

BAB III HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Model Matematika *EPQ* dengan Biaya Penyimpanan

Model matematika *EPQ* merupakan metode yang digunakan untuk menentukan kuantitas produksi optimal sehingga diperoleh total biaya yang minimum. Dalam mencari solusi optimal, suatu perusahaan tidak hanya mempertimbangkan biaya penyimpanan produk jadi, namun biaya penyimpanan bahan juga dipertimbangkan (Su dan Lin, 2013). Oleh karena itu terdapat dua jenis biaya penyimpanan, yaitu biaya penyimpanan bahan dan biaya penyimpanan barang jadi atau produk. Pembahasan pada skripsi ini dibagi menjadi tiga kasus berbeda yang berkaitan dengan biaya penyimpanan bahan. Ketiga kasus tersebut adalah sebagai berikut.

3.1.1 Kasus pertama: model matematika *EPQ* klasik dengan biaya penyimpanan

Komponen biaya persediaan pada model matematika *EPQ* klasik dengan biaya penyimpanan adalah sebagai berikut.

a) Total biaya pemesanan (C_o)

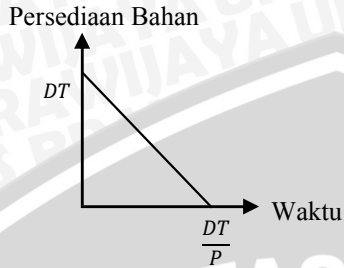
Berdasarkan persamaan (2.12) total biaya pemesanan dinyatakan sebagai $C_o = \frac{S}{T}$.

b) Total biaya pembelian (C_p)

Berdasarkan persamaan (2.8) total biaya pembelian dinyatakan sebagai $C_p = CD$.

c) Total biaya penyimpanan bahan (C_{h1})

Jumlah persediaan bahan dapat diilustrasikan seperti pada Gambar 3.1.



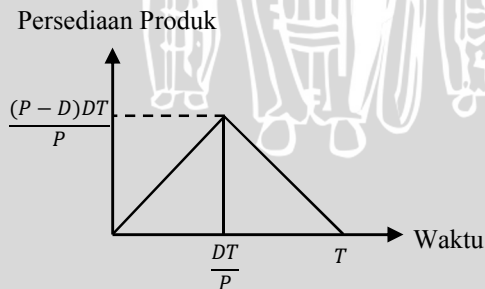
Gambar 3.1 Persediaan Bahan Kasus I

Jumlah permintaan produk berpengaruh terhadap banyaknya bahan yang akan digunakan. Dari Gambar 3.1 dapat dilihat bahwa bahan baku akan berkurang sesuai dengan kebutuhan proses produksi. Hal ini mengakibatkan grafik turun dari jumlah persediaan DT menuju jumlah persediaan minimum. Waktu yang diperlukan untuk menghabiskan persediaan bahan adalah $\frac{DT}{P}$. Total biaya penyimpanan bahan diperoleh dari perkalian biaya penyimpanan bahan per unit (h_1), luasan segitiga pada Gambar 3.1, dan frekuensi produksi ($\frac{1}{T}$). Jadi total biaya penyimpanan bahan adalah

$$C_{h1} = h_1 \times \frac{1}{2} \left[DT \times \frac{DT}{P} \right] \times \frac{1}{T} ,$$

$$= \frac{h_1 D^2 T}{2P} .$$

d) Total biaya penyimpanan produk (C_{h2})
Jumlah persediaan bahan dapat diilustrasikan seperti pada Gambar 3.2.



Gambar 3.2 Persediaan Produk Kasus I

Dari Gambar 3.2 dapat diketahui bahwa kuantitas persediaan produk maksimum adalah $\frac{(P-D)DT}{P}$. Waktu yang diperlukan untuk menghabiskan persediaan produk adalah T . Total biaya penyimpanan produk diperoleh dari perkalian antara biaya penyimpanan produk per unit (h_2), luasan segitiga pada Gambar 3.2, dan frekuensi produksi ($\frac{1}{T}$). Jadi total biaya penyimpanan produk adalah

$$\begin{aligned} C_{h2} &= h_2 \times \frac{1}{2} \left[\frac{(P-D)DT}{P} \times T \right] \times \frac{1}{T} , \\ &= \frac{h_2(P-D)DT}{2P} . \end{aligned} \quad (3.1)$$

3.1.1.1 Total biaya persediaan (T_C)

Total biaya persediaan diperoleh dari penjumlahan komponen biaya persediaan. Total biaya persediaan dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned} T_C &= C_p + C_o + C_{h1} + C_{h2} , \\ &= \frac{S}{T} + CD + \frac{h_1 D^2 T}{2P} + \frac{h_2 (P-D)DT}{2P} . \end{aligned} \quad (3.2)$$

3.1.1.2 Solusi optimal

Untuk menunjukkan solusi yang optimal dari persamaan (3.2), maka diperlukan uji konveksitas. Apabila sebuah fungsi berbentuk cekungan (konveks) maka fungsi tersebut mempunyai nilai minimum. Begitu pula jika fungsi berupa cembungan (konkaf) maka fungsi tersebut mempunyai nilai maksimum. Suatu fungsi dikatakan konveks jika $\frac{d^2 f(x)}{dx^2} > 0$. Dari persamaan (3.2) akan dibuktikan bahwa fungsi T_C merupakan suatu fungsi yang minimum, berikut penjelasannya.

$$\begin{aligned} T_C &= \frac{S}{T} + CD + \frac{h_1 D^2 T}{2P} + \frac{h_2 (P-D)DT}{2P} , \\ \frac{dT_C}{dT} &= -\frac{S}{T^2} + \frac{h_1 D^2}{2P} + \frac{h_2 (P-D)D}{2P} , \\ \frac{d^2 T_C}{dT^2} &= \frac{2S}{T^3} , \end{aligned}$$

$$\frac{d^2T_C}{dT^2} > 0, \text{ untuk semua } T > 0.$$

Karena $\frac{d^2T_C}{dT^2} > 0$ maka persamaan (3.2) merupakan fungsi konveks, yang artinya mempunyai nilai minimum.

a) Menentukan periode produksi optimal (T^*)

