

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Makhluk hidup sebagai makhluk sosial tidak dapat hidup tanpa peran makhluk hidup lainnya. Salah satu interaksi antar makhluk hidup dalam suatu ekosistem adalah proses mangsa memangsa yang jika diurutkan akan membentuk suatu model rantai makanan. Pertumbuhan populasi dalam proses mangsa memangsa tersebut digambarkan dengan model matematika, yaitu model *predator-prey*. *Prey* merupakan spesies yang dimangsa, sedangkan *predator* adalah spesies yang memangsa.

Model *predator-prey* ini pertama kali diperkenalkan oleh Lotka pada tahun 1925 dan Volterra pada tahun 1926, sehingga model ini disebut juga dengan model Lotka-Volterra (Boyce dan DiPrima, 2009). Model ini merupakan salah satu model sistem dinamik yang dibentuk dari perubahan jumlah populasi di setiap tingkat tropik karena adanya pertumbuhan dan kematian. Pada kenyataannya interaksi antar makhluk hidup tidak hanya terjadi di antara dua spesies saja, namun interaksi mangsa memangsa juga dapat melibatkan beberapa spesies. Semakin banyak spesies yang terlibat dalam sistem tersebut maka sistem akan semakin kompleks.

Paramitharani (2009) telah melakukan analisis kestabilan titik kesetimbangan pada model rantai makanan tiga spesies yang terdiri dari *prey*, *predator*, dan *top-predator*, dengan asumsi *predator* hanya memangsa *prey* dan *top-predator* hanya memangsa *predator*. Berdasarkan analisis yang dilakukan populasi pada rantai makanan tersebut akan stabil pada saat *top-predator* punah. Model interaksi *predator-prey* tiga spesies, dengan spesies ketiga adalah omnivora yang merupakan pemangsa *prey* dan bangkai *predator* dibahas oleh Andayani (2012). Pada model tersebut kehadiran omnivora tidak menghambat pertumbuhan populasi *predator* dan diperoleh tiga macam titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan trivial, titik kesetimbangan batas, dan titik kesetimbangan interior.

Berbeda dari penelitian sebelumnya yang dilakukan oleh Paramitharani (2009) dan Andayani (2012), pada skripsi ini dibahas model *predator-prey* tiga spesies pada jaring-jaring makanan yang terdiri dari *prey*, *intermediate-predator*, dan *top-predator*. *Prey*

adalah spesies yang dimangsa oleh dua *predator*, yaitu *intermediate-predator* dan *top-predator*, *intermediate-predator* merupakan spesies pemangsa tingkat tengah yang memangsa *prey* tetapi juga dimangsa oleh *top-predator*, sedangkan *top-predator* adalah spesies pemangsa tingkat tertinggi yang memangsa *prey* dan *intermediate-predator*. Adanya keterlibatan *top-predator* menyebabkan sistem yang diperoleh menjadi lebih kompleks. Dua fungsi respon yang berbeda untuk kedua *predator* dalam sistem tersebut memberikan perubahan signifikan terhadap perilaku solusi interaksi di antara tiga spesies tersebut.

Model matematika yang terbentuk terdiri dari tiga persamaan, yaitu laju pertumbuhan populasi *prey*, laju pertumbuhan populasi *intermediate-predator*, dan laju pertumbuhan populasi *top-predator*. Ketiga persamaan tersebut membentuk suatu sistem persamaan diferensial biasa nonlinear. Dari model tersebut dilakukan analisis dinamik dengan menentukan titik kesetimbangan model dan menganalisis jenis kestabilan titik kesetimbangan model. Pada bagian akhir, diberikan beberapa hasil simulasi numerik yang digunakan untuk menunjang hasil analisis kestabilan yang telah diperoleh.

1.2 Rumusan Masalah

Pokok permasalahan yang dibahas dalam skripsi ini adalah

1. bagaimana mengkonstruksi model *predator-prey* tiga spesies,
2. bagaimana menentukan titik kesetimbangan model,
3. bagaimana kestabilan titik kesetimbangan model,
4. bagaimana hasil simulasi numerik model.

1.3 Batasan Masalah

Suatu permasalahan akan menjadi sangat kompleks jika tidak terdapat batasan masalah. Oleh karena itu, skripsi ini memiliki beberapa batasan masalah berikut ini.

1. Semua parameter bernilai positif.
2. Laju pertumbuhan *prey* mengacu pada pertumbuhan logistik, sehingga laju pertumbuhan *prey* dibatasi oleh adanya *carrying capacity*, yaitu jumlah individu maksimal yang dapat didukung oleh lingkungannya.

3. Tingkat konsumsi populasi *intermediate-predator* menggunakan fungsi respon Beddington-DeAngelis, sedangkan tingkat konsumsi populasi *top-predator* menggunakan fungsi respon Holling tipe III.
4. *Intermediate-predator* dan *top-predator* mengalami kematian alami.
5. *Top-predator* dipengaruhi oleh laju emigrasi, yaitu laju yang menyebabkan populasi berkurang baik karena dipanen ataupun pergi dengan sendirinya.

1.4 Tujuan

Tujuan yang ingin diperoleh dalam skripsi ini adalah

1. mengkonstruksi model *predator prey* tiga spesies,
2. menentukan titik kesetimbangan model,
3. menganalisis kestabilan titik kesetimbangan model,
4. menganalisis hasil simulasi numerik model.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA





BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Sistem Dinamik

Sistem dinamik adalah suatu sistem yang dapat diketahui kondisinya di masa yang akan datang jika diberikan kondisi pada masa sekarang atau masa yang lalu (Nagle dan Saff, 2004).

Sistem dinamik merupakan suatu keadaan yang dipengaruhi oleh waktu (t). Dalam penerapannya, terdapat dua jenis sistem dinamik, yaitu sistem dinamik diskret ($t \in Z$ atau $t \in N$) dan sistem dinamik kontinu ($t \in R$). Bentuk sistem dinamik diskret dinyatakan sebagai persamaan beda, yaitu

$$x_{t+1} = f(x_t), t \in Z \vee t \in N.$$

Jika t kontinu, bentuk sistem dinamiknya dinyatakan sebagai sistem persamaan diferensial, yaitu

$$\frac{dx}{dt} = X(x), t \in R$$

(Arrowsmith dan Place, 1992).

2.2 Model Predator-Prey Dua Spesies

Persamaan diferensial biasa yang menggambarkan interaksi antara spesies *prey* dan *predator* pertama kali diperkenalkan oleh Lotka pada tahun 1925 dan Volterra pada tahun 1926, sehingga dikenal sebagai model Lotka-Volterra. *Prey* diasumsikan memiliki makanan yang berlebih dan tumbuh secara eksponensial kecuali pada saat terjadi pemangsaan. Misalkan x menyatakan spesies *prey* dan y menyatakan spesies *predator*. Pertumbuhan eksponensial *prey* dinyatakan dengan ax di mana a adalah laju kelahiran alami *prey*. Pemangsaan terhadap *prey* diasumsikan sama dengan laju interaksi *prey* dan *predator* yang dinyatakan dengan bxy . Dengan demikian, laju pertumbuhan populasi *prey* dapat dituliskan sebagai

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy. \tag{2.1}$$

Pertumbuhan populasi *predator* dinyatakan oleh δxy yang tidak harus sama dengan besarnya pemangsaan terhadap *prey* bxy . *Predator* akan mengalami kematian alami secara eksponensial dengan laju cy , sehingga laju pertumbuhan populasi *predator* adalah

$$\frac{dy}{dt} = -cy + \delta xy. \quad (2.2)$$

Dari persamaan (2.1) dan (2.2) diperoleh model Lotka-Volterra berupa sistem persamaan diferensial

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, y) = ax - bxy \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y) = -cy + \delta xy, \end{aligned} \quad (2.3)$$

dengan

- a = laju kelahiran alami *prey*,
- b = koefisien interaksi pemangsaan *prey*,
- c = laju kematian alami *predator*,
- δ = koefisien perkembangbiakan *predator*.

Semua parameter a, b, c , dan δ bernilai positif (Finizio dan Ladas, 1982).

2.3 Model *Predator-Prey* Tiga Spesies

Model *predator-prey* tiga spesies pada suatu rantai makanan terdiri dari *prey*, *predator*, dan *top-predator*. Spesies *prey* dinyatakan dengan x , spesies *predator* dinyatakan dengan y , dan spesies *top-predator* dinyatakan dengan z . Spesies x merupakan spesies tingkat terendah yang dimangsa oleh spesies tingkat tengah y , sedangkan y adalah mangsa dari spesies tingkat atas z . Model *predator-prey* tiga spesies pada rantai makanan dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, y) = ax - bxy \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y) = -cy + \delta xy - eyz \\ \frac{dz}{dt} &= h(x, y) = -fz + gyz, \end{aligned} \quad (2.4)$$

untuk $a, b, c, \delta, e, f, g > 0$ di mana a, b, c , dan δ sama seperti pada model *predator-prey* dua spesies persamaan (2.3), e adalah koefisien

interaksi pemangsa spesies *predator* oleh spesies *top-predator*, f adalah laju kematian alami dari spesies *top-predator*, dan g adalah koefisien perkembangbiakan spesies *top-predator* dengan memangsa spesies *predator* (Chauvet, dkk., 2002).

2.4 Model Logistik

Model pertumbuhan logistik adalah model pertumbuhan populasi dengan sumber daya lingkungan yang terbatas. Ketika ukuran populasi bertambah, laju pertumbuhan akhirnya melemah dan kemudian berhenti pada ukuran populasi tertentu. Ukuran populasi yang menghentikan pertumbuhan tersebut secara umum disebut *carrying capacity*, yaitu jumlah individu maksimal yang dapat didukung oleh lingkungannya.

Jika pada laju pertumbuhan populasi terdapat batasan daya dukung lingkungan, maka secara matematis laju pertumbuhan populasi dapat dituliskan sebagai persamaan diferensial, yaitu

$$\frac{dx}{dt} = f(x).$$

Pada persamaan tersebut $f(x)$ merupakan fungsi yang menyatakan ukuran populasi, sehingga dapat dikatakan bahwa laju pertumbuhan populasi bergantung pada ukuran populasi.

Jika daya dukung lingkungan atau kapasitas maksimal suatu habitat adalah K , maka lingkungan masih dapat mendukung $(K - x)$ individu untuk x individu dalam populasi tersebut. Jadi, masih terdapat bagian lingkungan yang dapat ditempati yaitu sebesar

$$\frac{(K - x)}{K}. \quad (2.5)$$

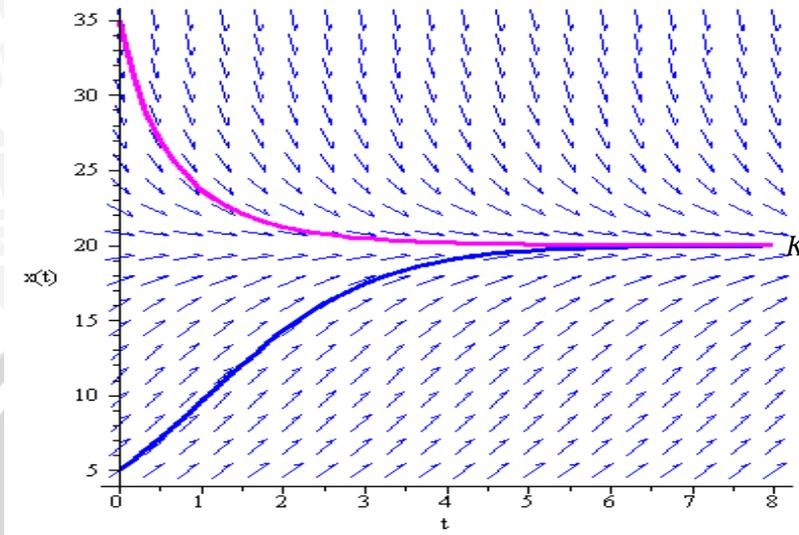
Persamaan (2.5) sebanding dengan pertumbuhan per kapita populasi. Oleh karena itu, persamaan logistik dinyatakan sebagai

$$\frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = r \frac{(K - x)}{K} \quad \text{atau} \quad \frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right), \quad (2.6)$$

dengan $K, r \in \mathbb{R}^+$. Parameter r menyatakan tingkat pertumbuhan intrinsik populasi, sehingga tingkat pertumbuhan untuk x sebanding dengan r (Boyce dan Diprima, 2009).

Jika jumlah populasi awal $x(0) < K$, maka model logistik meramalkan bahwa jumlah populasi meningkat menuju *carrying capacity* K , akan tetapi pada saat nilai awal $x(0) > K$, model logistik

meramalkan jumlah populasi akan berkurang menuju *carrying capacity* K . Sebagai contoh, jika populasi awal $x(0) = 5$, $r = 1$, dan $K = 20$, maka jumlah populasi meningkat dan pada akhirnya saat $x(t) = K = 20$ laju pertumbuhan populasi berhenti. Sebaliknya jika $x(0) = 35$, jumlah populasi berkurang hingga pertumbuhan populasi terhenti pada $x(t) = K = 20$. Grafik pertumbuhan logistik diperlihatkan pada Gambar 2.1.



Gambar 2.1 Kurva model logistik

2.5 Fungsi Respon

Menurut Skalski dan Gilliam (2001), salah satu komponen penting dalam hubungan antara *predator* dan *prey* adalah laju *predator* dalam memangsa *prey*. Laju memangsa *predator* per kapita terhadap *prey* sering disebut sebagai fungsi respon.

Seiring dengan perkembangan penelitian terhadap model *predator-prey*, diperoleh bentuk umum

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= p(x) - \sigma f(x, y)y \\ \frac{dy}{dt} &= f(x, y)y - \mu y, \end{aligned} \quad (2.7)$$

di mana $f(x, y)$ menyatakan fungsi respon dan parameter σ menyatakan koefisien pemangsaan. Fungsi respon dalam bentuk

8

$f(x, y) = f(x)$, yaitu fungsi respon yang hanya bergantung pada *prey*, telah banyak digunakan sebagai laju memangsa *predator* terhadap *prey*. Beberapa fungsi respon yang hanya bergantung pada *prey* adalah Holling tipe I dinyatakan dengan $f(x) = \varphi x$, Holling tipe II memiliki fungsi respon berbentuk $f(x) = \frac{\varphi x}{x + \alpha}$, dan Holling tipe III dengan fungsi respon $f(x) = \frac{\varphi x^2}{x^2 + \alpha^2}$, α adalah *saturation constant*. Dalam beberapa situasi fungsi-fungsi tersebut memberikan prediksi yang tidak realistis, hal ini disebabkan oleh bentuk linear fungsi respon yang tidak memperhitungkan kompetisi di antara *predator* seiring dengan kepadatan populasi *predator* yang semakin meningkat. Oleh karena itu, dibutuhkan beberapa ketergantungan $f(x, y)$ pada *predator* seperti fungsi respon tipe *ratio-dependent*, yaitu $f(x, y) = \frac{\varphi x}{x + \gamma y}$, tipe Beddington-DeAngelis $f(x, y) = \frac{\varphi x}{\rho + x + \gamma y}$, dan tipe Nicholson-Bailey yang berbentuk $f(x, y) = \varphi x e^{-\rho y}$.

Dari sisi biologi, fungsi respon selalu bernilai positif karena memenuhi kondisi

$$f(x, y) > 0, \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} > 0, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} < 0, (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Semakin besar populasi *prey*, maka semakin besar nilai fungsi respon. Semakin besar populasi *predator*, maka semakin kecil nilai fungsi respon yang disebabkan oleh terjadinya kompetisi di antara *predator*.

2.6 Sistem *Autonomous*

Definisi 2.6.1 (Sistem *Autonomous*)

Sistem *autonomous* adalah suatu sistem persamaan diferensial orde satu yang berbentuk

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= F(x, y, z) \\ \frac{dy}{dt} &= G(x, y, z) \\ \frac{dz}{dt} &= H(x, y, z), \end{aligned} \tag{2.8}$$

dengan F, G , dan H adalah fungsi bernilai real yang tidak bergantung secara eksplisit terhadap waktu t (Finizio dan Ladas, 1982).

Definisi 2.6.2 (Titik Kesetimbangan)

Titik $\vec{x}^* = (x^*, y^*, z^*)$ yang memenuhi $F(x^*, y^*, z^*) = 0$, $G(x^*, y^*, z^*) = 0$, dan $H(x^*, y^*, z^*) = 0$ disebut titik kritis sistem *autonomous* persamaan (2.8). Titik kritis \vec{x}^* merupakan solusi sistem persamaan (2.8) yang bernilai konstan, sebab $\frac{dx}{dt} = 0$, $\frac{dy}{dt} = 0$, dan $\frac{dz}{dt} = 0$. Keadaan yang menyebabkan $\frac{dx}{dt} = 0$, $\frac{dy}{dt} = 0$, dan $\frac{dz}{dt} = 0$ disebut dengan keadaan setimbang dan titik kesetimbangan adalah titik yang memenuhinya, sehingga titik kritis disebut juga titik kesetimbangan (Edward dan Penney, 2001).

