut-turut adalah 76.4 cm dan 100.8 cm terjadi pada 13 mst dengan laju tinggi tanaman 1 cm/mst.
3. Kacang tanah mencapai pertumbuhan maksimum pada minggu ke 4-5 yaitu saat fase pembentukan bunga.

5.2 Saran

1. Petani kacang tanah sebaiknya memberikan tambahan pupuk dan air sebelum laju pertumbuhan mencapai maksimum sehingga diperoleh hasil optimum.
2. Gunakan model GMM untuk menjelaskan pertumbuhan kacang tanah karena lebih sederhana dan berdasarkan nilai R_{adj}^2 model ini sama baik dengan *Richards*.
3. Peneliti lain sebaiknya menggunakan lebih banyak hasil pengamatan supaya hasil menunjukkan kurva sigmoid lebih jelas.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



DAFTAR PUSTAKA

- Augstburger, F., J. Berger, U. Censkowsky, P. Heid, J. Milz, and C. Streit. 2000. *Peanuts*. <http://www.naturland.de/fileadmin/MDB/documents/Publication/English/peanuts.pdf>. Diakses tanggal 21 Juni 2014.
- Badan Penelitian Tanaman Aneka Kacang dan Umbi (Balitkabi). 2012. *Domba*. <http://balitkabi.litbang.deptan.go.id/varietas-unggul/vukacang-tanah/107-domba.html>. Diakses tanggal 21 Januari 2014.
- Boote, K.J. 1982. Growth Stages of Peanut (*Arachis hypogaea* L.). *Peanut Science*, Vol. 9, No. 1, Page 35-40. <http://www.peanutscience.com/doi/abs/10.3146/i0095-3679-9-1-11>. Diakses tanggal 12 Januari 2014.
- Daniel, W.W. 1989. *Statistika Nonparametrik Terapan*. Alih Bahasa: Alex Tri. PT Gramedia. Jakarta.
- Dielman, T.E. 1991. *Applied Regression Analysis*. PWS-KENT Publishing Company. Boston.
- Draper, N. dan H. Smith. 1992. *Analisis Regresi Terapan*. Edisi Kedua. Alih Bahasa: Bambang Sumantri. PT Gramedia Pustaka Utama. Jakarta.
- Fekedulegn, D., M.P.M. Siurtain, and J.J. Colbert. 1999. Parameter Estimation of Nonlinear Growth Models in Forestry. *Silva Fennica*, Vol. 33(4), page 327-336. http://researchrepository.ucd.ie/bitstream/handle/10197/4032/Fekedulegn_et_al_1999.pdf?sequence=1. Diakses tanggal 10 Desember 2013.
- France, J. and J.H.M. Thornley. 1984. *Mathematical Models in Agriculture*. Butterworth & Co. Ltd. London.
- Gujarati, D.N. dan D.C. Porter. 2006. *Dasar-Dasar Ekonometrika*. Edisi 5. Alih Bahasa: Julius A. Mulyadi. Penerbit Salemba Empat. Jakarta.

- Hayati, M., A. Marliah, H. Fajri. 2012. Pengaruh Varietas dan Dosis Pupuk SP-36 terhadap Pertumbuhan dan Hasil Tanaman Kacang Tanah (*Arachis hypogaea* L.). *Jurnal Agrista*, Vol. 16, No. 1. <http://jurnal.unsyiah.ac.id/agrista/article/download/677/633>. Diakses tanggal 12 Januari 2014.
- Hu, S. 2007. *Akaike Information Criterion*. <http://www4.ncsu.edu/~shu3/Presentation/AIC.pdf>. Diakses tanggal 21 Februari 2014.
- Hunt, R. 2003. *Growth Analysis, Individual Plants*. http://people.exeter.ac.uk/rh203/EAPS_article.pdf. Diakses tanggal 24 Maret 2014.
- Kuhi, D.H., E. Kebreab, S. Lopez, and J. France. 2003. An Evaluation of Different Growth Functions for Describing the Profile of Live Weight with Time (Age) in Meat and Egg Strains of Chicken. *Journal of Poultry Science*, Vol. 82, page 1536-1543. <http://www.researchgate.net>. Diakses tanggal 20 November 2013.
- Liu, Z., F. Ning, Z. Du, C. Yang, J. Fu, X. Wang, and X. Bai. 2011. Modelling Growth of Five Different Colour Types of Mink. *South African Journal of Animal Science*, Vol. 41, No. 2. http://www.sasas.co.za/sites/sasas.co.za/files/Zong-yue41Issue2_0.pdf. Diakses tanggal 15 November 2013.
- López, S., J. France, W.J. Gerrits, M.S. Dhanoa, D.J. Humphries, and J. Dijkstra. 2000. A Generalized Michaelis-Menten Equation for the Analysis of Growth. *Journal of Animal Science*, Vol. 78, Page 1816-1828. <http://www.journalofanimalscience.org/content/78/7/1816.full.pdf>. Diakses tanggal 13 November 2013.
- Narinc, D., E. Karaman, M.Z. Firat, and T. Aksoy. 2010. Comparison of Non-linear Growth Models to Describe the Growth in Japanese Quail. *Journal of Animal and Veterinary Advances* 9, Vol. 14, Page 1961-1966. <http://medwell-journals.com>. Diakses tanggal 15 November 2013.