Dalam menentukan periode produksi optimal dari persamaan (3.2), dicari turunan persamaan tersebut terhadap T . Solusi optimal periode produksi diperoleh ketika turunan pertama dari persamaan tersebut bernilai nol.

$$\begin{aligned}\frac{dT_C}{dT} &= 0, \\ -\frac{S}{T^2} + \frac{h_1 D^2}{2P} + \frac{h_2(P-D)D}{2P} &= 0, \\ \frac{h_1 D^2}{2P} + \frac{h_2(P-D)D}{2P} &= \frac{S}{T^2}, \\ T^2(h_1 D^2 + h_2(P-D)D) &= 2SP, \\ T^2 &= \frac{2SP}{h_1 D^2 + h_2(P-D)D},\end{aligned}$$

maka diperoleh periode produksi yang optimal sebagai berikut

$$T^* = \sqrt{\frac{2SP}{h_1 D^2 + h_2(P-D)D}}.$$

b) Menentukan kuantitas produksi optimal (Q^*)

Model matematika *EPQ* bertujuan untuk menentukan kuantitas produksi optimal yang mengakibatkan total biaya produksi bernilai minimum. Sebelumnya perlu merubah variabel T pada persamaan (3.2) menjadi $\frac{Q}{D}$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}T_C &= \frac{S}{T} + CD + \frac{h_1 D^2 T}{2P} + \frac{h_2(P-D)DT}{2P}, \\ &= \frac{S}{Q/D} + CD + \frac{h_1 D^2 Q/D}{2P} + \frac{h_2(P-D)D Q/D}{2P},\end{aligned}$$

$$= \frac{SD}{Q} + CD + \frac{h_1 D Q}{2P} + \frac{h_2 (P - D) Q}{2P} . \quad (3.3)$$

Dilakukan uji konveksitas untuk mengetahui persamaan (3.3) merupakan fungsi konveks atau konkaf.

$$T_C = \frac{SD}{Q} + CD + \frac{h_1 D Q}{2P} + \frac{h_2 (P - D) Q}{2P} ,$$

$$\frac{dT_C}{dQ} = -\frac{SD}{Q^2} + \frac{h_1 D}{2P} + \frac{h_2 (P - D)}{2P} ,$$

$$\frac{d^2 T_C}{dQ^2} = \frac{2SD}{Q^3} ,$$

$$\frac{d^2 T_C}{dQ^2} > 0, \text{ untuk semua } Q > 0.$$

Karena $\frac{d^2 T_C}{dQ^2} > 0$ maka persamaan (3.3) merupakan fungsi konveks, yaitu memiliki nilai minimum. Kuantitas produksi optimal diperoleh dari turunan pertama persamaan (3.3) terhadap Q yang bernilai nol sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \frac{dT_C}{dQ} &= 0, \\ -\frac{SD}{Q^2} + \frac{h_1 D}{2P} + \frac{h_2 (P - D)}{2P} &= 0, \\ \frac{h_1 D}{2P} + \frac{h_2 (P - D)}{2P} &= \frac{SD}{Q^2} , \\ Q^2 (h_1 D + h_2 (P - D)) &= 2PSD, \\ Q^2 &= \frac{2PSD}{h_1 D + h_2 (P - D)} , \end{aligned}$$

dengan demikian diperoleh kuantitas produksi optimal yang dinyatakan sebagai

$$Q^* = \sqrt{\frac{2PSD}{h_1 D + h_2 (P - D)}} .$$

Jika $h_1 = h_2 = h$ maka periode produksi optimal adalah $T^* = \sqrt{\frac{2S}{hD}}$.

sedangkan kuantitas optimalnya dinyatakan sebagai $Q^* = \sqrt{\frac{2SD}{h}}$.

3.1.2 Kasus kedua: model matematika EPQ dengan biaya penyimpanan serta pemanfaatan bahan *reusable*

Pada kasus ini ditinjau model matematika EPQ dengan memperhatikan bahan yang dapat digunakan kembali (*reusable*). Ditambahkan pula asumsi $0 < \alpha \leq 1$, dengan α adalah tingkat kelayakan bahan untuk dapat digunakan kembali (*reusable*). Komponen biaya persediaan pada kasus kedua adalah sebagai berikut.

a) Total biaya pemesanan (C_o)

Pada kasus ini total biaya pemesanannya adalah tetap, sama dengan kasus yang pertama yaitu persamaan (3.1).

b) Total biaya pembelian (C_p)

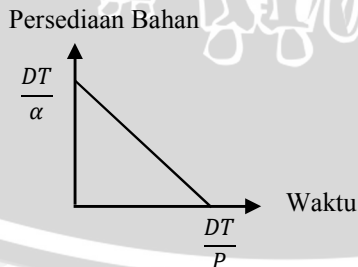
Bahan baku yang digunakan adalah bahan yang bersifat *reusable*, jadi total biaya pembeliannya adalah

$$C_p = \frac{CD}{\alpha},$$

dengan C_p, C, D, α masing-masing menyatakan total biaya pembelian, harga pembelian per unit bahan, jumlah permintaan dan tingkat *reusable*.

c) Total biaya penyimpanan bahan (C_{h1})

Jumlah persediaan bahan pada kasus kedua diilustrasikan seperti pada Gambar 3.3.



Dengan adanya pemanfaatan bahan yang bersifat *reusable* maka jumlah persediaan bahan pada awal produksi menjadi $\frac{DT}{\alpha}$. Dalam selang waktu 0 sampai $\frac{DT}{P}$ jumlah persediaan bahan akan berkurang. Hal ini mengakibatkan grafik menjadi turun menuju jumlah persediaan yang minimum. Total biaya penyimpanan bahan diperoleh dari perkalian biaya penyimpanan bahan per unit (h_1), luasan segitiga pada Gambar 3.3, dan frekuensi produksi ($\frac{1}{T}$). Jadi total biaya penyimpanan bahan dinyatakan sebagai

$$C_h = h_1 \times \frac{1}{2} \left[\frac{DT}{\alpha} \times \frac{DT}{P} \right] \times \frac{1}{T},$$

$$= \frac{h_1 D^2 T}{2\alpha P}.$$

d) Total biaya penyimpanan produk (C_{h2})

Total biaya penyimpanan produk pada kasus kedua adalah tetap, karena bahan yang bersifat *reusable* tidak berpengaruh terhadap biaya penyimpanan produk. Total biaya penyimpanan produk kasus ini sama dengan persamaan (3.1).

