EPQ (*ECONOMIC PRODUCTION QUANTITY*) DENGAN *BACKORDER* PARSIAL DAN FASE YANG BERGANTUNG PADA LAJU *BACKORDER*

SKRIPSI

Oleh :
SHOLIHATUL LAILI
0810940067-94

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUANALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2013

EPQ(*ECONOMIC ORDER QUANTITY*) *BACKORDER* PARSIAL DENGAN FASE YANG BERGANTUNG PADA LAJU *BACKORDER*

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

oleh:
SHOLIHATUL LAILI
0810940067-94

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2013

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

EPQ(*ECONOMIC ORDER QUANTITY*) *BACKORDER* PARSIAL DENGAN FASE YANG BERGANTUNG PADA LAJU *BACKORDER*

Oleh:
SHOLIHATUL LAILI
0810940067-94

Setelah dipertimbangan di depan Majelis Penguji
pada tanggal 23 Agustus 2013
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

DOSEN PEMBIMBING

Prof. Dr. Marjono, M.Phil
NIP. 196211161988031004

MENGETAHUI,
KETUA JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MIPA UNIVERSITAS BRAWIJAYA

Dr. Abdul Rouf Alghofari, M.Sc.
NIP. 196709071992031001

LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	**: SHOLIHATUL LAILI**
Nim	**: 0810940067**
Jurusan	**: Matematika**
Penulis skripsi berjudul	**: EPQ(*Economic Order Quantity*) *Backorder* Parsial dengan Fase yang Bergantung pada Laju *Backorder***

Dengan ini menyatakan bahwa:

1. **Skripsi ini adalah benar-benar karya saya sendiri, dan bukan hasil plagiat dari karya orang lain. Nama-nama yang tercantum dalam skripsi ini, semata-mata digunakan sebagai acuan atau referensi.**
2. **Apabila kemudian hari diketahui bahwa isi skripsi yang saya tulis merupakan hasil plagiat, maka saya bersedia menanggung akibat hukum dari keadaan tersebut.**

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 23 Agustus 2013
Yang menyatakan,

(SHOLIHATUL LAILI)
NIM.0810940067-94

EPQ(*Economic Order Quantity*) *Backorder* Parsial dengan Fase yang Bergantung pada Laju *Backorder*

ABSTRAK

Pada skripsi ini dibahas dua model matematika, yaitu model EPQ *backorder* parsial dan model EPQ *backorder* parsial dengan fase yang bergantung pada laju *backorder*. Kedua model tersebut dikembangkan untuk sistem persediaan suatu perusahaan yang tidak dapat memenuhi permintaan konsumen. Adanya persediaan yang tidak mencukupi kebutuhan, mengakibatkan perusahaan mengalami kekurangan persediaan. Dalam kondisi tersebut, konsumen berhak memilih untuk menunggu atau tidak menunggu pesanannya dipenuhi oleh perusahaan. Ketika konsumen tidak bersedia menunggu, memungkinkan perusahaan mengalami kerugian karena biaya penjualan yang hilang dan tidak ada kekurangan persediaan. Ketika konsumen bersedia menunggu pesanan, perusahaan memenuhinya dengan cara *backorder*. Model EPQ *backorder* parsial digunakan ketika konsumen bersedia menunggu pesanan. Sedangkan pada saat menunggu pesanan dipenuhi oleh perusahaan, terdapat kemungkinan adanya penambahan tingkat *stockout* atau pesanan yang belum bisa dipenuhi. Model EPQ *backorder* parsial dengan fase yang bergantung pada laju *backorder* merupakan bentuk pengembangan dari model EPQ backorder parsial untuk mengatasi kemungkinan ini. Model ini juga memberikan total biaya persediaan optimal.

Kata Kunci : Model persediaan EPQ dasar, EPQ *backorder* parsial, penjualan yang hilang, kekurangan persediaan

EPQ(*Economic Order Quantity*) *Backorder* Parsial dengan Fase yang Bergantung pada Laju *Backorder*

ABSTRACT

In this final project two kinds of mathematic models are studied, there are partial backorder EPQ model, and EPQ with partial backorder and phase-dependent backordering rate model. Both of them are developed for inventory system of company that can't fulfill consumer's demand. There is not sufficient inventory, resulting in companies stockout. In this condition, consumers have the right still waiting their orders are filled by company or not. And when the consumers are not willing to wait it may cause financial loss towards the company because of lost sales and have no stockout. When consumers are willing to wait their order, the company will fulfill it by backorder. Partial backorder EPQ model is applied when the consumer are willing to wait for order. When the consumer waiting for the order fulfilled, there is assumed that stockout will increase. EPQ with partial backorder and phase-dependent backordering rate was developed from Partial backorder EPQ model. This model gives optimum inventory cost total too.

Keyword : Basic EPQ inventory model, partial backorder EPQ model, lost sales, stockout

KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa, atas nikmat dan karunia-Nya, sehingga dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "**EPQ(*Economic Order Quantity*) *Backorder* Parsial dengan Fase yang Bergantung pada Laju *Backorder***".

Pada kesempatan ini penulis mengucapkan banyak terima kasih atas segala bantuan tenaga maupun materi dalam penyusunan skripsi.

1. Prof. Dr. Marjono, M.Phil selaku pembimbing atas segala bimbingan, nasehat dan inspirasi yang telah diberikan selama penulisan skripsi ini.
2. Drs. Imam Nurhadi P., M.T dan Prof. Dr. Agus Widodo M.Kes selaku dosen penguji I dan penguji II atas segala saran yang diberikan untuk perbaikan skripsi ini.
3. Dr. Abdul Rouf A, M.Sc., selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Brawijaya.
4. Dr. Sobri Abusini, M.T., selaku Ketua Program Studi Matematika, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Brawijaya.
5. Segenap Bapak dan Ibu dosen yang telah mendidik dan mengajarkan ilmunya kepada penulis selama menempuh pendidikan di Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Brawijaya.
6. Segenap staf dan karyawan Jurusan Matematika Universitas Brawijaya yang telah membantu penyusunan skripsi ini.
7. UD. Cik-Cik *Collection* atas bantuannya dalam memberikan data untuk studi kasus dalam penulisan skripsi ini.
8. Ibunda Sri Atikah dan Ayahanda Musliman beserta adik yang selalu mengiringi penulis dengan segala doa, nasehat, perhatian, motivasi, dan kasih sayang serta dukungan hingga terselesaikannya skripsi ini.
9. Bapak H. Gatot Sutrisno, SH dan Ibu Dra. Rukiyati beserta seluruh penghuni rumah Jalan Bantaran Barat II No. 3, Chandra, Agung, Nila, Mbak Sopik, Mas Riyan atas bantuan serta dukungan selama pengerjaan skripsi ini.

10. Semua teman-teman Jurusan Matematika angkatan 2008, khususnya Ajeng, Resti, Rizkyta, Mega, Medya, Eka, Syiva, Nisa atas do’a, bantuan, dukungan, dan semangat yang diberikan kepada penulis.
11. Seluruh pihak yang tidak dapat disebut secara langsung yang telah memberikan bantuan demi terselesaikannya skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa masih banyak kekurangan dalam penulisan skripsi ini yang disebabkan oleh keterbatasan kemampuan dan pengalaman. Oleh karena itu, Penulis sangat menghargai saran dan kritik yang bersifat membangun demi perbaikan penulisan dan isi penelitian melalui *email* penulis sholihatullaili@gmail.com.

Penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi pembaca dan untuk pengembangan penulisan skripsi selanjutnya.

Malang,23 Agustus 2013

Penulis

DAFTAR ISI

Halaman

BAB V KESIMPULAN DAN SARAN

DAFTAR PUSTAKA

DAFTAR GAMBAR

Halaman

DAFTAR TABEL

DAFTAR LAMPIRAN

DAFTAR NOTASI

Γ	: total biaya persediaan model EPQ *backorder* parsial dengan fase yang bergantung pada laju *backorder*
s	: harga jual per unit
C_0	: biaya *set up* per periode
C_p	: biaya produksi per periode
C_h	: biaya penyimpanan per periode
C_b	: biaya *backorder* per periode
C_g	: biaya *goodwill loss* per periode
C_1	: biaya *lost sales* per periode
$\bar{I}$	: tingkat persediaan rata-rata
$\bar{B}$	: tingkat *backorder* rata-rata
β	: nilai parameter *stockout* yang menyebabkan *backorder*
F	: tingkat pengisian persediaan yang diisi dari perusahaan
Q	: kuantitas produksi
S	: tingkat *stockout* maksimum
I	: tingkat persediaan maksimum
t_1	:periode waktu ketika terjadi produksi dan permintaan konsumen yang tidak dapat dipenuhi akan *backorder*
t_2	: periode waktu *backorder* tidak sepenuhnya terjadi
t_3	: periode waktu mulainya produksi
t_4	: periode waktu saat produksi berhenti
P	: jumlah produksi tiap periode
D	: jumlah permintaan tiap periode produksi
T	: waktu optimal periode produksi
ρ	: ratio tingkat *stockout* antara β_2 dan β_1
β_1	: frase *stockout* ketika produksi belum dimulai
β_2	: frase *stockout* ketika produksi dimulai
μ	:biaya persediaan model EPQ *backorder* parsial
B	: tingkat *backorder* maksimum

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Persediaan merupakan sumberdaya menganggur (*idle resources*) yang menunggu proses lebih lanjut. Yang dimaksud dengan proses lebih lanjut yaitu, misalnya berupa kegiatan produksi pada sistem manufaktur, kegiatan pemasaran pada sistem distribusi ataupun kegiatan pangan pada sistem rumah tangga.

Persediaan dalam suatu unit usaha dapat dikategorikan sebagai modal kerja yang berbentuk barang. Keberadaannya di satu sisi dianggap sebagai pemborosan, tetapi di sisi lain juga dianggap sebagai aset yang sangat diperlukan untuk menjamin kelancaran pemenuhan permintaan. Jumlah persediaan yang tidak tepat dapat merugikan perusahaan. Persediaan yang terlalu banyak dapat meningkatkan biaya penyimpanan. Sebaliknya, jika persediaan terlalu sedikit, maka dapat meningkatkan biaya kekurangan persediaan.

Kekurangan persediaan dalam suatu perusahaan mengakibatkan tidak terpenuhinya permintaan sehingga dapat mengecewakan pelanggan dan apabila tidak segera ditangani, pelanggan akan beralih ke perusahaan lainnya. Setiap perusahaan memiliki cara yang berbeda dalam mengisi persediaan. Jika pola kedatangan barang pesanan dilakukan secara langsung, maka model ini disebut EOQ (*Economic Order Quantity*), sedangkan penambahan persediaan yang dilakukan secara bertahap disebut dengan model EPQ (*Economic Production Quantity*).

Backorder adalah permintaan yang belum dapat dipenuhi pada periode sekarang, tetapi kemudian dapat dipenuhi pada periode berikutnya. Di dalam situasi yang bersifat *backorder,* suatu perusahaan tidak kehilangan penjualan ketika persediaan habis, karena konsumen mau menunggu pesanannya terpenuhi pada tahap produksi selanjutnya. Perusahaan yang tidak mampu memenuhi permintaan konsumen karena kekurangan persediaan akan melakukan suatu penawaran kepada konsumen untuk menunggu atau tidak menunggu pesanan tersebut terpenuhi, kondisi ini disebut *backorder* parsial. Jika konsumen bersedia menunggu, maka perusahaan mengalami kekurangan persediaan (*stockout*) dan memenuhinya dengan cara *backorder*, sedangkan jika konsumen tidak bersedia menunggu, maka perusahaan akan mengalami penjualan hilang (*lost sales*). Hal ini dipengaruhi oleh kondisi β yaitu tingkat *stockout* yang menyebabkan perusahaan akan *backorder* atau tidak.

Skripsi ini merupakan pengembangan dari skripsi Optmasi Biaya Pada Model Determenistik EPQ dengan *Backorder* Parsial (Pratiwi, 2012). Skripsi Pratiwi membahas tentang optimasi biaya persediaan pada model EPQ *backorder* parsial di mana konsumen bersedia menunggu pesanannya terpenuhi ketika terjadi *stockout*. Sedangkan skripsi ini mengasumsikan adanya kemungkinan bahwa permintaan konsumen ketika perusahaan kehabisan barang (*stockout)* yang dilambangkan dengan β akan bertambah sebesar ρ ketika kegiatan produksi dimulai. Dengan batasan nilai $(0 \leq \beta \leq 1)$ dan nilai $(1 \leq \rho \leq \frac{1}{\beta})$. Pada Skripsi ini akan ditunjukkan pula bagaimana model-model sebelumnya (Pratiwi, 2012) masih sesuai untuk menentukan nilai keputusan yang optimal dengan asumsi baru ini agar total biaya persediaan tetap optimal.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang permasalahan, maka rumusan masalah dari skripsi ini adalah:

1. Bagaimana rumusan model determenistik EPQ *backorder* parsial dan EPQ dengan *backorder* parsial dan fase yang bergantung pada laju *backorder*?
2. Bagaimana pengaruh rasio tingkat *stockout* (ρ)dan perbandingan hasil biaya optimal untuk kedua model secara analitik?

3. Bagaimana penerapan model EPQ dengan *backorder* parsial dan fase yang bergantung pada laju *backorder* pada UD. Cik-Cik *Collection*?

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah yang menjadi asumsi di dalam Skripsi ini antara lain:

1. Satu jenis produk,
2. Pembelian dengan jumlah berapapun harga tetap sama,
3. Data yang digunakan dalam Skripsi ini adalah data historis mulai Januari 2013 sampai dengan Juni 2013,
4. Tingkat *stockout* (β) konstan, $0 < \beta \leq 1$,
5. Rasio tingkat *stockout* (ρ) antara β_2 dan β_1 adalah $1 \leq \rho \leq 1/\beta$,
6. Satuan waktu yang digunakan adalah 30 hari produksi.

1.4 Tujuan

Tujuan yang akan dicapai dalam Skripsi ini adalah sebagai berikut:

1. Merumuskan model determenistik EPQ *backorder* parsial dan EPQ dengan *backorder* parsial dan fase yang bergantung pada laju *backorder*.
2. Mengetahui pengaruh penambahan permintaan ketika *stockout* (ρ) dan perbandingan hasil biaya optimal untuk kedua model secara analitik.
3. Mengetahui penerapan model EPQ dengan *backorder* parsial dan fase yang bergantung pada laju *backorder* pada UD. Cik-Cik *Collection*.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Persediaan

Persediaan dapat diartikan sebagai penyimpanan barang-barang yang akan digunakan pada periode yang akan datang. Sementara itu, pengendalian persediaan adalah suatu usaha dalam menentukan tingkat komposisi bahan yang optimal dalam menunjang kelancaran dan efektivitas serta efisiensi dalam kegiatan perusahaan (Ristono, 2009).

2.2 Jenis Persediaaan

Setiap jenis persediaan memiliki karakteristik dan cara pengolahan yang berbeda. Berdasarkan jenis barang dalam persediaan, persediaan terdiri dari beberapa jenis, yaitu (Rangkuti, 2004)

1. persediaan bahan mentah (*raw material*) yaitu persediaan barang-barang yang digunakan dalam proses produksi,
2. persediaan komponen-komponen rakitan (*purchased parts/components*) yaitu persediaan barang-barang yang tersedia dari komponen-komponen yang diperoleh dari perusahaan baik secara langsung dapat dirakit menjadi suatu hasil produksi,
3. persediaan bahan pembantu atau penolong (*supplies*) yaitu persediaan barang-barang yang diperlukan dalam proses produksi, tetapi bukan merupakan bagian dari barang jadi,
4. persediaan barang dalam proses (*work in process*) yaitu persediaan barang-barang yang terdapat di tiap-tiap bagian dalam proses produksi atau yang telah diolah menjadi suatu bentuk, tetapi perlu diproses lebih lanjut menjadi barang jadi, dan,
5. persediaan barang jadi (*finished goods*) yaitu persediaan barang-barang yang telah selesai diproses dan siap dijual kepada konsumen.