Prasasti, O.H. 2013. *Uji Hayati Mikoriza Glomus fasciculatum terhadap patogen Sclerotium rolfsii pada Tanaman Kacang Tanah (Arachis hypogaea L. var. Domba)*. Jurusan Biologi. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam. ITS Surabaya. Tidak Dipublikasikan.

Sanjoyo. 2006. *Non-Linear Estimation*. <http://mhs.blog.ui.ac.id/sanj55/files/2008/11/non-linier.pdf>. Diakses tanggal 11 Desember 2013.

Wibawana, A. 2005. *Uji Karakteristik pada Beberapa Varietas Kacang Tanah (Arachis hypogaea L.)*. Skripsi. Universitas Sumatera Utara. Medan. <http://repository.usu.ac.id/bitstream/123456789/7508/1/010307017.pdf>. Diakses tanggal 21 Januari 2014.



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



LAMPIRAN

Lampiran 1. Rata-rata Tinggi Kacang Tanah (cm)

Umur (mst)	Perlakuan						
	K(-)	K(+)	10M&P	20M&P	30M&P	40M&P	50M&P
1	2	4	4	4	4	5	5
2	6	7	11	9	11	15	15
3	12	13	15	15	20	20	21
4	17	21	22	25	29	30	30
5	26	26	29	32	36	37	38
6	32	36	36	40	44	46	47
7	37	42	41	46	52	56	57
8	44	46	48	52	60	63	65
9	48	50	56	58	68	70	74
10	55	55	59	62	71	74	80
11	59	59	63	66	74	78	85
12	63	62	67	70	77	83	89
13	64	62	67	71	79	85	89

Pemberian mikoriza dan patogen:

K(-) : tanpa pemberian mikoriza dan patogen

K(+): tanpa pemberian mikoriza namun diberi patogen

10M&P : mikoriza 10 gram dan patogen

20M&P : mikoriza 20 gram dan patogen

30M&P : mikoriza 30 gram dan patogen

40M&P : mikoriza 40 gram dan patogen

50M&P : mikoriza 50 gram dan patogen

Data adalah hasil penelitian Prasasti (2013) di laboratorium Botani, laboratorium Mikologi dan Green House Kebun Bibit Surabaya dengan judul skripsi Uji Hayati Mikoriza *Glomus fasciculatum* terhadap patogen *Sclerotium rolfsii* pada Tanaman Kacang Tanah (*Arachis hypogaea* L. var. Domba).

Lampiran 2. Penurunan Model Pertumbuhan

1. Penurunan Model GMM

$$\int_{H_0}^H (H_f - H)^{-1} dH = \int_0^t ct^{c-1} (K^c + t^c)^{-1} dt \quad (1)$$

di mana

$$\begin{aligned} \int_{H_0}^H (H_f - H)^{-1} dH &= -\ln(H_f - H) \Big|_{H_0}^H \\ &= -\ln(H_f - H) - (-\ln(H_f - H_0)) \\ &= -\ln\left(\frac{H_f - H}{H_f - H_0}\right) \end{aligned} \quad (2)$$

dan

$$\begin{aligned} \int_0^t ct^{c-1} (K^c + t^c)^{-1} dt &= \int \frac{du}{u} && \text{Misalkan } u = K^c + t^c \\ & && du = ct^{c-1} dt \\ &= \ln u \Big|_0^t \\ &= \ln(K^c + t^c) \Big|_0^t \\ &= \ln(K^c + t^c) - \ln(K^c) \\ &= \ln \frac{(K^c + t^c)}{K^c} \end{aligned} \quad (3)$$

sehingga bila persamaan (2) dan (3) disubstitusikan ke persamaan (1) akan menjadi model GMM (4).

$$\begin{aligned} -\ln\left(\frac{H_f - H}{H_f - H_0}\right) &= \ln \frac{(K^c + t^c)}{K^c} \\ \ln\left(\frac{H_f - H}{H_f - H_0}\right)^{-1} &= \ln \frac{(K^c + t^c)}{K^c} \end{aligned}$$

Lampiran 2 (lanjutan)

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{H_f - H_0}{H_f - H}\right) &= \ln\frac{(K^c + t^c)}{K^c} \\ \left(\frac{H_f - H_0}{H_f - H}\right) &= \frac{(K^c + t^c)}{K^c} \\ \frac{(H_f - H_0)K^c}{(K^c + t^c)} &= (H_f - H) \\ H &= H_f - \frac{(H_f - H_0)K^c}{(K^c + t^c)} \\ H &= \frac{H_f(K^c + t^c) - (H_f - H_0)K^c}{(K^c + t^c)} \\ H &= \frac{H_f K^c + H_f t^c - H_f K^c + H_0 K^c}{(K^c + t^c)} \\ H &= \frac{H_0 K^c + H_f t^c}{(K^c + t^c)} \end{aligned} \quad (4)$$

Titik belok model GMM terjadi saat $\frac{d^2H}{dt^2} = 0$, di mana

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \frac{[cH_f t^{c-1}(K^c + t^c)] - [(H_0 K^c + H_f t^c)ct^{c-1}]}{(K^c + t^c)^2} \\ &= \frac{(cH_f K^c t^{c-1} + cH_f t^{2c-1}) - (cH_0 K^c t^{c-1} + cH_f t^{2c-1})}{(K^c + t^c)^2} \\ &= \frac{cK^c t^{c-1}(H_f - H_0)}{(K^c + t^c)^2} \end{aligned} \quad (5)$$

di mana $(H_f - H_0) = \frac{(H_f - H)(K^c + t^c)}{K^c}$ sehingga

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \frac{cK^c t^{c-1}(H_f - H)(K^c + t^c)}{(K^c + t^c)^2 K^c} \\ &= \frac{ct^{c-1}(H_f - H)}{(K^c + t^c)} \end{aligned} \quad (6)$$