Definisi 2.6.3 (Kestabilan Titik Kesetimbangan)

Titik kesetimbangan $\vec{x}^* = (x^*, y^*, z^*)$ dikatakan

1. **stabil**, jika $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap solusi sistem $\vec{x} = \vec{x}(t)$ yang memenuhi

$$\|\vec{x}(0) - \vec{x}^*\| < \delta$$

maka berlaku

$$\|\vec{x}(t) - \vec{x}^*\| < \varepsilon, \forall t > 0,$$

2. **stabil asimtotik**, jika stabil dan $\exists \delta_0$ di mana $0 < \delta_0 < \delta$ sedemikian sehingga sebuah solusi sistem $\vec{x} = \vec{x}(t)$ yang memenuhi

$$\|\vec{x}(t) - \vec{x}^*\| < \delta_0$$

bersifat

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{x}(t) = \vec{x}^*,$$

3. **tidak stabil**, apabila tidak memenuhi kriteria pertama (Boyce dan DiPrima, 2009).

2.7 Sistem *Autonomous* Linear

Secara umum sistem *autonomous* linear dinyatakan dalam bentuk

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ \frac{dy}{dt} &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ \frac{dz}{dt} &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{aligned} \quad (2.9)$$

dan dapat dinyatakan sebagai $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$, dengan $\vec{x} = (x, y, z)^T$ dan A adalah matriks koefisien sistem persamaan (2.9) sebagai berikut

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Teorema 2.7.1

Misalkan λ_1, λ_2 , dan λ_3 adalah nilai eigen matriks A . Titik kesetimbangan (x^*, y^*, z^*) bersifat

1. **stabil**, jika ketiga nilai eigen λ_1, λ_2 , dan λ_3 mempunyai bagian real tak positif,
2. **tidak stabil**, jika sedikitnya satu nilai eigen memiliki bagian real yang positif (Erward dan Penney, 2001).

2.8 Sistem Autonomous Nonlinear

Perhatikan sistem *autonomous* nonlinear yang dinyatakan dengan

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, y, z) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y, z) \\ \frac{dz}{dt} &= h(x, y, z). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Anggap bahwa fungsi f, g , dan h mempunyai turunan parsial yang kontinu di titik (x^*, y^*, z^*) . Deret Taylor fungsi f, g , dan h di sekitar (x^*, y^*, z^*) adalah

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= f(x^*, y^*, z^*) + \frac{\partial f(x^*, y^*, z^*)}{\partial x}(x - x^*) + \frac{\partial f(x^*, y^*, z^*)}{\partial y}(y - y^*) \\ &\quad + \frac{\partial f(x^*, y^*, z^*)}{\partial z}(z - z^*) + \eta_1(x, y, z) \end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned} g(x, y, z) &= g(x^*, y^*, z^*) + \frac{\partial g(x^*, y^*, z^*)}{\partial x}(x - x^*) + \frac{\partial g(x^*, y^*, z^*)}{\partial y}(y - y^*) \\ &\quad + \frac{\partial g(x^*, y^*, z^*)}{\partial z}(z - z^*) + \eta_2(x, y, z) \end{aligned} \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned} h(x, y, z) &= h(x^*, y^*, z^*) + \frac{\partial h(x^*, y^*, z^*)}{\partial x}(x - x^*) + \frac{\partial h(x^*, y^*, z^*)}{\partial y}(y - y^*) \\ &\quad + \frac{\partial h(x^*, y^*, z^*)}{\partial z}(z - z^*) + \eta_3(x, y, z), \end{aligned} \tag{2.13}$$

dengan $\eta_1(x, y, z), \eta_2(x, y, z)$, dan $\eta_3(x, y, z)$ adalah suku sisa.

Untuk hampiran orde satu tersebut, suku sisa memenuhi sifat-sifat

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y,z) \rightarrow (x^*,y^*,z^*)} \frac{\eta_1(x,y,z)}{\|\vec{\omega}\|} &= 0 \\ \lim_{(x,y,z) \rightarrow (x^*,y^*,z^*)} \frac{\eta_2(x,y,z)}{\|\vec{\omega}\|} &= 0 \\ \lim_{(x,y,z) \rightarrow (x^*,y^*,z^*)} \frac{\eta_3(x,y,z)}{\|\vec{\omega}\|} &= 0, \end{aligned} \quad (2.14)$$

dengan $\vec{\omega} = (x - x^*, y - y^*, z - z^*)^T$.

Berdasarkan persamaan (2.11), (2.12), (2.13), dan mengingat $\frac{dx}{dt} = \frac{d(x-x^*)}{dt}$, $\frac{dy}{dt} = \frac{d(y-y^*)}{dt}$, $\frac{dz}{dt} = \frac{d(z-z^*)}{dt}$, maka persamaan (2.10) dapat ditulis dalam bentuk matriks dibawah ini.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x - x^* \\ y - y^* \\ z - z^* \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} f(x^*, y^*, z^*) \\ g(x^*, y^*, z^*) \\ h(x^*, y^*, z^*) \end{bmatrix} + \\ &\begin{bmatrix} \frac{\partial f(x^*, y^*, z^*)}{\partial x} (x - x^*) + \frac{\partial f(x^*, y^*, z^*)}{\partial y} (y - y^*) + \frac{\partial f(x^*, y^*, z^*)}{\partial z} (z - z^*) \\ \frac{\partial g(x^*, y^*, z^*)}{\partial x} (x - x^*) + \frac{\partial g(x^*, y^*, z^*)}{\partial y} (y - y^*) + \frac{\partial g(x^*, y^*, z^*)}{\partial z} (z - z^*) \\ \frac{\partial h(x^*, y^*, z^*)}{\partial x} (x - x^*) + \frac{\partial h(x^*, y^*, z^*)}{\partial y} (y - y^*) + \frac{\partial h(x^*, y^*, z^*)}{\partial z} (z - z^*) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1(x, y, z) \\ \eta_2(x, y, z) \\ \eta_3(x, y, z) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

atau dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x - x^* \\ y - y^* \\ z - z^* \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} f(x^*, y^*, z^*) \\ g(x^*, y^*, z^*) \\ h(x^*, y^*, z^*) \end{bmatrix} + \\ &\begin{bmatrix} \frac{\partial f(x^*, y^*, z^*)}{\partial x} & \frac{\partial f(x^*, y^*, z^*)}{\partial y} & \frac{\partial f(x^*, y^*, z^*)}{\partial z} \\ \frac{\partial g(x^*, y^*, z^*)}{\partial x} & \frac{\partial g(x^*, y^*, z^*)}{\partial y} & \frac{\partial g(x^*, y^*, z^*)}{\partial z} \\ \frac{\partial h(x^*, y^*, z^*)}{\partial x} & \frac{\partial h(x^*, y^*, z^*)}{\partial y} & \frac{\partial h(x^*, y^*, z^*)}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (x - x^*) \\ (y - y^*) \\ (z - z^*) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1(x, y, z) \\ \eta_2(x, y, z) \\ \eta_3(x, y, z) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Matriks $\begin{bmatrix} \frac{\partial f(x^*, y^*, z^*)}{\partial x} & \frac{\partial f(x^*, y^*, z^*)}{\partial y} & \frac{\partial f(x^*, y^*, z^*)}{\partial z} \\ \frac{\partial g(x^*, y^*, z^*)}{\partial x} & \frac{\partial g(x^*, y^*, z^*)}{\partial y} & \frac{\partial g(x^*, y^*, z^*)}{\partial z} \\ \frac{\partial h(x^*, y^*, z^*)}{\partial x} & \frac{\partial h(x^*, y^*, z^*)}{\partial y} & \frac{\partial h(x^*, y^*, z^*)}{\partial z} \end{bmatrix}$ disebut matriks Jacobi dan dinotasikan dengan $J(x^*, y^*, z^*)$.

Jika dimisalkan $u = (x - x^*)$, $v = (y - y^*)$, $w = (z - z^*)$, maka $\vec{\omega}$ dapat dinyatakan sebagai $\vec{\omega} = (u, v, w)^T$ dan dengan mengingat bahwa $f(x^*, y^*, z^*) = g(x^*, y^*, z^*) = h(x^*, y^*, z^*) = 0$, maka persamaan (2.15) dapat ditulis menjadi

$$\begin{bmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \\ \frac{dw}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x^*, y^*, z^*)}{\partial x} & \frac{\partial f(x^*, y^*, z^*)}{\partial y} & \frac{\partial f(x^*, y^*, z^*)}{\partial z} \\ \frac{\partial g(x^*, y^*, z^*)}{\partial x} & \frac{\partial g(x^*, y^*, z^*)}{\partial y} & \frac{\partial g(x^*, y^*, z^*)}{\partial z} \\ \frac{\partial h(x^*, y^*, z^*)}{\partial x} & \frac{\partial h(x^*, y^*, z^*)}{\partial y} & \frac{\partial h(x^*, y^*, z^*)}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1(x, y, z) \\ \eta_2(x, y, z) \\ \eta_3(x, y, z) \end{bmatrix}.$$

Bentuk di atas dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = J(x^*, y^*, z^*)\vec{\omega} + \vec{\eta}, \tag{2.16}$$

dengan $\vec{\eta} = (\eta_1(x, y, z), \eta_2(x, y, z), \eta_3(x, y, z))^T$.

Untuk (x, y, z) yang berada cukup dekat dengan (x^*, y^*, z^*) , (u, v, w) bernilai kecil sehingga $\|\vec{\eta}\| \leq \|\vec{\omega}\|$. Oleh karena itu, $\vec{\eta}$ dapat diabaikan dan sistem nonlinear persamaan (2.16) dapat dihampiri oleh sistem linear

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = J(x^*, y^*, z^*)\vec{\omega}. \tag{2.17}$$

Untuk $x = x^*$, $y = y^*$, dan $z = z^*$ diperoleh $(u, v, w) = (0, 0, 0)$, sehingga sistem linear persamaan (2.17) memiliki titik kesetimbangan $(u, v, w) = (0, 0, 0)$ (Boyce dan DiPrima, 2009).

Teorema 2.8.1

Titik kesetimbangan sistem *autonomous* nonlinear persamaan (2.10) bersifat

1. **stabil** jika titik kesetimbangan sistem yang dilinearkan adalah stabil,
2. **tidak stabil** jika titik kesetimbangan sistem yang dilinearkan adalah tidak stabil (Edward dan Penney, 2001).

Berdasarkan Teorema 2.8.1 kestabilan yang diperoleh hanya bersifat lokal atau hanya di daerah sekitar titik kesetimbangan. Hal ini disebabkan kestabilan titik kesetimbangan sistem nonlinear hanya

didekati dengan kestabilan titik kesetimbangan sistem linear hampiran di sekitar titik tersebut.

Jenis-jenis kestabilan titik kesetimbangan pada suatu sistem *autonomous* disajikan pada Tabel 2.1 berikut:

Tabel 2.1 Jenis-jenis kestabilan titik kesetimbangan berdasarkan nilai eigen

	Nilai Eigen	Kestabilan	Jenis
$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in R$	$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0$	Tidak stabil	Simpul
	$\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0$	Stabil asimtotik	Simpul
	$\lambda_1, \lambda_2, \text{ dan } \lambda_3$ berbeda tanda	Tidak stabil	Pelana
	$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$	Tidak dapat ditentukan	-

2.9 Kriteria Kestabilan Routh-Hurwitz

Jika suatu sistem linear mempunyai persamaan karakteristik berbentuk

$$\lambda^n + i_1\lambda^{n-1} + i_2\lambda^{n-2} + \dots + i_{n-1}\lambda + i_n = 0, \quad (2.18)$$

maka kestabilan titik kesetimbangannya dapat ditentukan dengan menggunakan kriteria *Routh-Hurwitz* tanpa harus menentukan nilai eigennya.

Definisi 2.9.1

Akar-akar persamaan (2.18) memiliki bagian real negatif jika dan hanya jika,

$$i_n > 0 \text{ dan } H_1 = i_1 > 0, H_2 = \begin{vmatrix} i_1 & 1 \\ i_3 & i_2 \end{vmatrix} > 0,$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} i_1 & 1 & 0 \\ i_3 & i_2 & i_1 \\ i_5 & i_4 & i_3 \end{vmatrix} > 0, \dots, H_k = \begin{vmatrix} i_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ i_3 & i_2 & i_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & i_k \end{vmatrix} > 0,$$

dengan $k = 1, 2, \dots, n$.

Dengan demikian, titik kesetimbangan sistem bersifat stabil jika dan hanya jika determinan matriks *Routh-Hurwitz* H_k bernilai positif. Untuk kasus tertentu, misalnya $n = 3$, maka persamaan (2.18) menjadi

$$\lambda^3 + i_1\lambda^2 + i_2\lambda + i_3 = 0. \quad (2.19)$$

Akar-akar persamaan (2.19) memiliki bagian real negatif jika dan hanya jika $i_3 > 0$, $i_1 > 0$, dan $i_1i_2 > i_3$ (Glass dan Murray, 2001).

2.10 Limit Cycle

Menurut Boyce dan DiPrima (2009), *limit cycle* adalah suatu solusi periodik yang berbentuk lintasan tertutup pada suatu bidang fase. Jika untuk $t \rightarrow \infty$ arah trayektori di sekitar lintasan menuju *limit cycle*, maka *limit cycle* bersifat stabil, sedangkan jika arah konvergensi solusi lintasan menjauhi *limit cycle*, maka *limit cycle* bersifat tidak stabil.

2.11 Teorema Poincaré-Dulac

Teorema 2.11.1 (Kriteria Dulac)

Andaikan \mathcal{D} adalah suatu daerah terhubung sederhana pada \mathbb{R}^2 , $B(x, y)$ adalah suatu fungsi bernilai real pada \mathcal{D} , sedangkan f dan g adalah ruas kanan sistem

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y), \end{aligned} \quad (2.20)$$

jika

$$\nabla \cdot (Bf, Bg) = \frac{\partial(Bf)}{\partial x} + \frac{\partial(Bg)}{\partial y} \neq 0$$

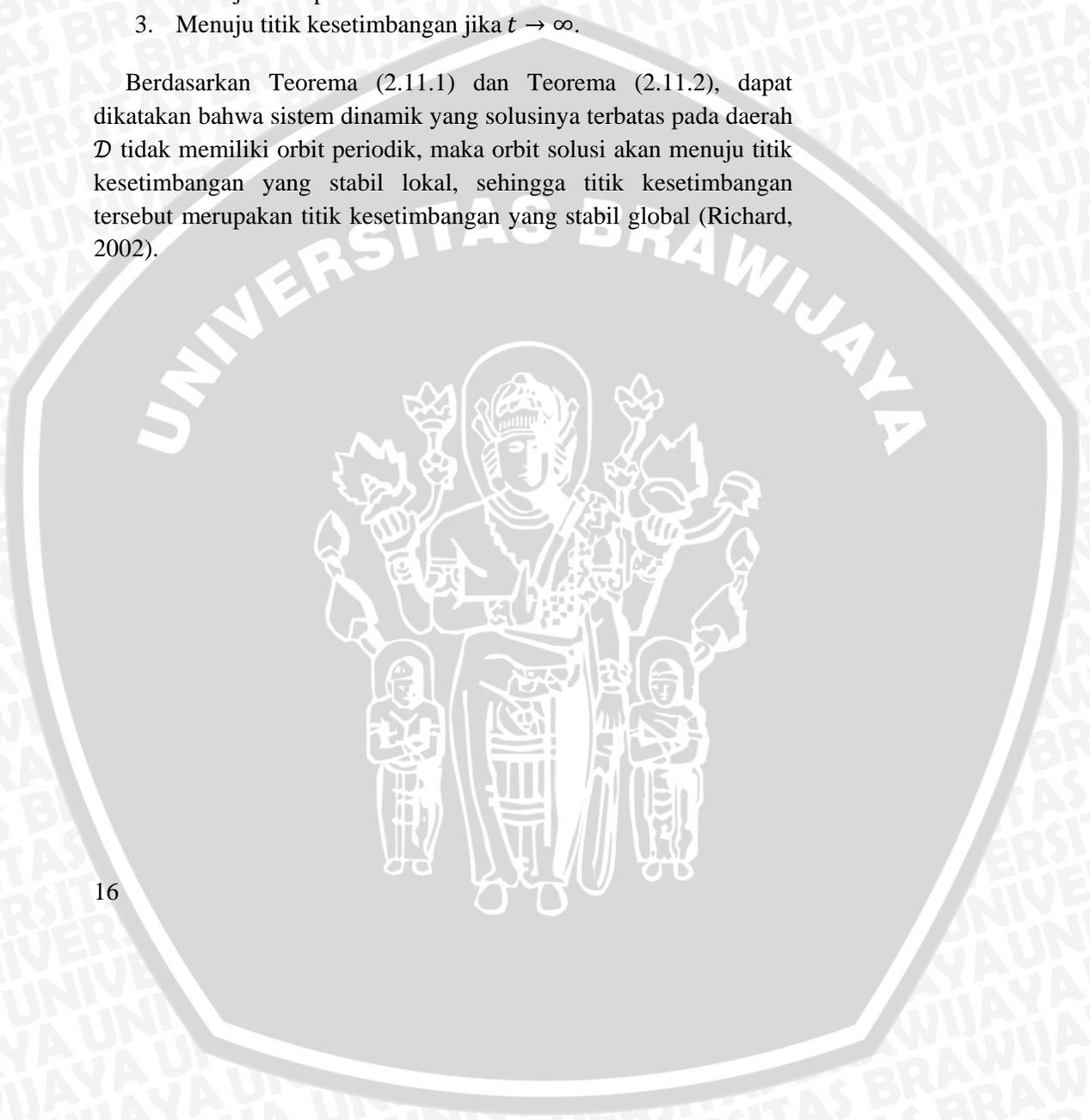
dan $\nabla \cdot (Bf, Bg)$ tidak berubah tanda pada daerah \mathcal{D} , maka tidak terdapat orbit periodik pada daerah \mathcal{D} .