2.3 Tujuan Persediaan

Suatu pengendalian persediaan yang dijalankan oleh perusahaan pasti mempunyai tujuan-tujuan tertentu. Tujuan pengendalian persediaan adalah

1. memenuhi kebutuhan atau permintaan konsumen dengan cepat,
2. menjaga kelancaran proses produksi atau menjaga agar perusahaan tidak mengalami kekurangan persediaan yang mengakibatkan terhentinya proses produksi,
3. mempertahankan dan meningkatkan penjualan serta laba perusahaan,
4. menjaga supaya pembelian secara kecil-kecilan dapat dihindari, karena dapat mengakibatkan ongkos pesan menjadi lebih besar, dan,
5. menjaga supaya tidak terjadi penyimpanan secara besar-besaran, karena hal tersebut mengakibatkan ongkos pesan menjadi lebih besar.

Dari beberapa tujuan pengendalian tersebut, dapat disimpulkan bahwa tujuan pengendalian persediaan adalah untuk menjamin terdapatnya persediaan sesuai kebutuhan (Ristono, 2009)

2.4 Biaya persediaan

Menurut (Ristono, 2009), biaya persediaan terbagi menjadi empat macam, yaitu:

1. Biaya pembelian (*purchase cost*)

Biaya pembelian adalah harga per unit apabila *item* di beli dari pihak luar, atau biaya produksi per unit apabila di produksi dalam perusahaan atau dapat dikatakan bahwa biaya pembelian adalah semua biaya yang digunakan untuk membeli suku cadang.

2. Biaya pemesanan atau biaya persiapan (*order cost/set up cost*)

Ordering cost adalah biaya yang dikeluarkan sehubungan dengan pemesanan barang ke *supplier*. Biaya pemesanan adalah biaya yang berasal dari pembelian pesanan (*set up cost*) untuk suatu hasil produksi yang diproduksi di dalam perusahaan atau dapat dikatakan bahwa biaya pemesanan adalah biaya yang dikeluarkan pada saat mendatangkan barang.

3. Biaya simpan (*carrying cost/holding cost/storage cost*)

Biaya simpan adalah biaya yang dikeluarkan atas investasi dalam persediaan dan pemeliharaan maupun investasi sarana fisik untuk menyimpan persediaan. Biaya simpan dapat pula diartikan sebagai semua biaya yang timbul akibat penyimpanan barang. Sementara itu, *storage cost* adalah biaya yang dikeluarkan sehubungan dengan penyimpanan barang di gudang.

4. Biaya kekurangan persediaan *(stockout cost)*

Biaya kekurangan persediaan adalah biaya yang ditimbulkan sebagai akibat terjadinya persediaan yang lebih kecil dari jumlah yang diperlukan atau biaya yang timbul apabila persediaan di gudang tidak dapat mencukupi permintaan.

2.5 Model Persediaan

Model persediaan merupakan suatu model matematika yang berhubungan dengan biaya total sistem pengendalian persediaan dengan fungsi parameter-parameter yang dapat dikendalikan yang bertujuan untuk meminimalkan biaya total sistem pengendalian persediaan. Model-model tersebut diperlukan untuk memecahkan persoalan yang timbul dalam pengendalian persediaan (Waters, 1992).

Model-model persediaan dapat digolongkan menjadi dua yaitu:

1. Model deterministik

Model deterministik merupakan suatu model dimana semua parameter-parameter yang ada dianggap telah diketahui dengan pasti. Dalam model deterministik tersebut diasumsikan bahwa permintaan (*demand*) dan periode datangnya pesanan (*lead time*) dapat diketahui secara pasti.

2. Model probabilistik

Pada model probabilistik lingkungan yang membentuk parameter-parameter tidak dapat dianggap deterministik sepenuhnya atau tidak dapat ditentukan secara pasti, melainkan lebih bersifat probabilistik. *Lead time* atau periode datangnya pesanan seringkali tidak dapat dipastikan.

2.6 Model EOQ (*Economic Order Quantity*)

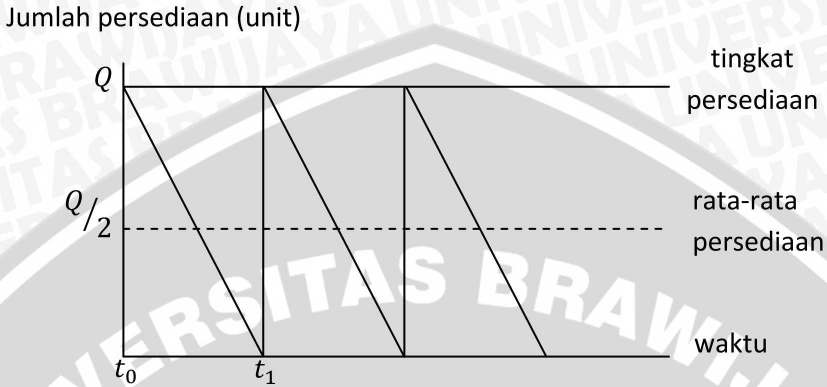
EOQ merupakan salah satu model klasik determenistik dan independent yang pertama kali muncul dan dikenalkan oleh Wilson. Model ini diarahkan untuk menemukan jumlah pesanan yang ekonomis, yaitu jumlah pesanan yang memenuhi total biaya persediaan minimal dengan mempertimbangkan biaya pemesanan dan penyimpanan, sehingga diharapkan tidak akan ada kekurangan persediaan (Ristono, 2009)

Model persediaan yang sederhana ini memakai asumsi-asumsi:

1. Hanya ada satu item barang yang diperhitungkan.
2. Permintaan bersifat determenistik dan tetap.
3. Barang yang dipesan diasumsikan dapat segera tersedia.
4. Pengadaan sekaligus, yaitu setiap pemesanan diterima dalam sekali pengiriman dan langsung dapat digunakan.
5. *Lead time* atau waktu menunggu kedatangan barang diketahui dan bersifat konstan.
6. Tidak ada pesanan ulang (*backorder*) karena kehabisan persediaan.
7. Struktur biaya tidak berubah, di mana harga per unit barang adalah tetap dan biaya pemesanan serta penyimpanan adalah tetap.
8. Kapasitas gudang dan modal cukup untuk menampung dan membeli pesanan.
9. Tidak ada *quantity discount*.
10. Biaya variable hanya terdiri dari *set up cost* dan *holding cost.*
11. *Stockout* harus dihindari dengan menjaga kedatangan barang yang tepat waktu.

Tujuan model ini adalah untuk menentukan jumlah ekonomis setiap kali pemesanan (EOQ) sehingga meminimasi biaya total persediaan di mana:

Biaya total = Biaya pemesanan + Biaya penyimpanan (Nasution, 1999)

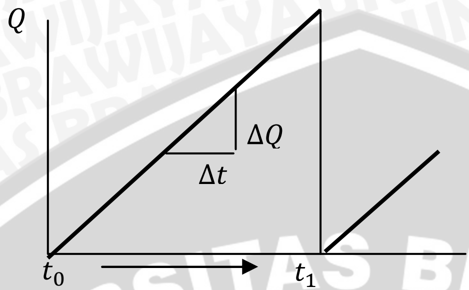


Gambar 2.1 Tingkat Penambahan Persediaan Model EOQ

Gambar 2.1, menjelaskan bahwa penambahan persediaan datang secara langsung sebesar Q pada interval t_0, t_1, dan seterusnya. Karena permintaan dianggap konstan, persediaan berkurang dalam jumlah waktu yang sama dari waktu ke waktu. Pada waktu tingkat persediaan mencapai nol, pesanan untuk jumlah yang baru tepat diterima, sehingga tingkat persediaan naik kembali sebesar Q (Siswanto, 2007).

2.7 Model EPQ (*Economic Production Quantity*)

Pada Model dasar EOQ diasumsikan bahwa penambahan persediaan sebesar Q datang secara langsung tanpa bertahap pada saat persediaan periode sebelumnya habis. Dalam beberapa kasus, penambahan persediaan pada umumnya tidak serentak tetapi secara bertahap. Secara sederhana kondisi seperti ini mungkin terjadi pada sebuah sistem dimana inputnya dihasilkan sendiri atau berasal dari produksi subsistemnya. Bisa juga terjadi jika pemasok mengirim barangnya secara bertahap.

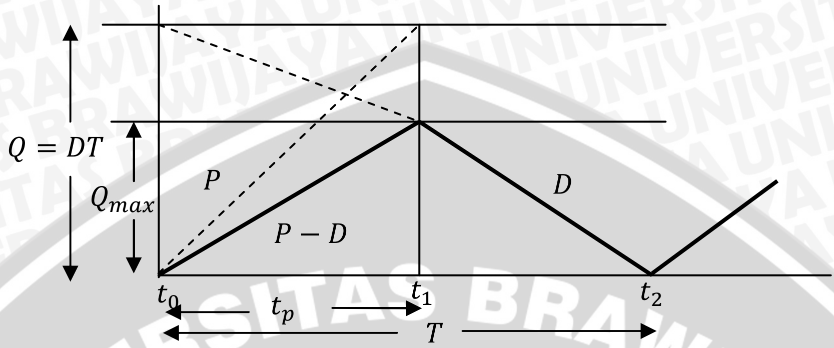


Gambar 2.2 Tingkat Penambahan Persediaan Pada Model EPQ

Pada Gambar 2.2 dijelaskan bahwa model EPQ dengan penambahan persediaan sebesar Q datang secara bertahap selama periode waktu t_0 sampai t_1 dengan tingkat pertambahan sebesar $\Delta Q/\Delta t$.

Model EPQ dasar dijelaskan pada Gambar 2.2 yaitu untuk memenuhi kebutuhan setiap siklus pemesanan ulang dengan tingkat permintaan sebesar D dan dimulai dari t_0 maka kebutuhan tersebut harus terpenuhi dari t_0 sampai t_2. Penambahan persediaan akan terjadi sampai t_1 sebesar Q_{max}. Penambahan persediaan tidak akan terjadi lagi antara t_1 sampai t_2. Persediaan sebesar Q_{max} akan habis digunakan pada t_2 di mana proses pertambahan persediaan periode berikutnya yaitu t_2 sampai t_3 terjadi lagi. Persediaan maksimum dalam model EPQ berbeda dengan model EOQ, karena pertambahan persediaan yang bertahap. Untuk memenuhi persediaan sebesar Q maka persediaan akan diproduksi pada waktu t_0 sampai t_1 dengan tingkat produksi sebesar P. Dalam hal ini tingkat produksi sebesar P harus memenuhi tingkat permintaan sebesar D maka $P > D$ dan tingkat pertambahan persediaan sebesar $P - D$ (Maghfiroh, 2007).

Dari uraian di atas, dapat disimpulkan gambar untuk model EPQ dasar, yaitu



Gambar 2.3 Model EPQ Dasar

Dari Gambar 2.3, dapat diketahui bahwa pertambahan persediaan terjadi selama waktu t_p yaitu

$$Q_{max} = t_p(P - D)\ . \tag{2.1}$$

Selanjutnya persediaan maksimum yaitu Q_{max}, akan habis dipakai. Sehingga diperoleh persediaan rata-rata yaitu

$$\frac{Q_{max}}{2} = \frac{t_p(P-D)}{2}\ . \tag{2.2}$$

Untuk memenuhi persediaan sebesar Q diperlukan waktu selama t_p dengan tingkat pertambahan persediaan sebesar P, maka diperoleh:

$$Q = t_p P \text{ atau } t_p = \frac{Q}{P}\ , \tag{2.3}$$

Apabila persamaan (2.3) disubstitusikan ke persamaan (2.2), maka diperoleh persediaan rata-rata yang baru yaitu

$$Q_{rata-rata} = \frac{\frac{Q}{P}(P-D)}{2}\ ,$$

sehingga diperoleh

$$Q_{rata-rata} = \frac{Q}{2}\left(1 - \frac{D}{P}\right). \tag{2.4}$$

Bila biaya penyimpanan per unit per periode adalah C_h maka dapat dirumuskan menjadi

$$BS = \frac{Q}{2}C_h\left(1 - \frac{D}{P}\right), \tag{2.5}$$

jadi, biaya pesan ditetapkan sebagai

$$BP = \frac{D}{Q}C_0 , \tag{2.6}$$

dengan

P	=	jumlah produksi setiap periode,
D	=	jumlah permintaan setiap periode,
Q	=	kuantitas produksi,
t_p	=	waktu yang dibutuhkan untuk memenuhi persediaan sebesar Q,
Q_{max}	=	persediaan maksimum,
$Q_{rata-rata}$	=	persediaan rata-rata,
BS	=	biaya simpan,
C_0	=	biaya *set up*,
C_h	=	biaya penyimpanan,

sehingga diperoleh, total biaya persediaan adalah

$$\gamma = \text{biaya pesan} + \text{biaya simpan}.$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (2.5) dan (2.6) ke dalam persamaan γ diatas, diperoleh

$$\gamma = \frac{D}{Q}C_0 + \frac{Q}{2}C_h\left(1 - \frac{D}{P}\right), \tag{2.7}$$

Untuk mengetahui total biaya persediaan (γ) minimum pada persamaan (2.7), dapat diperoleh dengan mencari turunan pertama γ terhadap Q sama dengan nol, yaitu

$$\frac{d(\gamma)}{dQ} = 0 ,$$

$$\Leftrightarrow -\frac{C_0D}{Q^2}+\frac{C_h}{2}\left(1-\frac{D}{P}\right)=0\ ,$$

$$\Leftrightarrow \frac{C_h}{2}\left(1-\frac{D}{P}\right)=\frac{C_0D}{Q^2}\ ,$$

$$\Leftrightarrow Q^2=\frac{2C_0D}{C_h\left(1-\frac{D}{P}\right)}\ ,$$

$$\Leftrightarrow Q=\pm\sqrt{\frac{2C_0D}{C_h\left(1-\frac{D}{P}\right)}}\ ,$$

Nilai Q yang digunakan bernilai positif karena jumlah produksi yang dilakukan selalu bernilai positif, sehingga diperoleh

$$Q^*=\sqrt{\frac{2C_0D}{C_h\left(1-\frac{D}{P}\right)}}\ . \tag{2.8}$$

Total biaya persediaan bernilai minimum apabila turunan kedua dari persamaan (3.7) lebih besar dari nol,

$$\frac{d^2(\gamma)}{dQ^2}>0,$$

$$\frac{d^2(\gamma)}{dQ^2}=\frac{2C_0D}{Q^3}\ ,$$

$$=\frac{\left[C_h\left(1-\frac{D}{P}\right)\right]^{3/2}}{\sqrt{2C_0D}}>0\ , \tag{2.9}$$

karena biaya penyimpanan, biaya *setup*, jumlah permintaan, dan jumlah produksi bernilai positif maka $d^2(\gamma)/dQ^2>0$. Terbukti bahwa nilai Q^* yang diperoleh optimal, sehingga dapat meminimumkan total biaya persediaan.