Lampiran 2 (lanjutan)

Kembali ke persamaan (5), misalkan $Z = cK^c(H_f - H_0)$, sehingga

$$\frac{dH}{dt} = \frac{Zt^{c-1}}{(K^c + t^c)^2} \quad \text{dan}$$

$$\frac{d^2H}{dt^2} = \frac{[Z(c-1)t^{c-2}(K^c + t^c)^2] - [Zt^{c-1}2(K^c + t^c)ct^{c-1}]}{(K^c + t^c)^4}$$

$$\frac{d^2H}{dt^2} = 0$$

$$\frac{[Z(c-1)t^{c-2}(K^c + t^c)^2] - [Zt^{c-1}2(K^c + t^c)ct^{c-1}]}{(K^c + t^c)^4} = 0$$

$$[Z(c-1)t^{c-2}(K^c + t^c)^2] = [2Zct^{2c-2}(K^c + t^c)]$$

$$(c-1)t^{c-2}(K^c + t^c) = 2ct^{2c-2}$$

$$K^c + t^c = \frac{2ct^{2c-2}}{(c-1)t^{c-2}}$$

$$K^c + t^c = \frac{2ct^c}{(c-1)}$$

$$(K^c + t^c)(c-1) = 2ct^c$$

$$cK^c - K^c + ct^c - t^c = 2ct^c$$

$$-t^c + ct^c - 2ct^c = -cK^c + K^c$$

$$-t^c - ct^c = -cK^c + K^c$$

$$-t^c(c+1) = -K^c(c-1)$$

$$t^c = \frac{K^c(c-1)}{(c+1)}$$

$$t = K \left[\frac{(c-1)}{(c+1)} \right]^{\frac{1}{c}}$$

(6)

2. Penurunan Model Richards

Titik belok model Richards terjadi saat $\frac{d^2H}{dt^2} = 0$.

$$H = \frac{\alpha}{[1 + \beta e^{-kt}]^{1/m}} \quad (7)$$

Lampiran 2 (lanjutan)

sehingga diperoleh turunan pertama:

$$\begin{aligned}\frac{dH}{dt} &= -\frac{1}{m}\alpha(1 + \beta e^{-kt})^{-\frac{1}{m}-1}(-k\beta e^{-kt}) \\ &= \frac{k\alpha\beta e^{-kt}}{m}(1 + \beta e^{-kt})^{-\left(\frac{1}{m}+1\right)}\end{aligned}$$

dan turunan kedua:

$$\frac{d^2H}{dt^2} = \frac{\left[(-k^2\alpha\beta e^{-kt})\left\{m(1 + \beta e^{-kt})^{\frac{m+1}{m}}\right\} - (k\alpha\beta e^{-kt})(m+1)(1 + \beta e^{-kt})^{\frac{1}{m}}(-k\beta e^{-kt})\right]}{\left[m(1 + \beta e^{-kt})^{\frac{1}{m}+1}\right]^2}$$

saat

$$\frac{d^2H}{dt^2} = 0$$

maka

$$(-k^2\alpha\beta e^{-kt})\left[m(1 + \beta e^{-kt})^{\frac{m+1}{m}}\right] = (k\alpha\beta e^{-kt})(m+1)(1 + \beta e^{-kt})^{\frac{1}{m}}(-k\beta e^{-kt})$$

$$me^{kt}(1 + \beta e^{-kt})^{\frac{1}{m}+1} = \beta(m+1)(1 + \beta e^{-kt})^{\frac{1}{m}}$$

$$me^{kt}(1 + \beta e^{-kt}) = \beta(m+1)$$

$$me^{kt} + m\beta = m\beta + \beta$$

$$me^{kt} = m\beta + \beta - m\beta$$

$$e^{kt} = \frac{\beta}{m}$$

$$kt = \ln \frac{\beta}{m}$$

$$t = \frac{1}{k} \ln \frac{\beta}{m}$$

Lampiran 3. Proses Perhitungan Penduga Awal

a. Model GMM

1. Perlakuan 10M&P

- $H_o = 4$; $H_f = 67$
- Menentukan dua pasang pengamatan $(t, H(t))$, $(2, 11)$ dan $(10, 59)$ lalu substitusikan ke dalam model.

$$t = 2 \quad ; H(2) = 11$$

$$11 = \frac{4K^c + 67(2)^c}{K^c + (2)^c}$$

$$K^c + (2)^c = \frac{4K^c + 67(2)^c}{11}$$

$$K^c - \frac{4K^c}{11} = \frac{67(2)^c}{11} - (2)^c$$

$$\frac{7K^c}{11} = \frac{56(2)^c}{11}$$

$$7K^c = 56(2)^c$$

$$K^c = \frac{56(2)^c}{7}$$

$$K^c = 8(2)^c$$

$$t = 10 \quad ; H(2) = 59$$

$$59 = \frac{4K^c + 67(10)^c}{K^c + (10)^c}$$

$$K^c + (10)^c = \frac{4K^c + 67(10)^c}{59}$$

$$K^c - \frac{4K^c}{59} = \frac{67(10)^c}{59} - (10)^c$$

$$\frac{55K^c}{59} = \frac{8(10)^c}{59}$$

$$55K^c = 8(10)^c$$

$$K^c = \frac{8(10)^c}{55}$$

- Kedua persamaan yang diperoleh dieliminasi untuk memperoleh nilai K kemudian disubstitusikan ke salah satu persamaan untuk memperoleh nilai c .