3.1.2.1 Total biaya persediaan (T_C)

Total biaya persediaan diperoleh dari penjumlahan seluruh komponen biaya persediaan. Total biaya persediaan pada kasus kedua dinyatakan sebagai

$$T_C = \frac{S}{T} + \frac{CD}{\alpha} + \frac{h_1 D^2 T}{2\alpha P} + \frac{h_2 (P - D) DT}{2P}. \quad (3.4)$$

3.1.2.2 Solusi optimal

Dari persamaan (3.4) akan dibuktikan bahwa fungsi TC merupakan suatu fungsi yang minimum, berikut penjelasannya.

$$T_C = \frac{S}{T} + \frac{CD}{\alpha} + \frac{h_1 D^2 T}{2\alpha P} + \frac{h_2 (P - D) DT}{2P},$$

$$\frac{dT_C}{dT} = -\frac{S}{T^2} + \frac{h_1 D^2}{2\alpha P} + \frac{h_2 (P - D) D}{2P},$$

$$\frac{d^2T_C}{dT^2} = \frac{2S}{T^3},$$

$$\frac{d^2T_C}{dT^2} > 0, \text{ untuk semua } T > 0.$$

Karena $\frac{d^2T_C}{dT^2} > 0$ maka persamaan (3.4) merupakan fungsi konveks, yang artinya mempunyai nilai minimum.

a) Menentukan periode produksi optimal (T^*)

Periode produksi optimal diperoleh dari turunan pertama persamaan (3.4) terhadap T yang bernilai nol, yaitu

$$\begin{aligned} \frac{dT_C}{dT} &= 0, \\ -\frac{S}{T^2} + \frac{h_1 D^2}{2\alpha P} + \frac{h_2(P-D)D}{2P} &= 0, \\ \frac{h_1 D^2}{2\alpha P} + \frac{h_2(P-D)D}{2P} &= \frac{S}{T^2}, \\ T^2(h_1 D^2 + h_2 \alpha(P-D)D) &= 2SP\alpha, \\ T^2 &= \frac{2SP\alpha}{h_1 D^2 + h_2 \alpha(P-D)D}, \end{aligned}$$

sehingga diperoleh periode produksi yang optimal sebagai berikut

$$T^* = \sqrt{\frac{2SP\alpha}{h_1 D^2 + h_2 \alpha(P-D)D}}.$$

b) Menentukan kuantitas produksi optimal (Q^*)

Menggunakan cara yang sama dengan kasus I, variabel T pada persamaan (3.4) dirubah menjadi $\frac{Q}{D}$, yaitu

$$\begin{aligned} T_C &= \frac{S}{T} + \frac{CD}{\alpha} + \frac{h_1 D^2 T}{2\alpha P} + \frac{h_2(P-D)DT}{2P}, \\ &= \frac{S}{Q/D} + \frac{CD}{\alpha} + \frac{h_1 D^2 Q/D}{2\alpha P} + \frac{h_2(P-D)D Q/D}{2P}, \end{aligned}$$

$$= \frac{SD}{Q} + \frac{CD}{\alpha} + \frac{h_1 D Q}{2\alpha P} + \frac{h_2(P-D)Q}{2P} . \quad (3.5)$$

Dilakukan uji konveksitas untuk mengetahui persamaan (3.5) merupakan fungsi konveks atau konkaf.

$$T_C = \frac{SD}{Q} + \frac{CD}{\alpha} + \frac{h_1 D Q}{2\alpha P} + \frac{h_2(P-D)Q}{2P} ,$$

$$\frac{dT_C}{dQ} = -\frac{SD}{Q^2} + \frac{h_1 D}{2\alpha P} + \frac{h_2(P-D)}{2P} ,$$

$$\frac{d^2 T_C}{dQ^2} = \frac{2SD}{Q^3} ,$$

$$\frac{d^2 T_C}{dQ^2} > 0, \text{ untuk semua } Q > 0.$$

Karena $\frac{d^2 T_C}{dQ^2} > 0$ maka persamaan (3.5) merupakan fungsi konveks, yaitu memiliki nilai minimum. Kuantitas optimal diperoleh dari turunan pertama persamaan (3.5) terhadap Q yang bernilai nol

$$\frac{dT_C}{dQ} = 0,$$

$$-\frac{SD}{Q^2} + \frac{h_1 D}{2\alpha P} + \frac{h_2(P-D)}{2P} = 0,$$

$$\frac{h_1 D}{2\alpha P} + \frac{h_2(P-D)}{2P} = \frac{SD}{Q^2} ,$$

$$\frac{h_1 D + h_2(P-D)\alpha}{2\alpha P} = \frac{SD}{Q^2} ,$$

$$Q^2(h_1 D + h_2(P-D)\alpha) = 2\alpha PSD,$$

$$Q^2 = \frac{2\alpha PSD}{h_1 D + h_2(P-D)\alpha} ,$$

dengan demikian diperoleh kuantitas produksi optimal yang dinyatakan sebagai

$$Q^* = \sqrt{\frac{2SPD\alpha}{h_1 D + h_2(P-D)\alpha}} .$$

3.1.3 Kasus ketiga: model matematika *EPQ* dengan biaya penyimpanan serta adanya proses pemilihan (*screening*)

Kasus ketiga membahas model matematika *EPQ* tanpa adanya bahan *reusable*. Setelah proses produksi selesai, kemudian dilanjutkan dengan proses pemilihan (*screening*). Pada proses *screening* diperoleh dua jenis produk, yaitu produk dengan kualitas sempurna dan produk dengan kualitas tidak sempurna. Komponen biaya penyimpanan yang diperhitungkan adalah biaya penyimpanan produk dengan kualitas sempurna. Produk kualitas tidak sempurna akan dijual dalam jumlah banyak dengan harga yang lebih rendah. Dalam kasus ini digunakan asumsi β , yaitu tingkat kerusakan barang dengan selang $0 \leq \beta < 1$. Selain itu, juga ditambahkan variabel x, t_1 masing-masing menyatakan tingkat *screening* dan waktu *screening*, dimana $x = \frac{DT}{(1-\beta)t_1}$ atau $t_1 = \frac{DT}{(1-\beta)x}$. Komponen biaya persediaan kasus ketiga adalah sebagai berikut.

a) Total biaya pemesanan (C_o)

Total biaya pemesanan pada kasus ketiga sama nilainya dengan dua kasus sebelumnya, yaitu persamaan (3.1).

b) Total biaya pembelian (C_p)

Total biaya pembelian dinyatakan sebagai

$$C_p = \frac{CD}{1 - \beta},$$

dengan C_p, C, D, β masing-masing menyatakan total biaya pembelian, harga pembelian tiap unit bahan, jumlah permintaan dan tingkat kerusakan barang.