Jika Q^* pada persamaan (2.8) disubstitusikan ke dalam persamaan (2.7) maka didapatkan total biaya persediaan minimum yaitu

$$\gamma=\frac{C_0D}{Q}+\frac{QC_h}{2}\left(1-\frac{D}{P}\right),$$

$$=C_0D\,\frac{\left(C_h\left(1-\frac{D}{P}\right)\right)^{1/2}}{(2C_0D)^{1/2}}+\frac{\frac{(2C_0D)^{1/2}}{\left(C_h\left(1-\frac{D}{P}\right)\right)^{1/2}}\left(C_h\left(1-\frac{D}{P}\right)\right)}{2}\ ,$$

$$= \frac{(C_0 D)^{1/2}\left(C_h\left(1-\frac{D}{P}\right)\right)^{1/2}}{\sqrt{2}} + \frac{(2C_0 D)^{1/2}\left(C_h\left(1-\frac{D}{P}\right)\right)^{2}}{2},$$

$$= \frac{2(C_0 D)^{1/2}\left(C_h\left(1-\frac{D}{P}\right)\right)^{1/2} + \sqrt{2}(2C_0 D)^{1/2}\left(C_h\left(1-\frac{D}{P}\right)\right)^{2}}{2\sqrt{2}},$$

$$= \frac{4\left(C_h\left(1-\frac{D}{P}\right)\right)^{1/2}(C_0 D)^{1/2}}{2\sqrt{2}},$$

$$\gamma^* = \sqrt{2C_0 D C_h\left(1-\frac{D}{P}\right)}. \tag{2.10}$$

Rumusan dalam bentuk T didapatkan melalui substitusi dari

$$T = \frac{Q}{D} \Leftrightarrow \frac{1}{T} = \frac{D}{Q} \text{ atau } Q = DT \Leftrightarrow D = \frac{Q}{T},$$

sehingga total biaya persediaan dengan fungsi T, dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$\varphi = \frac{1}{T}C_0 + \frac{TD}{2}C_h\left(1-\frac{D}{P}\right). \tag{2.11}$$

dengan

$\varphi =$ total biaya persediaan dengan fungsi T,

$T =$ panjang siklus pemesanan.

Dari persamaan (2.8) diperoleh kuantitas produksi yang optimal (Q^*). Hasil periode panjang siklus pemesanan optimal (T^*), didapatkan jika syarat $d\gamma/dQ = 0$ dan $d^2(\gamma)/dQ^2 > 0$ terpenuhi, sehingga diperoleh

$$Q = \sqrt{\frac{2C_0 D}{C_h\left(1-\frac{D}{P}\right)}},$$

$$\frac{Q}{D} = \sqrt{\frac{2C_0 D}{D^2 C_h\left(1-\frac{D}{P}\right)}},$$

$$T^* = \sqrt{\frac{2C_0}{D C_h\left(1-\frac{D}{P}\right)}}. \tag{2.12}$$

(Pratiwi, 2012)

2.7 *Backorder*

Backorder adalah permintaan yang belum bisa dipenuhi pada periode sekarang, tetapi kemudian dipenuhi pada periode selanjutnya. Di dalam situasi yang bersifat *backorder*, suatu perusahaan tidak kehilangan penjualan (pelanggan yang tidak terpenuhi) ketika persediaan habis karena konsumen/pelanggan bersedia menunggu pesanannya dapat dipenuhi oleh produsen (Ristono, 2009)

Menurut Yamit (1999), *backorder* adalah sebuah permintaan dari pelanggan yang tidak dapat dipenuhi dari persediaan yang ada dan pelanggan menyetujui untuk menunggu pengiriman pesanan berikutnya. Hal ini mengakibatkan perusahaan tidak akan kehilangan penjualan. Dalam beberapa bisnis, *backorder* mungkin jarang terjadi atau bahkan tidak pernah terjadi, karena dapat menghilangkan penjualan apabila pelanggan tidak bersedia menunggu pengiriman berikutnya.

Asumsi yang digunakan dalam model ini adalah sebagai berikut:

1. Hanya satu item barang yang diperhitungkan,
2. Permintaan determenistik dan tetap,
3. Tenggang waktu pengadaan = 0,
4. *Lead time* atau waktu menunggu kedatangan barang/bahan diketahui dan bersifat konstan,
5. Pengadaan dilakukan secara sekaligus,
6. Struktur biaya tidak berubah,
7. Kapasitas gudang dan modal cukup untuk menampung dan membeli pesanan,
8. Tidak ada *quantity discount,*
9. Biaya variabel hanya terdiri dari biaya *backorde*r, biaya pemesanan, dan biaya penyimpanan.

(Ristono, 2009)

2.8 *Backorder* Parsial

Backorder parsial adalah suatu kondisi atau sebuah kebijakan penanganan kekurangan persediaan yang diberikan oleh perusahaan untuk memenuhi permintaan dari konsumen. Konsumen berhak memilih untuk menunggu atau tidak menunggu pesanan tersebut terpenuhi. Jika konsumen bersedia menunggu, maka perusahaan mengalami kekurangan persediaan (*stockout*) dan memenuhinya dengan cara *backorder*, sedangkan jika konsumen tidak bersedia menunggu maka perusahaan akan mengalami penjualan hilang (*lost sales*). Hal ini dipengaruhi oleh kondisi β yaitu tingkat *stockout* yang menyebabkan perusahaan akan *backorder* atau tidak (Pentico dan Matthew, 2009).

2.9 EPQ dengan *Backorder* Parsial dan Fase yang Bergantung Pada Laju *Backorder*

Backorder parsial dengan fase yang bergantung pada laju *backorder* adalah suatu kondisi *backorder* yang mengasumsikan bahwa tingkat *stockout* mengalami suatu penambahan ketika produksi untuk memenuhi *backorder* dimulai. Selama fase pertama interval *stockout*, sebelum produksi dimulai, laju *backorde*r $\beta_1 = \beta$. Pada fase kedua interval *stockout*, setelah produksi dimulai, laju *backorder* menjadi $\beta_2 = \rho\beta$. Dimana $1 \leq \rho \leq 1/\beta$, sehingga β_2 dapat menjadi sama besar dengan β_1 tetapi tidak bisa lebih besar dari satu (Pentico dan Matthew, 2010).

2.10 Konveks

Uji kekonvekkan dari suatu fungsi dengan variabel tunggal yaitu memperhatikan beberapa fungsi dengan variabel tunggal $f(x)$ yang memiliki turunan kedua untuk semua nilai x yang mungkin. Maka $f(x)$ adalah:

1. Konveks jika dan hanya jika $\frac{d^2 f(x)}{dx^2} \geq 0$ untuk semua nilai x yang mungkin.
2. *Strictly convex* jika dan hanya jika $\frac{d^2 f(x)}{dx^2} > 0$ untuk semua nilai x yang mungkin.

3. Konkaf jika dan hanya jika $\frac{d^2 f(x)}{dx^2} \leq 0$ untuk semua nilai x yang mungkin.
4. *Strictly concave* jika dan hanya jika $\frac{d^2 f(x)}{dx^2} < 0$ untuk semua nilai x yang mungkin.

Sementara itu, uji kekonvekkan dari suatu fungsi dengan dua variabel adalah sebagai berikut:

Tabel (2.1). Uji konveksitas untuk fungsi dua variable

Uji		*Convex*	Strictly convex	Concave	Strictly concave
Uji ke-1	$\left(\frac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial {x_1}^2}\frac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial {x_2}^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_1 \partial x_2}\right)$	≥ 0	> 0	≥ 0	> 0
Uji ke-2	$\frac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial {x_1}^2}$	≥ 0	> 0	≤ 0	< 0
Uji ke-3	$\frac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial {x_2}^2}$	≥ 0	> 0	≤ 0	< 0
	Nilai dari (x_1, x_2)	Semua nilai yang mungkin			

Tujuan dilakukan uji konveksitas adalah untuk menjamin bahwa solusi yang didapatkan adalah optimal. Secara analitis, apabila sebuah fungsi berbentuk cekung (konvek) maka fungsi tersebut mempunyai nilai minimum. Sebaiknya, jika fungsi tersebut berupa cembung (konkaf) maka fungsi tersebut mempunyai nilai maksimum (Hillier dan Lieberman, 1995).

BAB III
METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Jenis penelitian ini bersifat penelitian deskriptif dan studi analisis. Dalam penyusunan Skripsi ini diperlukan suatu cara atau metodologi yang praktis dan sistematis dengan tujuan untuk mempermudah serta memperjelas topik yang akan dibahas. Metode yang tepat dapat memberikan penyelesaian yang sesuai dengan tujuan. Pada dasarnya penelitian ini digunakan untuk mengetahui sejauh mana pengaruh model yaitu penerapan model *EPQ backorder* parsial dengan fase yang bergantung pada laju *backorder* dalam permasalahan persediaan yang terjadi di dalam perusahaan.

3.2 Tempat Penelitian

Penelitian dalam Skripsi ini dilaksanakan di UD. Cik-Cik *Collection* di Jalan Surya Utama No. 23

3.3 Deskripsi Umum Daerah Studi

UD. Cik-Cik *Collection* merupakan usaha dagang yang didirikan pada tanggal 12 Januari 2010, usaha ini bergerak dalam bidang produksi *konveksi* (pakaian jadi). Pada awalnya usaha tersebut dikelola secara kecil-kecilan hanya memproduksi produk yang sama berupa kaos cik-cik. Namun seiring berkembangya mode maka produksinya menjadi bermacam-macam sesuai dengan mode yang sedang *trend*. Kapasitas produksinya juga semakin lama semakin besar karena permintaan yang semakin besar pula, yaitu sekitar puluhan ribu potong perbulannya.

3.4 Sumber Data

Dalam analisis, data yang dibutuhkan adalah:

1. Jumlah permintaan tiap satu bulan produksi (D)
2. Jumlah produksi tiap satu bulan produksi (P)
3. Biaya pemesan setiap kali memesan barang tiap satuan bulan produksi (C_O)
4. Biaya produksi per unit tiap satu bulan produksi (C_P)
5. Biaya penyimpanan per unit (C_h)
6. Biaya pemeliharaan per unit yang *backorder* (C_b)
7. Biaya untuk penjualan yang hilang (C_l)

8. Nilai parameter *stockout* yang menyebabkan *backorder* (β)
9. Ratio tingkat *stockout* (ρ)antara β_2 dan β_1

Untuk memperoleh data-data pendukung penelitian ini, maka dilakukan pengumpulan data melalui dua tahapan, yaitu:

1. Peneliti Langsung ke Lapangan atau Perusahaan (*field research*)

Metode ini bertujuan untuk memperoleh data-data pendukung penelitian yang langsung didapatkan di lapangan dan mencari permasalahan yang ada di perusahaan dengan menggunakan cara-cara berikut:

a) Wawancara

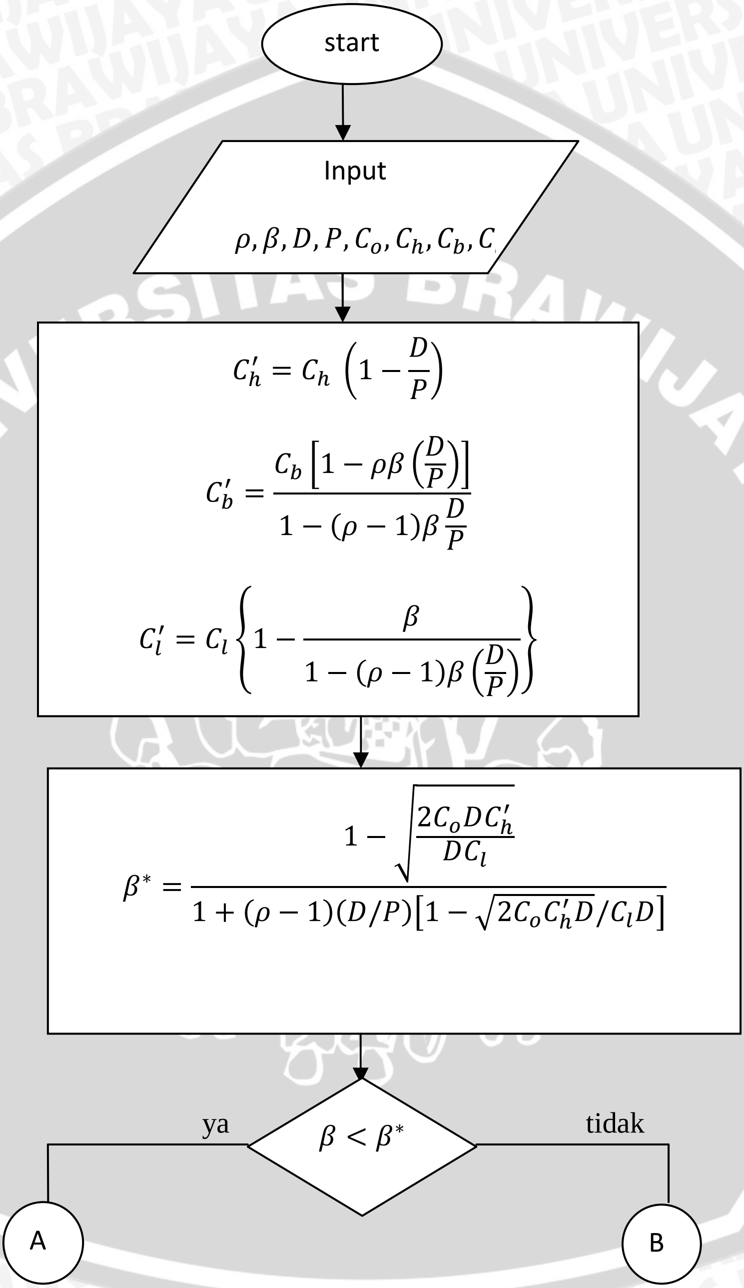
Wawancara merupakan suatu metode pengumpulan data dengan melakukan komunikasi mengenai hal-hal yang berhubungan dengan obyek penelitian. Dalam hal ini dilakukan melalui kunjungan ke perusahaan dan bertemu dengan pemilik perusahaan.

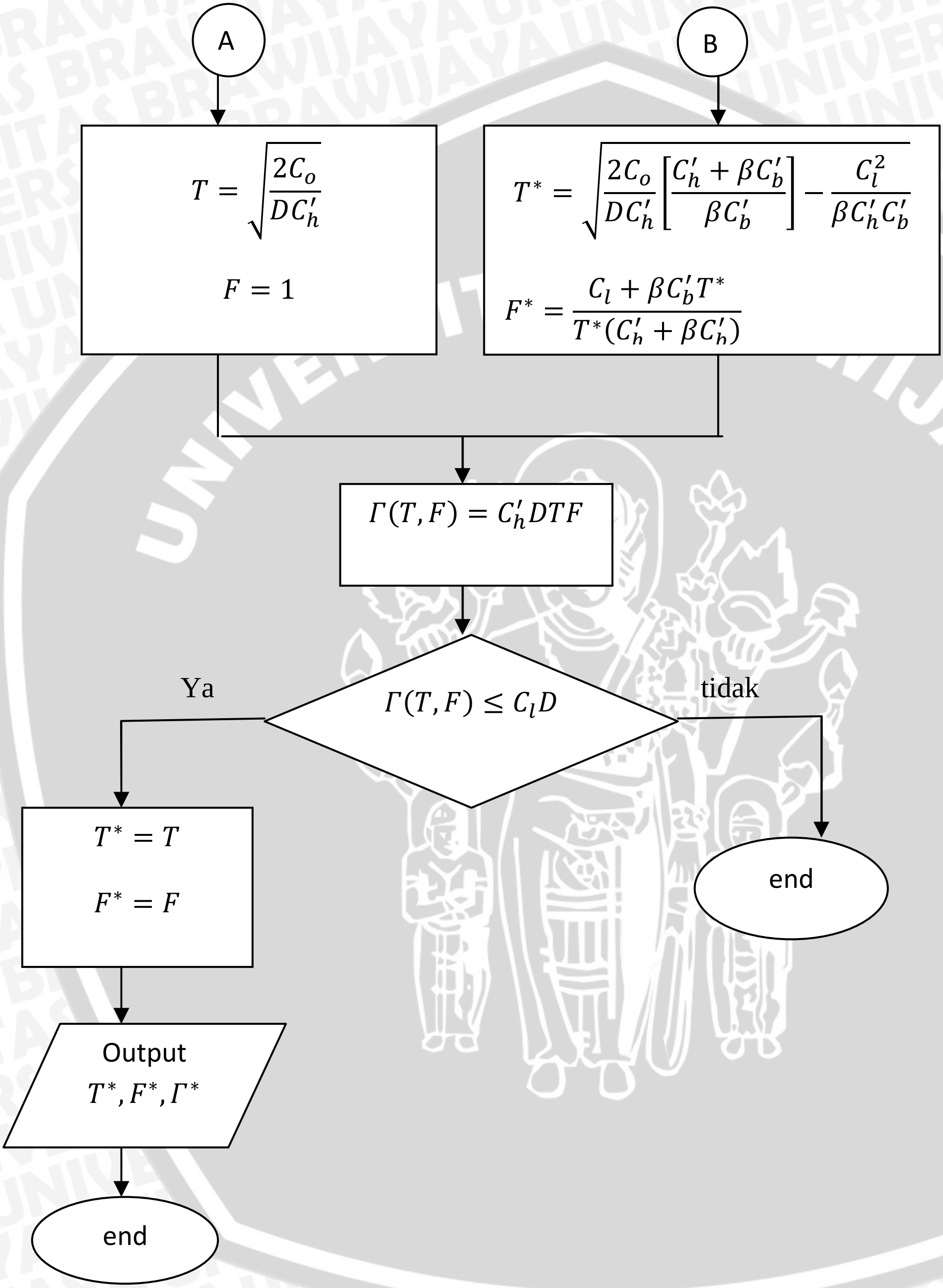
b) Dokumentasi

Dokumentasi merupakan suatu metode pengumpulan data dengan melihat dan menggunakan data-data berupa arsip-arsip atau catatan yang berhubungan dengan obyek penelitian, yang terdapat di perusahaan. Data-data ini merupakan data sekunder.