$$K^c = K^c$$

$$8(2)^c = \frac{8(10)^c}{55}$$

$$440(2)^c = 8(10)^c$$

$$\left(\frac{2}{10}\right)^c = \frac{8}{440}$$

$$(0.2)^c = 0.018$$

$$c \ln 0.2 = \ln 0.018$$

$$c = \frac{\ln 0.018}{\ln 0.2}$$

$$c = 2.49$$

$$K^c = 8(2)^c$$

$$K^{2.49} = 8(2)^{2.49}$$

$$K = 4.61$$

Lampiran 3 (lanjutan)

2. Perlakuan 50M&P

- $H_o = 5$; $H_f = 89$
- Menentukan dua pasang pengamatan $(t, H(t))$, $(2, 15)$ dan $(10, 80)$ lalu substitusikan ke dalam model.

$$t = 2 \quad ; H(2) = 15$$

$$15 = \frac{5K^c + 89(2)^c}{K^c + (2)^c}$$

$$K^c + (2)^c = \frac{5K^c + 89(2)^c}{15}$$

$$K^c - \frac{5K^c}{15} = \frac{89(2)^c}{15} - (2)^c$$

$$\frac{10K^c}{15} = \frac{74(2)^c}{15}$$

$$10K^c = 74(2)^c$$

$$K^c = \frac{74(2)^c}{10}$$

$$K^c = \frac{37(2)^c}{5}$$

$$t = 10 \quad ; H(10) = 80$$

$$80 = \frac{5K^c + 89(10)^c}{K^c + (10)^c}$$

$$K^c + (10)^c = \frac{5K^c + 89(10)^c}{80}$$

$$K^c - \frac{5K^c}{80} = \frac{89(10)^c}{80} - (10)^c$$

$$\frac{75K^c}{80} = \frac{9(10)^c}{80}$$

$$75K^c = 9(10)^c$$

$$K^c = \frac{9(10)^c}{75}$$

- Kedua persamaan yang diperoleh dieliminasi untuk memperoleh nilai K kemudian disubstitusikan ke salah satu persamaan untuk memperoleh nilai c .

$$\frac{37(2)^c}{5} = \frac{9(10)^c}{75}$$

$$2775(2)^c = 45(10)^c$$

$$\left(\frac{2}{10}\right)^c = \frac{45}{2775}$$

$$(0.2)^c = 0.0162$$

$$c \ln 0.2 = \ln 0.0162$$

$$c = \frac{\ln 0.0162}{\ln 0.2}$$

$$c = 2.56$$

$$K^c = \frac{19(2)^c}{2}$$

$$K^{2.56} = \frac{19(2)^{2.56}}{2}$$

$$K = 4.39$$

Lampiran 3 (lanjutan)

b. Model *Richards*

1. Perlakuan 10M&P

- $\alpha = 67$

- Menghitung nilai k

$$k = \frac{w_A - w_B}{(t_A - t_B)\alpha} = \frac{56 - 48}{(9 - 8)67} = \frac{8}{67} = 0.12$$

- Menentukan dua pasang pengamatan $(t, H(t))$, $(2, 11)$ dan $(10, 59)$ lalu substitusikan ke dalam model.

$$t = 2 \quad ; \quad H(2) = 11$$

$$11 = \frac{67}{[1 + \beta e^{-0.12(2)}]^{1/m}}$$

$$(1 + 0.79\beta)^{\frac{1}{m}} = 6.09$$

$$\frac{1}{m} \ln(1 + 0.79\beta) = \ln 6.09$$

$$m = \frac{\ln(1 + 0.79\beta)}{\ln 6.09}$$

$$t = 10 \quad ; \quad H(10) = 59$$

$$59 = \frac{67}{[1 + \beta e^{-0.12(10)}]^{1/m}}$$

$$(1 + 0.30\beta)^{\frac{1}{m}} = 1.14$$

$$\frac{1}{m} \ln(1 + 0.30\beta) = \ln 1.14$$

$$m = \frac{\ln(1 + 0.30\beta)}{\ln 1.14}$$

- Kedua persamaan yang diperoleh dieliminasi untuk memperoleh nilai β kemudian disubstitusikan ke salah satu persamaan untuk memperoleh nilai m .

$$\frac{m = m}{\frac{\ln(1 + 0.79\beta)}{\ln 6.09}} = \frac{\ln(1 + 0.30\beta)}{\ln 1.14}$$

$$\frac{\ln 6.09}{\ln(1 + 0.79\beta)} = \frac{\ln 1.14}{\ln 6.09}$$

$$\frac{\ln(1 + 0.30\beta)}{\ln 1.14} = \frac{\ln 6.09}{\ln 1.14}$$

$$\ln 0.49\beta = \ln 4.95$$

$$0.49\beta = 4.95$$

$$\beta = 10.10$$

$$m = \frac{\ln(1 + 0.79\beta)}{\ln 11}$$

$$m = \frac{\ln(1 + 0.79(10.10))}{\ln 11}$$

$$m = 1.21$$

Lampiran 3 (lanjutan)