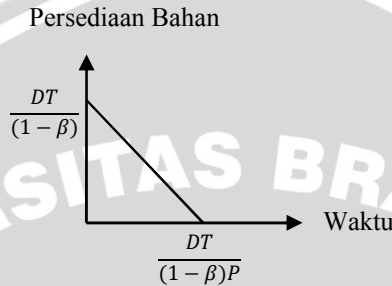
c) Total biaya pemilihan (C_s)

Total biaya pemilihan diperoleh dari perkalian biaya *screening* per unit (d) dengan produk yang lolos tahap *screening* ($\frac{D}{1-\beta}$). Total biaya pemilihan dinyatakan sebagai

$$C_s = \frac{dD}{(1 - \beta)}.$$

d) Total biaya penyimpanan bahan (C_{h1})

Jumlah persediaan bahan dapat diilustrasikan seperti pada Gambar 3.4.



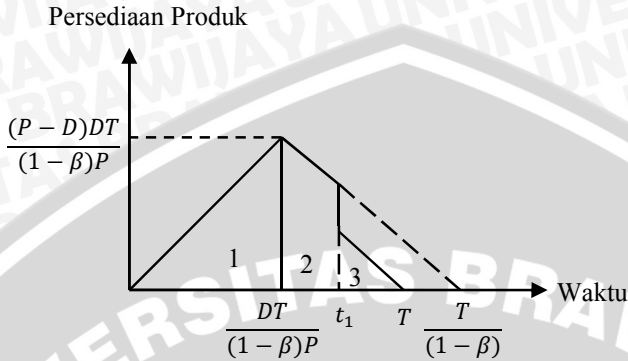
Gambar 3.4 Persediaan Bahan Kasus III

Berdasarkan Gambar 3.4 diketahui jumlah persediaan awal bahan baku adalah $\frac{DT}{(1-\beta)}$. Waktu yang diperlukan untuk menghabiskan bahan adalah $\frac{DT}{(1-\beta)P}$. Total biaya penyimpanan bahan diperoleh dari perkalian biaya penyimpanan bahan per unit (h_1), luasan segitiga pada Gambar 3.4, dan frekuensi produksi ($\frac{1}{T}$). Jadi total biaya penyimpanan bahan adalah

$$\begin{aligned} C_{h1} &= h_1 \times \frac{1}{2} \left[\frac{DT}{(1-\beta)} \times \frac{DT}{(1-\beta)P} \right] \times \frac{1}{T} , \\ &= \frac{h_1 D^2 T}{2(1-\beta)^2 P} . \end{aligned}$$

e) Total biaya penyimpanan produk (C_{h2})

Jumlah persediaan produk dapat diilustrasikan seperti pada Gambar 3.5.



Gambar 3.5 Persediaan Produk Kasus III

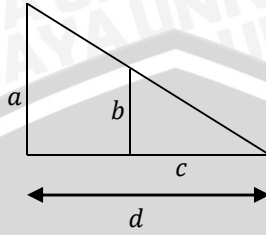
Total biaya penyimpanan produk diperoleh dari perkalian antara biaya penyimpanan produk per unit (h_2), luasan bangun pada Gambar 3.5 yang terdiri dari tiga buah bangun, dan frekuensi produksi ($\frac{1}{T}$), berikut adalah penjelasannya.

- 1) Dari Gambar 3.5 bagian 1 dapat diketahui kuantitas persediaan produk maksimum sebesar $\frac{(P-D)DT}{(1-\beta)P}$ dan waktu yang diperlukan untuk mencapai nilai persediaan produk tersebut adalah $\frac{DT}{(1-\beta)P}$. Jadi luas segitiga (Gambar 3.5 bagian 1) adalah

$$L = \frac{1}{2} \left(\frac{DT}{(1-\beta)P} \times \frac{(P-D)DT}{(1-\beta)P} \right),$$

$$= \frac{(P-D)D^2T^2}{2(1-\beta)^2P^2}.$$

- 2) Gambar 3.5 bagian 2 menjelaskan kuantitas persediaan produk berkurang karena adanya permintaan. Hal ini mengakibatkan grafik menjadi turun. Setelah proses produksi selesai, kemudian dilanjutkan dengan proses pemilihan (*screening*), adanya proses *screening* mengakibatkan grafik membentuk sebuah bangun trapesium. Dari Gambar 3.5 bagian 2 dapat dilihat bahwa salah satu sisi sejajar dari trapesium belum diketahui. Sisi sejajar tersebut (b) dapat dicari dengan menggunakan aturan kesebangunan segitiga sebagai berikut.



Gambar 3.6 Kesebangunan Segitiga untuk Gambar 3.5 Bagian 2

Berdasarkan aturan kesebangunan segitiga, dari Gambar 3.6 diketahui:

$$a = \frac{(P - D)DT}{(1 - \beta)P},$$

$$c = \frac{T}{(1 - \beta)} - t_1 = \frac{T}{(1 - \beta)} - \frac{DT}{(1 - \beta)x},$$

$$d = \frac{T}{(1 - \beta)} - \frac{DT}{(1 - \beta)P},$$

maka berlaku:

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{c},$$

$$\frac{\frac{(P - D)DT}{(1 - \beta)P}}{\frac{T}{(1 - \beta)} - \frac{DT}{(1 - \beta)P}} = \frac{b}{\frac{T}{(1 - \beta)} - \frac{DT}{(1 - \beta)x}},$$

sehingga diperoleh

$$DT(x - D) = b(1 - \beta)x,$$

atau

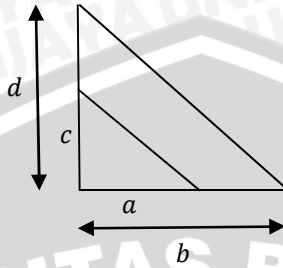
$$\frac{DT}{(1 - \beta)} - \frac{D^2T}{(1 - \beta)x} = b.$$