Teorema 2.11.2 (Teorema Poincaré)

Misalkan \mathcal{D} adalah daerah terbatas pada bidang x - y dan sistem *autonomous* dua dimensi persamaan (2.20) adalah sistem dinamik di mana f dan g kontinu dan diferensiabel. Jika trayektori sistem dinamik selalu berada pada \mathcal{D} untuk semua $t \geq 0$, maka trayektori dapat berupa salah satu di antara yang berikut ini.

1. Orbit periodik.
2. Menuju orbit periodik.
3. Menuju titik kesetimbangan jika $t \rightarrow \infty$.

Berdasarkan Teorema (2.11.1) dan Teorema (2.11.2), dapat dikatakan bahwa sistem dinamik yang solusinya terbatas pada daerah \mathcal{D} tidak memiliki orbit periodik, maka orbit solusi akan menuju titik kesetimbangan yang stabil lokal, sehingga titik kesetimbangan tersebut merupakan titik kesetimbangan yang stabil global (Richard, 2002).



BAB III PEMBAHASAN

Dalam bab ini dibahas konstruksi model *predator-prey* dalam suatu jaring-jaring makanan yang terdiri dari tiga spesies, yaitu spesies *prey*, *intermediate-predator*, dan *top-predator*. Dalam mengkonstruksi model diperlukan proses penskalaan untuk penyederhanaan model. Pada skripsi ini lebih ditekankan pada analisis dinamik model *predator-prey* tiga spesies, yaitu penentuan titik kesetimbangan dan menganalisis jenis kestabilannya. Pada bagian akhir dilakukan beberapa simulasi numerik untuk menunjang hasil analisis dinamik yang telah diperoleh.

3.1 Konstruksi Model

3.1.1 Model populasi *prey*

Jumlah *prey* tumbuh mengikuti model logistik dengan *carrying capacity* atau daya dukung lingkungan sebesar K dan laju pertumbuhan alami sebesar r di mana $K, r \in \mathbb{R}^+$. Jika spesies *prey* dinyatakan sebagai X , maka laju pertumbuhan populasi *prey* tanpa adanya *predator* adalah

$$\frac{dX}{dT} = rX \left(1 - \frac{X}{K}\right).$$

Prey dapat dimangsa oleh *intermediate-predator* dan *top-predator*, sehingga laju pertumbuhan *prey* terhambat dengan adanya dua spesies *predator* tersebut. Tingkat konsumsi *intermediate-predator* diasumsikan mengikuti fungsi respon Beddington-DeAngelis

$$f(X, Y) = \frac{\varphi X}{\rho + X + \gamma Y}, \quad \varphi, \rho, \gamma > 0,$$

dengan parameter φ menyatakan laju konsumsi maksimal *intermediate-predator*, γ adalah koefisien gangguan *intermediate-predator*, dan ρ menyatakan *saturation constant*. Tingkat konsumsi *top-predator* diasumsikan mengikuti fungsi respon Holling tipe III, yaitu

$$f(X) = \frac{mX^2}{\alpha^2 + X^2}, \quad m, \alpha > 0,$$

m menyatakan laju konsumsi maksimal *top-predator* dan *saturation constant* dinyatakan dengan α .

Jika koefisien pemangsaan dari *intermediate-predator* dan *top-predator* terhadap *prey* masing-masing \hat{a}_1 dan \hat{a}_2 secara berturut-turut, maka laju pertumbuhan populasi *prey* dengan pemangsaan dua *predator* adalah

$$\frac{dX}{dT} = rX \left(1 - \frac{X}{K} \right) - \frac{\hat{a}_1 XY}{\rho + X + \gamma Y} - \frac{\hat{a}_2 X^2 Z}{\alpha^2 + X^2}. \quad (3.1)$$

3.1.2 Model populasi *predator*

Terdapat dua jenis *predator* dalam model *predator-prey* tiga spesies, yaitu *intermediate-predator* dan *top-predator*. Jumlah populasi kedua *predator* tersebut sangat dipengaruhi oleh populasi *prey*. Spesies *intermediate-predator* dinyatakan dengan Y dan spesies *top-predator* dinyatakan dengan Z .

Tingkat konsumsi *intermediate-predator* terhadap *prey* mengikuti fungsi respon Beddington-DeAngelis dengan koefisien pemangsaan sebesar \hat{b}_1 . Dengan memangsa *prey* populasi *intermediate-predator* dapat bertahan hidup. Jumlah populasi *intermediate-predator* dapat berkurang disebabkan oleh dua faktor. Faktor pertama, yaitu adanya pemangsaan oleh *top-predator* dengan koefisien pemangsaan sebesar \hat{a}_3 dan *saturation constant* sebesar β . Faktor kedua, yaitu adanya kematian alami dari *intermediate-predator* dengan laju sebesar $\hat{\mu}$. Dengan demikian laju pertumbuhan populasi *intermediate-predator* dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{dY}{dT} = \frac{\hat{b}_1 XY}{\rho + X + \gamma Y} - \frac{\hat{a}_3 Y^2 Z}{\beta^2 + Y^2} - \hat{\mu} Y. \quad (3.2)$$

Populasi *top-predator* dapat bertahan hidup dengan melakukan pemangsaan. Oleh karena itu, populasi *top-predator* akan bertambah setelah melakukan pemangsaan terhadap populasi *prey* dan *intermediate-predator* dengan koefisien pemangsaan sebesar \hat{b}_2 dan \hat{b}_3 secara berturut-turut. Tingkat konsumsi *top-predator* mengikuti fungsi respon Holling tipe III, yaitu fungsi respon yang hanya bergantung pada spesies yang dimangsanya, dalam hal ini adalah *intermediate-predator* dan *prey*. Jumlah populasi *top-predator* dapat berkurang karena terjadinya kematian alami dengan laju $\hat{\mu}$ dan dikarenakan adanya laju emigrasi dari *top-predator* sebesar \hat{q} . Model laju pertumbuhan populasi *top-predator* adalah

$$\frac{dZ}{dT} = \frac{\hat{b}_2 X^2 Z}{\alpha^2 + X^2} + \frac{\hat{b}_3 Y^2 Z}{\beta^2 + Y^2} - \hat{\mu}Z - \hat{q}Z. \quad (3.3)$$

Dari persamaan (3.1), (3.2), dan (3.3), model *predator-prey* tiga spesies yang terdiri dari *prey*, *intermediate-predator*, dan *top-predator* adalah

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dT} &= rX \left(1 - \frac{X}{K}\right) - \frac{\hat{a}_1 XY}{\rho + X + \gamma Y} - \frac{\hat{a}_2 X^2 Z}{\alpha^2 + X^2} \\ \frac{dY}{dT} &= \frac{\hat{b}_1 XY}{\rho + X + \gamma Y} - \frac{\hat{a}_3 Y^2 Z}{\beta^2 + Y^2} - \hat{\mu}Y \\ \frac{dZ}{dT} &= \frac{\hat{b}_2 X^2 Z}{\alpha^2 + X^2} + \frac{\hat{b}_3 Y^2 Z}{\beta^2 + Y^2} - \hat{\mu}Z - \hat{q}Z, \end{aligned} \quad (3.4)$$

dengan nilai awal $X(0) > 0$, $Y(0) > 0$, dan $Z(0) > 0$.

Sistem persamaan (3.4) memiliki 14 parameter ($r, K, \rho, \gamma, \alpha, \beta, \hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3, \hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3, \hat{\mu}, \hat{q}$) yang membuat analisis menjadi rumit. Untuk menyederhanakan sistem persamaan (3.4) dilakukan penskalaan dengan menggunakan persamaan berikut: $T = \frac{t}{r}$, $X = Kx$, $Y = Ky$, $Z = Kz$, $\hat{a}_1 = ra_1$, $\hat{a}_2 = ra_2$, $\hat{a}_3 = ra_3$, $\hat{b}_1 = rb_1$, $\hat{b}_2 = rb_2$, $\hat{b}_3 = rb_3$, $\hat{\mu} = r\mu$, dan $\hat{q} = rq$.

Dari hasil penskalaan diperoleh sistem yang lebih sederhana untuk sistem persamaan (3.4) dengan 12 parameter ($m_1, m_2, m_3, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, \gamma, \mu, q$) berikut ini (perhitungan diberikan pada Lampiran 1).

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(1-x) - \frac{a_1 xy}{m_1 + x + \gamma y} - \frac{a_2 x^2 z}{m_2^2 + x^2} \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{b_1 xy}{m_1 + x + \gamma y} - \frac{a_3 y^2 z}{m_3^2 + y^2} - \mu y \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{b_2 x^2 z}{m_2^2 + x^2} + \frac{b_3 y^2 z}{m_3^2 + y^2} - \mu z - qz, \end{aligned} \quad (3.5)$$

dengan $m_1 = \frac{\rho}{K}$, $m_2 = \frac{\alpha}{K}$, dan $m_3 = \frac{\beta}{K}$.

3.2 Titik Kesetimbangan Model

Titik kesetimbangan sistem persamaan (3.5) diperoleh jika

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = 0.$$

Dalam hal ini akan dilakukan analisis pada tiga kasus, yaitu pada saat

1. $x = 0$ (tidak terdapat *prey* dalam populasi tersebut),
2. $y = 0$ (*intermediate-predator* tidak ada, sehingga dalam populasi tersebut hanya *prey* dan *top-predator* yang dapat bertahan hidup berdampingan),
3. $z = 0$ (dalam populasi tidak terdapat *top-predator*, hanya terdapat dua spesies yang bertahan hidup secara berdampingan, yaitu *prey* dan *intermediate-predator*).

Kasus 1. Jika $x = 0$ sistem persamaan (3.5) menjadi

$$x = 0, \quad (3.6 \text{ a})$$

$$-\frac{a_3 y^2 z}{m_3^2 + y^2} - \mu y = 0, \quad (3.6 \text{ b})$$

dan

$$\frac{b_3 y^2 z}{m_3^2 + y^2} - \mu z - qz = 0, \quad (3.6 \text{ c})$$

Persamaan (3.6) (c) dapat dijabarkan menjadi

$$\frac{b_3 y^2 z}{m_3^2 + y^2} - (\mu + q)z = 0$$

$$\frac{b_3 y^2 z - (\mu + q)z(m_3^2 + y^2)}{m_3^2 + y^2} = 0$$

$$b_3 y^2 z - (\mu + q)z(m_3^2 + y^2) = 0$$

$$(b_3 y^2 - (\mu + q)(m_3^2 + y^2))z = 0$$

$$z = 0.$$

Nilai $z = 0$ disubstitusikan pada persamaan (3.6) (b) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} -\frac{a_3 y^2 z}{m_3^2 + y^2} - \mu y &= 0 \\ -\mu y &= 0 \\ y &= 0. \end{aligned}$$

Dengan demikian titik kesetimbangan pada kasus ini adalah $(0,0,0)$.

Kasus 2. Jika $y = 0$, maka sistem persamaan (3.5) menjadi sistem persamaan (3.7), yaitu

$$x(1-x) - \frac{a_2 x^2 z}{m_2^2 + x^2} = 0, \quad (3.7 \text{ a})$$

$$y = 0, \quad (3.7 \text{ b})$$

dan

$$\frac{b_2 x^2 z}{m_2^2 + x^2} - \mu z - qz = 0. \quad (3.7 \text{ c})$$

Titik kesetimbangan diperoleh dari penyelesaian berikut ini.

$$\begin{aligned} x(1-x) - \frac{a_2 x^2 z}{m_2^2 + x^2} &= 0 \\ x(1-x) &= \frac{a_2 x^2 z}{m_2^2 + x^2} \\ z &= \frac{(1-x)(m_2^2 + x^2)}{a_2 x}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.8) ke persamaan (3.7) (c) didapatkan persamaan (3.9).

$$\frac{b_2 x^2 \left(\frac{(1-x)(m_2^2 + x^2)}{a_2 x} \right)}{m_2^2 + x^2} - \mu \left(\frac{(1-x)(m_2^2 + x^2)}{a_2 x} \right) - q \left(\frac{(1-x)(m_2^2 + x^2)}{a_2 x} \right) = 0$$

$$\frac{b_2 x^2 ((1-x)(m_2^2 + x^2))}{(m_2^2 + x^2)(a_2 x)} - (\mu + q) \left(\frac{(1-x)(m_2^2 + x^2)}{a_2 x} \right) = 0$$

$$\frac{b_2 x^2 (1-x)}{(a_2 x)} - (\mu + q) \left(\frac{(1-x)(m_2^2 + x^2)}{a_2 x} \right) = 0$$

$$\frac{(1-x)}{(a_2 x)} (b_2 x^2 - (\mu + q)(m_2^2 + x^2)) = 0$$

$$(1-x)(b_2 - (\mu + q))x^2 - (\mu + q)m_2^2 = 0. \quad (3.9)$$

Dari persamaan (3.9) diperoleh solusi $x = m_2 \sqrt{\frac{(\mu+q)}{b_2 - (\mu+q)}}$ atau $x = 1$.

Jika solusi tersebut disubstitusikan ke persamaan (3.8), maka diperoleh

atau

$$z = \frac{\left(1 - m_2 \sqrt{\frac{(\mu+q)}{b_2 - (\mu+q)}}\right) \left(m_2^2 + \left(m_2 \sqrt{\frac{(\mu+q)}{b_2 - (\mu+q)}}\right)^2\right)}{a_2 m_2 \sqrt{\frac{(\mu+q)}{b_2 - (\mu+q)}}}.$$

Berdasarkan perhitungan di atas diperoleh dua titik kesetimbangan pada kasus ini, yaitu titik kesetimbangan pertama (1,0,0) dan titik kesetimbangan kedua adalah

$$\left(m_2 \sqrt{\frac{(\mu+q)}{b_2 - (\mu+q)}}, 0, \frac{\left(1 - m_2 \sqrt{\frac{(\mu+q)}{b_2 - (\mu+q)}}\right) \left(m_2^2 + \left(m_2 \sqrt{\frac{(\mu+q)}{b_2 - (\mu+q)}}\right)^2\right)}{a_2 m_2 \sqrt{\frac{(\mu+q)}{b_2 - (\mu+q)}}} \right).$$

Titik kesetimbangan kedua eksis jika memenuhi $b_2 > (\mu + q)$ dan

$$1 \geq m_2 \sqrt{\frac{(\mu+q)}{b_2 - (\mu+q)}}.$$

Kasus 3. Jika $z = 0$, maka sistem persamaan (3.5) menjadi sistem persamaan (3.10).

$$x(1 - x) - \frac{a_1xy}{m_1 + x + \gamma y} = 0, \quad (3.10 \text{ a})$$

$$\frac{b_1xy}{m_1 + x + \gamma y} - \mu y = 0, \quad (3.10 \text{ b})$$

dan

$$z = 0. \quad (3.10 \text{ c})$$

Untuk memperoleh titik kesetimbangan, dilakukan perhitungan persamaan (3.10) (b) berikut ini.

$$\frac{b_1xy}{m_1 + x + \gamma y} - \mu y = 0$$

$$\frac{b_1xy - \mu y(m_1 + x + \gamma y)}{m_1 + x + \gamma y} = 0$$

$$b_1xy - \mu y m_1 - \mu y x - \mu \gamma y^2 = 0$$

$$y(b_1x - \mu m_1 - \mu x - \mu \gamma y) = 0. \quad (3.11)$$

Penyelesaian persamaan (3.11) menghasilkan dua solusi, yaitu

$$y = 0 \quad (3.12 \text{ a})$$

atau

$$y = \frac{b_1x - \mu m_1 - \mu x}{\mu \gamma}. \quad (3.12 \text{ b})$$

Dengan mensubstitusikan solusi persamaan (3.12) ke persamaan (3.10) (a), diperoleh tiga solusi nilai x , yaitu $x = 0$, $x = 1$, atau

$$x(1 - x) - \frac{a_1x \left(\frac{b_1x - \mu m_1 - \mu x}{\mu \gamma} \right)}{m_1 + x + \gamma \left(\frac{b_1x - \mu m_1 - \mu x}{\mu \gamma} \right)} = 0.$$

$$\text{Perhitungan solusi } x(1 - x) - \frac{a_1x \left(\frac{b_1x - \mu m_1 - \mu x}{\mu \gamma} \right)}{m_1 + x + \gamma \left(\frac{b_1x - \mu m_1 - \mu x}{\mu \gamma} \right)} = 0, \text{ yaitu}$$

$$x(1-x) - \frac{a_1x(b_1x - \mu m_1 - \mu x)}{m_1\mu\gamma + x\mu\gamma + \gamma(b_1x - \mu m_1 - \mu x)} = 0$$

$$x(1-x) - \frac{a_1x(b_1x - \mu m_1 - \mu x)}{m_1\mu\gamma + x\mu\gamma + \gamma b_1x - \gamma\mu m_1 - \gamma\mu x} = 0$$

$$x(1-x) - \frac{a_1x(b_1x - \mu m_1 - \mu x)}{\gamma b_1x} = 0$$

$$\frac{x(1-x)\gamma b_1x - a_1x(b_1x - \mu m_1 - \mu x)}{\gamma b_1x} = 0$$

$$x(1-x)\gamma b_1x - a_1x(b_1x - \mu m_1 - \mu x) = 0$$

$$x((1-x)\gamma b_1x - a_1(b_1x - \mu m_1 - \mu x)) = 0. \quad (3.13)$$

Dari persamaan (3.13) diperoleh tiga solusi, yaitu

$$x = 0,$$

$$x = \frac{b_1\gamma + a_1\mu - a_1b_1 + \sqrt{(b_1\gamma + a_1\mu - a_1b_1)^2 + 4b_1\gamma a_1\mu m_1}}{2b_1\gamma}, \quad (3.14)$$

atau

$$x = \frac{b_1\gamma + a_1\mu - a_1b_1 - \sqrt{(b_1\gamma + a_1\mu - a_1b_1)^2 + 4b_1\gamma a_1\mu m_1}}{2b_1\gamma}. \quad (3.15)$$

Dengan memisalkan $A = b_1\gamma + a_1\mu - a_1b_1$, persamaan (3.14) dan (3.15) menjadi $x = \frac{A + \sqrt{A^2 + 4b_1\gamma a_1\mu m_1}}{2b_1\gamma}$ atau $x = \frac{A - \sqrt{A^2 + 4b_1\gamma a_1\mu m_1}}{2b_1\gamma}$.