2. Perlakuan 50M&P

- $\alpha = 89$

- Menghitung nilai k

$$k = \frac{w_A - w_B}{(t_A - t_B)\alpha} = \frac{15 - 5}{(2 - 1)89} = \frac{10}{89} = 0.11$$

- Menentukan dua pasang pengamatan $(t, H(t))$, $(2, 15)$ dan $(10, 80)$ lalu substitusikan ke dalam model.

$$t = 2 \quad ; \quad H(2) = 15$$

$$15 = \frac{89}{[1 + \beta e^{-0.11(2)}]^{1/m}}$$

$$(1 + 0.80\beta)^{\frac{1}{m}} = 5.93$$

$$\frac{1}{m} \ln(1 + 0.80\beta) = \ln 5.93$$

$$m = \frac{\ln(1 + 0.80\beta)}{\ln 5.93}$$

$$t = 10 \quad ; \quad H(10) = 80$$

$$80 = \frac{89}{[1 + \beta e^{-0.11(10)}]^{1/m}}$$

$$(1 + 0.33\beta)^{\frac{1}{m}} = 1.11$$

$$\frac{1}{m} \ln(1 + 0.33\beta) = \ln 1.11$$

$$m = \frac{\ln(1 + 0.33\beta)}{\ln 1.11}$$

- Kedua persamaan yang diperoleh dieliminasi untuk memperoleh nilai β kemudian disubstitusikan ke salah satu persamaan untuk memperoleh nilai m .

$$\frac{m = m}{\frac{\ln(1 + 0.80\beta)}{\ln 5.93} = \frac{\ln(1 + 0.33\beta)}{\ln 1.11}}$$

$$\frac{\ln(1 + 0.80\beta)}{\ln(1 + 0.33\beta)} = \frac{\ln 5.93}{\ln 1.11}$$

$$\ln 0.47\beta = \ln 4.82$$

$$0.47\beta = 4.82$$

$$\beta = 10.26$$

$$m = \frac{\ln(1 + 0.80\beta)}{\ln 5.93}$$

$$m = \frac{\ln(1 + 0.80(10.26))}{\ln 5.93}$$

$$m = 1.25$$

Lampiran 4. Hasil Pendugaan Parameter

1. Model GMM

a. Perlakuan 10M&P

Iteration History^b

Iteration Number ^a	Residual Sum of Squares	Parameter			
		Wo	Wf	K	C
1.0	505.343	4.000	67.000	4.610	2.490
1.1	665.123	1.223	84.449	6.710	1.175
1.2	136.392	3.134	72.344	5.822	2.257
2.0	136.392	3.134	72.344	5.822	2.257
2.1	74.660	3.174	90.722	7.725	1.750
...
6.0	20.368	4.236	92.521	7.993	2.061
6.1	20.367	4.255	92.367	7.979	2.065
7.0	20.367	4.255	92.367	7.979	2.065
7.1	20.367	4.258	92.363	7.979	2.066
8.0	20.367	4.258	92.363	7.979	2.066
8.1	20.367	4.258	92.362	7.979	2.066

Derivatives are calculated numerically.

a. Major iteration number is displayed to the left of the decimal, and minor iteration number is to the right of the decimal.

b. Run stopped after 17 model evaluations and 8 derivative evaluations because the relative reduction between successive residual sums of squares is at most $SSCON = 1.00E-008$.

ANOVA^a

Source	Sum of Squares	df	Mean Squares
Regression	26275.599	4	6568.900
Residual	20.367	9	2.263
Uncorrected Total	26295.967	13	
Corrected Total	5920.181	12	

Dependent variable: Per10MP^a

a. $R^2 = 1 - (\text{Residual Sum of Squares}) / (\text{Corrected Sum of Squares}) = .997$.

Lampiran 4 (lanjutan)

b. Perlakuan 50M&P

Iteration History^b

Iteration Number ^a	Residual Sum of Squares	Parameter			
		Wo	Wf	K	c
1.0	3958.591	5.000	89.000	8.200	2.560
1.1	73.651	7.201	119.412	7.595	1.957
2.0	73.651	7.201	119.412	7.595	1.957
2.1	34.072	5.168	124.269	7.920	1.989
3.0	34.072	5.168	124.269	7.920	1.989
3.1	33.872	5.389	122.657	7.800	2.025
4.0	33.872	5.389	122.657	7.800	2.025
4.1	33.868	5.412	122.709	7.807	2.026
5.0	33.868	5.412	122.709	7.807	2.026
5.1	33.868	5.419	122.671	7.805	2.027
6.0	33.868	5.419	122.671	7.805	2.027
6.1	33.868	5.420	122.669	7.804	2.027
7.0	33.868	5.420	122.669	7.804	2.027
7.1	33.868	5.420	122.668	7.804	2.027

Derivatives are calculated numerically.

a. Major iteration number is displayed to the left of the decimal, and minor iteration number is to the right of the decimal.

b. Run stopped after 14 model evaluations and 7 derivative evaluations because the relative reduction between successive residual sums of squares is at most SSSCON = 1.00E-008.

ANOVA^a

Source	Sum of Squares	df	Mean Squares
Regression	47627.132	4	11906.783
Residual	33.868	9	3.763
Uncorrected Total	47661.000	13	
Corrected Total	10505.231	12	

Dependent variable: Peri50MP^a

a. R squared = 1 - (Residual Sum of Squares) / (Corrected Sum of Squares) = .997.