2. Studi Literatur

Metode ini dilakukan dengan tujuan untuk memecahkan permasalahan-permasalahan yang ada dengan menggunakan teori yang telah didapat diperkuliahan. Pengolahan data diuraikan dengan *flowchart* berikut:


start
Input
$\rho, \beta, D, P, C_o, C_h, C_b, C$
$C_h' = C_h \left(1 - \frac{D}{P}\right)$
$C_b' = \frac{C_b \left[1 - \rho\beta\left(\frac{D}{P}\right)\right]}{1 - (\rho - 1)\beta \frac{D}{P}}$
$C_l' = C_l \left\{1 - \frac{\beta}{1 - (\rho - 1)\beta\left(\frac{D}{P}\right)}\right\}$
$\beta^* = \frac{1 - \sqrt{\frac{2C_o D C_h'}{D C_l}}}{1 + (\rho - 1)(D/P)\left[1 - \sqrt{2C_o C_h' D}/C_l D\right]}$
ya
$\beta < \beta^*$
tidak
A
B


A
B
$T = \sqrt{\frac{2C_o}{DC_h'}}$
$F = 1$
$T^* = \sqrt{\frac{2C_o}{DC_h'}\left[\frac{C_h' + \beta C_b'}{\beta C_b'}\right] - \frac{C_l^2}{\beta C_h' C_b'}}$
$F^* = \frac{C_l + \beta C_b' T^*}{T^*(C_h' + \beta C_h')}$
$\Gamma(T,F) = C_h' DTF$
$\Gamma(T,F) \leq C_l D$
Ya
tidak
$T^* = T$
$F^* = F$
Output
T^*, F^*, Γ^*
end
end

3.5 Analisis Data

Untuk mencapai tujuan dalam Skripsi ini, dilakukan analisis dan perhitungan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Menentukan nilai C_h' , C_b' , C_l',
2. Menentukan nilai β^*
   a) Jika $\beta < \beta^*$, tidak perlu backorder. Hitung = $\sqrt{2C_o/DC_h'}$, $F = 1$ dan $\Gamma(T,F) = C_h{}'DTF.$ jika $\Gamma(T,F) \leq C_l D$ gunakan $T^* = T$ dan $F^* = F$. Jika $\Gamma(T,F) > C_l D$ berhenti memesan barang.
   b) Jika $\beta \geq \beta^*$, gunakan langkah ke 3
3. Hitung nilai T^* dan F^*. $\Gamma(T,F) = C_h{}'DT^*F^*$.
   a) jika $\Gamma(T,F) \leq C_l D$ gunakan $T^* = T$ dan $F^* = F$.
   b) Jika $(T,F) > C_l D$, tidak perlu *backorder.*

BAB IV
PEMBAHASAN

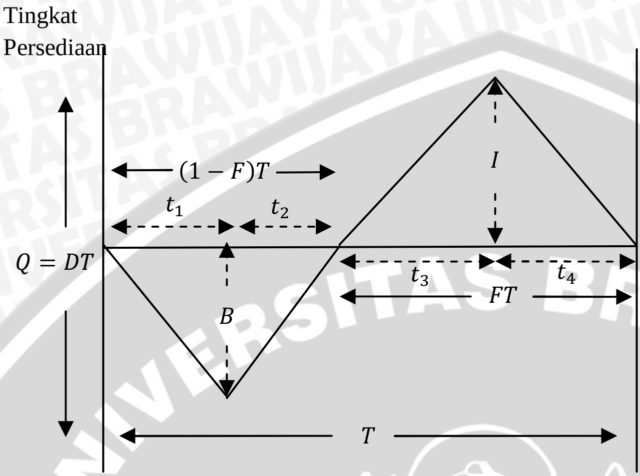
4.1 Model EPQ (*Economic Production Quantity*) dengan *Backorder* Parsial

4.1.1 Interval Waktu, Persediaan Maksimum, dan Tingkat *Backorder*

Gambar 4.1 menjelaskan bahwa pada interval pertama dengan periode t_1 tingkat persediaan awal bernilai nol,karena dalam waktu tersebut tidak terjadi produksi akibatnya permintaan konsumen tidak dapat dipenuhi, sehingga grafik menurun mencapai tingkat maksimum *backorder* (B). Permintaan konsumen yang belum bisa dipenuhi dapat dipenuhi dengan cara melakukan *backorder*. *Backorder* akan mencapai maksimum pada tingkat βD, jadi dapat dirumuskan menjadi $B = \beta D t_1$.

Produksi dimulai pada periode t_2. Pada tahap ini *backorder* tidak sepenuhnya terjadi karena permintaan dari konsumen terpenuhi pada periode t_1. Persediaan bertambah dan *backorder* turun dengan tingkat rata-rata sebesar $P - \beta D$.

Periode t_3 dimulai ketika *backorder* benar-benar tidak terjadi karena jumlah pemesanan terpenuhi sebesar Q. Grafik terus naik ketika produksi mulai berjalan hingga mencapai tingkat maksimum yaitu I. Selama interval ini persediaan meningkat sebesar $P - D$, jadi dapat dirumuskan $I = (P - D)t_3$. Produksi berhenti pada periode t_4 sehingga grafik menurun dengan tingkat persediaan berkurang sebesar D.



Gambar 4.1 model EPQ dengan *Backorde*r Parsial

Berdasarkan Gambar 4.1 dijelaskan bahwa waktu yang dibutuhkan untuk memenuhi permintaan konsumen adalah $t_3 + t_4 = FT$, sedangkan $t_1 + t_2 = (1-F)T$ karena pada periode t_1 persediaan awal bernilai nol dan periode t_2 diasumsikan bahwa waktu untuk menghilangkan *backorder* sebesar $\beta D t_1/P$. Jadi dapat dirumuskan waktu yang dibutuhkan untuk masing-masing interval adalah

$$\begin{aligned} t_1 &= (1-F)T\left(1-\frac{\beta D}{P}\right), \\ t_2 &= (1-F)T\left(\frac{\beta D}{P}\right), \\ t_3 &= \frac{FTD}{P}, \\ t_4 &= FT\left(1-\frac{D}{P}\right), \end{aligned} \tag{4.1}$$

dengan

β = nilai parameter *stockout* yang menyebabkan *backorder*,
F = tingkat pengisian persediaan yang diisi dari perusahaan,
Q = kuantitas produksi,
S = tingkat *stockout* maksimum,
B = tingkat *backorder* maksimum,

I = tingkat persediaan maksimum,
t_1 = waktu ketika tidak terjadi produksi dan permintaan konsumen yang tidak dapat dipenuhi akan *backorder*
t_2 = periode waktu *backorder* tidak sepenuhnya terjadi,
t_3 = periode waktu mulainya produksi,
t_4 = periode waktu saat produksi berhenti.

Persediaan maksimum dapat dirumuskan menjadi

$$I = (P - D)t_3$$
$$= (P - D)\frac{FTD}{P}$$
$$I = FTD\left(1 - \frac{D}{P}\right). \tag{4.2}$$

Gambar 4.1 menjelaskan bahwa tingkat *stockout* maksimum terjadi pada periode t_1, karena tingkat *backorder* sama dengan tingkat *stockout* maka diperoleh dengan cara mengalikan jumlah permintaan dengan periode t_1, jadi tingkat *stockout* maksimum dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} S &= Dt_1 , \\ S &= D(1-F)T\left(1 - \frac{\beta D}{P}\right). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Pada periode t_1, tingkat persediaan awal bernilai nol karena dalam waktu tersebut tidak terjadi produksi akibatnya perusahaan tidak dapat memenuhi permintaan konsumen, maka tingkat *backorder* maksimum dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$B = \beta D t_1 = \beta S . \tag{4.4}$$

Kuantitas produksi dapat diperoleh dari jumlahan *item* pada periode kedua untuk memenuhi *stockout* dan permintaan yang dipenuhi dari produksi. Jadi kuantitas produksi dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$Q = Q(t_1 + t_2)\beta + Q(t_3 + t_4) ,$$
$$= DT(1-F)\beta + DTF ,$$
$$= DT[\beta(1-F) + F] . \tag{4.5}$$

4.1.2 Keuntungan dan Fungsi Biaya dalam T dan F

Keuntungan penjualan rata-rata maksimal per periode merupakan total pendapatan dikurangi total biaya persediaan. Pendapatan yang dimaksud adalah total penjualan dikurangi total biaya produksi. Total biaya persediaan merupakan penjumlahan dari biaya *set up*, biaya penyimpanan, biaya *backorder*, dan biaya *lost sales*. Jadi, keuntungan dapat dirumuskan menjadi:

$$\Pi(T,F) = (s - C_p)D[F + \beta(1-F)] - \left[\frac{C_0}{T} + C_h\bar{I} + C_b\bar{B} + C_g D(1-\beta)(1-F)\right],$$

$$= (s - C_p)D[F + \beta(1-F)] - \left[\frac{C_0}{T} + C_h\bar{I} + C_b\bar{B} + \left(C_1 - (s - C_p)\right) D(1-\beta)(1-F)\right],$$

$$= (s - C_p)D[F + \beta(1-F)] - \left[\frac{C_0}{T} + C_h\bar{I} + C_b\bar{B} + (C_1 - s + C_p)D(1-\beta)(1-F)\right],$$

$$= (s - C_p)D[F + \beta(1-F)] - \left[\frac{C_0}{T} + C_h\bar{I} + C_b\bar{B} + (C_1 - s + C_p)\, D(1 - F - \beta + \beta F)\right],$$

$$= (s - C_p)D[F + \beta - \beta F + 1 - F - \beta + \beta F] - \left[\frac{C_0}{T} + C_h\bar{I} + C_b\bar{B} + C_1 D(1-\beta)(1-F)\right],$$

$$= (s - C_p)D - \left[\frac{C_0}{T} + C_h\bar{I} + C_b\bar{B} + C_1 D(1-\beta)(1-F)\right],$$

$$= (s - C_p)D - \mu(T,F)\,, \tag{4.6}$$

di mana

$$\mu(T,F) = \frac{C_0}{T} + C_h\bar{I} + C_b\bar{B} + C_1 D(1-\beta)(1-F)\,. \tag{4.7}$$

dengan

μ = total biaya persediaan model EPQ *backorder* parsial,
s = harga jual per unit,
C_0 = biaya *set up* per periode,
C_p = biaya produksi per periode,
C_h = biaya penyimpanan per periode,
C_b = biaya *backorder* per periode,

C_g = biaya *goodwill loss* per periode,
C_1 = biaya *lost sales* per periode,
$\bar{I}$ = tingkat persediaan rata-rata,
$\bar{B}$ = tingkat *backorder* rata-rata.

Dari Gambar 4.1, persediaan rata-rata diperoleh dari persediaan maksimum dibagi dua selanjutnya hasil pembagian tersebut dikali F. Di mana $I = FTD(1 - D/P)$, diperoleh:

$$\bar{I} = \frac{I}{2}\ x\ F\ ,$$

$$= \frac{FTD\left(1-\frac{D}{P}\right)}{2}\ x\ F\ ,$$

$$= \frac{DTF^2}{2}\left(1 - \frac{D}{P}\right). \tag{4.8}$$

Tingkat *backorder* rata-rata diperoleh dari *backorder* maksimum dibagi dua selanjutnya hasil pembagian tersebut dikali $(1 - F)$. Di mana $B = \beta D(1 - F)T(1 - \beta D/P)$ diperoleh:

$$\bar{B} = \frac{B}{2}\ x\ (1 - F)\ ,$$

$$= \frac{\beta D(1-F)T\left(1-\frac{\beta D}{P}\right)}{2}\ x\ (1 - F)\ ,$$

$$= \frac{\beta DT(1-F)^2}{2}\left(1 - \frac{\beta D}{P}\right). \tag{4.9}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (4.8) dan (4.9) ke dalam persamaan (4.7) dan memisalkan $C_h{}' = C_h\left(1 - \frac{D}{P}\right)$ dan $C_b' = C_b\left(1 - \frac{\beta D}{P}\right)$, maka diperoleh

$$\mu(T, F) = \frac{C_0}{T} + \frac{C_h' DTF^2}{2} + \frac{C_b' \beta DT(1-F)^2}{2} + C_1 D(1 - \beta)(1 - F) \tag{4.10}$$

4.1.3 Menentukan Nilai Optimal untuk *T* dan *F*

Nilai $\mu(T, F)$ pada persamaan (4.10) bernilai optimal jika turunan pertama μ terhadap T sama dengan nol, yaitu

$$\frac{\partial \mu}{\partial T} = 0\ ,$$

$$\Leftrightarrow -\frac{C_0}{T^2}+\frac{C_h'DF^2}{2}+\frac{C_b'\beta D(1-F)^2}{2}=0\ , \tag{4.11}$$

$$\Leftrightarrow \frac{C_h'DF^2}{2}+\frac{C_b'\beta D(1-F)^2}{2}=\frac{C_0}{T^2}\ ,$$

$$\Leftrightarrow T^2(C_h'DF^2+C_b'\beta D(1-F)^2)=2C_0\ ,$$

$$\Leftrightarrow T^2=\frac{2C_0}{\left(C_h'DF^2+C_b'\beta D(1-F)^2\right)}\ ,$$

$$\Leftrightarrow T^2=\frac{2C_0}{D\left(C_h'F^2+C_b'\beta(1-F)^2\right)}\ ,$$

$$T=\sqrt{\frac{2C_0}{D\left(C_h'F^2+C_b'\beta(1-F)^2\right)}}\ . \tag{4.12}$$

Misalkan nilai F dalam persamaan (4.12) adalah satu karena F merupakan tingkat pengisian persediaan yang diisi secara penuh, maka nilai T pada persamaan (4.12) sama dengan nilai T yang optimal pada persamaan (2.12) untuk model EPQ dasar, artinya bahwa tidak ada *stockout* dan tidak ada *backorder*.

