

**ANALISIS DINAMIK MODEL EPIDEMI SIRS DENGAN  
TINGKAT KEMATIAN BERAGAM**

**SKRIPSI**

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar  
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

oleh  
**NI'MATUR ROHMAH**  
**105090413111001**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS BRAWIJAYA  
MALANG  
2014**

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



**LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI**

**ANALISIS DINAMIK MODEL EPIDEMI *SIRS* DENGAN  
TINGKAT KEMATIAN BERAGAM**

Oleh :  
**NI'MATUR ROHMAH**  
**105090413111001**

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji  
pada tanggal 28 April 2014  
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar  
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

**Dosen Pembimbing**

**Dr. Wuryansari Muharini K., M.Si**  
**NIP. 196607281993032001**

Mengetahui,  
**Ketua Jurusan Matematika**  
**Fakultas MIPA Universitas Brawijaya**

**Dr. Abdul Rouf Alghofari, M.Sc**  
**NIP. 196709071992031001**

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



## LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Ni'matur Rohmah  
NIM : 105090413111001  
Jurusan : Matematika  
Penulis skripsi berjudul : Analisis Dinamik Model Epidemii  
*SIRS* dengan Tingkat Kematian Beragam

dengan ini menyatakan bahwa

1. skripsi ini adalah benar-benar karya saya sendiri dan bukan hasil plagiat dari karya orang lain. Karya-karya yang tercantum dalam Daftar pustaka hanya digunakan sebagai acuan/referensi.
2. Apabila di kemudian hari diketahui bahwa isi skripsi saya merupakan hasil plagiat, maka saya bersedia menanggung akibat hukum dari keadaan tersebut.

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 28 April 2014  
yang menyatakan,

Ni'matur Rohmah  
NIM. 105090413111001

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



## MOTTO

*“Jadilah orang yang bermanfaat dengan setiap hari  
bertambah ilmu dan berenang dalam lautan yang berfaedah”*

*(Ta’lim Muta’alim)*

*Sangune wong golek ilmu iku ono telu: cengkir (kenceng pikir),  
merang (merem arang-arang), lan longan (ngelongi mangan).*

*(Pepatah Jawa)*



UNIVERSITAS BRAWIJAYA





## PERSEMBAHAN

Skripsi ini saya persembahkan untuk:

Orang tua saya bapak Bahrudin dan ibu Muti'ah, yang selalu menjadi *spirit* tersendiri untuk saya, terima kasih atas doa terbaik yang selalu dipanjatkan siang-malam untuk kami anak-anak mereka.

Berkat kesabaran dan keikhlasannya dalam memberikan nasihat dan teladan yang menyertai perjalanan hidup kami sampai saat ini, teriring doa agar kami menjadi anak-anak yang berguna di masa depan.

Kakak saya Fathur Rahman dan Zusin Ansori terima kasih telah membuat saya meneruskan cita-cita luhur ini dengan sepenuh hati dan penuh semangat.

Sahabat-sahabat saya Melisa R.J, Dita Permatasari, Faizal Ade, Alfin F, Aprilia Divi, Maharani Y, Solehan, Fira Fitriah, Nur Hamid, dan teman-teman matematika A 2010 terima kasih atas bantuan, kebersamaan, dan kebahagiaan yang telah kalian bagikan kepada saya.

Keluarga besar LTPLM, terkhusus Fathimatu Sa'adah, Azizah 'icha' Ali, Alfin N.H, Zuliati M, Noor Zuhdiyati, Qoimatus Sa'adah, Onik Zakiya, Umamah, Phiety, dan segenap penghuni negeri tiga menara lainnya, terima kasih atas bantuan dan gangguannya.