Lampiran 4 (lanjutan)

2. Model *Richards*

a. Perlakuan 10M&P

Iteration History^b

Iteration Number ^a	Residual Sum of Squares	Parameter			
		alfa	beta	k	m
1.0	9986.952	67.000	10.100	.120	1.210
1.1	12394732.308	-1103.556	-149.172	1.216	3.998
1.2	19005.392	5.763	-6.483	.405	.950
1.3	1644.782	89.321	5.844	.223	1.347
2.0	1644.782	89.321	5.844	.223	1.347
2.1	561.250	59.947	5.501	.373	.723
...
19.0	15.620	76.359	.958	.285	.208
19.1	15.619	76.363	.956	.285	.207
20.0	15.619	76.363	.956	.285	.207
20.1	15.619	76.361	.957	.285	.208
21.0	15.619	76.361	.957	.285	.208
21.1	15.619	76.361	.957	.285	.208

Derivatives are calculated numerically.

a. Major iteration number is displayed to the left of the decimal, and minor iteration number is to the right of the decimal.

b. Run stopped after 47 model evaluations and 21 derivative evaluations because the relative reduction between successive residual sums of squares is at most $SSCON = 1.00E-008$.

ANOVA^a

Source	Sum of Squares	df	Mean Squares
Regression	26280.348	4	6570.087
Residual	15.619	9	1.735
Uncorrected Total	26295.967	13	
Corrected Total	5920.181	12	

Dependent variable: Perl10MP^a

a. $R \text{ squared} = 1 - (\text{Residual Sum of Squares}) / (\text{Corrected Sum of Squares}) = .997$.

Lampiran 4 (lanjutan)

b. Perlakuan 50M&P

Iteration History^b

Iteration Number ^a	Residual Sum of Squares	Parameter			
		alfa	beta	k	m
1.0	19070.461	89.000	10.260	.110	1.250
1.1	87620595.388	-2628.663	-59.925	2.248	17.061
1.2	3532599.896	-113.551	-23.975	.463	1.030
1.3	5156.621	105.639	7.359	.148	1.406
2.0	5156.621	105.639	7.359	.148	1.406
2.1	708.128	116.532	7.449	.237	1.155
...
19.1	23.147	100.755	1.015	.293	.219
20.0	23.147	100.755	1.015	.293	.219
20.1	23.144	100.767	1.010	.293	.218
21.0	23.144	100.767	1.010	.293	.218
21.1	23.144	100.766	1.010	.293	.218
22.0	23.144	100.766	1.010	.293	.218
22.1	23.144	100.765	1.010	.293	.219

Derivatives are calculated numerically.

- Major iteration number is displayed to the left of the decimal, and minor iteration number is to the right of the decimal.
- Run stopped after 50 model evaluations and 22 derivative evaluations because the relative reduction between successive residual sums of squares is at most $SSCON = 1.00E-008$.

ANOVA^a

Source	Sum of Squares	df	Mean Squares
Regression	47637.856	4	11909.464
Residual	23.144	9	2.572
Uncorrected Total	47661.000	13	
Corrected Total	10505.231	12	

Dependent variable: Peri50MP^a

- $R \text{ squared} = 1 - (\text{Residual Sum of Squares}) / (\text{Corrected Sum of Squares}) = .998$.

Lampiran 5. Hasil Pengujian Asumsi Kenormalan Galat

1. Model GMM

One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test

		ResGMM10MP	ResGMM50MP
N		13	13
Normal Parameters ^{a,b}	Mean	-.0008	.0008
	Std. Deviation	1.30275	1.68012
Kolmogorov-Smirnov Z		.474	.593
Asymp. Sig. (2-tailed)		.978	.874

a. Test distribution is Normal.

b. Calculated from data.

2. Model Richards

One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test

		ResRCD10MP	ResRCD50MP
N		13	13
Normal Parameters ^{a,b}	Mean	-.0192	-.0331
	Std. Deviation	1.14080	1.38764
Kolmogorov-Smirnov Z		.514	.909
Asymp. Sig. (2-tailed)		.954	.380

a. Test distribution is Normal.

b. Calculated from data.

Lampiran 6. Perhitungan Nilai Q

3. Model GMM

a. Perlakuan 10M&P

i	e	e^2	ie^2
1	-1.45	2.1025	2.1025
2	1.96	3.8416	7.6832
3	-0.07	0.0049	0.0147
4	0.18	0.0324	0.1296
5	-0.06	0.0036	0.018
6	-0.2	0.04	0.24
7	-1.89	3.5721	25.0047
8	-0.93	0.8649	6.9192
9	2.24	5.0176	45.1584
10	0.93	0.8649	8.649
11	0.27	0.0729	0.8019
12	0.82	0.6724	8.0688
13	-1.81	3.2761	42.5893
Total		20.3659	147.3793
Q		0.1612	

b. Perlakuan 50M&P

i	e	e^2	ie^2
1	-2.21	4.8841	4.8841
2	2.6	6.76	13.52
3	0.82	0.6724	2.0172
4	0.54	0.2916	1.1664
5	-1.25	1.5625	7.8125
6	-1.78	3.1684	19.0104
7	-0.61	0.3721	2.6047
8	-0.51	0.2601	2.0808
9	1.55	2.4025	21.6225
10	1.53	2.3409	23.409
11	1.35	1.8225	20.0475
12	0.9	0.81	9.72
13	-2.92	8.5264	110.8432
Total		33.8735	238.7383
Q		0.0327	