Biaya rata-rata minimum $\mu(T,F)$ dengan menetapkan bahwa turunan pertama μ terhadap F sama dengan nol, yaitu

$$\frac{\partial\mu}{\partial F}=0\ ,$$

$$\Leftrightarrow C_h'DTF-\beta C_b'DT(1-F)-C_1D=0\ , \tag{4.13}$$

$$\Leftrightarrow C_h'DTF-\beta C_b'DT+\beta C_b'DTF-C_1D+C_1D\beta=0\ ,$$

$$\Leftrightarrow C_h'DTF+\beta C_b'DTF=C_1D-C_1D\beta+\beta C_b'DT\ ,$$

$$\Leftrightarrow F(C_h'DT+\beta C_b'DT)=C_1D-C_1D\beta+\beta C_b'DT\ ,$$

$$\Leftrightarrow F=\frac{D\left[\left(C_1(1-\beta)\right)+\beta C_b'T\right]}{D\left(C_h'T+\beta C_b'T\right)}\ ,$$

$$F=\frac{C_1(1-\beta)+\beta C_b'T}{T\left(C_h'+\beta C_b'\right)}\ . \tag{4.14}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (4.14) pada persamaan (4.12), maka diperoleh solusi optimal untuk T^* yaitu,

$$T^* = \sqrt{\frac{2C_0}{DC_h{}'}\left[\frac{C_h{}'+\beta C_b{}'}{\beta C_b{}'}\right] - \frac{[(1-\beta)C_1]^2}{\beta C_h{}' C_b{}'}}\,. \tag{4.15}$$

Untuk memperoleh nilai optimal untuk $F(T^*)$, maka akan digunakan nilai dari T^* pada persamaan (4.15) dan mensubstitusikan pada persamaan (4.14), sehingga diperoleh

$$F(T^*) = \frac{C_1(1-\beta)+\beta C_b{}' T^*}{T^*(C_h{}'+\beta C_b{}')}\,. \tag{4.16}$$

Jika persamaan (4.15) dan (4.16) disubstitusikan ke dalam persamaan (4.10), maka diperoleh biaya optimal untuk model EPQ *backorder* parsial, yaitu sebesar

$$\mu^* = \mu(T^*, F^*) = C_h{}' D T^* F^*. \tag{4.17}$$

Diketahui bahwa T^* pada model EPQ *backorder* parsial paling tidak sama besar dengan T^* pada model EPQ dasar yaitu $\left(\sqrt{2C_0/DC_h{}'}\right)$, maka *backorder* optimal dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{2C_0}{DC_h{}'}\left[\frac{C_h{}'+\beta C_b{}'}{\beta C_b{}'}\right] - \frac{[(1-\beta)C_1]^2}{\beta C_h{}' C_b{}'} \geq \frac{2C_0}{DC_h{}'}\ ,$$

$$\frac{2C_0}{DC_h{}'}\left[\frac{C_h{}'+\beta C_b{}'}{\beta C_b{}'}\right] - \frac{2C_0}{DC_h{}'} \geq \frac{[(1-\beta)C_1]^2}{\beta C_h{}' C_b{}'}\,,$$

$$\frac{2C_0}{DC_h{}'}\left[\frac{C_h{}'+\beta C_b{}'}{\beta C_b{}'} - 1\right] \geq \frac{[(1-\beta)C_1]^2}{\beta C_h{}' C_b{}'}\,,$$

$$\frac{2C_0}{DC_h{}'}\left[\frac{C_h{}'}{\beta C_b{}'}\right] \geq \frac{[(1-\beta)C_1]^2}{\beta C_h{}' C_b{}'}\,,$$

$$\frac{2C_0 C_h{}'}{D} \geq [(1-\beta)C_1]^2\ ,$$

$$\frac{2C_0 C_h{}'}{DC_1{}^2} \geq (1-\beta)^2\ ,$$

$$(1-\beta) \leq \sqrt{\frac{2C_0 C_h{}'}{DC_1{}^2}}\,,$$

$$\beta \geq 1 - \sqrt{\frac{2C_0 C_h{}'}{DC_1{}^2}}\,.$$

Persamaan untuk T^* dan F^* mengakibatkan solusi akan optimal jika memenuhi kondisi

$$\beta \geq \beta^* = 1 - \sqrt{\frac{2C_0 C_h{}'}{DC_1{}^2}}\,. \tag{4.18}$$

Untuk memenuhi kondisi dari β, diperoleh

$$\sqrt{\frac{2C_0}{DC_h{}'}} \geq \frac{(1-\beta)C_1}{C_h{}'}\,. \tag{4.19}$$

Dengan mengganti variabel $C_h{}'$untuk C_h dan $C_b{}'$untuk C_b maka persamaan T^* dan F^* model EPQ *backorder* parsial pada persamaan (4.15) dan (4.16) merupakan solusi optimal, sedangkan kondisi yang digunakan untuk menentukan nilai minimum β untuk *backorder* yang optimal diberikan pada persamaan (4.18) dan (4.19) yang penjabarannya terdapat pada lampiran 3.

4.14 Prosedur Untuk Menentukan Nilai Optimal T, F, Q, I, S, dan B

Langkah-langkah untuk menentukan nilai optimal dari T, F, Q, I, S, dan B, yaitu

1. Menentukan nilai β^*, nilai kritis untuk β dari persamaan (4.18),
2. a) jika $\beta \leq \beta^*$, menentukan nilai T^* pada persamaan (2.12) dan biaya optimal model EPQ dasar pada persamaan (2.10), kuantitas produksi optimal (Q^*), persediaan maksimum (Q_{max}), dan nilai persentase permintaan (F^*),

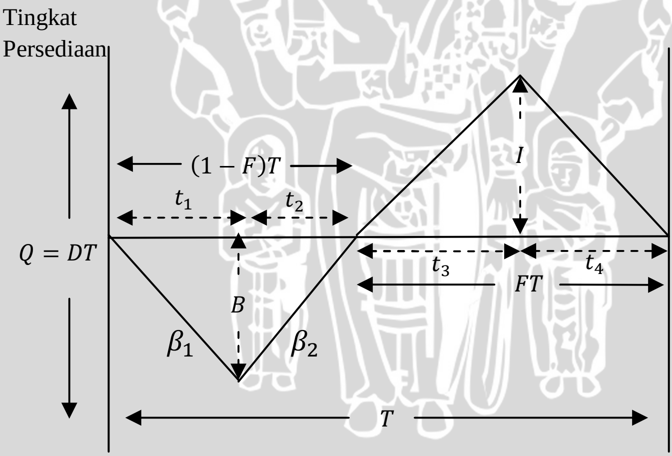
   b) jika $\beta > \beta^*$, menentukan nilai T^* pada persamaan (4.15), biaya EPQ *backorder* parsial pada persamaan (4.17), kuantitas produksi optimal (Q^*), persediaan maksimum (I^*) dan nilai persentase permintaan (F^*).
3. Menentukan nilai *stockout* maksimum (S^*) dan *backorder* maksimum (B^*).

4.2 EPQ (*Economic Order Quantity*) *Backorder* Parsial dengan Fase yang Bergantung pada Laju *Backorder*

4.2.1 Interval Waktu, Persediaan Maksimum, dan Tingkat *Backorder*

Model dasar EPQ dengan parsial *backorder* dikembangkan oleh Pentico (2009) yang merupakan jenis model yang mengasumsikan semua parameter telah diketahi dan konstan selama waktu yang ditentukan, dengan asumsi-asumsi yang biasa digunakan pada EOQ dan EPQ, dan mengasumsikan bahwa laju permintaan bernilai tetap. Pentico juga mengasumsikan bahwa prosentase permintaan *backorder* yang tidak terpenuhi, terlebih selama fase inisial interval *stockout*, sebelum produksi dimulai, adalah konstan β.

Skripsi ini mempertimbangkan kemungkinan bahwa laju *backorder* selama interval *stockout* akan bertambah ketika produksi dimulai. Selama fase pertama interval *stockout*, sebelum produksi dimulai, laju *backorder* $\beta_1 = \beta$, selama fase ke-dua interval *stockout,* setelah produksi dimulai, laju *backorder* menjadi $\beta_2 = \rho\beta$,dimana $1 \leq \rho \leq 1/\beta$. Sehingga β_2 dapat menjadi sama besar dengan β_1 tetapi tidak bisa lebih besar dari satu.



Gambar 4.2 Model EPQ *backorder* parsial dengan fase yang bergantung pada laju *backorder*

Gambar 4.2 menjelaskan bahwa interval stockout pada perputaran produksi pada persediaan yang terjadi selama $(1-F)T$, dapat digolongkan menjadi dua interval. Pada interval pertama dengan periode t_1 tingkat persediaan awal bernilai nol, karena dalam waktu tersebut tidak terjadi produksi, akibatnya permintaan konsumen tidak dapat dipenuhi, sehingga grafik menurun mencapai tingkat maksimum *stockout* dengan laju $\beta_1 = \beta D$, Permintaan konsumen yang belum bisa terpenuhi ini dapat dipenuhi dengan cara *backorder*.

Produksi dimulai pada interval kedua dengan periode t_2. Pada tahap ini *backorder* tidak sepenuhnya terjadi karena sebagian permintaan dari konsumen pada periode t_1 terpenuhi dengan sejumlah P produksi per periode, tetapi permintaan yang datang pada *backorder* bertambah dengan laju $\beta_2 D = \rho\beta D$, oleh karena itu produksi untuk *backorder* berkurang sebesar $P - \rho\beta D$.

Periode t_3 dimulai ketika *backorder* benar-benar tidak terjadi karena jumlah pemesanan terpenuhi sebesar Q. Grafik terus naik ketika produksi mulai berjalan hingga mencapai tingkat maksimum I. Selama interval ini persediaan meningkat sebesar $P - D$, jadi dapat dirumuskan $I = (P - D)t_3$. Periode t_4 merupakan tahap produksi berhenti sehingga grafik menurun. Pada interval ini tingkat persediaan berkurang dengan laju D.

Berdasarkan gambar 4.2 dijelaskan bahwa waktu yang dibutuhkan untuk memenuhi permintaan konsumen adalah $t_3 + t_4 = FT$, sedangkan $t_1 + t_2 = (1 - F)T$, karena pada periode t_1 persediaan awal bernilai nol dan periode t_2 diasumsikan bahwa waktu untuk *backorder* sebesar $B/(P - \rho\beta D)$, sehingga dengan B adalah maksimum *backorder* dapat dirumuskan waktu yang dibutuhkan untuk masing-masing interval adalah

diketahui bahwa $t_1 + t_2 = (1 - F)T$

$$t_1 = (1 - F)T - t_2 \qquad (4.20)$$

dan

$$B = \beta D t_1$$

$$B = (P - \rho\beta D)t_2$$

Sehingga

$$\beta D t_1 = (P - \rho\beta D)t_2$$

diperoleh

$$t_2 = \frac{\beta\frac{D}{P}(1-F)T}{1-(\rho-1)\beta\frac{D}{P}} \quad (4.21)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (4.21) ke persamaan (4.20) didapatkan

$$t_1 = \frac{(1-F)T\left(1-\rho\beta\left(\frac{D}{P}\right)\right)}{1-(\rho-1)\beta\left(\frac{D}{P}\right)} \quad (4.22)$$

Berdasarkan gambar 4.2 dapat dirumuskan secara langsung $t_3 = \frac{FTD}{P}$ dan $t_4 = FT\left(1 - \frac{D}{P}\right)$.

dengan

β = nilai parameter *stockout* yang menyebabkan *backorder*,
F = tingkat pengisian persediaan yang diisi dari perusahaan,
Q = kuantitas produksi,
S = tingkat *stockout* maksimum,
B = tingkat *backorder* maksimum,
I = tingkat persediaan maksimum,
t_1 = periode waktu ketika terjadi produksi dan permintaan konsumen yang tidak dapat dipenuhi akan *backorder*,
t_2 = periode waktu *backorder* tidak sepenuhnya terjadi,
t_3 = periode waktu mulainya produksi,
t_4 = periode waktu saat produksi berhenti.
ρ = rasio tingkat stockout antara β_2 dan β_1.

Persediaan maksimum dapat dirumuskan menjadi

$$I = (P-D)t_3$$

$$= (P-D)\frac{FTD}{P}$$

$$I = FTD\left(1-\frac{D}{P}\right). \quad (4.23)$$

sedangkan rata-rata persediaan maksimum adalah $\frac{I_{max}}{2}F$

sehingga $$\bar{I} = \frac{DTF^2\left(1-\frac{D}{P}\right)}{2} \quad (4.24)$$

Pada periode t_1, tingkat persediaan awal bernilai nol karena dalam waktu tersebut tidak terjadi produksi akibatnya perusahaan tidak dapat memenuhi permintaan konsumen, maka tingkat *backorder* maksimum dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$B = \beta D t_1 \tag{4.25}$$

substitusi t_1 persamaan (4.22) ke persamaan (4.25) didapat

$$B = \beta D\left(\frac{(1-F)T\left(1-\rho\beta\left(\frac{D}{P}\right)\right)}{1-(\rho-1)\beta\left(\frac{D}{P}\right)}\right) \tag{4.26}$$

tingkat rata-rata backorder dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\bar{B} = \frac{B(1-F)}{2}$$

$$= \frac{\beta DT(1-F)^2\left(1-\rho\beta(D/P)\right)}{2[1-(\rho-1)\beta(D/P)]} \tag{4.27}$$

Lost sales atau penjualan yang hilang akibat *backorder* yang dibatalkan dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$L = \frac{D[t_1(1-\beta)+t_2(1-\rho\beta)]}{T}$$

$$= \frac{D[(t_1+t_2)-\beta(t_1+\rho t_2)]}{T}$$

$$= D(1-F)\left\{1-\frac{\beta}{1-(\rho-1)\beta(D/P)}\right\} \tag{4.28}$$

Total biaya persediaan diperoleh dari menjumlahkan rata-rata total biaya persedian, rata-rata *backorder* dan rata-rata total penjualan yang hilang sebagai berikut:

$$\Gamma(T,F) = C_o/T + C_h\bar{I} + C_b B + C_l L \tag{4.29}$$

substitusi masing-masing nilai $\bar{I}, B, dan\ L$ ke persamaan (4.29) didapat:

$$\Gamma(T,F) = \frac{C_o}{T} + \frac{C_h DTF^2(1-D/P)}{2} + \frac{\beta C_b DT(1-F)^2[1-\rho\beta(D/P)]}{2[1-(\rho-1)\beta(D/P)]} +$$
$$C_l D(1-F)\left\{1-\frac{\beta}{1-(\rho-1)\beta(D/P)}\right\}$$

untuk mempermudah perhitungan dimisalkan sebagai berikut:

$$C_h' = C_h(1-D/P)$$

$$C_b' = \frac{C_b[1-\rho\beta(D/P)]}{1-(\rho-1)\beta(D/P)}$$

$$C_l' = C_l\left\{1-\frac{\beta}{1-(\rho-1)\beta(D/P)}\right\}$$

sehingga persamaan total biaya persediaan menjadi

$$\Gamma(T,F) = \frac{C_o}{T} + \frac{C_h' DTF^2}{2} + \frac{\beta C_b'(1-F)^2}{2} + C_l' D(1-F) \tag{4.30}$$

dengan

μ = total biaya persediaan model EPQ *backorder* parsial,
s = harga jual per unit,
C_0 = biaya *set up* per periode,
C_p = biaya produksi per periode,
C_h = biaya penyimpanan per periode,
C_b = biaya *backorder* per periode,
C_g = biaya *goodwill loss* per periode,
C_1 = biaya *lost sales* per periode,
$\bar{I}$ = tingkat persediaan rata-rata,
$\bar{B}$ = tingkat *backorder* rata-rata.