Jika ketiga solusi tersebut disubstitusikan ke persamaan (3.12) (b),

maka diperoleh nilai $y = \frac{-m_1}{\gamma}$, $y = \frac{(b_1 - \mu) \frac{A + \sqrt{A^2 + 4b_1\gamma a_1\mu m_1}}{2b_1\gamma} - \mu m_1}{\mu\gamma}$, atau

$y = \frac{(b_1 - \mu) \frac{A - \sqrt{A^2 + 4b_1\gamma a_1\mu m_1}}{2b_1\gamma} - \mu m_1}{\mu\gamma}$. Jadi, pada kasus ini diperoleh tiga titik kesetimbangan berikut ini.

$$1. \left(0, \frac{-m_1}{\gamma}, 0 \right)$$

Titik kesetimbangan ini tidak eksis, hal tersebut disebabkan populasi tidak bernilai negatif atau dapat dikatakan bahwa tidak mungkin *intermediate-predator* dapat hidup sendiri tanpa adanya *prey* maupun *top-predator* dengan laju pertumbuhan yang terus menurun.

$$2. \left(\frac{A + \sqrt{A^2 + 4b_1\gamma a_1\mu m_1}}{2b_1\gamma}, \frac{(b_1 - \mu) \frac{A + \sqrt{A^2 + 4b_1\gamma a_1\mu m_1}}{2b_1\gamma} - \mu m_1}{\mu\gamma}, 0 \right)$$

Titik kesetimbangan ini eksis jika $b_1\gamma + a_1\mu \geq a_1b_1$ dan

$$b_1 \frac{A + \sqrt{A^2 + 4b_1\gamma a_1\mu m_1}}{2b_1\gamma} \geq \mu \left(m_1 + \frac{A + \sqrt{A^2 + 4b_1\gamma a_1\mu m_1}}{2b_1\gamma} \right).$$

$$3. \left(\frac{A - \sqrt{A^2 + 4b_1\gamma a_1\mu m_1}}{2b_1\gamma}, \frac{(b_1 - \mu) \frac{A - \sqrt{A^2 + 4b_1\gamma a_1\mu m_1}}{2b_1\gamma} - \mu m_1}{\mu\gamma}, 0 \right)$$

Titik kesetimbangan ini eksis jika terpenuhi dua syarat berikut ini.

$$b_1\gamma + a_1\mu \geq a_1b_1 + \sqrt{A^2 + 4b_1\gamma a_1\mu m_1}$$

dan

$$b_1 \frac{A - \sqrt{A^2 + 4b_1\gamma a_1\mu m_1}}{2b_1\gamma} \geq \mu \left(m_1 + \frac{A - \sqrt{A^2 + 4b_1\gamma a_1\mu m_1}}{2b_1\gamma} \right),$$

akan tetapi syarat eksistensi titik kesetimbangan ini tidak dapat dipenuhi sebab nilai x dan y harus lebih besar nol, sedangkan nilai $\frac{A - \sqrt{A^2 + 4b_1\gamma a_1\mu m_1}}{2b_1\gamma}$ tidak mungkin bernilai lebih besar nol dengan semua parameter bernilai positif, nilai yang dapat dicapai hanya kurang dari sama dengan nol.

Berdasarkan perhitungan di atas terdapat empat titik kesetimbangan yang eksis untuk sistem persamaan (3.5), yaitu

1. $E_0 = (0,0,0)$
2. $E_1 = (1,0,0)$
3. $E_2 = (x_2, 0, z_2)$

$$= \left(m_2 \sqrt{\frac{(\mu+q)}{b_2 - (\mu+q)}}, 0, \frac{(1-m_2 \sqrt{\frac{(\mu+q)}{b_2 - (\mu+q)}})(m_2^2 + (m_2 \sqrt{\frac{(\mu+q)}{b_2 - (\mu+q)}})^2)}{a_2 m_2 \sqrt{\frac{(\mu+q)}{b_2 - (\mu+q)}}}} \right).$$

4. $E_3 = (x_3, y_3, 0)$

$$= \left(\frac{A + \sqrt{A^2 + 4b_1\gamma a_1 \mu m_1}}{2b_1\gamma}, \frac{(b_1 - \mu) \frac{A + \sqrt{A^2 + 4b_1\gamma a_1 \mu m_1}}{2b_1\gamma} - \mu m_1}{\mu\gamma}, 0 \right).$$

3.3 Kestabilan Titik Kesetimbangan

Sifat kestabilan titik kesetimbangan pada model *predator-prey* tiga spesies diperiksa melalui analisis kestabilan sistem dinamik. Sistem persamaan model *predator-prey* tiga spesies merupakan sistem persamaan diferensial biasa nonlinear, sehingga untuk menentukan kestabilan titik kesetimbangan dilakukan proses linearisasi. Dari hasil proses linearisasi sistem persamaan (3.5) diperoleh matriks Jacobi

$$J(x, y, z) = \begin{bmatrix} 1 - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ b_{11} & b_{12} & -b_{13} \\ c_{11} & c_{12} & c_{13} \end{bmatrix}, \quad (3.16)$$

dengan

$$a_{11} = 2x \left(1 + \frac{a_2 m_2^2 z}{(m_2^2 + x^2)^2} \right) + \frac{a_1 y (m_1 + \gamma y)}{(m_1 + x + \gamma y)^2},$$

$$a_{12} = \frac{a_1 x (m_1 + x)}{(m_1 + x + \gamma y)^2},$$

$$a_{13} = \frac{a_2 x^2}{m_2^2 + x^2},$$

$$\begin{aligned}
 b_{11} &= \frac{b_1 y(m_1 + \gamma y)}{(m_1 + x + \gamma y)^2}, \\
 b_{12} &= \frac{b_1 x(m_1 + x)}{(m_1 + x + \gamma y)^2} - 2 \frac{a_3 y z m_3^2}{(m_3^2 + y^2)^2} - \mu, \\
 b_{13} &= \frac{a_3 y^2}{m_3^2 + y^2}, \\
 c_{11} &= \frac{2b_2 x z m_2^2}{(m_2^2 + x^2)^2}, \\
 c_{12} &= \frac{2b_3 y z m_3^2}{(m_3^2 + y^2)^2}, \\
 c_{13} &= \frac{b_2 x^2}{m_2^2 + x^2} + \frac{b_3 y^2}{m_3^2 + y^2} - (\mu + q).
 \end{aligned}$$

Berdasarkan matriks Jacobi yang diperoleh di atas, sistem nonlinear persamaan (3.5) dapat didekati dengan sistem linear berikut ini.

$$\begin{bmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \\ \frac{dw}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ b_{11} & b_{12} & -b_{13} \\ c_{11} & c_{12} & c_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

atau dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned}
 \frac{du}{dt} &= \left(1 - 2x \left(1 + \frac{a_2 m_2^2 z}{(m_2^2 + x^2)^2} \right) + \frac{a_1 y(m_1 + \gamma y)}{(m_1 + x + \gamma y)^2} \right) u \\
 &\quad - \frac{a_1 x(m_1 + x)}{(m_1 + x + \gamma y)^2} v - \frac{a_2 x^2}{m_2^2 + x^2} w \\
 \frac{dv}{dt} &= \frac{b_1 y(m_1 + \gamma y)}{(m_1 + x + \gamma y)^2} u \\
 &\quad + \left(\frac{b_1 x(m_1 + x)}{(m_1 + x + \gamma y)^2} - 2 \frac{a_3 y z m_3^2}{(m_3^2 + y^2)^2} - \mu \right) v - \frac{a_3 y^2}{m_3^2 + y^2} w
 \end{aligned}$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{2b_2xz m_2^2}{(m_2^2 + x^2)^2} u + \frac{2b_3yz m_3^2}{(m_3^2 + y^2)^2} v + \left(\frac{b_2x^2}{m_2^2 + x^2} + \frac{b_3y^2}{m_3^2 + y^2} - (\mu + q) \right) w,$$

di mana $u = (x - x^*)$, $v = (y - y^*)$, dan $w = (z - z^*)$.

3.3.1 Titik kesetimbangan $E_0 = (0, 0, 0)$

Dengan mensubstitusikan $x = 0$, $y = 0$, dan $z = 0$ pada matriks Jacobi persamaan (3.16), diperoleh matriks Jacobi di titik E_0 adalah

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & -(\mu + q) \end{bmatrix},$$

nilai eigen dari matriks Jacobi $J(E_0)$ adalah $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -\mu$, dan $\lambda_3 = -(\mu + q)$. Oleh karena nilai eigen λ_1 bernilai positif, maka titik kesetimbangan E_0 bersifat tidak stabil.

3.3.2 Titik kesetimbangan $E_1 = (1, 0, 0)$

Hasil linearisasi sistem persamaan (3.5) di sekitar titik kesetimbangan E_1 menghasilkan matriks Jacobi

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{a_1}{m_1+1} & -\frac{a_2}{m_2^2+1} \\ 0 & \frac{b_1}{m_1+1} - \mu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{b_2}{m_2^2+1} - (\mu + q) \end{bmatrix}.$$

Persamaan karakteristik dari matriks Jacobi $J(E_1)$ adalah

$$(\lambda + 1) \left(\lambda - \left(\frac{b_1}{m_1+1} - \mu \right) \right) \left(\lambda - \left(\frac{b_2}{m_2^2+1} - (\mu + q) \right) \right) = 0.$$

Dari persamaan karakteristik tersebut diperoleh tiga nilai eigen, yaitu $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \frac{b_1}{m_1+1} - \mu$, dan $\lambda_3 = \frac{b_2}{m_2^2+1} - (\mu + q)$. Berdasarkan nilai eigen tersebut titik kesetimbangan E_1 akan stabil asimtotik jika $\frac{b_1}{m_1+1} < \mu$ dan $\frac{b_2}{m_2^2+1} < (\mu + q)$.

3.3.3 Titik kesetimbangan $E_2 = (x_2, 0, z_2)$

Titik kesetimbangan E_2 menunjukkan bahwa tidak terdapat spesies *intermediate-predator* dalam populasi tersebut atau disebut titik kesetimbangan bebas *intermediate-predator*. Matriks Jacobi hasil linearisasi di sekitar E_2 adalah

$$J(E_2) = \begin{bmatrix} 1 - 2x_2 \left(1 + \frac{a_2 m_2^2 z_2}{(m_2^2 + x_2^2)^2} \right) & -\frac{a_1 x_2}{m_1 + x_2} & -\frac{a_2 x_2^2}{m_2^2 + x_2^2} \\ 0 & \frac{b_1 x_2}{m_1 + x_2} - \mu & 0 \\ \frac{2b_2 x_2 z_2 m_2^2}{(m_2^2 + x_2^2)^2} & 0 & \frac{b_2 x_2^2}{m_2^2 + x_2^2} - (\mu + q) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ 0 & b_{12} & 0 \\ c_{11} & 0 & c_{13} \end{bmatrix},$$

dengan

$$a_{11} = 2x_2 \left(1 + \frac{a_2 m_2^2 z_2}{(m_2^2 + x_2^2)^2} \right),$$

$$a_{12} = \frac{a_1 x_2}{m_1 + x_2},$$

$$a_{13} = \frac{a_2 x_2^2}{m_2^2 + x_2^2},$$

$$b_{12} = \frac{b_1 x_2}{m_1 + x_2} - \mu,$$

$$c_{11} = \frac{2b_2 x_2 z_2 m_2^2}{(m_2^2 + x_2^2)^2},$$

$$c_{13} = \frac{b_2 x_2^2}{m_2^2 + x_2^2} - (\mu + q).$$

Jika disubstitusikan nilai x_2 , y_2 , dan z_2 dengan

$$x_2 = m_2 \sqrt{\frac{(\mu + q)}{b_2 - (\mu + q)}},$$

$$y_2 = 0,$$

$$z_2 = \frac{\left(1 - m_2 \sqrt{\frac{(\mu + q)}{b_2 - (\mu + q)}}}\right) \left(m_2^2 + \left(m_2 \sqrt{\frac{(\mu + q)}{b_2 - (\mu + q)}}}\right)^2\right)}{a_2 m_2 \sqrt{\frac{(\mu + q)}{b_2 - (\mu + q)}}},$$

ke dalam matriks Jacobi $J(E_2)$ sebagaimana tercantum pada Lampiran 2, diperoleh

$$a_{11} = 2x_2 - 2 \frac{b_2 - (\mu + q)}{b_2} (x_2 - 1),$$

$$a_{12} = \frac{a_1 x_2}{m_1 + x_2},$$

$$a_{13} = \frac{a_2 (\mu + q)}{b_2},$$

$$b_{12} = \frac{b_1 x_2}{m_1 + x_2} - \mu,$$

$$c_{11} = \frac{2(1 - x_2)(b_2 - (\mu + q))}{a_2},$$

$$c_{13} = 0.$$

Persamaan karakteristik matriks Jacobi $J(E_2)$ (perhitungan tercantum dalam Lampiran 3) adalah

$$\lambda^3 + A_1 \lambda^2 + A_2 \lambda + A_3 = 0,$$

dengan

$$A_1 = -(1 - a_{11}) - b_{12},$$

$$A_2 = (1 - a_{11})b_{12} + c_{11}a_{13},$$

$$A_3 = c_{11}b_{12}a_{13}.$$

Dengan menggunakan kriteria kestabilan Routh-Hurwitz titik kesetimbangan tersebut akan stabil atau persamaan karakteristik tersebut akan memiliki nilai eigen $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0$ jika dan hanya jika memenuhi $A_3 > 0, A_1 > 0$, dan $A_1 A_2 - A_3 > 0$.