Lampiran 6 (lanjutan)

4. Model *Richards*

a. Perlakuan 10M&P

i	e	e^2	ie^2
1	-1.6	2.56	2.56
2	1.51	2.2801	4.5602
3	-0.22	0.0484	0.1452
4	0.44	0.1936	0.7744
5	0.4	0.16	0.8
6	0.17	0.0289	0.1734
7	-1.79	3.2041	22.4287
8	-1.13	1.2769	10.2152
9	1.83	3.3489	30.1401
10	0.49	0.2401	2.401
11	-0.02	0.0004	0.0044
12	0.89	0.7921	9.5052
13	-1.22	1.4884	19.3492
Total		15.6219	103.057
Q		-0.2746	

b. Perlakuan 50M&P

i	e	e^2	ie^2
1	-2.7	7.29	7.29
2	1.94	3.7636	7.5272
3	0.75	0.5625	1.6875
4	1.06	1.1236	4.4944
5	-0.51	0.2601	1.3005
6	-1.25	1.5625	9.375
7	-0.53	0.2809	1.9663
8	-0.9	0.81	6.48
9	0.87	0.7569	6.8121
10	0.84	0.7056	7.056
11	0.95	0.9025	9.9275
12	1.05	1.1025	13.23
13	-2	4	52
Total		23.1207	129.1465
Q		-0.9636	

Lampiran 7. Perhitungan R_{adj}^2 dan AIC_C

1. R_{adj}^2

a. Model GMM

1. Perlakuan 10M&P

$$R_{adj}^2 = 1 - \frac{\left(\frac{20.367}{9}\right)}{\left(\frac{5920.181}{12}\right)} = 0.995$$

2. Perlakuan 50M&P

$$R_{adj}^2 = 1 - \frac{\left(\frac{33.868}{9}\right)}{\left(\frac{10505.231}{12}\right)} = 0.996$$

b. Model Richards

1. Perlakuan 10M&P

$$R_{adj}^2 = 1 - \frac{\left(\frac{15.619}{9}\right)}{\left(\frac{5920.181}{12}\right)} = 0.996$$

2. Perlakuan 50M&P

$$R_{adj}^2 = 1 - \frac{\left(\frac{23.144}{9}\right)}{\left(\frac{10505.231}{12}\right)} = 0.997$$

2. AIC_C

a. Model GMM

1. Perlakuan 10M&P

$$\begin{aligned} AIC &= 2(4) + 13 \ln 20.367 - 13 \ln 13 \\ &= 13.837 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AIC_C &= AIC + \frac{2(4)(4 + 1)}{13 - 4 - 1} \\ &= 18.837 \end{aligned}$$

Lampiran 7 (lanjutan)

2. Perlakuan 50M&P

$$\begin{aligned}AIC &= 2(4) + 13 \ln 33.868 - 13 \ln 13 \\ &= 20.448\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}AIC_C &= AIC + \frac{2(4)(4+1)}{13-4-1} \\ &= 25.448\end{aligned}$$

b. Model *Richards*

1. Perlakuan 10M&P

$$\begin{aligned}AIC &= 2(4) + 13 \ln 15.619 - 13 \ln 13 \\ &= 10.386\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}AIC_C &= AIC + \frac{2(4)(4+1)}{13-4-1} \\ &= 15.386\end{aligned}$$

2. Perlakuan 50M&P

$$\begin{aligned}AIC &= 2(4) + 13 \ln 23.144 - 13 \ln 13 \\ &= 15.498\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}AIC_C &= AIC + \frac{2(4)(4+1)}{13-4-1} \\ &= 20.498\end{aligned}$$

Lampiran 8. Proses Iterasi *Levenberg-Marquardt*

1. Menentukan penduga awal parameter seperti pada Lampiran 4.
2. Menghitung turunan parsial model terhadap setiap parameter.

a. Model GMM

- Terhadap H_0

$$\frac{\partial H}{\partial H_0} = \frac{K^c}{K^c + t^c}$$

- Terhadap H_f

$$\frac{\partial H}{\partial H_f} = \frac{t^c}{K^c + t^c}$$

- Terhadap K

$$\frac{\partial H}{\partial K} = \frac{ct^c K^{c-1} (H_0 - H_f)}{(K^c + t^c)^2}$$

- Terhadap c

$$\frac{\partial H}{\partial c} = \frac{(H_0 - H_f)(\ln K - \ln t)}{K^c + t^c}$$

b. Model *Richards*

- Terhadap α

$$\frac{\partial H}{\partial \alpha} = (1 + \beta e^{-kt})^{-1/m}$$

- Terhadap β

$$\frac{\partial H}{\partial \beta} = -\frac{\alpha}{m} (1 + \beta e^{-kt})^{-1/m-1} e^{-kt}$$

- Terhadap k

$$\frac{\partial H}{\partial k} = \frac{\alpha \beta t}{m} (1 + \beta e^{-kt})^{-1/m-1} e^{-kt}$$

- Terhadap m

$$\frac{\partial H}{\partial m} = \alpha (1 + \beta e^{-kt})^{-1/m} \ln(1 + \beta e^{-kt}) m^{-2}$$

