BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Matriks

Matriks menurut Anton (2000) adalah susunan bilangan berbentuk segi empat. Bilangan-bilangan dalam susunan itu disebut anggota dalam matriks tersebut. Sebuah matriks dengan hanya satu kolom disebut matriks kolom atau vektor kolom, dan sebuah matriks dengan hanya satu baris disebut matriks baris atau vektor baris. Secara umum matriks dituluskan sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

2.2 Model Transportasi

Misalkan $S_i$adalah jumlah hasil produksi yang tersedia di pusat pengadaan i dan $D_j$adalah jumlah hasil produksi yang diminta tempat tujuan, maka kondisi keseimbangan masalah transportasi ditunjukkan sebagai (Bronson, 1995).

$$\sum_{i=1}^{m} S_i = \sum_{j=1}^{n} D_j$$

Masalah transportasi dapat ditempatkan dalam bentuk tabel yang dinamakan tabel transportasi. Tabel ini memuat sisi persedian (sumber) dan sisi permintaan (tujuan), kapasitas persedian dan jumlah permintaan, serta biaya transportasi dari masing-masing tujuan.

Bentuk tabel transportasi sebagai berikut

Tabel 2.1. Tabel Transportasi Umum (Mulyono,1991)

Dari \ Ke	1	…	J	…	N	Supply
1	x_{11} c_{11}	…	x_{1j} c_{1j}	…	x_{1n} c_{1n}	S_1
⋮	⋮		⋮		⋮	⋮
I	x_{i1} c_{i1}	…	x_{ij} c_{ij}	…	x_{in} c_{in}	S_i
⋮	⋮		⋮		⋮	⋮
M	x_{m1} c_{m1}	…	x_{mj} c_{mj}	…	x_{mn} c_{mn}	S_m
Demand	D_1	…	D_j	…	D_n	

2.3 Program Linier (*Linear Programming*)

Program Linear adalah salah satu teknik penyelesaian riset operasi yang secara khusus menyelesaikan masalah–masalah optimasi (memaksimalkan atau meminimumkan) tetapi hanya terbatas pada masalah–masalah yang dapat diubah menjadi fungsi linear. Demikian pula kendala–kendala yang digunakan juga berbentuk linear. Masalah program linear tidak lain adalah optimasi bersyarat, yakni pencarian nilai maksimum (*maximize*) atau pencarian nilai minimum (*minimize*) suatu fungsi sasaran berkenaan dengan keterbatasan–keterbatasan atau kendala yang harus dipenuhi (Dumairy, 1999).

Program secara formal suatu program linear adalah masalah optimasi dengan bentuk meminimumkan atau memaksimumkan.

Memaksimumkan : $Z = c^T x,$ di mana $x \in R^n, c \in R^n$

dengan kendala $Ax \leq b, A \in R^{mxn}$, dan $b \in R^m$

$x \geq 0, x \in R^n$

Meminimumkan : $Z = c^T x,$ di mana $x \in R^n, c \in R^n$

dengan kendala $Ax \geq b, A \in R^{mxn}$, dan $b \in R^m$

$x \geq 0, x \in R^n$

(Lejasa, 2009)

2.4 Crisp

Dalam himpunan tegas (*crisp*), keanggotaan suatu unsur di dalam himpunan dinyatakan secara tegas, apakah obyek tersebut anggota himpunan atau bukan.

Menurut Kusumadewi dan Purnomo (2004), pada himpunan tegas (*crisp*), nilai keanggotaan suatu item x dalam suatu A, ditulis dengan $\mu_A(x)$ memiliki dua kemungkinan, yaitu :

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, x \in A \\ 0, x \notin A \end{cases}$$

2.5 Logika Fuzzy

Fuzzy berarti samar, kabur atau tidak jelas. Fuzzy adalah istilah untuk menyatakan kelompok atau himpunan yang dapat dibedakan dengan kelompok lain berdasarkan derajat keanggotaan yang kabur, bukan berdasarkan logika biner yang hanya membedakan antara 0 dan 1 secara tegas.

Logika fuzzy adalah suatu cara yang tepat untuk memetakan suatu ruang input ke dalam suatu output. Pada logika klasik, nilai kebenaran proposisi adalah 1 atau 0. Tetapi pada logika fuzzy, nilai kebenaran propisisi adalah nilai riil di dalam selang [0,1] (Kusumadewi dan Purnomo,2004).

2.6 Himpunan Fuzzy

Pada himpuan fuzzy nilai keanggotaan terletak pada rentang 0 sampai 1. Apabila x memiliki nilai keanggotaan fuzzy $\mu_A[x] = 0$ berarti x tidak menjadi anggota himpunan A, demikian pula apabila x memiliki nilai keanggotaan fuzzy $\mu_A[x] = 1$ berarti x menjadi anggota penuh pada himpunan A.