Jadi luas trapesium (Gambar 3.5 bagian 2) adalah

$$L = \left(\frac{DT}{(1 - \beta)} - \frac{D^2T}{(1 - \beta)x} + \frac{(P - D)DT}{(1 - \beta)P} \right) \times \frac{t_1 - \frac{DT}{(1 - \beta)P}}{2},$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left(\frac{DTt_1}{(1-\beta)} - \frac{D^2T^2}{(1-\beta)^2P} - \frac{D^2Tt_1}{(1-\beta)x} + \frac{D^3T^2}{(1-\beta)^2Px} \right. \\
&\quad \left. + \frac{(P-D)DTt_1}{(1-\beta)P} - \frac{(P-D)D^2T^2}{(1-\beta)^2P^2} \right), \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{DT}{(1-\beta)} \frac{DT}{(1-\beta)x} - \frac{D^2T^2}{(1-\beta)^2P} - \frac{D^2T}{(1-\beta)x} \frac{DT}{(1-\beta)x} \right. \\
&\quad \left. + \frac{D^3T^2}{(1-\beta)^2Px} + \frac{(P-D)DT}{(1-\beta)P} \frac{DT}{(1-\beta)x} - \frac{(P-D)D^2T^2}{(1-\beta)^2P^2} \right), \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{D^2T^2}{(1-\beta)^2x} - \frac{D^2T^2}{(1-\beta)^2P} - \frac{D^3T^2}{(1-\beta)^2x^2} + \frac{D^2T^2}{(1-\beta)^2x} \right. \\
&\quad \left. - \frac{D^2T^2}{(1-\beta)^2P} + \frac{D^3T^2}{(1-\beta)^2P^2} \right), \\
&= \frac{D^2T^2}{2(1-\beta)^2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{P} - \frac{D}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{P} + \frac{D}{P^2} \right), \\
&= \frac{D^2T^2}{2(1-\beta)^2} \left(\frac{2}{x} - \frac{2}{P} - \frac{D}{x^2} + \frac{D}{P^2} \right), \\
&= \frac{D^2T^2}{2(1-\beta)^2} \left(2 - \frac{D}{x} - \frac{D}{P} \right) \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{P} \right).
\end{aligned}$$

- 3) Gambar 3.5 bagian 3 menjelaskan bahwa setelah proses *screening* persediaan produk akan berkurang sesuai dengan jumlah permintaan. Hal ini mengakibatkan grafik menjadi turun menuju nilai persediaan produk minimum dan membentuk sebuah bangun segitiga. Dari Gambar 3.5 bagian 3 dapat dilihat bahwa tinggi segitiga belum diketahui, tinggi segitiga tersebut (c) dapat dicari dengan menggunakan aturan kesebangunan segitiga sebagai berikut.



Gambar 3.7 Kesebangunan Segitiga untuk Gambar 3.5 Bagian 3

Berdasarkan aturan kesebangunan segitiga, dari Gambar 3.7 diketahui:

$$a = T - t_1 = T - \frac{DT}{(1-\beta)x},$$

$$b = \frac{T}{(1-\beta)} - t_1 = \frac{T}{(1-\beta)} - \frac{DT}{(1-\beta)x},$$

$$d = \frac{DT}{(1-\beta)} - \frac{D^2T}{(1-\beta)x},$$

maka berlaku:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

$$\frac{T - \frac{DT}{(1-\beta)x}}{\frac{T}{(1-\beta)} - \frac{DT}{(1-\beta)x}} = \frac{c}{\frac{DT}{(1-\beta)} - \frac{D^2T}{(1-\beta)x}},$$

sehingga diperoleh

$$\frac{(1-\beta)x - D}{(x-D)} \times DT(x-D) = c(1-\beta)x,$$

atau

$$DT - \frac{D^2T}{(1-\beta)x} = c.$$

Jadi luas segitiga (Gambar 3.5 bagian 3) adalah

$$\begin{aligned}
 L &= \frac{1}{2} \times (T - t_1) \left(DT - \frac{D^2 T}{(1 - \beta)x} \right), \\
 &= \frac{1}{2} \left(DT^2 - \frac{D^2 T^2}{(1 - \beta)x} - DTt_1 + \frac{D^2 T t_1}{(1 - \beta)x} \right), \\
 &= \frac{1}{2} \left[\left(DT^2 - \frac{D^2 T^2}{(1 - \beta)x} - \frac{D^2 T^2}{(1 - \beta)x} + \frac{D^2 T}{(1 - \beta)x} \frac{DT}{(1 - \beta)x} \right) \right], \\
 &= \frac{1}{2} \left(DT^2 - \frac{2D^2 T^2}{(1 - \beta)x} + \frac{D^3 T^2}{(1 - \beta)^2 x^2} \right), \\
 &= \frac{DT^2}{2} \left(1 - \frac{2D}{(1 - \beta)x} + \frac{D^2}{(1 - \beta)^2 x^2} \right), \\
 &= \frac{DT^2}{2} \left(1 - \frac{D}{(1 - \beta)x} \right)^2.
 \end{aligned}$$

Total biaya penyimpanan produk pada kasus ketiga dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned}
 C_{h2} &= h_2 \left[\frac{(P - D)D^2 T^2}{2(1 - \beta)^2 P^2} + \frac{D^2 T^2}{2(1 - \beta)^2} \left(2 - \frac{D}{x} - \frac{D}{P} \right) \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{P} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{DT^2}{2} \left(1 - \frac{D}{(1 - \beta)x} \right)^2 \right] \times \frac{1}{T}, \\
 &= h_2 \left[\frac{(P - D)D^2 T}{2(1 - \beta)^2 P^2} + \frac{D^2 T}{2(1 - \beta)^2} \left(2 - \frac{D}{x} - \frac{D}{P} \right) \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{P} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{DT}{2} \left(1 - \frac{D}{(1 - \beta)x} \right)^2 \right].
 \end{aligned}$$

f) Hasil penjualan produk kualitas tidak sempurna dapat ditulis sebagai

$$C_b = \frac{\beta b D}{(1 - \beta)},$$

dengan C_b, β, b, D masing-masing menyatakan hasil penjualan produk kualitas tidak sempurna, tingkat kerusakan barang, harga jual produk kualitas tidak sempurna, dan jumlah permintaan.