3.3.4 Titik kesetimbangan $E_3 = (x_3, y_3, 0)$

Pada titik kesetimbangan ini tidak terdapat spesies *top-predator* yang mempengaruhi sistem, karena nilai $z = 0$. Titik kesetimbangan ini disebut titik kesetimbangan bebas *top-predator*. Linearisasi di sekitar titik kesetimbangan E_3 untuk sistem persamaan (3.5) menghasilkan matriks Jacobi berikut ini.

$$J(E_3) = \begin{bmatrix} 1 - 2x_3 - \frac{a_1 y_3 (m_1 + \gamma y_3)}{(m_1 + x_3 + \gamma y_3)^2} & -\frac{a_1 x_3 (m_1 + x_3)}{(m_1 + x_3 + \gamma y_3)^2} & -\frac{a_2 x_3^2}{m_2^2 + x_3^2} \\ \frac{b_1 y_3 (m_1 + \gamma y_3)}{(m_1 + x_3 + \gamma y_3)^2} & \frac{b_1 x_3 (m_1 + x_3)}{(m_1 + x_3 + \gamma y_3)^2} - \mu & -\frac{a_3 y_3^2}{m_3^2 + y_3^2} \\ 0 & 0 & \frac{b_2 x_3^2}{m_2^2 + x_3^2} + \frac{b_3 y_3^2}{m_3^2 + y_3^2} - (\mu + q) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ b_{11} & b_{12} & -b_{13} \\ 0 & 0 & c_{13} \end{bmatrix},$$

di mana

$$a_{11} = 2x_3 + \frac{a_1 y_3 (m_1 + \gamma y_3)}{(m_1 + x_3 + \gamma y_3)^2},$$

$$a_{12} = \frac{a_1 x_3 (m_1 + x_3)}{(m_1 + x_3 + \gamma y_3)^2},$$

$$a_{13} = \frac{a_2 x_3^2}{m_2^2 + x_3^2},$$

$$b_{11} = \frac{b_1 y_3 (m_1 + \gamma y_3)}{(m_1 + x_3 + \gamma y_3)^2},$$

$$b_{12} = \frac{b_1 x_3 (m_1 + x_3)}{(m_1 + x_3 + \gamma y_3)^2} - \mu,$$

$$b_{13} = \frac{a_3 y_3^2}{m_3^2 + y_3^2},$$

$$c_{13} = \frac{b_2 x_3^2}{m_2^2 + x_3^2} + \frac{b_3 y_3^2}{m_3^2 + y_3^2} - (\mu + q).$$

Matriks Jacobi $J(E_3)$ sulit untuk disederhanakan dengan mensubstitusikan nilai

$$x_3 = \frac{A + \sqrt{A^2 + 4b_1\gamma a_1\mu m_1}}{2b_1\gamma},$$

$$y_3 = \frac{(b_1 - \mu) \frac{A + \sqrt{A^2 + 4b_1\gamma a_1\mu m_1}}{2b_1\gamma} - \mu m_1}{\mu\gamma},$$

$$z_3 = 0.$$

Berdasarkan matriks Jacobi $J(E_3)$ persamaan karakteristik (perhitungan tercantum pada Lampiran 4) sistem persamaan (3.5), yaitu

$$\lambda^3 + (-b_{12} - (1 - a_{11}) - c_{13})\lambda^2 + ((1 - a_{11})(b_{12} + c_{13}) + a_{12}b_{11} + c_{13}b_{12})\lambda + (-(1 - a_{11})b_{12}c_{13} - c_{13}b_{11}a_{12}) = 0. \quad (3.17)$$

Dari persamaan karakteristik tersebut untuk mengetahui sifat kestabilan titik kesetimbangan E_3 sulit ditentukan dengan menentukan nilai eigennya. Oleh karena itu, sifat kestabilan titik kesetimbangannya dapat ditentukan dengan menggunakan kriteria kestabilan Routh-Hurwitz.

Dengan menggunakan pemisalan B_1 , B_2 , dan B_3 berikut:

$$B_1 = -b_{12} - (1 - a_{11}) - c_{13},$$

$$B_2 = (1 - a_{11})(b_{12} + c_{13}) + a_{12}b_{11} + c_{13}b_{12},$$

$$B_3 = -(1 - a_{11})b_{12}c_{13} - c_{13}b_{11}a_{12},$$

maka persamaan karakteristik (3.17) dapat dinyatakan dalam bentuk $\lambda^3 + B_1\lambda^2 + B_2\lambda + B_3 = 0$. Persamaan karakteristik tersebut akan memiliki nilai eigen negatif jika dan hanya jika memenuhi syarat $B_3 > 0$, $B_1 > 0$, dan $B_1B_2 - B_3 > 0$. Dengan kata lain, titik kesetimbangan E_3 stabil jika syarat tersebut terpenuhi.

3.4 Analisis Kestabilan Global

Pada Subbab 3.3 telah dianalisis sifat kestabilan di sekitar titik kesetimbangan atau disebut dengan kestabilan lokal. Berdasarkan hasil analisis tersebut, terdapat kemungkinan titik kesetimbangan yang bersifat stabil lokal juga bersifat stabil global. Terdapat tiga titik kesetimbangan yang dimungkinkan bersifat stabil global, yaitu

titik kesetimbangan E_1 , E_2 , dan E_3 . Pada Subbab ini hanya dianalisis kestabilan global di sekitar titik kesetimbangan E_1 .

Titik kesetimbangan $E_1 = (1,0,0)$ merupakan titik yang berada pada bidang $x-y$. Oleh karena itu, kestabilan global titik kesetimbangan E_1 dapat dianalisis dengan menggunakan Teorema Poincaré-Dulac. Jika di sekitar titik kesetimbangan E_1 tidak terdapat orbit periodik, maka titik kesetimbangan E_1 bersifat stabil global sesuai dengan Subbab 2.11.

Keberadaan orbit periodik ditunjukkan dengan kriteria Dulac. Perhatikan fungsi Dulac

$$B(x, y) = xy,$$

dengan menggunakan fungsi tersebut diperoleh

$$Bf = xy \left(x(1-x) - \frac{a_1xy}{m_1 + x + \gamma y} \right)$$

$$Bg = xy \left(\frac{b_1xy}{m_1 + x + \gamma y} - \mu y \right),$$

fungsi f dan g masing-masing adalah ruas kanan persamaan pertama dan kedua dari sistem persamaan (3.5).

Pada uraian berikut ini ditunjukkan bahwa $\frac{\partial(Bf)}{\partial x} + \frac{\partial(Bg)}{\partial y} \neq 0$ dan tidak terjadi perubahan tanda pada $\frac{\partial(Bf)}{\partial x} + \frac{\partial(Bg)}{\partial y}$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial(Bf)}{\partial x} &= y \left(x(1-x) - \frac{a_1xy}{m_1 + x + \gamma y} \right) \\ &\quad + xy \left(1 - 2x - \left(\frac{a_1y(m_1 + x + \gamma y) - a_1yx}{(m_1 + x + \gamma y)^2} \right) \right) \\ &= yx \left(1 - x - \frac{a_1y}{m_1 + x + \gamma y} \right) \\ &\quad + xy \left(1 - 2x - \left(\frac{a_1y(m_1 + \gamma y)}{(m_1 + x + \gamma y)^2} \right) \right) \\ &= xy \left(2 - 3x - \frac{a_1y}{m_1 + x + \gamma y} - \frac{a_1y(m_1 + \gamma y)}{(m_1 + x + \gamma y)^2} \right), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial(Bg)}{\partial y} = x \left(\frac{b_1xy}{m_1 + x + \gamma y} - \mu y \right)$$

$$\begin{aligned}
 & +xy \left(\frac{b_1x(m_1 + x + \gamma y) - \gamma y b_1x}{(m_1 + x + \gamma y)^2} - \mu \right) \\
 & = xy \left(\frac{b_1x}{m_1 + x + \gamma y} - \mu \right) + xy \left(\frac{b_1x(m_1 + x)}{(m_1 + x + \gamma y)^2} - \mu \right) \\
 & = xy \left(\frac{b_1x}{m_1 + x + \gamma y} - \mu + \frac{b_1x(m_1 + x)}{(m_1 + x + \gamma y)^2} - \mu \right),
 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial(Bf)}{\partial x} + \frac{\partial(Bg)}{\partial y} \\
 & = xy \left(2 - 3x - \frac{a_1y}{m_1 + x + \gamma y} - \left(\frac{a_1y(m_1 + \gamma y)}{(m_1 + x + \gamma y)^2} \right) \right) \\
 & \quad + xy \left(\frac{b_1x}{m_1 + x + \gamma y} - \mu + \frac{b_1x(m_1 + x)}{(m_1 + x + \gamma y)^2} - \mu \right) \\
 & = xy \left(2 - 3x - \frac{a_1y}{m_1 + x + \gamma y} - \left(\frac{a_1y(m_1 + \gamma y)}{(m_1 + x + \gamma y)^2} \right) \right) \\
 & \quad + \frac{b_1x}{m_1 + x + \gamma y} - \mu + \frac{b_1x(m_1 + x)}{(m_1 + x + \gamma y)^2} - \mu \\
 & = xy \left(-(3x - 2) - \frac{a_1y}{m_1 + x + \gamma y} - \left(\frac{a_1y(m_1 + \gamma y)}{(m_1 + x + \gamma y)^2} \right) \right) \\
 & \quad + \frac{b_1x}{m_1 + x + \gamma y} - \mu + \frac{b_1x(m_1 + x)}{(m_1 + x + \gamma y)^2} - \mu \neq 0.
 \end{aligned}$$

Oleh karena $0 \leq x + y \leq 1$, $0 \leq x + \gamma y \leq 1$, $\frac{b_1}{m_1+1} - \mu < 0$ jelas bahwa $\frac{b_1x}{m_1+x+\gamma y} - \mu < 0$ dan $\frac{b_1x(m_1+x)}{(m_1+x+\gamma y)^2} - \mu < 0$, sehingga $\frac{\partial(Bf)}{\partial x} + \frac{\partial(Bg)}{\partial y} < 0$.

Berdasarkan Teorema 2.11.1 dapat dikatakan bahwa pada perilaku solusi sistem persamaan (3.5) tidak terdapat orbit periodik. Jadi, sesuai dengan Teorema 2.11.2 titik kesetimbangan E_1 bersifat stabil global.

Hasil analisis kestabilan titik kesetimbangan sistem persamaan (3.5) dicantumkan pada Tabel 3.1 berikut ini.

Tabel 3.1 Syarat kestabilan titik kesetimbangan model *predator-prey* tiga spesies

Titik Kesetimbangan	Jenis Kestabilan	Syarat Kestabilan
$E_0 = (0, 0, 0)$	Tidak stabil	-
$E_1 = (1, 0, 0)$	Stabil lokal	$\frac{b_1}{m_1 + 1} < \mu,$ $\frac{b_2}{m_2^2 + 1} < \mu + q.$
	Stabil global	Stabil lokal
$E_2 = (x_2, 0, z_2)$	Stabil lokal	$x_2 > 0, z_2 > 0,$ $A_1 > 0, A_2 > 0,$ $A_1 A_2 - A_3 > 0.$
$E_3 = (x_3, y_3, 0)$	Stabil lokal	$x_3 > 0, y_3 > 0,$ $B_1 > 0, B_2 > 0,$ $B_1 B_2 - B_3 > 0.$

Catatan: untuk nilai $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2,$ dan B_3 dapat dilihat pada anak Subbab 3.3.3 dan 3.3.4.

3.5 Simulasi Numerik

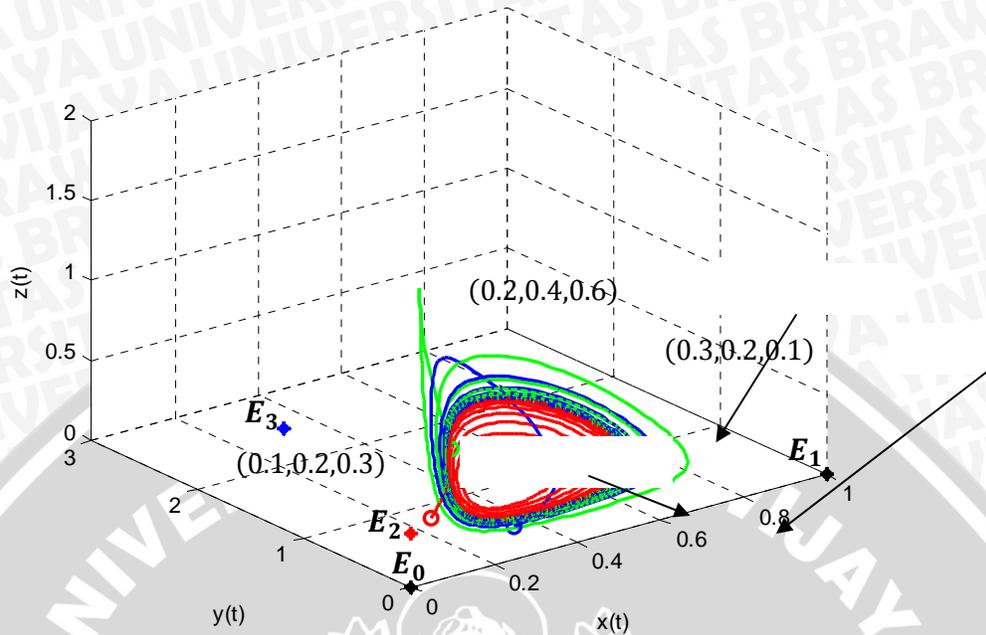
Pada bagian ini dibahas simulasi numerik dengan menggunakan metode Runge Kutta orde 4 pada *software* MATLAB R2010a. Perilaku solusi dalam simulasi dibandingkan dengan perhitungan secara analitik pada Subbab 3.3.

Berdasarkan hasil analisis dinamik diperoleh empat titik kesetimbangan pada model *predator-prey* tiga spesies. Perbandingan hasil analisis dinamik keempat titik kesetimbangan ditunjukkan melalui variasi nilai parameter dalam beberapa simulasi berikut ini.

3.5.1 Simulasi 1

Pada simulasi ini dapat ditunjukkan bahwa titik kesetimbangan $E_0 = (0,0,0)$ bersifat tidak stabil dengan menggunakan nilai parameter $a_1 = 0.8, a_2 = 0.6, a_3 = 0.25, b_1 = 0.9, b_2 = 0.5,$

$b_3 = 1.9$, $m_1 = 0.4$, $m_2 = 0.2$, $m_3 = 0.2$, $\mu = 0.1$, $\gamma = 0.9$, dan $q = 0.5$, seperti pada Gambar 3.1 berikut.



Gambar 3.1 Potret fase sistem persamaan (3.5) untuk titik kesetimbangan E_0

Berdasarkan potret fase Gambar 3.1 dapat dilihat bahwa solusi berupa *limit cycle*, akan tetapi trayektori di sekitar *limit cycle* dengan tiga nilai awal, yaitu $(0.1, 0.2, 0.3)$, $(0.2, 0.4, 0.6)$, dan $(0.3, 0.2, 0.1)$, tidak mendekati titik kesetimbangan $E_0 = (0, 0, 0)$. Hal ini berarti, dalam sistem tersebut terjadi persaingan yang sangat kuat di antara ketiga spesies tersebut agar tetap dapat bertahan hidup dan tidak mengalami kepunahan.

3.5.2 Simulasi 2

Parameter yang digunakan pada simulasi 2 adalah $a_1 = 0.8$, $a_2 = 0.6$, $a_3 = 0.25$, $b_1 = 0.9$, $b_2 = 0.5$, $b_3 = 1.9$, $m_1 = 0.8$, $m_2 = 0.25$, $m_3 = 0.16$, $\mu = 0.6$, $\gamma = 0.9$, dan $q = 0.5$. Nilai

parameter tersebut memenuhi syarat kestabilan titik kesetimbangan

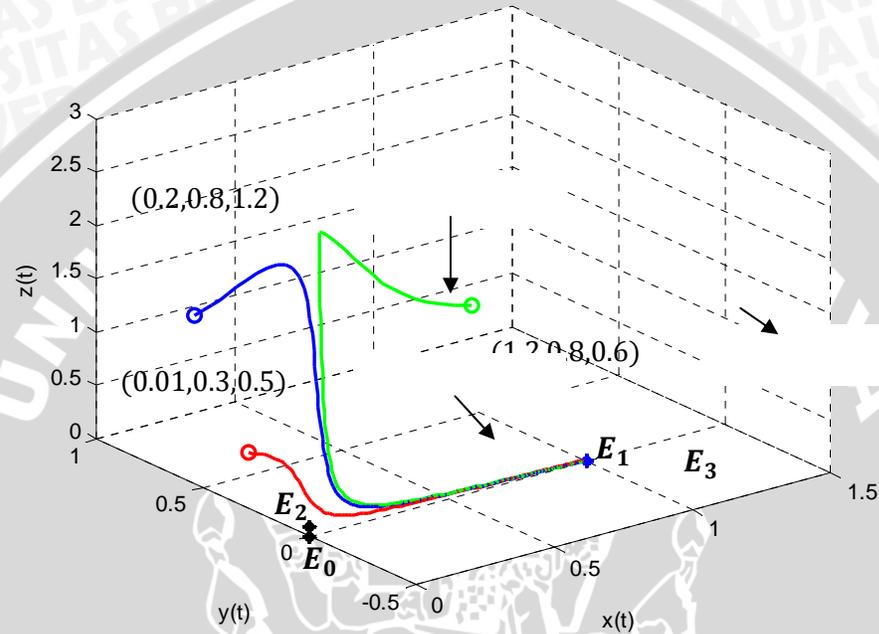
$E_1 = (1,0,0)$, yaitu

$$\frac{b_1}{m_1 + 1} - \mu = \frac{0.9}{0.8 + 1} - 0.6 = -0.1 < 0$$

dan

$$\frac{b_2}{m_2^2 + 1} - (\mu + q) = \frac{0.5}{0.25^2 + 1} - (0.6 + 0.5) = -0.62941 < 0.$$

Dengan kata lain, titik kesetimbangan E_1 bersifat stabil dengan menggunakan parameter pada simulasi 2, seperti ditunjukkan pada potret fase Gambar 3.2.



Gambar 3.2 Potret fase sistem persamaan (3.5) untuk titik kesetimbangan E_1 yang stabil

Terlihat pada potret fase Gambar 3.2 trayektori dari tiga nilai awal yang berbeda, yaitu $(0.01, 0.3, 0.5)$, $(0.2, 0.8, 1.2)$, dan $(1.2, 0.8, 0.6)$, menuju titik kesetimbangan E_1 , sehingga dapat diartikan bahwa

jumlah populasi akan stabil menuju nilai $(1,0,0)$ dalam jangka waktu panjang. Pada potret fase tersebut juga ditunjukkan bahwa titik kesetimbangan E_0 dan titik kesetimbangan E_2 eksis tidak stabil, sedangkan titik kesetimbangan E_3 tidak eksis.