Hanya Allah lah yang mampu membalas kemuliaan hati kalian.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



# ANALISIS DINAMIK MODEL EPIDEMI *SIRS* DENGAN TINGKAT KEMATIAN BERAGAM

## ABSTRAK

Pada skripsi ini dibahas model epidemi *SIRS* dengan tingkat kematian beragam. Model ini memiliki tiga subpopulasi yaitu subpopulasi individu rentan, subpopulasi individu terinfeksi, dan subpopulasi individu sembuh. Pada model ini tingkat kematian pada subpopulasi  $S$ ,  $I$ , dan  $R$  berbeda. Analisis dinamik yang dilakukan pada model meliputi penentuan titik kesetimbangan, analisis kestabilan lokal, dan analisis kestabilan global menggunakan fungsi Lyapunov. Berdasarkan hasil analisis diperoleh dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemi. Analisis terhadap titik kesetimbangan menunjukkan jika  $R_0 \leq 1$  hanya titik kesetimbangan bebas penyakit yang eksis, sedangkan jika  $R_0 > 1$  terdapat dua titik kesetimbangan yang eksis, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemi. Analisis kestabilan global menunjukkan titik kesetimbangan bebas penyakit stabil asimtotik global jika  $R_0 \leq 1$  dan titik kesetimbangan endemi stabil asimtotik global jika  $R_0 > 1$ .

**Kata kunci** : kestabilan lokal, kestabilan global, model epidemi *SIRS*, kematian beragam, fungsi Lyapunov.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



# DYNAMICAL ANALYSIS ON SIRS EPIDEMIC MODEL WITH DIFFERENTIAL MORTALITY

## ABSTRACT

*This final project discusses a SIRS epidemic model with differential mortality. This model has three subpopulations, namely susceptible, infective, and recovered. Differential mortality means that the mortality rates of S, I, and R are different. Dynamical analysis is performed on the model involves determining equilibrium point, local stability and global stability analysis by Lyapunov function. Based on the analysis, there are two equilibrium points namely disease-free and endemic equilibrium point. Analysis of the equilibrium point shows that if  $R_0 \leq 1$  then only disease free equilibrium point exist and if  $R_0 > 1$  there are two equilibrium points, namely disease free and endemic equilibrium point. Global stability analysis shows that disease free equilibrium point globally asymptotically stable if  $R_0 \leq 1$  and endemic equilibrium point is globally asymptotically stable if  $R_0 > 1$ .*

**Keywords:** *local stability, global stability, SIRS epidemic model, differential mortality, Lyapunov function*

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



## KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur kami haturkan kepada Allah SWT yang telah memberikan Rahmat, Hidayah, dan Maunah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul **Analisis Dinamik Model Epidemologi SIRS dengan Tingkat Kematian Beragam** dengan baik dan lancar. Shalawat serta salam selalu tercurahkan kepada junjungan umat Nabi Muhammad SAW sebagai suri tauladan bagi penulis.

Skripsi ini tidak dapat diselesaikan dengan baik tanpa bantuan, bimbingan, dan motivasi dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis ingin menyampaikan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Bapak, Ibu, dan keluarga tercinta yang selalu mendo'akan dan memberikan dukungan moril serta materil agar penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
2. Dr. Wuryansari Muharini K., M.Si., selaku dosen pembimbing atas segala bimbingan, motivasi, saran, waktu, dan kesabaran yang telah diberikan selama pembimbingan skripsi ini.
3. Dr. Trisilowati, M.Sc. dan Dr. Isnani Darti, S.Si., M.Si. selaku dosen penguji atas segala kritik dan saran yang diberikan untuk perbaikan skripsi ini.
4. Dr. Abdul Rouf Alghofari, M.Sc., Dr. Sobri Abusini, M.T., dan Prof. Dr. Agus Widodo, M.Kes., selaku Ketua Jurusan Matematika, Ketua Program Studi Matematika, dan dosen pembimbing akademik.
5. Seluruh dosen Jurusan Matematika yang telah memberikan ilmu pengetahuannya kepada penulis, serta segenap staf dan karyawan TU Jurusan Matematika atas segala bantuannya.
6. Keluarga besar Matematika A 2010 atas bantuan yang telah diberikan dan kebersamaannya selama ini.
7. Keluarga besar Lembaga Tinggi Pesantren Luhur Malang yang telah menjadi keluarga kedua selama menuntut ilmu di Malang.
8. Dirjen Dikti atas beasiswa Bidik Misi yang telah diberikan sehingga penulis dapat menyelesaikan studinya dengan baik dan semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Semoga Allah SWT memberikan anugerah dan barokah-Nya kepada semua pihak yang telah membantu menyelesaikan skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih terdapat banyak kekurangan, sehingga kritik dan saran dari pembaca sangat penulis harapkan untuk perbaikan ke depannya. Kritik dan saran dapat dikirim melalui email penulis [niks\\_rohmah91@yahoo.com](mailto:niks_rohmah91@yahoo.com).