3.1.3.1 Total biaya persediaan (T_c)

Total biaya persediaan merupakan penjumlahan dari biaya pemesanan (C_o), total biaya pembelian (C_p), total biaya pemilihan (C_s), total biaya penyimpanan bahan (C_{h1}) dan total biaya penyimpanan produk (C_{h2}) serta dikurangi dengan hasil penjualan dari produk kualitas tidak sempurna (C_b). Total biaya persediaan pada kasus ketiga dinyatakan sebagai berikut.

$$T_c = \frac{S}{T} + \frac{CD}{(1-\beta)} + \frac{dD}{(1-\beta)} + \frac{h_1 D^2 T}{2(1-\beta)^2 P} - \frac{\beta b D}{(1-\beta)} + h_2 \left[\frac{(P-D)D^2 T}{2(1-\beta)^2 P^2} + \frac{D^2 T}{2(1-\beta)^2} \left(2 - \frac{D}{x} - \frac{D}{P} \right) \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{P} \right) + \frac{DT}{2} \left(1 - \frac{D}{(1-\beta)x} \right)^2 \right]. \quad (3.6)$$

3.1.3.2 Solusi optimal

Dari persamaan (3.6) akan dibuktikan bahwa fungsi TC merupakan suatu fungsi yang minimum, berikut penjelasannya.

$$\begin{aligned} \frac{dT_c}{dT} &= -\frac{S}{T^2} + \frac{h_1 D^2}{2(1-\beta)^2 P} + h_2 \left[\frac{(P-D)D^2}{2(1-\beta)^2 P^2} + \frac{D^2}{2(1-\beta)^2} \left(2 - \frac{D}{x} - \frac{D}{P} \right) \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{P} \right) + \frac{D}{2} \left(1 - \frac{D}{(1-\beta)x} \right)^2 \right], \\ \frac{d^2 T_c}{dT^2} &= \frac{2S}{T^3}, \\ \frac{d^2 T_c}{dT^2} &> 0, \text{ untuk semua } T > 0. \end{aligned}$$

Karena $\frac{d^2 TC}{dT^2} > 0$ maka persamaan (3.6) merupakan fungsi konveks, yang artinya mempunyai nilai minimum.

a) Menentukan periode produksi optimal (T^*)

Dalam menentukan nilai periode produksi minimal dari persamaan (3.6), maka dicari turunan persamaan tersebut terhadap T . Solusi optimal periode produksi diperoleh ketika turunan pertama dari persamaan tersebut bernilai nol. Secara matematis dapat ditulis sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \frac{dT_c}{dT} = 0, \\ -\frac{S}{T^2} + \frac{h_1 D^2}{2(1-\beta)^2 P} + h_2 \left[\frac{(P-D)D^2}{2(1-\beta)^2 P^2} + \frac{D^2}{2(1-\beta)^2} \left(2 - \frac{D}{x} - \frac{D}{P} \right) \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{P} \right) \right. \\ \left. + \frac{D}{2} \left(1 - \frac{D}{(1-\beta)x} \right)^2 \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Misalkan

$$\begin{aligned} W = \frac{h_1 D^2}{2(1-\beta)^2 P} + h_2 \left[\frac{(P-D)D^2}{2(1-\beta)^2 P^2} \right. \\ \left. + \frac{D^2}{2(1-\beta)^2} \left(2 - \frac{D}{x} - \frac{D}{P} \right) \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{P} + \frac{D}{2} \left(1 - \frac{D}{(1-\beta)x} \right)^2 \right) \right], \end{aligned}$$

maka persamaan (3.7) dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned} -\frac{S}{T^2} + W &= 0, \\ W &= \frac{S}{T^2}, \\ T^2 &= \frac{S}{W}, \end{aligned}$$

dengan demikian diperoleh periode produksi optimal yang dinyatakan sebagai

$$T^* = \sqrt{\frac{S}{W}}.$$

b) Menentukan kuantitas produksi optimal (Q^*)

Menggunakan cara yang sama dengan dua kasus sebelumnya, variabel T pada persamaan (3.6) dirubah menjadi $\frac{Q}{D}$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
 T_C &= \frac{S}{T} + \frac{CD}{(1-\beta)} + \frac{dD}{(1-\beta)} + \frac{h_1 D^2 T}{2(1-\beta)^2 P} - \frac{\beta b D}{(1-\beta)} \\
 &+ h_2 \left[\frac{(P-D)D^2 T}{2(1-\beta)^2 P^2} + \frac{D^2 T}{2(1-\beta)^2} \left(2 - \frac{D}{x} - \frac{D}{P} \right) \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{P} \right) \right. \\
 &\left. + \frac{DT}{2} \left(1 - \frac{D}{(1-\beta)x} \right)^2 \right], \\
 &= \frac{SD}{Q} + \frac{CD}{(1-\beta)} + \frac{dD}{(1-\beta)} + \frac{h_1 DQ}{2(1-\beta)^2 P} - \frac{\beta b D}{(1-\beta)} \\
 &+ h_2 \left[\frac{(P-D)DQ}{2(1-\beta)^2 P^2} + \frac{DQ}{2(1-\beta)^2} \left(2 - \frac{D}{x} - \frac{D}{P} \right) \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{P} \right) \right. \\
 &\left. + \frac{Q}{2} \left(1 - \frac{D}{(1-\beta)x} \right)^2 \right]. \tag{3.8}
 \end{aligned}$$

Dilakukan uji konveksitas untuk mengetahui persamaan (3.8) merupakan fungsi konveks atau konkaf, berikut penjelasannya

$$\begin{aligned}
 \frac{dT_C}{dQ} &= -\frac{SD}{Q^2} + \frac{h_1 D}{2(1-\beta)^2 P} + h_2 \left[\frac{(P-D)D}{2(1-\beta)^2 P^2} \right. \\
 &\left. + \frac{D}{2(1-\beta)^2} \left(2 - \frac{D}{x} - \frac{D}{P} \right) \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{P} \right) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{D}{(1-\beta)x} \right)^2 \right],
 \end{aligned}$$

$$\frac{d^2 T_C}{dQ^2} = \frac{2SD}{Q^3},$$

$$\frac{d^2 T_C}{dQ^2} > 0, \text{ untuk semua } Q > 0.$$

Karena $\frac{d^2 T_C}{dQ^2} > 0$ maka persamaan (3.8) merupakan fungsi konveks, yaitu memiliki nilai minimum.