Himpunan fuzzy memilki 2 atribut, yaitu :

1. Linguistik, yaitu penamaan suatu grup yang mewakili suatu keadaan atau kondisi tertentu dengan menggunakan bahasa alami.
2. Numeris, yaitu suatu nilai (angka) yang menunjukkan ukuran dari suatu variabel (Kusumadewi dan Purnomo,2004).

2.7 Fungsi Keanggotaan Fuzzy

Menurut Kusumadewi dan Purnomo (2004), fungsi keanggotaan (membership function) adalah suatu kurva yang menunjukkan pemetaan titik-titik input data ke dalam nilai keanggotaannya (sering juga disebut derajat keanggotaan) yang memiliki interval antara 0 sampai 1. Cara yang dapat digunakan untuk mendapatkan nilai keanggotaan adalah dengan melakukan pendekatan fungsi. Fungsi keanggotaan yang digunakan adalah sebagai berikut.

2.7.1 Representasi Linear

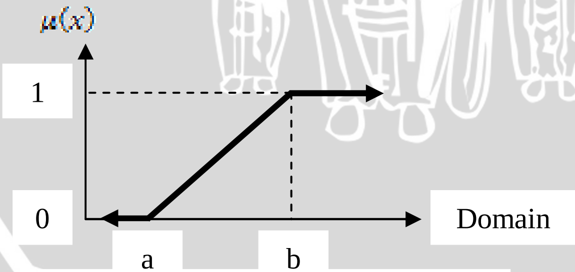
Pada representasi linear, pemetaan input ke derajat keanggotaanya digambarkan sebagai suatu garis lurus. Ada dua keadaan fuzzy yang linear, yaitu : (Kusumadewi dan Purnomo, 2004)

2.7.1.1 Representasi Linear Naik

Kenaikan himpunan fuzzy dimulai pada nilai domain yang memiliki derajat keanggotaan nol bergerak ke kanan menuju ke nilai tinggi. Fungsi keanggotaan representasi linear naik didefinisikan sebagai berikut.

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

Grafik representasi linear naik dapat dilihat pada Gambar 2.1 berikut



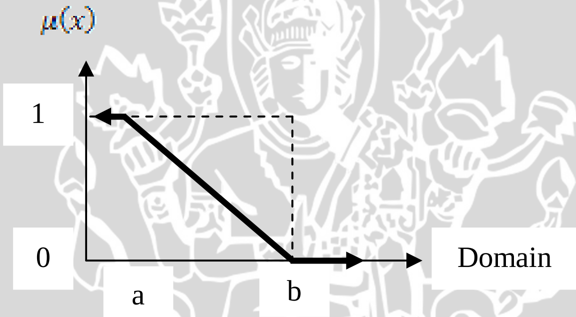
Gambar 2.1 Representasi Naik

2.7.1.2 Representasi Linear Turun

Garis lurus dimulai dari nilai domain dengan derajat keanggotaan tertinggi pada sisi kiri, kemudian bergerak menurun ke nilai domain yang memiliki derajat keanggotaan lebih rendah. Fungsi keanggotaan representasi linear turun didefinisikan sebagai berikut.

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & x > b \\ \dfrac{b-x}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & x < a \end{cases}$$

Grafik representasi linear turun dapat dilihat pada Gambar 2.2.



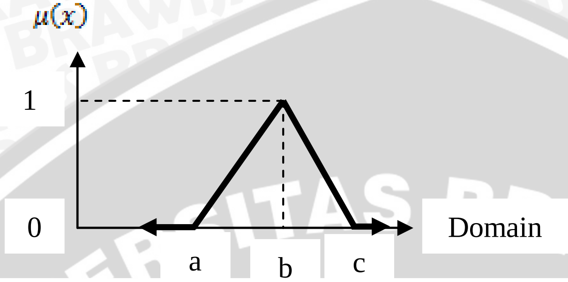
Gambar 2.2 Representasi Turun

2.7.1.3 Representasi Kurva Segitiga

Kurva segitiga pada dasarnya merupakan gabungan antara dua garis (linear). Fungsi keanggotaan segitiga didefinisikan sebagai berikut.

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \text{ atau } x > c \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a < x \leq b \\ \dfrac{c-x}{c-b}, & b < x \leq c \end{cases}$$

Grafik representasi kurva segitiga dapat dilihat pada Gambar 2.3 berikut.