Akhir kata, semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi pembaca, khususnya mahasiswa Matematika Universitas Brawijaya.

Malang, 28 April 2014

Penulis





## DAFTAR ISI

	Halaman
<b>HALAMAN JUDUL</b> .....	i
<b>LEMBAR PENGESAHAN</b> .....	iii
<b>LEMBAR PERNYATAAN</b> .....	v
<b>MOTTO</b> .....	vii
<b>PERSEMBAHAN</b> .....	ix
<b>ABSTRAK</b> .....	xi
<b>ABSTRACT</b> .....	xiii
<b>KATA PENGANTAR</b> .....	xv
<b>DAFTAR ISI</b> .....	xvii
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	xix
<b>DAFTAR TABEL</b> .....	xxi
<b>BAB I PENDAHULUAN</b>	
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	2
1.3 Tujuan .....	2
1.4 Batasan Masalah .....	2
<b>BAB II DASAR TEORI</b>	
2.1 Persamaan Diferensial .....	3
2.2 Sistem Dinamik.....	4
2.2.1 Sistem Otonomus .....	5
2.2.2 Sistem Otonomus Linear.....	5
2.2.3 Sistem Otonomus Nonlinear .....	8
2.3 Analisis Kestabilan Global .....	10
2.4 Angka Reproduksi Dasar .....	12
2.5 Model Epidemologi <i>SIRS</i> dengan Tingkat Kematian Seragam.....	12
2.6 Model Epidemologi <i>SIRS</i> dengan Tingkat Kematian Beragam .....	14
<b>BAB III PEMBAHASAN</b>	
3.1 Titik Keseimbangan.....	19
3.2 Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan.....	21
3.3 Analisis Kestabilan Global .....	22

3.3.1 Kestabilan Global $E_0$ .....	22
3.3.2 Kestabilan Global $E^*$ .....	22
3.4 Simulasi Numerik.....	26
3.4.1 Simulasi Numerik untuk $R_0 < 1$ .....	27
3.4.2 Simulasi Numerik untuk $R_0 = 1$ .....	28
3.4.3 Simulasi Numerik untuk $R_0 > 1$ .....	29
3.5 Interpretasi Hasil .....	30
<b>BAB IV KESIMPULAN DAN SARAN</b> .....	
4.1 Kesimpulan .....	31
4.2 Saran.....	31
<b>DAFTAR PUSTAKA</b> .....	33
<b>LAMPIRAN</b> .....	35



## DAFTAR GAMBAR

Halaman

Gambar 2.1	Diagram kompartemen model epidemi <i>SIRS</i> dengan tingkat kematian seragam.....	12
Gambar 2.2	Diagram kompartemen model epidemi <i>SIRS</i> dengan tingkat kematian beragam .....	15
Gambar 3.1	Grafik fungsi $f(x) = x - \ln(x)$ .....	24
Gambar 3.2	Potret fase untuk $R_0 < 1$ .....	27
Gambar 3.3	Potret fase untuk $R_0 = 1$ .....	28
Gambar 3.4	Potret fase untuk $R_0 > 1$ .....	29



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



## DAFTAR TABEL

	Halaman
Tabel 2.1	Kriteria kestabilan sistem (2.2)..... 6
Tabel 2.2	Kriteria kestabilan sistem (2.2) berdasarkan nilai $trace(A)$ dan $det(A)$ ..... 7

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



UNIVERSITAS BRAWIJAYA