Kuantitas produksi optimal diperoleh dari turunan pertama persamaan (3.8) terhadap Q yang bernilai nol sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \frac{dT_C}{dQ} = 0, \\ -\frac{SD}{Q^2} + \frac{h_1 D}{2(1-\beta)^2 P} + h_2 \left[\frac{(P-D)D}{2(1-\beta)^2 P^2} + \frac{D}{2(1-\beta)^2} \left(2 - \frac{D}{x} - \frac{D}{P} \right) \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{P} \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{D}{(1-\beta)x} \right)^2 \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Misalkan

$$J = \frac{h_1 D}{2(1-\beta)^2 P} + h_2 \left[\frac{(P-D)D}{2(1-\beta)^2 P^2} + \frac{D}{2(1-\beta)^2} \left(2 - \frac{D}{x} - \frac{D}{P} \right) \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{P} \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{D}{(1-\beta)x} \right)^2 \right],$$

maka persamaan (3.9) dapat ditulis sebagai

$$-\frac{SD}{Q^2} + J = 0,$$

$$J = \frac{SD}{Q^2},$$

$$Q^2 = \frac{SD}{J},$$

sehingga diperoleh kuantitas produksi optimal yang dinyatakan sebagai

$$Q^* = \sqrt{\frac{SD}{J}}.$$

3.2 Simulasi Numerik

Pada sub bab ini, disimulasikan nilai dari biaya penyimpanan bahan, biaya penyimpanan produk dan total biaya produksi pada masing-masing kasus. Data yang digunakan pada skripsi ini adalah data pada artikel yang ditulis oleh Su dan Lin (2013).

Tabel 3.1 Data persediaan barang

No.	Parameter	Keterangan	Nilai
1.	S	Biaya pemesanan	\$ 1.000/tahun
2.	P	Jumlah produksi	2.000 unit/tahun
3.	D	Jumlah permintaan	1.500 unit/tahun
4.	C	Harga pembelian tiap unit bahan	\$ 20/unit/tahun
5.	d	Biaya <i>screening</i>	\$ 10/unit/tahun
6.	b	Harga jual produk kualitas tidak sempurna	\$ 30/unit/tahun
7.	α	Tingkat <i>reusable</i>	0,1
8.	β	Tingkat kerusakan barang	0,8
9.	x	Tingkat <i>screening</i>	1.800
10.	h_1	Biaya penyimpanan bahan	\$ 2/unit/tahun
11.	h_2	Biaya penyimpanan produk	\$ 1,5/unit/tahun

(Sumber: Su dan Lin, 2013)

Perhitungan simulasi numerik menggunakan *software* Maple yang dapat dilihat pada Lampiran (1), (2), dan (3).

Hasil simulasi numerik berdasarkan data pada Tabel 3.1 dapat dilihat pada Tabel 3.2 dengan T^* , Q^* , C_{h1} , C_{h2} , T_C masing-masing menyatakan periode produksi optimal, kuantitas produksi optimal, biaya penyimpanan bahan, biaya penyimpanan produk, dan total biaya persediaan.

Tabel 3.2 Hasil simulasi numerik

Kasus	T^*	Q^*	C_{h1}	C_{h2}	T_C
I	0,843	1.264,911	948,683	237,171	32.371,708
II	0,294	441,726	3.312,946	82,824	306.791,539
III	0,148	221,994	4.162,387	2.594,554	58.513,882

Berdasarkan hasil simulasi numerik pada Tabel 3.2 diperoleh kuantitas produksi optimal pada kasus pertama dengan jumlah $1.264,911 \approx 1.265$ unit dan total biaya persediaannya adalah \$32.371,71. Pada kasus kedua diperoleh solusi optimal dengan kuantitas produksi optimal $441,73 \approx 442$ unit dengan total biaya

persediaan \$306.791,54. Pada kasus ketiga kuantitas optimalnya 221,99≈222 unit dan total biaya persediaannya sebesar \$58.513,88.

3.3 Analisis Sensitivitas

Analisis sensitivitas dilakukan untuk memperoleh parameter yang tepat dalam menentukan total biaya persediaan yang minimum. Analisis sensitivitas dilakukan pada parameter tingkat *reusable* dan tingkat kerusakan barang untuk memperoleh kuantitas produksi dan total biaya persediaan yang optimal.

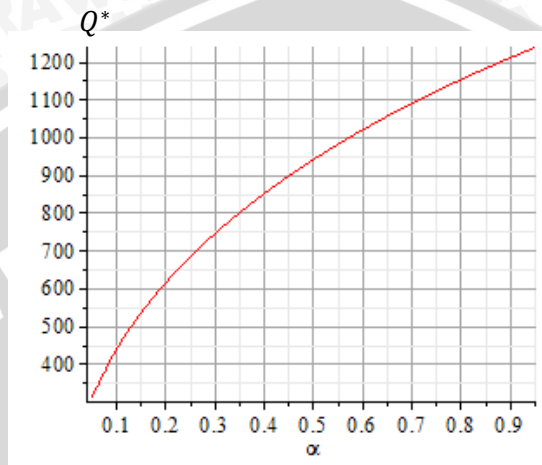
Hasil analisis sensitivitas untuk tingkat *reusable* pada kasus kedua dapat dilihat pada Tabel 3.3.