Gambar 2.3 Representasi Kurva Segitiga

2.8 Pendekatan Vogel (Vogel Approximation Method)

Metode Pendekatan Vogel diperkenalkan oleh WR. Vogel tahun 1948. Prinsip dari metode ini adalah memilih harga-harga ongkos terkecil tiap-tiap baris kemudian menghitung selisih antara ongkos terkecil tersebut dengan ongkos terkecil berikutnya. Dalam hal ini yang selisihnya nol tidak diperhatikan. Hal yang sama diperlakukan terhadap kolom. Bilangan-bilangan selisih tersebut dikenal dengan *bilangan Vogel*.

VAM bersifat heuristik dan biasanya memberikan solusi awal yang lebih baik dibandingkan metode lainnya. Aplikasi dari VAM terhadap masalah yang diberikan tidak menjamin sebagai solusi optimal yang akan dihasilkan. Pada kenyataannya, VAM menghasilkan hasil optimal atau mendekati solusi optimum awal terhadap masalah transportasi dengan ukuran kecil. VAM berdasar pada konsep biaya penalti. Biaya penalti adalah selisih antara sel biaya terbesar dengan sel biaya terbesar setelahnya pada baris atau kolom. VAM memberikan sebanyak mungkin pada sel biaya minimum pada baris atau kolom dengan biaya penalti terbesar. Metode ini menghasilkan solusi yang optimum atau mendekati hasil optimum pada masalah transportasi dengan skala kecil (Serdar dan Serkan, 2011).

Metode pendekatan Vogel (VAM) menganalisa perbedaan antara sel dengan biaya terkecil dalam setiap baris dan setiap kolom untuk menghilangkan biaya yang terbesar. Langkah-langkah metode pendekatan Vogel adalah

1. menghitung nilai perbedaan antara 2 biaya terkecil dalam setiap baris dan setiap kolom. Melakukan hal yang sama untuk setiap kolomnya
2. menentukan baris atau kolom yang mempunyai angka perbedaan terbesar (jika biaya yang sama lebih dari satu, dipilih sembarang) dan dialokasikan sebanyak-banyaknya pada sel yang mempunyai biaya terkecil pada baris atau kolom tersebut. Jika hanya ada satu sel sisa dalam suatu baris atau kolom, dipilih sel tersebut dan alokasikan sebanyak yang diperlukan tanpa melanggar persediaan atau permintaan yang ada pada baris dan kolom tersebut
3. untuk sel-sel yang belum terisi dilakukan perhitungan perbedaan yang baru pada tiap kolom dan tiap baris. Kemudian dipilih perbedaan yang terbesar dan alokasikan sebanyak-banyaknya pada sel yang memiliki biaya terkecil pada baris atau kolom tersebut, tanpa melanggar batasannya
4. mengulangi langkah 3 sehingga semua permintaan dan persediaan terpenuhi (Agustini, 2004).

2.9 Metode *Improved Version of Vogel's Approximation Method* (IVAM)

Masalah ekonomi yang dihadapi oleh manusia mendorong manusia untuk selalu bersikap rasional dalam menentukan berbagai pilihan, agar sumber daya alam yang dimilikinya dapat digunakan untuk memuaskan kebutuhan hidup dengan semaksimal mungkin. Dalam ekonomi dikenal dengan istilah biaya peluang (*Opportunity Cost*). Biaya peluang adalah biaya yang timbul akibat memilih sebuah peluang terbaik dari berbagai alternatif yang tersedia. Ketika seseorang dihadapkan pada beberapa alternatif pilihan dan harus memilih salah satu diantaranya maka alternatif yang tidah dipilihnya itulah yang menjadi biaya peluang. Sama halnya yang terjadi pada salah satu faktor produksi yaitu tenaga kerja. Jika seorang pekerja mengambil salah satu kesempatan atau peluang untuk melakukan suatu produksi maka secara bersamaan dia akan kehilangan peluang untuk melakukan produksi di bidang lain. Kehilangan kesempatan itulah yang disebut *opportunity cost* atau biaya peluang (Serdar dan Serkan, 2011).

Improved version of Vogel's Approximation Method (IVAM) adalah salah satu variasi dari metode *Vogel Approximation Method* (VAM). Metode ini menggunakan konsep matriks *Total Opportunity Cost* (TOC) dengan tujuan mendapatkan solusi cepat yang optimal.

Awalnya matriks biaya diubah menjadi matriks *opportunity cost* dengan memilih elemen terkecil dari matriks biaya mula-mula untuk mengurangi seluruh elemen (bilangan) dalam setiap baris sehingga didapatkan matriks biaya yang telah dikurangi (*reduced cost matriks*). *Reduced cost matriks* di atas terus dikurangi untuk mendapatkan matriks TOC. Hal ini dapat dicapai dengan memilih elemen terkecil dari setiap kolom pada *Reduced cost matriks* untuk mengurangi seluruh elemen dalam kolom tersebut.