4.2.2 Menentukan Nilai Optimal untuk *T* dan *F*

Nilai $\Gamma(T,F)$ pada persamaan (4.30) bernilai optimal jika turunan pertama Γ terhadap T sama dengan nol, yaitu

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial T} = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{C_0}{T^2} + \frac{C_h' DF^2}{2} + \frac{C_b' \beta D(1-F)^2}{2} = 0\ , \tag{4.31}$$

$$\Leftrightarrow \frac{C_h' DF^2}{2} + \frac{C_b' \beta D(1-F)^2}{2} = \frac{C_0}{T^2}\ ,$$

$$\Leftrightarrow T^2\left(C_h' DF^2 + C_b' \beta D(1-F)^2\right) = 2C_0$$

$$\Leftrightarrow T^2 = \frac{2C_0}{\left(C_h' DF^2 + C_b' \beta D(1-F)^2\right)}$$

$$\Leftrightarrow T^2 = \frac{2C_0}{D\left(C_h' F^2 + C_b' \beta (1-F)^2\right)}$$

$$T = \sqrt{\frac{2C_0}{D\left(C_h' F^2 + C_b' \beta (1-F)^2\right)}}\ . \tag{4.32}$$

Misalkan nilai F dalam persamaan (4.32) adalah satu karena F merupakan tingkat pengisian persediaan yang diisi secara penuh. maka nilai T pada persamaan (4.32) sama dengan nilai T yang optimal model EPQ dasar, artinya bahwa tidak ada *stockout* dan tidak ada *backorder*.

Biaya rata-rata minimum $\Gamma(T,F)$ dengan menetapkan bahwa turunan pertama Γ terhadap F sama dengan nol, yaitu

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial F}=0$$

$$\Leftrightarrow C_h'DTF-\beta C_b'DT(1-F)-C_1D=0 \qquad (4.33)$$

$$\Leftrightarrow C_h'DTF-\beta C_b'DT+\beta C_b'DTF-C_1D=0$$

$$\Leftrightarrow C_h'DTF+\beta C_b'DTF=C_1D+\beta C_b'DT$$

$$\Leftrightarrow F(C_h'DT+\beta C_b'DT)=C_1D+\beta C_b'DT$$

$$\Leftrightarrow F=\frac{D[(C_1)+\beta C_b'T]}{D(C_h'T+\beta C_b'T)}$$

$$F=\frac{C_1+\beta C_b'T}{T(C_h'+\beta C_b')} \qquad (4.34)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (4.34) pada persamaan (4.32), maka diperoleh solusi optimal untuk T^* (yang penjabarannya ada pada lampiran 1), yaitu

$$T^*=\sqrt{\frac{2C_0}{DC_h'}\left[\frac{C_h'+\beta C_b'}{\beta C_b'}\right]-\frac{[C_l']^2}{\beta C_h' C_b'}}. \qquad (4.35)$$

Untuk memperoleh nilai optimal untuk $F(T^*)$, maka akan digunakan nilai dari T^* pada persamaan (4.35) dan mensubstitusikan pada persamaan (4.34), sehingga diperoleh

$$F(T^*)=\frac{C_l'+\beta C_b' T^*}{T^*(C_h'+\beta C_b')}. \qquad (4.36)$$

Jika persamaan (4.35) dan (4.36) disubstitusikan ke dalam persamaan (4.30), maka diperoleh biaya optimal untuk model EPQ *backorder* parsial dan fase yang bergantung pada laju *backorde*r (yang penjabarannya ada pada lampiran 2), yaitu sebesar

$$\Gamma^*=\Gamma(T^*,F^*)=C_h'DT^*F^*. \qquad (4.37)$$

Diketahui bahwa T^* pada model EPQ *backorder* parsial paling tidak sama besar dengan T^* pada model EPQ dasar yaitu $\left(\sqrt{2C_0/DC_h{}'}\right)$, maka *backorder* optimal dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{2C_0}{DC_h{}'}\left[\frac{C_h{}'+\beta C_b{}'}{\beta C_b{}'}\right]-\frac{C_l{}^2}{\beta C_h{}'C_b{}'}\geq\frac{2C_0}{DC_h{}'}\ ,$$

$$\frac{2C_0}{DC_h{}'}\left[\frac{C_h{}'+\beta C_b{}'}{\beta C_b{}'}\right]-\frac{2C_0}{DC_h{}'}\geq\frac{[C_l]^2}{\beta C_h{}'C_b{}'}\ ,$$

$$\frac{2C_0}{DC_h{}'}\left[\frac{C_h{}'+\beta C_b{}'}{\beta C_b{}'}-1\right]\geq\frac{[C_l]^2}{\beta C_h{}'C_b{}'}\ ,$$

$$\frac{2C_0}{DC_h{}'}\left[\frac{C_h{}'}{\beta C_b{}'}\right]\geq\frac{[C_l]^2}{\beta C_h{}'C_b{}'}\ ,$$

$$\frac{2C_0C_h{}'}{D}\geq[C_l]^2\ ,$$

$$\sqrt{2C_oC_h'D}\ >C_l'D$$

Dengan mengganti nilai C_l dengan nilai C_l' pada EPQ *backorder* parsial dengan fase yang bergantung pada laju *backorder*, diperoleh

$$\sqrt{2C_oC_h'D}\ >C_lD\left\{1-\frac{\beta}{1-(\rho-1)\beta(D/P)}\right\}$$

Dengan perhitungan manual didapat nilai β optimal yaitu

$$\beta\geq\frac{1-\sqrt{\frac{2C_oDC_h'}{DC_l}}}{1+(\rho-1)(D/P)\left[1-\sqrt{2C_oC_h'D}/C_lD\right]}$$

Persamaan untuk T^* dan F^* mengakibatkan solusi akan optimal jika memenuhi kondisi

$$\beta\geq\beta^*=\frac{1-\sqrt{\frac{2C_oDC_h'}{DC_l}}}{1+(\rho-1)(D/P)\left[1-\sqrt{2C_oC_h'D}/C_lD\right]}. \qquad (4.38)$$

Untuk memenuhi kondisi dari β, diperoleh

$$\sqrt{\frac{2C_0}{DC_h{}'}} \geq \frac{C_1}{C_h{}'}. \tag{4.39}$$

Dengan mengganti variabel $C_h{}'$untuk C_h dan $C_b{}'$untuk C_b maka persamaan T^* dan F^* model EPQ *backorder* parsial pada persamaan (4.35) dan (4.36) merupakan solusi optimal, sedangkan kondisi yang digunakan untuk menentukan nilai minimum β untuk *backorder* yang optimal diberikan pada persamaan (4.38) dan (4.39) yang penjabarannya ada pada lampiran 3.

4.2.3 Prosedur Untuk Menentukan Nilai Optimal T, F dan Γ

Langkah-langkah untuk menentukan nilai optimal dari T, F dan Γ yaitu

1. Menentukan nilai C_h' , C_b' , C_l',
2. Menentukan nilai β^* dari persamaan (4.38),
   a) Jika $\beta < \beta^*$, menentukan nilai T^* pada persamaan (2.12) dan biaya optimal model EPQ dasar pada persamaan (2.10), kuantitas produksi optimal Q^*, persediaan maksimum, dan nilai prosentase permintaan (F^*).
   b) Jika $\beta \geq \beta^*$, gunakan langkah ke 3
3. Hitung nilai T^* dan F^*pada persamaan (4.35) dan (4.36) $\Gamma(T, F) = C_h{}'DT^*F^*$.
   a) jika $\Gamma(T, F) \leq C_l D$ gunakan $T^* = T$ dan $F^* = F$.
   b) jika $\Gamma(T, F) > C_l D$ tidak perlu *backorder*.

4.3 Penerapan Model EPQ Backorder Parsial dengan Fase yang Bergantung Laju Backorder pada UD. Cik-Cik *Collection*

Solusi untuk model deterministik EPQ didapatkan melalui pendekatan *backorder* parsial. Solusi ini merupakan pendekatan untuk mendapatkan kuantitas produksi optimal, panjang siklus pemesanan optimal, persediaan maksimum, prosentase permintaan yang diisi dari persediaan, *backorder* maksimal, *stockout* maksimal, dan total biaya persediaan minimum. Biaya yang dibutuhkan dalam perhitungan model EPQ dengan *backorder* parsial adalah jumlah permintaan setiap tahun, jumlah produksi setiap tahun, biaya *set up*, biaya penyimpanan, biaya *backorder*, harga jual per unit, biaya produksi, biaya *goodwill loss* dan biaya *lost sales* yang dapat dirumuskan $\left((s - C_p) + C_g\right)$.

4.3.1 Pengertian Data yang diperlukan Untuk Perhitungan Pada Model Deterministik Dengan *Backorder* Parsial

a. **Biaya *Set Up* (C_0)**

Biaya yang dikeluarkan oleh perusahaan sebelum mesin tersebut dipakai untuk memproduksi barang. Biaya tersebut meliputi biaya oli untuk mesin, listrik, dan sebagainya.

b. **Biaya Produksi $\left(C_p\right)$**

Biaya yang dikeluarkan oleh perusahaan, jika *item* atau barang tersebut diproduksi sendiri dalam perusahaan. Biaya tersebut meliputi biaya bahan baku, listrik, upah tenaga kerja langsung, dan sebagainya.

c. **Biaya Penyimpanan (C_h)**

Biaya yang dikeluarkan perusahaan atas investasi dalam persediaan dan pemeliharaan maupun investasi sarana fisik untuk menyimpan persediaan.

d. **Biaya *Backorder* (C_b)**

Biaya *backorder* terjadi ketika konsumen masih bersedia untuk menunggu pesanannya dipenuhi. Biaya ini merupakan biaya yang dikeluarkan oleh perusahaan untuk membeli produk bermerek lain dari pesaing bisnisnya.

e. **Biaya *Goodwill Loss* Tiap Unit pada Saat Permintaan Tidak Dapat Dipenuhi $\left(C_g\right)$**

Biaya yang timbul karena adanya permintaan yang tidak terpenuhi sehubungan dengan kekurangan persediaan (*stockout*) atau biaya yang timbul akibat kekurangan bahan dan pemesanan masih menunggu waktu.

f. **Biaya *Lost Sales* (C_1)**

Biaya yang dikeluarkan oleh perusahaan karena perusahaan tidak mempunyai cadangan persediaan yang harus dikirimkan ke pelanggan, akibatnya perusahaan membeli barang tersebut dari pesaing. Biaya ini merupakan jumlahan dari harga jual per unit (s) dikurangi biaya produksi $\left(C_p\right)$ ditambah dengan biaya *goodwill loss* tiap unit pada saat permintaan tidak dapat dipenuhi $\left(C_g\right)$.

Berdasarkan hasil penelitian, maka diperoleh data pada bulan

Januari-Juni 2013 yang ditunjukkan pada tabel 4.1 dengan periode waktu data permintaan setiap satu bulan periode produksi. Setiap unit hasil produksi berjumlah 40.000 potong pakaian atau pcs. Diasumsikan biaya penyimpanan pada pembeli (C_h) sebesar Rp. 250.000,- per periode.

Tabel 4.1 data permintaan bulan Januari

	Jumlah permintaan (D)	Jumlah produksi (P)	Biaya *set up* (C_o)	Biaya simpan (C_h)	Biaya *Backorder* (C_b)	Biaya *Lost sales* (C_l)
Madiun	850	36660	18000	250	2000	750
Malang	1273					
Solo	980					
Jepara	1273					
total	4376	36660	18000	250	2000	750

Dengan perkiraan nilai $\beta = 0{,}98$ dan $\rho = 1{,}002$

4.3.2 Perhitungan Untuk Model EPQ *Backorder* Parsial

Berdasarkan perkiraan nilai prosentase *stockout* dan rasio tingkat *stockout* dari perusahaan yang masing-masing bernilai 0.98 dan 1,002, nilai optimal dapat dihitung dengan langkah-langkah sebagai berikut.

1. Menentukan nilai β^* diperoleh

$$\beta^* = 1 - \sqrt{2C_oC_h'/DC_l^2}$$
$$= 1 - \sqrt{2 \times 18000 \times 220{,}16/4376 \times (750)^2}$$
$$= 1 - 0{,}056744$$
$$= 0{,}94$$

2. Karena nilai $\beta^* < \beta$, maka selanjutnya menghitung nilai

$$C_h{}' = C_h \left(1 - \frac{D}{P}\right),$$
$$= 250 \left(1 - \frac{4376}{36660}\right),$$
$$= 250 \times 0{,}8806329,$$
$$= 220{,}16.$$

$$C_b{}' = C_b \ \left(1 - \frac{\beta D}{P}\right),$$

$$= 2000\left(1 - \frac{0.98 \times 4376}{36660}\right),$$

$$= 2000 \ \times \ 0{,}883020185\ ,$$

$$= 1766{,}0404.$$

3. Menentukan siklus pemesanan optimal (T^*) pada persamaan (4.15), yaitu

$$T^* = \sqrt{\frac{2C_0}{DC_h{}'}\left[\frac{C_h{}'+\beta C_b{}'}{\beta C_b{}'}\right] - \frac{[(1-\beta)C_1]^2}{\beta C_h{}' C_b{}'}},$$

$$= \sqrt{\frac{2 \times 18000}{4376 \times 220{,}16} \times \left[\frac{220{,}16+(0.98) \times 1766{,}0404}{0.98 \times 1766{,}0404}\right] - \frac{[(1-0.98) \times 750]^2}{0.98 \times 220{,}16 \times 1766{,}0404}},$$

$$= \sqrt{\frac{36000}{963420{,}16} \times \left[\frac{1950{,}879592}{1730.719592}\right] - \frac{225}{381035{,}2254}},$$

$$= \sqrt{0{,}03736687 \ \times \ 1{,}127207204 - 0{,}00059},$$

$$= \sqrt{0.04212 - 0{,}00059},$$

$$= \sqrt{0{,}04153},$$

$$= 0.204$$

jadi perusahaan akan membutuhkan waktu untuk satu siklus pemesanan adalah 0,204 per periode produksi atau 0,204 x 30 hari = 6,12 = 6 hari.

4. Menentukan tingkat pengisian atau prosentase permintaan yang akan diisi dari persediaan (F^*) pada persamaan (4.16), yaitu

$$F^* = \frac{C_1(1-\beta)+\beta C_b{}' T^*}{T^*(C_h{}'+\beta C_b{}')},$$

$$= \frac{750 \times (1-0.98) + (0.98 \times 1766{,}0404 \times 0.204)}{0.204 \times \left(220{,}16 + (0.98 \times 766{,}0404)\right)},$$

$$= \frac{15+353{,}066797}{0.204 \times 1950{,}879592},$$

$$= \frac{368{,}0667968}{397{,}9794368},$$

$= 0.9248,$

jadi, tingkat pengisian atau persentase permintaan yang akan diisi dari persediaan adalah sebesar 92,5%.

5. Menentukan total biaya persediaan minimum , dapat dihitung menggunakan persamaan (4.17) yaitu

$$\mu^* = C_h{}'DT^*F^*,$$

$$= 220{,}16 \times 4376 \times 0.204 \times 0.9248,$$

$$= 181758{,}07 \backsimeq \text{Rp } 181.750,$$

jadi, total biaya persediaan minimum yang dikeluarkan perusahaan menggunakan model EPQ *backorder* parsial sebesar Rp 181.750,-

6. Menentukan persediaan maksimum pada persamaan (4.2) dan persediaan rata-rata pada persamaan (4.8) yaitu
   a. Persediaan maksimum (I^*)

$$I^* = F^* \times T^* \times D \times \left(1 - \frac{D}{P}\right),$$

$$= 0.9248 \times 0.204 \times 4376 \times \left(1 - \frac{4376}{36660}\right),$$

$$= 727{,}026 \backsimeq 727 \text{ pcs},$$

   b. Persediaan rata-rata ($\bar{I}$)

$$\bar{I} = \frac{D \times T^* \times (F^*)^2}{2} \times \left(1 - \frac{D}{P}\right),$$

$$= \frac{4376 \times 0.204 \times (0.9248)^2}{2} \times \left(1 - \frac{4376}{36660}\right),$$

$$= \frac{763{,}4895952}{2} \times 0.880632842,$$

$$= 381{,}7447976 \text{ x } 0{,}880632842$$

$$= 336{,}177 \backsimeq 336 \text{ pcs},$$

jadi persediaan akan mencapai maksimum pada periode t_3 sebesar 727 pcs dengan persediaan rata-rata sebesar 336 pcs.