Berdasarkan hasil simulasi tersebut dapat disimpulkan bahwa populasi *intermediate-predator* dan *top-predator* akan mengalami kepunahan jika terjadi dua kejadian. Kejadian pertama adalah kejadian dengan keadaan tingkat konsumsi *intermediate-predator* terhadap *prey* lebih kecil daripada laju kematian *intermediate-predator* dan kejadian kedua adalah kejadian dengan keadaan tingkat konsumsi pemangsa *top-predator* terhadap *prey* kurang dari total laju kematian dan laju emigrasi *top-predator*.

Dalam hal ini sistem tidak mampu mempertahankan ketiga populasi untuk hidup secara berdampingan, akan tetapi populasi *prey* tetap bertahan pada batas tertentu. Batas pertahanan *prey* yaitu 1, nilai tersebut merupakan nilai *carrying capacity prey*.

Jika pada simulasi 2 nilai parameter yang digunakan adalah $\mu = 0.3$ dan $q = 0.1$, maka syarat kestabilan titik kesetimbangan E_1 tidak terpenuhi, yaitu

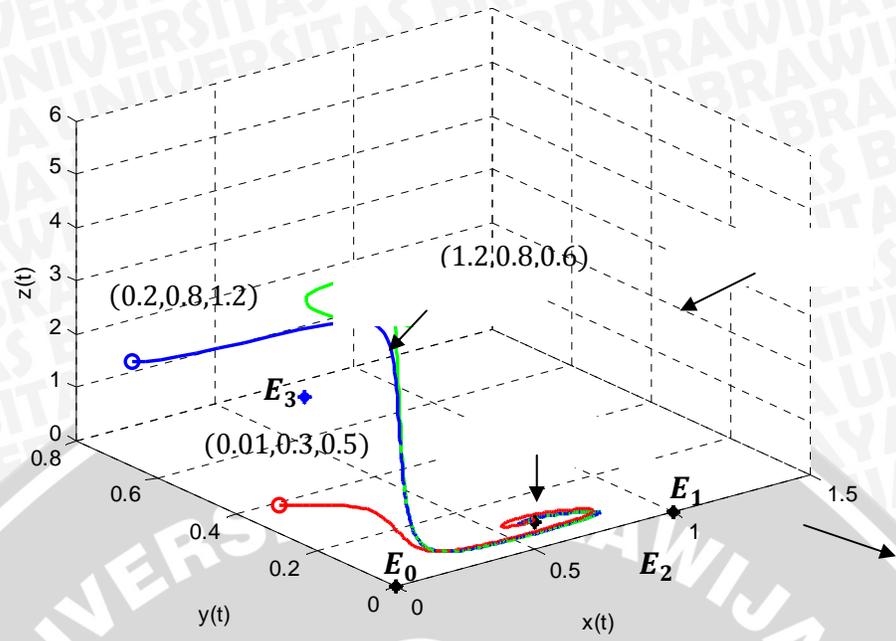
$$\frac{b_1}{m_1 + 1} - \mu = \frac{0.9}{0.8 + 1} - 0.3 = 0.2 > 0$$

dan

$$\frac{b_2}{m_2^2 + 1} - (\mu + q) = \frac{0.5}{0.25^2 + 1} - (0.3 + 0.1) = 0.0705 > 0.$$

Dari hasil tersebut diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0.2$, dan $\lambda_3 = 0.0705$. Terdapat dua nilai eigen yang bernilai positif, sehingga titik kesetimbangan $E_1 = (1,0,0)$ menjadi tidak stabil seperti ditunjukkan pada Gambar 3.3.

Potret fase Gambar 3.3 menunjukkan bahwa titik kesetimbangan E_1 bersifat tidak stabil, hal ini dikarenakan trayektori dari ketiga nilai awal yang berbeda tidak menuju titik kesetimbangan E_1 , namun trayektori menuju nilai yang sangat dekat dengan titik kesetimbangan E_2 . Dalam kehidupan nyata, jika parameter ini terpenuhi maka populasi *intermediate-predator* dan *top-predator* tidak akan mengalami kepunahan dalam jangka waktu panjang, sedangkan *prey* juga tidak bertahan pada nilai 1. Ketiga spesies tersebut akan bersaing untuk dapat bertahan hidup.



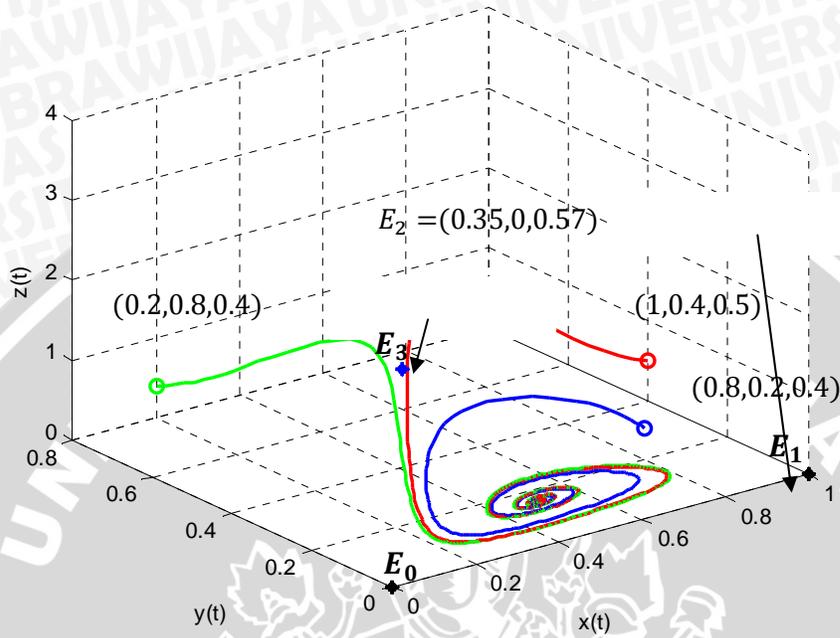
Gambar 3.3 Potret fase sistem persamaan (3.5) untuk titik kesetimbangan E_1 yang tidak stabil

3.5.3 Simulasi 3

Untuk simulasi 3 digunakan nilai parameter berikut: $a_1 = 0.8$, $a_2 = 0.6$, $a_3 = 0.25$, $b_1 = 0.9$, $b_2 = 1.2$, $b_3 = 1.9$, $m_1 = 0.8$, $m_2 = 0.25$, $m_3 = 0.16$, $\mu = 0.3$, $\gamma = 0.9$, dan $q = 0.5$. Dengan menggunakan parameter tersebut titik kesetimbangan E_2 eksis dengan nilai $E_2 = (0.35, 0, 0.57)$ dan syarat kestabilan titik kesetimbangan E_2 terpenuhi. Hasil simulasi kestabilan titik kesetimbangan E_2 dengan menggunakan tiga nilai awal, yaitu $(0.8, 0.2, 0.4)$, $(1, 0.4, 0.5)$, dan $(0.2, 0.8, 0.4)$, ditunjukkan pada potret fase Gambar 3.4.

Dari potret fase pada Gambar 3.4 terlihat bahwa dengan tiga nilai awal yang digunakan, titik kesetimbangan $E_2 = (0.35, 0, 0.57)$ didekati oleh trayektori di sekitarnya, sehingga titik kesetimbangan E_2 bersifat stabil dengan menggunakan parameter pada simulasi 3.

Berdasarkan hal tersebut, dalam kasus ini dapat diketahui bahwa jumlah populasi akan stabil menuju nilai $(0.35, 0, 0.57)$. Pada saat populasi *intermediate-predator* punah, populasi *prey* dan *top-predator* dapat bertahan hidup secara berdampingan dengan batas nilai tertentu, yaitu populasi *prey* pada nilai 0.35 dan populasi *top-predator* pada nilai 0.57.

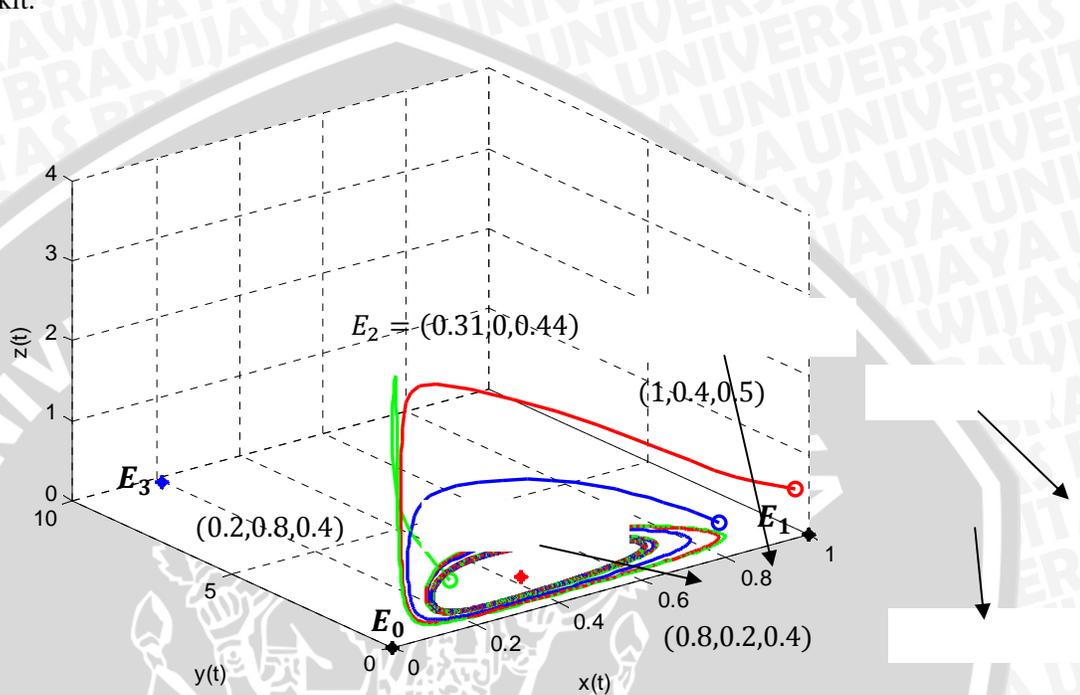


Gambar 3.4 Potret fase sistem persamaan (3.5) untuk titik kesetimbangan E_2 yang stabil

Untuk titik kesetimbangan E_2 pada simulasi ini akan bersifat tidak stabil jika beberapa nilai parameter yang digunakan berubah, yaitu $b_1 = 0.5$, $b_2 = 1$, $m_1 = 0.7$, $m_2 = 0.15$, $\mu = 0.01$, dan $q = 0.8$. Dengan menggunakan parameter tersebut diperoleh titik kesetimbangan $E_2 = (0.31, 0, 0.44)$, namun syarat kestabilan titik kesetimbangan E_2 tidak terpenuhi. Hasil simulasi untuk titik

kesetimbangan E_2 yang bersifat tidak stabil ditunjukkan pada Gambar 3.5.

Berdasarkan Potret fase Gambar 3.5 dapat dikatakan bahwa titik kesetimbangan E_2 bersifat tidak stabil. Hal tersebut terlihat dari trayektori ketiga nilai awal di sekitarnya tidak menuju titik kesetimbangan E_2 . Dalam kasus ini, untuk jangka panjang tidak akan terjadi kepunahan pada spesies *intermediate-predator*, melainkan spesies tersebut akan tetap bertahan hidup meskipun dalam jumlah sedikit.



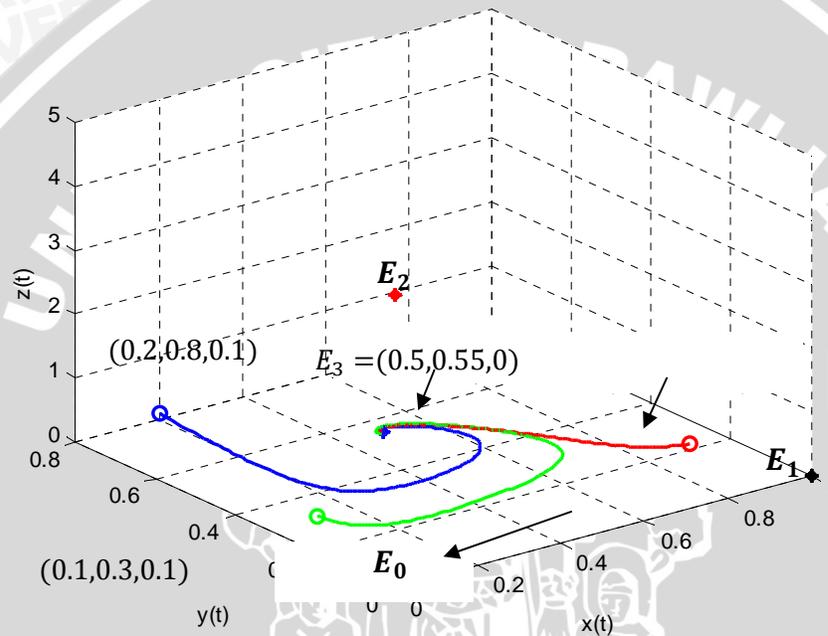
Gambar 3.5 Potret fase sistem persamaan (3.5) untuk titik kesetimbangan E_2 yang tidak stabil

3.5.4 Simulasi 4

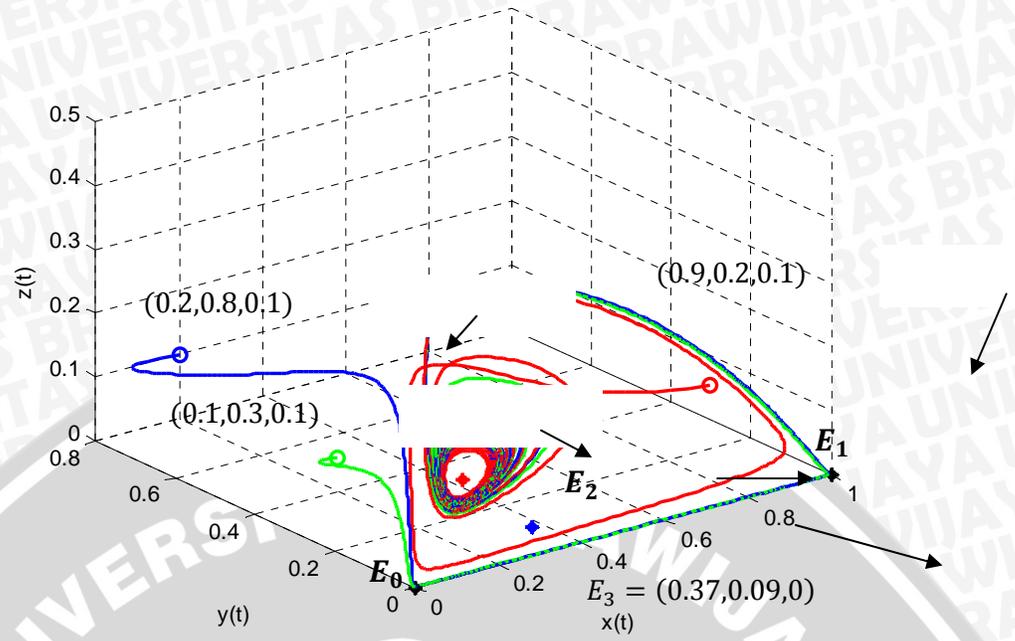
Parameter yang digunakan pada simulasi 4, yaitu $a_1 = 0.8$, $a_2 = 1.2$, $a_3 = 0.5$, $b_1 = 0.7$, $b_2 = 0.5$, $b_3 = 1.9$, $m_1 = 0.1$, $m_2 = 1.05$, $m_3 = 1.05$, $\mu = 0.4$, $\gamma = 0.5$, dan $q = 0.2$. Parameter

tersebut memenuhi syarat kestabilan untuk titik kesetimbangan $E_3 = (x_3, y_3, 0)$ yang dijelaskan pada anak Subbab 3.3.4. Hasil simulasi yang menunjukkan bahwa titik kesetimbangan E_3 bersifat stabil diberikan pada potret fase Gambar 3.6.

Dengan menggunakan nilai awal $(0.9, 0.2, 0.1)$, $(0.2, 0.8, 0.1)$, dan $(0.1, 0.3, 0.1)$ terlihat pada Gambar 3.6 bahwa trayektori dari ketiga nilai awal tersebut menuju titik yang sama, yaitu titik kesetimbangan $E_3 = (0.5, 0.55, 0)$. Pada saat keadaan stabil jumlah *prey* sebesar 0.5 dan *intermediate-predator* sebesar 0.55. Hal ini berarti, jika parameter pada simulasi ini terjadi dalam kehidupan nyata maka dalam jangka panjang populasi *top-predator* akan punah, sedangkan *prey* dan *intermediate-predator* dapat hidup berdampingan dengan baik.



Gambar 3.6 Potret fase sistem persamaan (3.5) untuk titik kesetimbangan E_3 yang stabil



Gambar 3.7 Potret fase sistem persamaan (3.5) untuk titik kesetimbangan E_3 yang tidak stabil

Syarat kestabilan titik kesetimbangan E_3 tidak terpenuhi jika parameter yang digunakan adalah $a_1 = 3$, $b_1 = 0.1$, $b_3 = 0.5$, $m_1 = 0.03$, $m_2 = 0.1$, $m_3 = 0.1$, $\mu = 0.08$, dan $\gamma = 0.65$, atau dengan kata lain titik kesetimbangan E_3 bersifat tidak stabil dengan menggunakan parameter tersebut, seperti ditunjukkan pada Gambar 3.7. Dengan parameter tersebut diperoleh titik kesetimbangan $E_3 = (0.37, 0.09, 0)$.