2.10 Model Transportasi Fuzzy

Parameter-parameter pada model transportasi adalah biaya, nilai permintaan, dan nilai penawaran. Pada prakteknya, parameter-parameter ini tidak dapat diketahui dengan pasti. Apabila hal ini terjadi, maka salah satu solusinya dapat dicari dengan menggunakan operasi himpunan fuzzy. Pada masalah transportasi fuzzy biaya transportasi sudah pasti diketahui pasti, sedangkan jumlah permintaan dan penawaran masih belum diketahui dengan jelas atau bernilai fuzzy. Model transportasi fuzzy dapat dirumuskan sebagai berikut :
Fungsi tujuan

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} \, \tilde{x}_{ij}$$

Dengan kendala

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{x}_{ij} \leq \tilde{a}_i \quad ; i = 1,2, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} \tilde{x}_{ij} \leq \tilde{b}_j \quad ; j = 1,2, \dots, m$$

$$\tilde{x}_{ij} \geq 0 \; ; i = 1,2, \dots, m \; and \; j = 1,2, \dots, n$$

Keterangan :

C_{ij} adalah biaya pengangkutan per unit produk $\tilde{x}_{ij}$.
$\tilde{a}_i$ adalah banyaknya komoditi yang tersedia di sumber i dengan bernilai fuzzy.
$\tilde{b}_j$ adalah banyaknya komoditi yang dibutuhkan di sumber j dengan bernilai fuzzy.
$\tilde{x}_{ij}$ adalah banyaknya komoditi yang diangkut dari sumber i menuju tujuan j dengan bernilai fuzzy (Kusumadewi dan Purnomo,2004).

2.11 Transformasi *Interval Transprtation* ke *Clasiccal Transportation.*

Misalkan ada suatu permasalahan transportasi dengan nilai permintaan dan *supply* berbentuk interval sebagai berikut (Chanas dkk,1998) :

$$\min\ c(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

Dengan batasan :

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \epsilon \left[a_i^1, a_i^2\right]; i = 1,2,\dots,m$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \epsilon \left[b_j^1, b_j^2\right]; j = 1,2,\dots,n$$

$$x_{ij} \geq 0\ integer$$

Masalah diatas dapat ditransformasikan ke bentuk *classical transportation* dengan menambah beberapa nilai *dummy* pada sumber dan tujuan sehingga diperoleh (2m+1) sumber dan (2n+1) tujuan, dengan nilai *supply* a_i, i=1,2,…,2m+1 dan nilai permintaan (*demand*) b_j, j=1,2,…,2n+1 sebagai berikut :

$$a_j = a_j^1; i = 1,2,\dots,m$$

$$a_j = a_{j-m}^2 - a_{j-m}^1; i = m+1, m+2, \dots, 2m$$

$$a_{2m+1} = \sum_{j=1}^{n}\left(b_j^2 - b_j^1\right)$$

$$b_j = b_j^1; j = 1,2,\dots,n$$

$$b_j = b_{j-n}^2 - b_{j-n}^1; j = n+1, n+2, \dots, 2n$$

$$b_{2n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i^2 - \sum_{j=1}^{n} b_i^1$$

Koefisien biaya d_{ij} adalah:

$d_{ij} = c_{ij}; \quad i = 1,2, \dots, m; j = 1,2, \dots, n$

$d_{ij} = c_{i-m,j}; \quad i = m+1, m+2, \dots, 2m; j = 1,2, \dots, n$

$d_{ij} = c_{i,j-n}; \quad i = 1,2, \dots, m; j = n+1, n+2, \dots, 2n$

$d_{ij} = c_{i-m,j-n}; \quad i = m+1, m+2, \dots, 2m; j = n+1, n+2, \dots 2n$

$d_{i,2n+1} = M; \quad M = bilangan\ yang\ sangat\ besar; i = 1,2, \dots, m$

$d_{i,2n+1} = 0; \quad i = m+1, m+2, \dots, 2m$

$d_{2m+1,j} = M; \quad M = bilangan\ yang\ sangat\ besar, j = 1,2, \dots, n$

$d_{2m+1,j} = 0; \quad j = n+1, n+2, \dots, 2n$

2.12 *Fuzzy Integer Transportation Problem*.

Salah satu penggunaan logika fuzzy untuk transportasi, diusulkan oleh Chanas pada tahun 1998. Pada model Chanas, besarnya biaya ditetapkan secara eksak, sedangkan jumlah permintaan dan *supply* masih belum diketahui dengan jelas. Pada masalah transportasi klasik dengan permintaan dan *supply* yang bernilai integer akan selalu menghasilkan solusi yang juga eksak. Menurut Chanas dibutuhkan algoritma khusus untuk mendapatkan suatu nilai integer yang optimal pada *Fuzzy Integer Transportation Problem* (Kusumadewi dkk, 2004).