Tabel 3.3 Perubahan tingkat *reusable* (α) pada kasus kedua

α	T^*	Q^*	C_{h1}	C_{h2}	T_C
0,05	0,210	314,270	4.714,045	58,926	609.545,942
0,10	0,294	441,726	3.312,946	82,824	306.791,539
0,15	0,358	537,733	2.688,664	100,825	205.578,978
0,20	0,411	617,213	2.314,550	115,728	154.860,556
0,25	0,457	685,994	2.057,983	128,624	124.373,214
0,30	0,498	747,087	1.867,718	140,079	104.015,595
0,35	0,535	802,296	1.719,205	150,430	89.453,556
0,40	0,569	852,803	1.599,005	159,901	78.517,812
0,45	0,600	899,438	1.499,063	168,645	70.002,083
0,50	0,629	942,809	1.414,214	176,777	63.181,981
0,55	0,656	983,378	1.340,970	184,383	57.596,162
0,60	0,681	1.021,508	1.276,885	191,533	52.936,835
0,65	0,705	1.057,487	1.220,178	198,279	48.990,759
0,70	0,728	1.091,554	1.169,522	204,666	45.605,519
0,75	0,749	1.123,903	1.123,903	210,732	42.669,270
0,80	0,770	1.154,701	1.082,532	216,506	40.098,076
0,85	0,789	1.184,087	1.044,783	222,016	37.827,715
0,90	0,808	1.212,183	1.010,153	227,284	35.808,207
0,95	0,826	1.239,094	978,232	232,330	34.000,072
1	0,843	1.264,911	948,683	237,171	32.371,708

Dari hasil analisis sensitivitas pada kasus kedua, seperti ditunjukkan pada Tabel 3.3, dapat dibuat grafik yang menunjukkan hubungan antara tingkat kelayakan bahan untuk dapat digunakan kembali atau *reusable* (α) dengan kuantitas produksi optimal (Q^*).

Grafik hubungan antara tingkat *reusable* dengan kuantitas produksi optimal ditunjukkan pada Gambar 3.8.



Gambar 3.8 Grafik Hubungan Tingkat *Reusable* (α) dan Kuantitas Produksi Optimal (Q^*)

Berdasarkan Tabel 3.3 dan Gambar 3.8 dapat diketahui bahwa semakin besar tingkat *reusable* (α) maka semakin besar kuantitas produksi optimal (Q^*), periode produksi optimal (T^*) dan biaya penyimpanan produk (C_{h2}), sedangkan total biaya persediaan (T_c) dan total biaya penyimpanan bahan (C_{h1}) semakin kecil. Solusi optimal kasus kedua diperoleh ketika tingkat *reusable* bernilai 1 dengan kuantitas maksimumnya $1.264,91 \approx 1.265$ unit dan total biaya persediaan sebesar \$32.371,71.

Hasil analisis sensitivitas untuk tingkat kerusakan barang pada kasus ketiga ditunjukkan pada Tabel 3.4

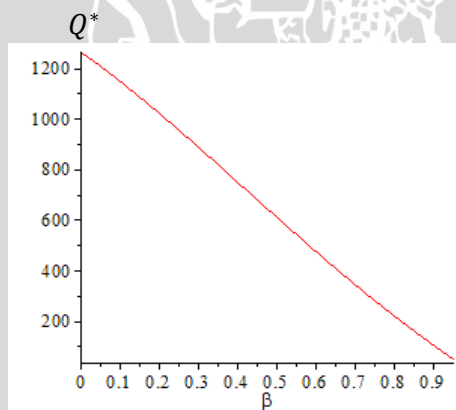
Tabel 3.4 Perubahan tingkat kerusakan barang (β) pada kasus ketiga

β	T^*	Q^*	C_{h1}	C_{h2}	T_c
0	0,843	1.264,911	948,683	237,171	47.371,708
0,05	0,806	1.208,533	1.004,321	236,852	47.482,348
0,10	0,766	1.149,196	1.064,071	241,189	47.610,520
0,15	0,725	1.087,200	1.128,581	251,109	47.759,382
0,20	0,682	1.022,899	1.198,709	267,712	47.932,842
0,25	0,638	956,689	1.275,586	292,322	48.135,815

Lanjutan Tabel 3.4

0,30	0,593	889,001	1.360,716	326,572	48.374,575
0,35	0,547	820,280	1.456,119	372,524	48.657,286
0,40	0,501	750,978	1.564,538	432,856	48.994,788
0,45	0,454	681,536	1.689,759	511,152	49.401,822
0,50	0,408	612,372	1.837,117	612,372	49.898,979
0,55	0,363	543,875	2.014,353	743,632	50.515,970
0,60	0,318	476,393	2.233,093	915,568	51.297,321
0,65	0,273	410,230	2.511,611	1.144,876	52.312,974
0,70	0,230	345,643	2.880,358	1.459,381	53.679,478
0,75	0,189	282,843	3.394,113	1.909,188	55.606,602
0,80	0,148	221,994	4.162,387	2.594,554	58.513,882
0,85	0,109	163,219	5.440,624	3.749,497	63.380,243
0,90	0,071	106,600	7.995,027	6.076,220	73.142,495
0,95	0,035	52,188	15.656,318	13.086,072	102.484,781

Berdasarkan analisis sensitivitas pada kasus ketiga seperti pada Tabel 3.4, dapat dibuat grafik yang menunjukkan hubungan antara persentase kerusakan barang (β) dengan kuantitas produksi optimal (Q^*). Grafik hubungan antara persentase kerusakan barang dengan kuantitas produksi optimal ditunjukkan pada Gambar 3.9.



Gambar 3.9 Grafik Hubungan Tingkat Kerusakan Barang (β) dan Kuantitas Produksi Optimal (Q^*)

Dari hasil analisis sensitivitas yang diberikan pada Tabel 3.4 dan Gambar 3.9, dapat diketahui bahwa nilai dari tingkat kerusakan barang berbanding terbalik terhadap kuantitas dan periode produksi optimal. Semakin besar tingkat kerusakan barang maka kuantitas dan periode produksi optimalnya semakin kecil. Hubungan tingkat kerusakan barang dengan total biaya persediaan dan total biaya penyimpanan adalah berbanding lurus, yaitu semakin besar kerusakan barang maka total biaya persediaan dan total biaya penyimpanan bahan maupun produk semakin besar pula. Solusi optimal pada kasus ketiga diperoleh ketika tingkat kerusakan barang bernilai nol ($\beta = 0$). Kuantitas produksi optimal yang diperoleh adalah $1.264,91 \approx 1.265$ unit dengan total biaya persediaan sebesar \$47.371,71.