7. Menentukan *stockout* maksimum pada persamaan (4.3) yaitu

$$S^* = D \times t_1 ,$$

$$= D \times (1 - F^*) \times T^* \times \left(1 - \frac{\beta x D}{P}\right),$$

$= 4376 \times (1 - 0.9248) \times 0.204\, x \left(1 - \frac{0.98 \times 4376}{36660}\right),$

$= 4376 \times 0.0752 \times 0.204 \times 0.883020185,$

$= 59{,}278 \backsimeq$ 59 unit ,

jadi, *stockout* maksimum sebesar 59 unit selama satu tahun.

8. Menentukan *backorder* maksimum pada persamaan (4.4) dan *backorder* rata-rata pada persamaan (4.9) yaitu
   a. *Backorder* maksimum (B^*)

   $B^* = \beta \times S^*,$

   $= 0.98 \times 59$

   $=$58 pcs.

   b. *Backorder* rata-rata ($\bar{B}$)

   $$\bar{B} = \frac{\beta \times D \times T^* \times (1 - F^*)^2}{2} \times \left(1 - \frac{\beta\, x\, D}{P}\right),$$

   $$= \frac{0.98 \times 4376 \times 0.204 \times (1 - 0.9248)^2}{2} \times \left(1 - \frac{0.98 \times 4376}{36660}\right),$$

   $$= \frac{4{,}9473}{2} \times 0.883020,$$

   $$= 2.474 \times 0.883020$$

   $= 2.1846 \backsimeq 2$ pcs,

jadi *backorder* akan mencapai maksimum pada periode t_1 sebesar 58 pcs dengan *backorder* rata-rata adalah sebesar 2 pcs.

9. Menentukan kuantitas produksi optimal pada persamaan (4.5) yaitu

   $$Q^* = D \times T^* \times [\beta \times (1 - F^*) + F^*]\,,$$

   $$= 4376 \times 0.204 \times [0.98 \times (1 - 0.9248) + 0.9248]\,,$$

   $$= 892.704x[0.073696 + 0.9248]\,,$$

   $$= 892.704x0.998496\,,$$

   $= 891.361$ pcs,

jadi kuantitas produksi optimal (Q^*) adalah sebesar 891 pcs.

10. Laba perusahaan diperoleh:

$$\Pi(T, F) = (s - C_p)D - \mu(T, F)$$

$$= (35000 - 25000)4376 - 181750$$
$$= 43760000 - 181750$$
$$= 43.\ 578\ 250$$

Sehingga diperoleh laba perusahaan sebesar Rp. 43.578.250,-

4.3.3 Perhitungan Untuk Model EPQ *Backorder* Parsial dengan Fase yang Bergantung pada Laju *Backorder*

Berdasarkan perkiraan nilai prosentase *stockout* dan ratio tingkat *stockout* dari perusahaan yang masing-masing bernilai 0.98 dan 1,002, nilai optimal dapat dihitung dengan langkah-langkah sebagai berikut.

1. Menentukan, biaya simpan, biaya *backorder* dan biaya *lost sales*, masing-masing diperoleh

$$C_h' = C_h\left(1 - \frac{D}{P}\right),$$
$$= 250\ \left(1 - \frac{4376}{36660}\right),$$
$$= 250 \times 0{,}8806329,$$
$$= 220{,}16.$$

$$C_b' = \frac{C_b[1-\rho\beta(D/P)]}{1+(\rho-1)\beta(D/P)}$$

$$= \frac{2000[1-1{,}002\times 0{,}98(4376/36660)]}{1+(1{,}002-1)\times 0{,}98(4376/36660)}$$
$$= 1765{,}1595$$

$$C_l' = C_l\left\{1 - \frac{\beta}{1-(\rho-1)\beta(D/P)}\right\}$$

$$= 750\left\{1 - \frac{0{,}98}{1-(1{,}002-1)0.98(4376/36660)}\right\}$$
$$= 750\left\{1 - \frac{0{,}98}{0{,}99976604}\right\}$$
$$= 750\{0.01977\}$$
$$= 14.828$$

2. Menentukan nilai β^* diperoleh

$$\beta^* = \frac{1-\sqrt{2C_oC_h'D/(C_lD)}}{1+(\rho-1)(D/P)\left[1-\sqrt{2C_oC_h'D/(C_lD)}\right]}$$

$$= \frac{1-\sqrt{2X18000X220{,}16X4376}/(750X4376)}{1+(1{,}002-1)(4376/36660)\left[1-\sqrt{2X18000X220{,}16X4376}/(750X4376)\right]}$$

$$= \frac{1-\sqrt{3{,}4683}/(3282000)}{1+(0{,}002)(0.11937)\left[1-\sqrt{3{,}4683}/(27495000)\right]}$$

$$= \frac{0{,}94326}{1.00023}$$

$$= 0{,}943$$

3. Karena nilai $\beta^* \leq \beta$, maka selanjutnya menghitung nilai T^* dan F^* diperoleh

$$T^* = \sqrt{\frac{2C_0}{DC_h{}'}\left[\frac{C_h{}' + \beta C_b{}'}{\beta C_b{}'}\right] - \frac{[C_l']^2}{\beta C_h{}' C_b{}'}}$$

$$T^* = \sqrt{0{,}03737\left[\frac{6015{,}856}{1729{,}856}\right] - \frac{219{,}87}{380845{,}1652}}$$

$$T^* = \sqrt{0{,}1319 - 5{,}7732x10^{-4}}$$

$$T^* = \sqrt{0.1313}$$

$$T^* = 0{,}36$$

jadi perusahaan akan membutuhkan waktu untuk satu siklus pemesanan adalah 0,36 tiap periode produksi atau 0,36 x 30 hari = 10,8 = 11 hari.

$$F(T^*) = \frac{C_l' + \beta C_b{}' T^*}{T^*(C_h{}' + \beta C_b{}')}$$

$$= \frac{14{,}828 + 0{,}98 \times 1765{,}1595 \times 0{,}36}{0{,}36(220{,}16 + 0{,}98 \times 1765{,}1595)}$$

$$= \frac{14{,}828 + 622{,}75}{0{,}36(1950{,}016)}$$

$$= \frac{637,578}{702}$$
$$= 0,908$$

jadi, tingkat pengisian atau persentase permintaan yang akan diisi dari persediaan adalah sebesar 90,8%.

4. Menghitung nilai $\Gamma^*(T^*, F^*)$ diperoleh
$$\Gamma^*(T^*, F^*) = C_h' D T^* F^*$$
$$= 220{,}16x4376x0{,}36x0{,}908$$
$$= 314.922{,}78$$
Jadi, total biaya persediaan pada model EPQ *backorder* parsial dengan fase yang bergantung pada laju *backorder* adalah sebesar Rp. 314.922,- sehingga masih tergolong optimal.

5. Menentukan persediaan maksimum, pada persamaan (4.23) dan persediaan rata-rata pada persamaan (4.24) yaitu
   a) Persediaan maksimum (I^*)
$$I^* = F^* \times\ T^* \ \times D\ \times\ \left(1 - \frac{D}{P}\right),$$
$$= 0.908\ \times\ 0.36\ \times\ 4376\ \times \left(1 - \frac{4376}{36660}\right),$$
$$= 1259.68 \backsimeq 1260 \text{ pcs},$$
   b) Persediaan rata-rata $(\bar{I})$
$$\bar{I} = \frac{D \times T^* \times (F^*)^2}{2}\ \times\ \left(1 - \frac{D}{P}\right),$$
$$= \frac{4376 \times 0.36 \times (0.908)^2}{2} \times \left(1 - \frac{4376}{36660}\right),$$
$$= 571.89 \backsimeq 572 \text{ pcs}$$

jadi persediaan akan mencapai maksimum pada periode t_3 sebesar 1260 pcs dengan persediaan rata-rata sebesar 572 pcs.

6. Menentukan *stockout* maksimum pada persamaan (4.3) yaitu
$$S^* = D\ \times\ t_1\ ,$$
$$= D\ \times\ \frac{(1-F)T\left(1-\rho\beta\left(\frac{D}{P}\right)\right)}{1-(\rho-1)\beta\left(\frac{D}{P}\right)},$$

$$= 4376 \times \frac{(1-0{,}908)0{,}36\left(1-1{,}002\times 0{,}98\left(\frac{4376}{36660}\right)\right)}{1-(1{,}002-1)0{,}98\left(\frac{4376}{36660}\right)},$$

$$= 4376 \times \frac{0{,}03312\times 0{,}8828}{0{,}99977},$$

$= 127.976 \backsimeq$ 128 pcs ,

jadi, *stockout* maksimum sebesar 153 unit selama satu produksi.

7. Menentukan *backorder* maksimum pada persamaan (4.25) dan *backorder* rata-rata pada persamaan (4.27) yaitu
   c. *Backorder* maksimum (B^*)

$$B^* = \beta \times S^*,$$
$$= 0.98 \times 127{,}976$$

=125 pcs.

   d. *Backorder* rata-rata ($\bar{B}$)

$$\bar{B} = \frac{\beta DT(1-F)^2\left(1-\rho\beta(D/P)\right)}{2[1-(\rho-1)\beta(D/P)]}$$

$$= \frac{0{,}98\times 4376\times 0{,}36(1-0{,}908)^2\left(1-1{,}002\times 0.98(4376/36660)\right)}{2[1-(1{,}002-1)0{,}98(4376/36660)]},$$

$$= \frac{13{,}067\times 0{,}8828}{1{,}9995},$$

$$= \frac{11{,}535}{1{,}9995},$$

$= 5.77 \backsimeq$ 6 pcs,

jadi *backorder* akan mencapai maksimum pada periode t_1 sebesar 125 pcs dengan *backorder* rata-rata adalah sebesar 6 pcs.

8. Menentukan kuantitas produksi optimal pada persamaan (4.5) yaitu

$$Q^* = D \times T^* \times [\beta \times (1 - F^*) + F^*] ,$$

$$= 4376 \times 0.36 \times [0.98 \times (1 - 0.908) + 0.908] ,$$

= 1575.36 x 0.99816,

$= 1572.46 \backsimeq$ 1572 pcs,

jadi kuantitas produksi optimal (Q^*) adalah sebesar 1572 pcs.

9. Laba perusahaan diperoleh dari:

$$\Pi(T,F) = \left(s - C_p\right)D - \mu(T,F)$$
$$= (35000 - 25000)4376 + 67 - 314.922$$
$$= 44430000 - 314922$$
$$= 44115000$$

Sehingga didapat laba perusahaan sebesar Rp. 44. 115.000,-

Dari pembahasan Subbab 4.3.2 dan 4.3.3, berdasarkan perhitungan secara manual untuk masig-masing model, maka dapat disimpulkan bahwa perbedaan untuk model EPQ Dasar dan EPQ *Backorder* Parsial dapat dilihat pada Tabel 4.2, yaitu

Tabel 4.2 perbandingan hasil antara model EPQ *backorder* Parsial dengan EPQ *backorder* parsial dengan fase yang bergantung pada laju *backorder*

Elemen-Elemen	**Model EPQ Backorder Parsial (tidak terjadi penambahan tingkat *stockout*)**	**Model EPQ *Backorder* Parsial dengan fase yg bergantung laju *backorder* (terjadi penambahan tingkat *stockout*)**
Kuantitas produksi optimal $(\boldsymbol{Q}^{*})$	891 pcs	1572 pcs
Panjang siklus pemesanan $(\boldsymbol{T}^{*})$	0,204 bulan	0,36 bulan
Tingkat pengisian persediaan yang dipenuhi perusahaan $(\boldsymbol{F}^{*})$	92,48%	90,8%
Persediaan maksimum $(\boldsymbol{I}^{*})$	727 pcs	1260 pcs
***Backorder* Maksimum** $(\boldsymbol{B}^{*})$	58 pcs	125 pcs
***Stockout* Maksimum** $(\boldsymbol{S}^{*})$	59 pcs	128 pcs
Total biaya	Rp. 181.750,-	Rp. 314.900.,-
Laba	Rp. 43. 578. 250,-	Rp. 44.115.000,-

Dari perhitungan diperoleh hasil kuantitas produksi optimal pada model EPQ *backorder* parsial berjumlah 891 pcs, sedangkan pada model EPQ *backorder* parsial dengan fase yang bergantung pada laju *backorder* berjumlah 1572 dengan selisih waktu 5 hari produksi. Sehingga produsen dapat memenuhi penambahan order konsumen yang tidak diperkirakan oleh model EPQ *backorder* parsial saja.

Dari perhitungan juga diperoleh hasil perbandingan laba perusahaan yaitu untuk model *backorder* parsial diperoleh laba sebesar Rp. 43.578.250,- sedangakan untuk model ini sebesar Rp. 44. 115.000,- dengan demikian terdapat selisih sebesar Rp. 536. 750,-
Hal ini dikarenakan pada model EPQ *backorder* parsial dengan fase yang bergantung pada laju *backorder*, perusahaan tidak kehilangan penjualan akibat penambahan permintaan konsumen yang tidak terpenuhi.

4.3.4 Pengaruh Nilai ρ (Rasio Tingkat *Stockout*) Terhadap Total Biaya Persediaan EPQ *Backorder* Parsial dan EPQ *Backorder* Parsial dengan Fase yang Bergantung pada Laju *Backorder*

Besar nilai ρ berpengaruh terhadap total biaya persediaan pada model EPQ *backorder* parsial dan EPQ *backorder* parsial dengan fase yang bergantung pada laju *backorder*, seperti terlihat dalam Tabel 4.3 yaitu

Tabel 4.3 Pengaruh nilai β terhadap total biaya persediaan pada model EPQ *backorder* parsial dan EPQ *backorder* parsial dengan fase yang bergantung pada laju *backorder*

RatioTingkat *Stockout* yang Menyebabkan Perusahaan akan *Backorder* $(\boldsymbol{\rho})$	**Total Biaya Persediaan**
1,002	Rp 314.922,-
1,005	Rp 314.850,-
1,006	Rp 314.850,-
1,007	Rp 314.767,-
1,01	Rp 314. 575,-
1,02	Rp 314. 959,-

Catatan: $\boldsymbol{\beta = 0,98\ dan\ 1 \le \rho \le 1/\beta}$

Tabel 4.3 menjelaskan bahwa ρ merupakan penambahan permintaan ketika perusahaan mengalami *stockout* . Nilainya berkisar antara $1 \leq \rho \leq 1/\beta$. Ketika perusahaan tidak mempunyai persediaan, maka sebagian dari konsumen bersedia untuk menunggu pesanan tersebut terpenuhi. Dan ketika kegiatan produksi untuk memenuhi permintaan konsumen dimulai, ternyata terjadi penambahan permintaan. Kondisi ini mengakibatkan perusahaan akan menambah produksi untuk memenuhi *backorder* agar permintaan konsumen tersebut terpenuhi.