Pada Gambar 3.7 terlihat bahwa trayektori dari nilai awal $(0.9, 0.2, 0.1)$, $(0.2, 0.8, 0.1)$, dan $(0.1, 0.3, 0.1)$ berupa *limit cycle*, namun trayektori dari ketiga nilai awal tersebut tidak menuju titik kesetimbangan $E_3 = (0.37, 0.09, 0)$, sehingga titik kesetimbangan E_3 bersifat tidak stabil. Dalam kasus ini dengan jumlah populasi awal yang ada, populasi *prey* tidak akan menuju nilai 0.37 dan populasi *intermediate-predator* tidak menuju nilai 0.09 atau dapat dikatakan

bahwa kedua spesies tersebut tidak dapat hidup berdampingan dengan baik pada jumlah tersebut, sedangkan populasi *top-predator* akan tetap bersaing untuk dapat bertahan hidup sehingga dalam jangka waktu panjang tidak akan mengalami kepunahan.



BAB IV KESIMPULAN DAN SARAN

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan yang telah diuraikan dalam skripsi ini diperoleh kesimpulan berikut.

1. Model *predator-prey* tiga spesies pada suatu jaring-jaring makanan yang terdiri dari *prey*, *intermediate-predator*, dan *top-predator* berupa persamaan diferensial biasa nonlinear dengan tiga persamaan, yaitu laju pertumbuhan populasi *prey*, laju pertumbuhan populasi *intermediate-predator*, dan laju pertumbuhan populasi *top-predator*.
2. Terdapat empat titik kesetimbangan, yaitu satu titik kesetimbangan trivial $E_0 = (0,0,0)$ dan tiga titik kesetimbangan batas yang masing-masing menggambarkan kepunahan pada salah satu spesies, yaitu $E_1 = (1,0,0)$, $E_2 = (x_2, 0, z_2)$, dan $E_3 = (x_3, y_3, 0)$.
3. Titik kesetimbangan E_0 bersifat tidak stabil, E_1 bersifat stabil asimtotik lokal dan global jika memenuhi $\frac{b_1}{m_1+1} < \mu$ dan $\frac{b_2}{m_2^{2+1}} < (\mu + q)$, sedangkan E_2 dan E_3 bersifat stabil asimtotik.
4. Simulasi numerik memberikan hasil yang sesuai dengan perhitungan secara analitik. Berdasarkan hasil simulasi numerik juga terlihat bahwa titik kesetimbangan E_2 dan E_3 bersifat stabil global.

4.2 Saran

Pada penulisan selanjutnya, disarankan untuk melakukan analisis pada model *predator-prey* tiga spesies dengan menggunakan fungsi respon yang berbeda, misalnya Nicholson-Bailey, *ratio dependent*, atau Holling tipe II dan memperhatikan adanya laju imigrasi dalam populasi tersebut.



DAFTAR PUSTAKA

- Arrowsmith, D.K. dan C.M. Place. 1992. *Dynamical Systems, Differential Equation, Maps and Chaotic Behaviour*. Chapman & Hall. London.
- Andayani, P. 2012. *Analisis Dinamik Model Predator-Prey dengan Omnivora*. Skripsi FMIPA UB.
- Boyce, W.E. dan R.C. DiPrima. 2009. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. Ninth Edition. John Wiley & Sons. New York.
- Chauvet, E., J.E. Paullet, J.P. Previte, dan Z. Walls. 2002. A Lotka-Volterra Three-species Food Chain. *Mathematics Magazine*. 75: 243-255.
- Edward, C.H. dan D.E. Penney. 2001. *Differential Equations and Linear Algebra*. Prentice-Hall. New Jersey.
- Finizio, N. dan G. Ladas. 1982. *Ordinary Differential Equations with Modern Applications*. Second Edition. Wadsworth. USA.
- Glass, L. dan J.D. Murray. 2001. *Mathematical Biology: An Introduction*. Third Edition. Springer-Verlag. New York.
- Nagle, R.K. dan E.B. Saff. 2004. *Fundamentals of Differential Equations and Boundary Value Problems*. Addison-Wesley. Florida.
- Paramitharani. 2009. *Analisis Dinamik Model Rantai Makanan 3 Spesies*. Skripsi FMIPA UB.
- Richard, D. 2002. *Advanced Mathematical Methods with Maple*. Cambridge University Press. UK.
- Skalski, G.T. dan J.F. Gilliam. 2001. Functional Responses with Predator Interference: Viable Alternatives to the Holling Type II Model. *Ecology*. 82: 3083-3092.



Lampiran 1. Proses penskalaan sistem persamaan (3.5)

1. Penskalaan variabel $X(t)$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dX} \frac{dX}{dT} \frac{dT}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{K} \left(rKx \left(1 - \frac{Kx}{K} \right) - \frac{ra_1KxKy}{\rho + Kx + \gamma Ky} - \frac{ra_2(Kx)^2Kz}{\alpha^2 + (Kx)^2} \right) \frac{1}{r}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{rK} \left(rKx(1-x) - \frac{\rho}{K} + x + \gamma y - \frac{ra_1xKy}{K^2 + x^2} - \frac{ra_2x^2Kz}{K^2 + x^2} \right)$$

$$\frac{dx}{dt} = \left(x(1-x) - \frac{\rho}{K} + x + \gamma y - \frac{a_1xy}{K^2 + x^2} - \frac{a_2x^2z}{K^2 + x^2} \right)$$

Dengan memisalkan $m_1 = \frac{\rho}{K}$ dan $m_2 = \frac{\alpha}{K}$ diperoleh

$$\frac{dx}{dt} = x(1-x) - \frac{a_1xy}{m_1 + x + \gamma y} - \frac{a_2x^2z}{m_2^2 + x^2}$$

2. Penskalaan variabel $Y(t)$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dY} \frac{dY}{dT} \frac{dT}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{K} \left(\frac{rb_1KxKy}{\rho + Kx + \gamma Ky} - \frac{ra_3(Ky)^2Kz}{\beta^2 + (Ky)^2} - r\mu Ky \right) \frac{1}{r}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{rK} \left(\frac{rb_1xKy}{\frac{\rho}{K} + x + \gamma y} - \frac{ra_3y^2Kz}{\frac{\beta^2}{K^2} + y^2} - r\mu Ky \right)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{b_1xy}{\frac{\rho}{K} + x + \gamma y} - \frac{a_3y^2z}{\frac{\beta^2}{K^2} + y^2} - \mu y.$$

Dengan memisalkan $m_3 = \frac{\beta}{K}$ persamaan tersebut dapat dituliskan sebagai

$$\frac{dy}{dt} = \frac{b_1xy}{m_1 + x + \gamma y} - \frac{a_3y^2z}{m_3^2 + y^2} - \mu y.$$

3. Penskalaan variabel $Z(t)$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dZ} \frac{dZ}{dT} \frac{dT}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{K} \left(\frac{rb_2(Kx)^2Kz}{\alpha^2 + (Kx)^2} + \frac{rb_3(Ky)^2Kz}{\beta^2 + (Ky)^2} - r\mu Kz - rqKz \right) \frac{1}{r}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{rK} \left(\frac{rb_2x^2Kz}{\alpha^2 + x^2} + \frac{rb_3y^2Kz}{\beta^2 + y^2} - r\mu Kz - rqKz \right)$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{b_2x^2z}{\alpha^2 + x^2} + \frac{b_3y^2z}{\beta^2 + y^2} - \mu z - qz.$$

Dengan menggunakan pemisalan yang telah diberikan, persamaan tersebut dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{dz}{dt} = \frac{b_2x^2z}{m_2^2 + x^2} + \frac{b_3y^2z}{m_3^2 + y^2} - \mu z - qz.$$



Lampiran 2. Penyederhanaan matriks $J(E_2)$

Matriks Jacobi dari titik kesetimbangan $E_2 = (x_2, 0, z_2)$ diberikan oleh:

$$J(E_2) = \begin{bmatrix} 1 - 2x_2 \left(1 + \frac{a_2 m_2^2 z_2}{(m_2^2 + x_2^2)^2} \right) & -\frac{a_1 x_2}{m_1 + x_2} & -\frac{a_2 x_2^2}{m_2^2 + x_2^2} \\ 0 & \frac{b_1 x_2}{m_1 + x_2} - \mu & 0 \\ \frac{2b_2 x_2 z_2 m_2^2}{(m_2^2 + x_2^2)^2} & 0 & \frac{b_2 x_2^2}{m_2^2 + x_2^2} - (\mu + q) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ 0 & b_{12} & 0 \\ c_{11} & 0 & c_{13} \end{bmatrix},$$

di mana

$$a_{11} = 2x_2 \left(1 + \frac{a_2 m_2^2 z_2}{(m_2^2 + x_2^2)^2} \right),$$

$$a_{12} = \frac{a_1 x_2}{m_1 + x_2},$$

$$a_{13} = \frac{a_2 x_2^2}{m_2^2 + x_2^2},$$

$$b_{12} = \frac{b_1 x_2}{m_1 + x_2} - \mu,$$

$$c_{11} = \frac{2b_2 x_2 z_2 m_2^2}{(m_2^2 + x_2^2)^2},$$

$$c_{13} = \frac{b_2 x_2^2}{m_2^2 + x_2^2} - (\mu + q).$$

Dengan mensubstitusikan x_2 , y_2 , dan z_2 di mana

$$x_2 = m_2 \sqrt{\frac{(\mu + q)}{b_2 - (\mu + q)}},$$

$$y_2 = 0,$$

$$z_2 = \frac{\left(1 - m_2 \sqrt{\frac{(\mu+q)}{b_2 - (\mu+q)}}}\right) \left(m_2^2 + \left(m_2 \sqrt{\frac{(\mu+q)}{b_2 - (\mu+q)}}}\right)^2\right)}{a_2 m_2 \sqrt{\frac{(\mu+q)}{b_2 - (\mu+q)}}}}$$

sehingga diperoleh

$$a_{11} = 2x_2 \left(1 + \frac{a_2 m_2^2 z_2}{(m_2^2 + x_2^2)^2}\right)$$

$$= 2m_2 \sqrt{\frac{(\mu+q)}{b_2 - (\mu+q)}} \left(1 + \frac{a_2 m_2^2 \frac{\left(1 - m_2 \sqrt{\frac{(\mu+q)}{b_2 - (\mu+q)}}}\right) \left(m_2^2 + \left(m_2 \sqrt{\frac{(\mu+q)}{b_2 - (\mu+q)}}}\right)^2\right)}{a_2 m_2 \sqrt{\frac{(\mu+q)}{b_2 - (\mu+q)}}}}{\left(m_2^2 + \left(m_2 \sqrt{\frac{(\mu+q)}{b_2 - (\mu+q)}}}\right)^2\right)^2}\right)$$

$$= 2m_2 \sqrt{\frac{(\mu+q)}{b_2 - (\mu+q)}} \left(1 + \frac{m_2^2 \frac{\left(1 - m_2 \sqrt{\frac{(\mu+q)}{b_2 - (\mu+q)}}}\right)}{m_2 \sqrt{\frac{(\mu+q)}{b_2 - (\mu+q)}}}}{m_2^2 + \left(m_2 \sqrt{\frac{(\mu+q)}{b_2 - (\mu+q)}}}\right)^2}\right)$$

$$= 2m_2 \sqrt{\frac{(\mu+q)}{b_2 - (\mu+q)}} \left(1 + \frac{m_2^2 \left(1 - m_2 \sqrt{\frac{(\mu+q)}{b_2 - (\mu+q)}}}\right)}{m_2^2 \left(1 + \frac{(\mu+q)}{b_2 - (\mu+q)}\right) m_2 \sqrt{\frac{(\mu+q)}{b_2 - (\mu+q)}}}\right)$$

$$= 2m_2 \sqrt{\frac{(\mu+q)}{b_2 - (\mu+q)}} \left(1 + \frac{\left(1 - m_2 \sqrt{\frac{(\mu+q)}{b_2 - (\mu+q)}}}\right)}{\left(\frac{b_2}{b_2 - (\mu+q)}\right) m_2 \sqrt{\frac{(\mu+q)}{b_2 - (\mu+q)}}}\right)$$

$$\begin{aligned}
 &= 2m_2 \sqrt{\frac{(\mu+q)}{b_2-(\mu+q)}} + \frac{2m_2 \sqrt{\frac{(\mu+q)}{b_2-(\mu+q)}} \left(1 - m_2 \sqrt{\frac{(\mu+q)}{b_2-(\mu+q)}}\right)}{\left(\frac{b_2}{b_2-(\mu+q)}\right) m_2 \sqrt{\frac{(\mu+q)}{b_2-(\mu+q)}}} \\
 &= 2m_2 \sqrt{\frac{(\mu+q)}{b_2-(\mu+q)}} + \frac{2 \left(1 - m_2 \sqrt{\frac{(\mu+q)}{b_2-(\mu+q)}}\right)}{\left(\frac{b_2}{b_2-(\mu+q)}\right)} \\
 &= 2m_2 \sqrt{\frac{(\mu+q)}{b_2-(\mu+q)}} + 2 \left(1 - m_2 \sqrt{\frac{(\mu+q)}{b_2-(\mu+q)}}\right) \frac{b_2-(\mu+q)}{b_2} \\
 &= 2m_2 \sqrt{\frac{(\mu+q)}{b_2-(\mu+q)}} + 2 \frac{b_2-(\mu+q)}{b_2} - 2 \frac{b_2-(\mu+q)}{b_2} m_2 \sqrt{\frac{(\mu+q)}{b_2-(\mu+q)}} \\
 &= 2m_2 \sqrt{\frac{(\mu+q)}{b_2-(\mu+q)}} \left(1 - \frac{b_2-(\mu+q)}{b_2}\right) + 2 \frac{b_2-(\mu+q)}{b_2} \\
 &= 2x_2 \left(1 - \frac{b_2-(\mu+q)}{b_2}\right) + 2 \frac{b_2-(\mu+q)}{b_2} \\
 &= 2x_2 - 2 \frac{b_2-(\mu+q)}{b_2} (x_2 - 1), \\
 a_{12} &= \frac{a_1 x_2}{m_1 + x_2}, \\
 a_{13} &= \frac{a_2 x_2^2}{m_2^2 + x_2^2} \\
 &= \frac{a_2 \left(m_2 \sqrt{\frac{(\mu+q)}{b_2-(\mu+q)}}\right)^2}{m_2^2 + \left(m_2 \sqrt{\frac{(\mu+q)}{b_2-(\mu+q)}}\right)^2} = \frac{a_2 m_2^2 \frac{(\mu+q)}{b_2-(\mu+q)}}{m_2^2 + m_2^2 \frac{(\mu+q)}{b_2-(\mu+q)}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{a_2 m_2^2 \frac{(\mu + q)}{b_2 - (\mu + q)}}{m_2^2 \left(1 + \frac{(\mu + q)}{b_2 - (\mu + q)}\right)} = \frac{a_2 \frac{(\mu + q)}{b_2 - (\mu + q)}}{\left(\frac{b_2}{b_2 - (\mu + q)}\right)} \\
 &= a_2 \frac{(\mu + q)}{b_2 - (\mu + q)} \frac{b_2 - (\mu + q)}{b_2} = a_2 \frac{(\mu + q)}{b_2},
 \end{aligned}$$

$$b_{12} = \frac{b_1 x_2}{m_1 + x_2} - \mu,$$

$$c_{11} = \frac{2b_2 m_2 \sqrt{\frac{(\mu + q)}{b_2 - (\mu + q)}} \left(\frac{\left(1 - m_2 \sqrt{\frac{(\mu + q)}{b_2 - (\mu + q)}}\right) \left(m_2^2 + \left(m_2 \sqrt{\frac{(\mu + q)}{b_2 - (\mu + q)}}\right)^2\right)}{a_2 m_2 \sqrt{\frac{(\mu + q)}{b_2 - (\mu + q)}}}\right) m_2^2}{\left(m_2^2 + \left(m_2 \sqrt{\frac{(\mu + q)}{b_2 - (\mu + q)}}\right)^2\right)^2}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2b_2 \left(\frac{1 - m_2 \sqrt{\frac{(\mu + q)}{b_2 - (\mu + q)}}}{a_2}\right) m_2^2}{m_2^2 + \left(m_2 \sqrt{\frac{(\mu + q)}{b_2 - (\mu + q)}}\right)^2} \\
 &= \frac{2b_2 \left(\frac{1 - m_2 \sqrt{\frac{(\mu + q)}{b_2 - (\mu + q)}}}{a_2}\right) m_2^2}{m_2^2 \left(1 + \frac{(\mu + q)}{b_2 - (\mu + q)}\right)}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{2b_2 \left(1 - m_2 \sqrt{\frac{(\mu + q)}{b_2 - (\mu + q)}}} \right)}{a_2 \left(\frac{b_2}{b_2 - (\mu + q)} \right)} \\
 &= 2b_2 \left(1 - m_2 \sqrt{\frac{(\mu + q)}{b_2 - (\mu + q)}} \right) \frac{b_2 - (\mu + q)}{a_2 b_2} \\
 &= 2 \left(1 - m_2 \sqrt{\frac{(\mu + q)}{b_2 - (\mu + q)}} \right) \frac{b_2 - (\mu + q)}{a_2} \\
 &= \frac{2(1 - x_2)(b_2 - (\mu + q))}{a_2},
 \end{aligned}$$

$$c_{13} = \frac{b_2 x_2^2}{m_2^2 + x_2^2} - (\mu + q)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{b_2 \left(m_2 \sqrt{\frac{(\mu + q)}{b_2 - (\mu + q)}} \right)^2}{m_2^2 + \left(m_2 \sqrt{\frac{(\mu + q)}{b_2 - (\mu + q)}} \right)^2} - (\mu + q) \\
 &= \frac{b_2 m_2^2 \frac{(\mu + q)}{b_2 - (\mu + q)}}{m_2^2 \left(1 + \frac{(\mu + q)}{b_2 - (\mu + q)} \right)} - (\mu + q) \\
 &= \frac{b_2 \frac{(\mu + q)}{b_2 - (\mu + q)}}{\left(\frac{b_2}{b_2 - (\mu + q)} \right)} - (\mu + q)
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= b_2 \frac{(\mu + q)}{b_2 - (\mu + q)} \frac{b_2 - (\mu + q)}{b_2} - (\mu + q) \\
 &= (\mu + q) - (\mu + q) = 0.
 \end{aligned}$$