Lampiran 8 (lanjutan)

3. Iterasi *Levenberg-Marquardt*

a. Model GMM

$$\begin{bmatrix} H_0^{(j+1)} \\ K^{(j+1)} \\ c^{(j+1)} \\ H_f^{(j+1)} \end{bmatrix}_{4 \times 1} = \begin{bmatrix} H_0^{(j)} \\ K^{(j)} \\ c^{(j)} \\ H_f^{(j)} \end{bmatrix}_{4 \times 1} - \left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc} \frac{\partial f(t_1, \theta)}{\partial H_0} & \dots & \frac{\partial f(t_{13}, \theta)}{\partial H_0} \\ \frac{\partial f(t_1, \theta)}{\partial K} & \dots & \frac{\partial f(t_{13}, \theta)}{\partial K} \\ \frac{\partial c}{\partial H_0} & \dots & \frac{\partial c}{\partial H_0} \\ \frac{\partial f(t_1, \theta)}{\partial H_f} & \dots & \frac{\partial f(t_{13}, \theta)}{\partial H_f} \end{array} \right]_{4 \times 13} \\ \left[\begin{array}{cccc} \frac{\partial f(t_1, \theta)}{\partial H_0} & \frac{\partial f(t_1, \theta)}{\partial K} & \frac{\partial f(t_1, \theta)}{\partial c} & \frac{\partial f(t_1, \theta)}{\partial H_f} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f(t_{13}, \theta)}{\partial H_0} & \frac{\partial f(t_{13}, \theta)}{\partial K} & \frac{\partial f(t_{13}, \theta)}{\partial c} & \frac{\partial f(t_{13}, \theta)}{\partial H_f} \end{array} \right]_{13 \times 4} \\ \left[\begin{array}{cccc} \frac{\partial f(t_1, \theta)}{\partial H_0} & \dots & \frac{\partial f(t_{13}, \theta)}{\partial H_0} \\ \frac{\partial f(t_1, \theta)}{\partial K} & \dots & \frac{\partial f(t_{13}, \theta)}{\partial K} \\ \frac{\partial c}{\partial H_0} & \dots & \frac{\partial c}{\partial H_0} \\ \frac{\partial f(t_1, \theta)}{\partial H_f} & \dots & \frac{\partial f(t_{13}, \theta)}{\partial H_f} \end{array} \right]_{4 \times 13} \end{array} \right]^{-1} + \lambda^{(j)} \mathbf{I}_{4 \times 4} \begin{bmatrix} H(t_1) - f(t_1, \theta^{(j)}) \\ \vdots \\ H(t_k) - f(t_{13}, \theta^{(j)}) \end{bmatrix}_{13 \times 1}$$

Lampiran 8 (lanjutan)

b. Model Richards

$$\begin{bmatrix} \alpha^{(j+1)} \\ \beta^{(j+1)} \\ k^{(j+1)} \\ m^{(j+1)} \end{bmatrix}_{4 \times 1} = \begin{bmatrix} \alpha^{(j)} \\ \beta^{(j)} \\ k^{(j)} \\ m^{(j)} \end{bmatrix}_{4 \times 1} - \left[\begin{array}{c} \begin{bmatrix} \frac{\partial f(t_1, \theta)}{\partial \alpha} & \dots & \frac{\partial f(t_{13}, \theta)}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial f(t_1, \theta)}{\partial \beta} & \dots & \frac{\partial f(t_{13}, \theta)}{\partial \beta} \\ \frac{\partial f(t_1, \theta)}{\partial k} & \dots & \frac{\partial f(t_{13}, \theta)}{\partial k} \\ \frac{\partial f(t_1, \theta)}{\partial m} & \dots & \frac{\partial f(t_{13}, \theta)}{\partial m} \end{bmatrix}_{4 \times 13} \\ \begin{bmatrix} \frac{\partial f(t_1, \theta)}{\partial \alpha} & \frac{\partial f(t_1, \theta)}{\partial \beta} & \frac{\partial f(t_1, \theta)}{\partial k} & \frac{\partial f(t_1, \theta)}{\partial m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f(t_{13}, \theta)}{\partial \alpha} & \frac{\partial f(t_{13}, \theta)}{\partial \beta} & \frac{\partial f(t_{13}, \theta)}{\partial k} & \frac{\partial f(t_{13}, \theta)}{\partial m} \end{bmatrix}_{13 \times 4} \end{array} \right] + \lambda^{(j)} \mathbf{I}_{4 \times 4}$$

$$\left[\begin{array}{c} \begin{bmatrix} \frac{\partial f(t_1, \theta)}{\partial \alpha} & \dots & \frac{\partial f(t_{13}, \theta)}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial f(t_1, \theta)}{\partial \beta} & \dots & \frac{\partial f(t_{13}, \theta)}{\partial \beta} \\ \frac{\partial f(t_1, \theta)}{\partial k} & \dots & \frac{\partial f(t_{13}, \theta)}{\partial k} \\ \frac{\partial f(t_1, \theta)}{\partial m} & \dots & \frac{\partial f(t_{13}, \theta)}{\partial m} \end{bmatrix}_{4 \times 13} \\ \begin{bmatrix} H(t_1) - f(t_1, \theta^{(j)}) \\ \vdots \\ H(t_k) - f(t_{13}, \theta^{(j)}) \end{bmatrix}_{13 \times 1} \end{array} \right]$$