Dari perhitungan tersebut diperoleh matriks Jacobi $J(E_2)$ yang lebih sederhana, yaitu

$$J(E_2) = \begin{bmatrix} 1 - \left(2x_2 - 2 \frac{b_2 - (\mu + q)}{b_2} (x_2 - 1) \right) & -\frac{a_1 x_2}{m_1 + x_2} & -a_2 \frac{(\mu + q)}{b_2} \\ 0 & \frac{b_1 x_2}{m_1 + x_2} - \mu & 0 \\ \frac{2(1 - x_2)(b_2 - (\mu + q))}{a_2} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$



Lampiran 3. Penurunan persamaan karakteristik $J(E_2)$

$$J(E_2) = \begin{bmatrix} 1 - \left(2x_2 - 2 \frac{b_2 - (\mu + q)}{b_2} (x_2 - 1) \right) & -\frac{a_1 x_2}{m_1 + x_2} & -a_2 \frac{(\mu + q)}{b_2} \\ 0 & \frac{b_1 x_2}{m_1 + x_2} - \mu & 0 \\ \frac{2(1 - x_2)(b_2 - (\mu + q))}{a_2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ 0 & b_{12} & 0 \\ c_{11} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Persamaan karakteristik dari matriks $J(E_2)$ diperoleh dari perhitungan

$$|\lambda I - J(E_2)| = 0,$$

sehingga didapatkan

$$0 = \begin{vmatrix} \lambda - (1 - a_{11}) & -a_{12} & -a_{13} \\ 0 & \lambda - b_{12} & 0 \\ c_{11} & 0 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$0 = \lambda - (1 - a_{11}) \begin{vmatrix} \lambda - b_{12} & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} + c_{11} \begin{vmatrix} -a_{12} & -a_{13} \\ \lambda - b_{12} & 0 \end{vmatrix}$$

$$0 = (\lambda - (1 - a_{11}))(\lambda - b_{12})\lambda + c_{11}(\lambda - b_{12})a_{13}$$

$$0 = (\lambda - (1 - a_{11}))(\lambda^2 - b_{12}\lambda) + a_{13}c_{11}\lambda - a_{13}c_{11}b_{12}$$

$$0 = \lambda^3 - b_{12}\lambda^2 - (1 - a_{11})\lambda^2 + (1 - a_{11})b_{12}\lambda + a_{13}c_{11}\lambda$$

$$-a_{13}c_{11}b_{12}$$

$$0 = \lambda^3 + (-b_{12} - (1 - a_{11}))\lambda^2 + ((1 - a_{11})b_{12} + a_{13}c_{11})\lambda$$

$$-a_{13}c_{11}b_{12}$$

atau dapat ditulis sebagai

$$\lambda^3 + A_1\lambda^2 + A_2\lambda + A_3 = 0,$$

di mana

$$A_1 = -b_{12} - (1 - a_{11}),$$

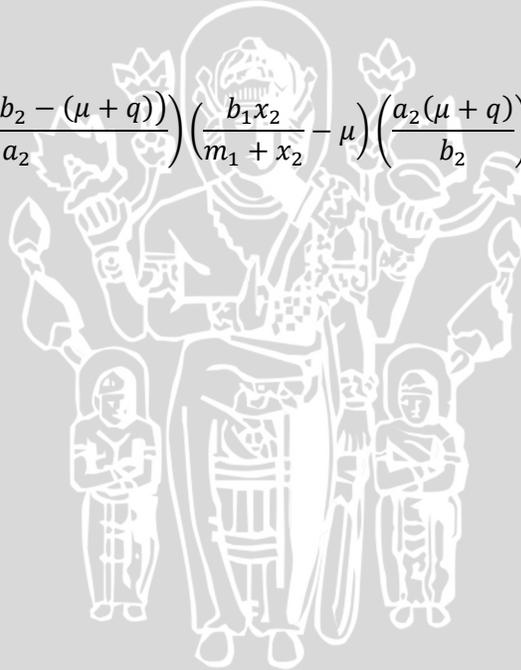
$$= -\left(\frac{b_1x_2}{m_1 + x_2} - \mu\right) - \left(1 - \left(2x_2 - 2\frac{b_2 - (\mu + q)}{b_2}(x_2 - 1)\right)\right)$$

$$A_2 = (1 - a_{11})b_{12} + c_{11}a_{13},$$

$$= \left(1 - \left(2x_2 - 2\frac{b_2 - (\mu + q)}{b_2}(x_2 - 1)\right)\right)\left(\frac{b_1x_2}{m_1 + x_2} - \mu\right) \\ + \left(\frac{2(1 - x_2)(b_2 - (\mu + q))}{a_2}\right)\left(\frac{a_2(\mu + q)}{b_2}\right)$$

$$A_3 = c_{11}b_{12}a_{13}$$

$$= \left(\frac{2(1 - x_2)(b_2 - (\mu + q))}{a_2}\right)\left(\frac{b_1x_2}{m_1 + x_2} - \mu\right)\left(\frac{a_2(\mu + q)}{b_2}\right).$$



Lampiran 4. Penurunan persamaan karakteristik $J(E_3)$

Matriks Jacobi untuk titik kesetimbangan E_3 diberikan oleh matriks $J(E_3)$ berikut ini.

$$J(E_3) = \begin{bmatrix} 1 - 2x_3 - \frac{a_1 y_3 (m_1 + \gamma y_3)}{(m_1 + x_3 + \gamma y_3)^2} & -\frac{a_1 x_3 (m_1 + x_3)}{(m_1 + x_3 + \gamma y_3)^2} & -\frac{a_2 x_3^2}{m_2^2 + x_3^2} \\ \frac{b_1 y_3 (m_1 + \gamma y_3)}{(m_1 + x_3 + \gamma y_3)^2} & \frac{b_1 x_3 (m_1 + x_3)}{(m_1 + x_3 + \gamma y_3)^2} - \mu & -\frac{a_3 y_3^2}{m_3^2 + y_3^2} \\ 0 & 0 & \frac{b_2 x_3^2}{m_2^2 + x_3^2} + \frac{b_3 y_3^2}{m_3^2 + y_3^2} - (\mu + q) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ b_{11} & b_{12} & -b_{13} \\ 0 & 0 & c_{13} \end{bmatrix},$$

di mana

$$a_{11} = 2x_3 + \frac{a_1 y_3 (m_1 + \gamma y_3)}{(m_1 + x_3 + \gamma y_3)^2},$$

$$a_{12} = \frac{a_1 x_3 (m_1 + x_3)}{(m_1 + x_3 + \gamma y_3)^2},$$

$$a_{13} = \frac{a_2 x_3^2}{m_2^2 + x_3^2},$$

$$b_{11} = \frac{b_1 y_3 (m_1 + \gamma y_3)}{(m_1 + x_3 + \gamma y_3)^2},$$

$$b_{12} = \frac{b_1 x_3 (m_1 + x_3)}{(m_1 + x_3 + \gamma y_3)^2} - \mu,$$

$$b_{13} = \frac{a_3 y_3^2}{m_3^2 + y_3^2},$$

$$c_{13} = \frac{b_2 x_3^2}{m_2^2 + x_3^2} + \frac{b_3 y_3^2}{m_3^2 + y_3^2} - (\mu + q).$$

Persamaan karakteristik dari $J(E_3)$ diperoleh dari

$$|\lambda I - J(E_3)| = 0,$$

perhitungan dapat dilakukan dengan menggunakan metode *ekspansi kofaktor* berikut ini.

$$0 = \begin{vmatrix} \lambda - (1 - a_{11}) & -a_{12} & -a_{13} \\ b_{11} & \lambda - b_{12} & -b_{13} \\ 0 & 0 & \lambda - c_{13} \end{vmatrix}$$

$$0 = (\lambda - c_{13}) \begin{vmatrix} \lambda - (1 - a_{11}) & -a_{12} \\ b_{11} & \lambda - b_{12} \end{vmatrix}$$

$$0 = (\lambda - c_{13}) ((\lambda - (1 - a_{11}))(\lambda - b_{12}) + b_{11}a_{12})$$

$$0 = (\lambda - c_{13})(\lambda^2 - b_{12}\lambda - (1 - a_{11})\lambda + (1 - a_{11})b_{12} + b_{11}a_{12})$$

$$0 = \lambda^3 - b_{12}\lambda^2 - (1 - a_{11})\lambda^2 + ((1 - a_{11})b_{12} + b_{11}a_{12})\lambda$$

$$-c_{13}\lambda^2 + b_{12}c_{13}\lambda + (1 - a_{11})c_{13}\lambda - ((1 - a_{11})b_{12} + b_{11}a_{12})c_{13}$$

$$0 = \lambda^3 + (-b_{12} - (1 - a_{11}) - c_{13})\lambda^2$$

$$+ ((1 - a_{11})b_{12} + b_{11}a_{12} + b_{12}c_{13} + (1 - a_{11})c_{13})\lambda$$

$$- ((1 - a_{11})b_{12} + b_{11}a_{12})c_{13}$$

$$0 = \lambda^3 + (-b_{12} - (1 - a_{11}) - c_{13})\lambda^2$$

$$+ ((1 - a_{11})(c_{13} + b_{12}) + b_{11}a_{12} + b_{12}c_{13})\lambda$$

$$+ (- (1 - a_{11})b_{12} - b_{11}a_{12})c_{13},$$

dengan memisalkan

$$B_1 = -b_{12} - (1 - a_{11}) - c_{13},$$

$$B_2 = (1 - a_{11})(b_{12} + c_{13}) + a_{12}b_{11} + c_{13}b_{12},$$



$$B_3 = -(1 - a_{11})b_{12}c_{13} - c_{13}b_{11}a_{12},$$

maka persamaan karakteristik dapat dinyatakan sebagai

$$\lambda^3 + B_1\lambda^2 + B_2\lambda + B_3 = 0.$$



Lampiran 5. Program model *predator-prey* tiga spesies

Simulasi numerik untuk sistem persamaan (3.5) dibuat pada *software* MATLAB R2010a dengan menggunakan metode Runge Kutta orde 4. Nilai parameter dan nilai awal sistem, yaitu

$$\begin{array}{llll} a_1 = 0.8 & b_1 = 0.9 & m_1 = 0.8 & \mu = 0.6 & x(0) = 0.8 \\ a_2 = 0.6 & b_2 = 0.5 & m_2 = 0.25 & \gamma = 0.9 & y(0) = 0.2 \\ a_3 = 0.25 & b_3 = 1.9 & m_3 = 0.16 & q = 0.5 & z(0) = 0.9 \end{array}$$

Berdasarkan nilai parameter dan nilai awal tersebut disusun *source code* program sebagai berikut.

Function untuk menunjukkan nilai parameter dari persamaan (3.5), yaitu

```
function ydot=f1(t,x,y,z)
a1=0.8;
a2=0.6;
a3=0.25;
b1=0.9;
b2=0.5;
b3=1.9;
m1=0.8;
m2=0.25;
m3=0.16;
mu=0.6;
gamma=0.9;
q=0.5;
ydot=x*(1-x)-(a1*x*y)/(m1+x+(gamma*y))-
(a2*x*x*z)/((m2*m2)+(x*x));
end
```

```
function ydot=f2(t,x,y,z)
a1=0.8;
a2=0.6;
a3=0.25;
b1=0.9;
b2=0.5;
b3=1.9;
m1=0.8;
```

```

m2=0.25;
m3=0.16;
mu=0.6;
gamma=0.9;
q=0.5;
ydot=(b1*x*y)/(m1+x+(gamma*y))-
      (a3*y*y*z)/((m3*m3)+(y*y))-mu*y;
end

```

```

function ydot=f3(t,x,y,z)
a1=0.8;
a2=0.6;
a3=0.25;
b1=0.9;
b2=0.5;
b3=1.9;
m1=0.8;
m2=0.25;
m3=0.16;
mu=0.6;
lamda=0.9;
q=0.5;
ydot=(b2*x*x*z)/((m2*m2)+(x*x))+
      (b3*y*y*z)/((m3*
m3)+(y*y))-mu*z-q*z;
end

```

Program utama model sebagai berikut.

```

clc;
clear all;
x(1)=0.8;
y(1)=0.2;
z(1)=0.9;
t(1)=0;
h=0.1;
%program utama metode Runge Kutta orde 4
for n=1:2000
    K11=h*f1(t(n),x(n),y(n),z(n));
    K12=h*f2(t(n),x(n),y(n),z(n));
    K13=h*f3(t(n),x(n),y(n),z(n));

```

```

K21=h*f1(t(n)+0.5*h,x(n)+0.5*K11,y(n)+0.5*K12,
z(n)+0.5*K13);
K22=h*f2(t(n)+0.5*h,x(n)+0.5*K11,y(n)+0.5*K12,
z(n)+0.5*K13);
K23=h*f3(t(n)+0.5*h,x(n)+0.5*K11,y(n)+0.5*K12,
z(n)+0.5*K13);
K31=h*f1(t(n)+0.5*h,x(n)+0.5*K21,y(n)+0.5*K22,
z(n)+0.5*K23);
K32=h*f2(t(n)+0.5*h,x(n)+0.5*K21,y(n)+0.5*K22,
z(n)+0.5*K23);
K33=h*f3(t(n)+0.5*h,x(n)+0.5*K12,y(n)+0.5*K22,
z(n)+0.5*K23);
K41=h*f1(t(n)+h,x(n)+K31,y(n)+K32,z(n)+K33);
K42=h*f2(t(n)+h,x(n)+K31,y(n)+K32,z(n)+K33);
K43=h*f3(t(n)+h,x(n)+K31,y(n)+K32,z(n)+K33);
x(n+1)=x(n)+(K11+2*K21+2*K31+K41)/6;
y(n+1)=y(n)+(K12+2*K22+2*K32+K42)/6;
z(n+1)=z(n)+(K13+2*K23+2*K33+K43)/6;
t(n+1)=t(n)+h;
end;
Sum=1;
for n=0:2000
    A(Sum)=t(n+1);
    B(Sum)=x(n+1);
    C(Sum)=y(n+1);
    D(Sum)=z(n+1);
    Sum=Sum+1;
end;
%program untuk memunculkan simulasi numerik
dengan nilai awal yang telah ditentukan
figure(1);
plot3(B,C,D,'r','LineWidth',1.5);
xlabel('X(t)');ylabel('Y(t)');zlabel('Z(t)');
axis square;
grid on;
hold on;
a1=0.8;
a2=0.6;
a3=0.25;
b1=0.9;
b2=0.5;
b3=1.9;
m1=0.8;

```

```

m2=0.25;
m3=0.16;
mu=0.6;
lamda=0.9;
q=0.5;
u=m2*sqrt((mu+q)/(b2-(mu+q)));
v=0;
w=a^(-1)*((m2*sqrt((mu+q)/(b2-(mu+q))))^(-1)-
1)*(m2^2+(m2*sqrt((mu+q)/(b2-(mu+q))))^2);
ue=(b1*lamda+a1*mu-a1*b1+sqrt((b1*lamda+a1*mu-
a1*b1)^2+4*b1*lamda*a1*mu*m1))/(2*b1*lamda);
ve=((b1-mu)*((b1*lamda+a1*mu-
a1*b1+sqrt((b1*lamda+a1*mu-
a1*b1)^2+4*b1*lamda*a1*mu*m1))/(2*b1*lamda))-
(mu*m1))/(mu*lamda);
we=0;
plot3(u,v,w,'r*','LineWidth',1.5);%plot E_2
plot3(ue,ve,we,'b*','LineWidth',1.5); %plot E_3
plot3(1,0,0,'g*','LineWidth',1.5); %plot E_1
plot3(0,0,0,'r*','LineWidth',1.5); %plot E_0
axis square
grid on;

```