Backorder dipenuhi dengan cara perusahaan akan memproduksi sendiri produk yang diminta. Nilai inisial β diperoleh dengan membagi permintaan yang *backorder* dengan banyaknya pengiriman per kota, sedangkan ρ diperoleh dari membagi jumlah tambahan permintaan dengan permintaan yang *backorder*. Dengan kisaran nilai $1 \leq \rho \leq 1.02$ pada model EPQ *backorder* parsial dengan fase yang bergantung pada laju *backorder* ditunjukkan bahwa hasil total biaya persediaan meningkat seiring dengan peningkatan nilai ρ atau rasio penambahan permintaan pada masing-masing periode. Pada $\beta = 0.98$ dengan $\rho = 1{,}002$ total biaya persediaan yang dikeluarkan perusahaan adalah sebesar Rp 314. 922,-. Sedangkan Pada $\rho = 1{,}02$ total biaya persediaan yang dikeluarkan oleh perusahaan adalah sebesar Rp 314. 959,-. Dengan menggunakan $\rho = 1{,}002$ dan $\rho = 1{,}02$ pada model EPQ *backorder* parsial menunjukkan bahwa perusahaan terjadi kekurangan persedian (*stockout*) sehingga konsumen bersedia untuk menunggu sampai pesanan tersebut terpenuhi kemudian terjadi penambahan pesanan yang mengakibatkan *stockout* juga bertambah, akibatnya total biaya persediaan yang dikeluarkan perusahaan lebih besar. Perusahaan melakukan *backorder* karena dapat meminimalkan kerugian akibat permintaan konsumen tidak dapat dipenuhi, selain itu konsumen terlayani dengan baik karena pelayanan yang cepat dari pihak perusahaan. Ketika nilai $\rho = 1{,}03$ diperoleh nilai $\beta^* > \beta$ sehingga perusahaan tidak perlu *backorder* atau men*stock* barang, karena dalam kondisi tersebut persediaan yang ada sudah mencukupi.

BAB V
KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Model deterministik EPQ *Backorder* Parsial dengan fase yang bergantung pada laju *backorder* merupakan metode untuk memecahkan masalah yang terjadi pada perusahaan akibat konsumen tidak sabar menunggu pesanan dipenuhi oleh perusahaan. Model ini merupakan pengembangan dari dua model persediaan sebelumnya yaitu model EPQ dasar, EPQ *backorder* parsial, danEPQ *Backorder* Parsial dengan fase yang bergantung pada laju *backorder* sehingga dapat disimpulkan sebagai berikut:

1) Rumusan biaya optimal model EPQ *backorder* parsial dengan fase yang bergantung pada laju *backorder* didapat dengan menurunkan persamaan pada model terhadap T dan F, kemudian mensubtitusikan masing-masing nilai T dan F yang telah optimal tersebut pada model dasar.
2) Dari perhitungan dapat diketahui bahwa adanya ρ terhadap β berpengaruh pada total biaya persediaan. β merupakan tingkat *stockout* yang mempengaruhi perusahaan akan *backorder* atau tidak, sedangkan ρ merupakan *ratio* atau penambahan permintaan saat *stockout*. Total biaya persediaan pada model EPQ *backorder* parsial dengan fase yang bergantung pada laju *backorder* masih optimal, karena pada model EPQ *backorder* parsial dengan fase yang bergantung pada laju *backorder* dapat meminimalkan kerugian akibat pertambahan permintaan konsumen yang tidak dapat dipenuhi, selain itu konsumen terlayani dengan baik karena pelayanan yang cepat dari pihak perusahaan.
3) Dari perhitungan pada sub bab 4.3.2 dan 4.3.3 pada UD. Cik-Cik *Collection* dapat diketahui bahwa pada model EPQ *backorder* parsial didapat kuantitas produksi optimal sebesar 891 pcs, sedangkan pada model EPQ *backorder* parsial dengan fase yang bergantung pada laju *backorder* sebesar 1572 pcs dengan selisih waktu produksi 5 hari. Dengan *backorder* maksimum yang berselisih 67 pcs. Dengan demikian perusahaan tidak akan kehilangan penjualan (*lost sales*) sebanyak 67 pcs jika

perhitungannya menggunakan model EPQ *backorder* parsial dengan fase yang bergantung pada laju *backorder*.

5.2 Saran

Pada skripsi ini dibahas model EPQ *backorder* parsial dengan fase yang bergantung pada laju *backorder* yang mengasumsikan adanya penambahan prosentase *stockout* pada saat produksi dimulai sehingga produsen harus menambah jumlah produksi *backorder*nya untuk menghindari kerugian akibat penjualan yang hilang (*lost sales*). Penulisan selanjutnya diharapkan pembaca (mahasiswa) dapat mempertimbangkan bagaimana bentuk model serta optimasi biaya total persediaan ketika prosentase *stockout* bertambah di setiap waktu (tidak pada saat produksi dimulai saja).

DAFTAR PUSTAKA

Hiller, F.S dan G.J. Lieberman. 1995. *Introduction To Operations research* 6^{th} *Editions*. Mc Graw-Hill International Editions. Singapore

Maghfiroh, R.E. 2007. *Model Matematika EPQ (Economic Production Quantity) Dengan Backorder*. Skripsi FMIPA UB. Malang.

Nasution, A.H. 1999. *Perencanaan dan Pengendalian Produksi, Edisi Pertama*. Guna Widya. Surabaya

Pentico, D.W dan Matthew J.D. 2009. *The Deterministic EOQ with Partial Backordering: A New Approach.* European Journal of Operational Research 194:102-113.

Pentico DW., Matthew J.D, Carl T. 2009. *The Deterministic EPQ with Partial Backordering: A New Approach.* The International Journal Of Management Science Omega 37:624-636

Pentico DW., Matthew J.D, Carl T. 2010. *The EPQ with Partial Backordering and Phase Dependent Backordering Rate.* The International Journal Of Management Science Omega 39:574-577

Pratiwi, R.C. 2012. EPQ (*Economic Production Quantity*) dengan *Backorder* Parsial. Skripsi FMIPA UB. Malang.

Rangkuti, F. 2004. *Manajemen Persediaan (Aplikasi di Bidang Bisnis)*. PT. Raja Grafindo Persada. Jakarta.

Ristono, A. 2009. *Manajemen Persediaan*. Graha Ilmu. Yogyakarta.

Siswanto.2007. *Operation Research, Jilid dua*. Erlangga. Jakarta.

Sukmana, A. dan I. Lokman. 2005. Model *Matematika Sistem Persediaan Dengan Pengadaan Darurat.* Integral. Vol 10: No 1

Yamit, Z. 1999. *Manajemen Persediaan, Edisi Pertama*. EKONISIA Fakultas Ekonomi UII Yogyakarta.

Waters, C. 1992. *Inventory Control and Management*. John Wiley & Sons, Chichester. New York.

LAMPIRAN

Lampiran 1.
Solusi Untuk Persamaan Panjang Siklus Pemesanan Optimal ($\boldsymbol{T^*}$)

$$\Gamma(T,F) = \frac{C_o}{T} + \frac{C_h{\prime}DTF^2}{2} + \frac{C_b{\prime}\beta DT(1-F)^2}{2} + C_l D(1-F) \qquad (1)$$

$$T = \sqrt{\frac{2C_0}{D\left[C_h' F^2 + \beta C_b{\prime}(1-F)^2\right]}} \qquad (2)$$

$$F = \frac{C_l + \beta C_b{\prime}T}{T(C_h' + \beta C_b{\prime})} \qquad (3)$$

Persamaan (1.3), dapat ditulis menjadi:

$$F = \frac{C_l}{(C_h' + \beta C_b{\prime})T} + \frac{\beta C_b{\prime}}{(C_h' + \beta C_b{\prime})},$$

$$F^2 = \frac{[C_l]^2}{(C_h' + \beta C_b{\prime})^2 T^2} + \frac{2\beta C_b C_l}{(C_h' + \beta C_b{\prime})^2 T} + \frac{\beta^2 C_b{\prime}^2}{(C_h' + \beta C_b{\prime})^2},$$

$$= \frac{1}{(C_h' + \beta C_b{\prime})^2}\left[\frac{(C_l)^2}{T^2} + \frac{2\beta C_b{}' C_l}{T} + \beta^2 (C_b{}')^2\right],$$

$$= \frac{1}{T^2(C_h{}' + \beta C_b{}')^2}\left[(C_l)^2 + 2\beta C_b{}' C_l T + \beta^2 (C_b{}')^2 T^2\right]. \qquad \text{(a)}$$

Persamaan $\beta C_b{}'(1-2F)$ dapat ditulis menjadi:

$$= \beta C_b{}'\left(1 - \frac{2C_l}{(C_h{}' + \beta C_b{}')T} - \frac{2\beta C_b{}'}{(C_h{}' + \beta C_b{}')}\right),$$

$$= \frac{\beta C_b{}'}{T(C_h{}' + \beta C_b{}')}\left(T(C_h{}' + \beta C_b{}') - 2C_l - 2\beta C_b{}' T\right),$$

$$= \frac{\beta C_b{}'}{T^2(C_h{}' + \beta C_b{}')}\left[T^2(C_h{}' - \beta C_b{}') - 2C_l T\right]. \qquad \text{(b)}$$

Persamaan (a) dan (b) disubtitusi ke persamaan (1.2), diperoleh:

$$T = \sqrt{\frac{2C_o}{D\left[C_h{}'F^2+\beta C_b{}'(1-F)^2\right]}}$$

$$T^2 = \frac{2C_o}{D\left[C_h{}'F^2+\beta C_b{}'(1-F)^2\right]}$$

$$= \frac{2C_o}{D}\left[\frac{1}{C_h{}'F^2+\beta C_b{}'(1-F)^2}\right]$$

$$= \frac{2C_o}{D}\left[\frac{1}{C_h{}'F^2+\beta C_b{}'(1-2F+F^2)}\right]$$

$$= \frac{2C_o}{D}\left[\frac{1}{F^2\left(C_h{}'+\beta C_b{}'\right)+\beta C_b{}'(1-2F)}\right]$$

$$= \frac{2C_o}{D}\left[\frac{1}{\frac{1}{T^2\left(C_h'+\beta C_{b'}\right)^2}\left[(C_l)^2+2\beta C_b'\, C_lT+\beta^2 C_{b'}{}^2T^2\right]\left(C_h'+\beta C_{b'}\right)} + \frac{1}{\frac{\beta C_{b'}}{T^2\left(C_h'+\beta C_{b'}\right)}\left[\left(C_h'-\beta C_{b'}\right)T^2-2TC_l\right]}\right]$$

$$T^2 = \frac{2C_o}{D}\left[\frac{1}{\frac{1}{T^2\left(C_h{}'+\beta C_b{}'\right)}\left[(C_l)^2+2\beta C_b{}'C_lT+\beta^2\left(C_b{}'\right)^2T^2+\left(C_h{}'-\beta C_b{}'\right)T^2\beta C_b{}'-2TC_lC_b{}'\beta\right]}\right]$$

$$= \frac{2C_o}{D}\left[\frac{1}{\frac{1}{T^2\left(C_h{}'+\beta C_b{}'\right)}\left[\begin{array}{c}(C_l)^2+2\beta C_b'C_lT-2\beta^2C_b'C_lT+\beta^2(C_{b'})^2T^2+C_h'T^2\beta C_b' \\ -\beta^2(C_{b'})^2T^2-2\beta C_b'C_lT+2\beta^2C_{b'}C_lT\end{array}\right]}\right]$$

$$= \frac{2C_o}{D}\left[\frac{1}{\frac{1}{T^2\left(C_h{}'+\beta C_b{}'\right)}\left[\left(C_l\right)^2+C_h{}'\beta C_b{}'T^2\right]}\right]$$

$$T^2 = \frac{2C_o}{D}T^2\left(C_h{}'+\beta C_b{}'\right)\left[\frac{1}{(C_l)^2+C_h{}'\beta C_b{}'T^2}\right],$$

$$1 = \frac{2C_0}{D}(C_h{}' + \beta C_b{}')\frac{1}{(C_l)^2 + C_h{}'\beta C_b{}'T^2},$$

$$(C_l)^2 + C_h{}'\beta C_b{}'T^2 = \frac{2C_0}{D}(C_h{}' + \beta C_b{}'),$$

$$C_h{}'\beta C_b{}'T^2 = \frac{2C_0}{D}(C_h{}' + \beta C_b{}') - (C_l)^2,$$

$$T^2 = \frac{2C_0}{D}\left[\frac{C_h{}' + \beta C_b{}'}{C_h{}'\beta C_b{}'}\right] - \frac{(C_l)^2}{C_h{}'\beta C_b{}'},$$

$$T = \sqrt{\frac{2C_0}{DC_h{}'}\left[\frac{C_h{}' + \beta C_b{}'}{\beta C_b{}'}\right] - \frac{(C_l)^2}{C_h{}'\beta C_b{}'}}.$$

Terbukti bahwa panjang siklus pemesanan optimal (T^*) pada persamaan (4.35) adalah

$$T^* = \sqrt{\frac{2C_0}{DC_h{}'}\left[\frac{C_h{}' + \beta C_b{}'}{\beta C_b{}'}\right] - \frac{(C_l)^2}{C_h{}'\beta C_b{}'}}. \quad (4)$$

Lampiran 2.
Total Biaya Persediaan Optimal untuk Model EPQ *Backorder* Parsial dan Fase yang Bergantung Pada Laju *Backorder*

$$F(T^*) = \frac{C_l + \beta C_b{'} T^*}{T^*(C_h' + \beta C_b{'})} \tag{1}$$

$$T^* = \sqrt{\frac{2C_0}{DC_h{'}}\left[\frac{C_h' + \beta C_b{'}}{\beta C_b{'}}\right] - \frac{[C_l]^2}{\beta C_h{'} C_b{'}}} \tag{2}$$

$$= \sqrt{\frac{2C_o(C_h' + \beta C_b{'})}{DC_h{'}\beta C_b{'}} - \frac{[C_l]^2}{C_h{'}\beta C_b{'}}},$$

$$= \sqrt{\frac{2C_o(C_h' + \beta C_b{'})}{DC_h{'}\beta C_b{'}} - \frac{D[C_l]^2}{DC_h{'}\beta C_b{'}}},$$

$$= \sqrt{\frac{2C_o(C_h' + \beta C_b{'})\beta C_h{'}\, c_b{'} - D\beta C_h{'} c_b{'} C_l{}^2}{DC_h{'}^2 \beta^2 C_b{'}^2}},$$

$$= \sqrt{\frac{[2C_o(C_h' + \beta C_b{'}) - DC_l{}^2] C_h{'}\beta C_b{'}}{DC_h{'}\beta C_b{'}(C_h{'}\beta C_b{'})}}.$$

Persamaan $2C_o(C_h' + \beta C_b{'}) - DC_l{}^2$, bisa ditulis menjadi :

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{\frac{2C_o(C_h' + \beta C_b{'}) - DC_l{}^2}{DC_h{'}\beta C_b{'}}}\right)^2 DC_h{'}\beta C_b{'},$$

$$\Leftrightarrow (T^*)^2\, DC_h{'}\beta C_b{'}.$$

Substitusi persamaan T^* pada persamaan (2.2) dan $F^*(T)$ pada persamaan (2.1) ke dalam persamaan (1.1) pada lampiran 1, diperoleh:

$$\Gamma(T, F) = \frac{C_0}{T} + \frac{C_h{'} DTF^2}{2} + \frac{\beta C_b{'} DT(1-F)^2}{2} + C_l D(1 - F)$$

$$= \frac{C_0}{T} + \frac{1}{2}\frac{C_h{'} DT[C_l + \beta C_b{'} T]^2}{T^2\left(C_h' + \beta C_b{'}\right)^2} + \frac{1}{2}\beta C_b{'} DT\left[1 - \frac{C_l + \beta C_b{'} T}{T(C_h' + \beta C_b{'})}\right]^2$$

$$+ C_l D\left[1 - \frac{C_l + \beta C_b{'} T}{T(C_h' + \beta C_b{'})}\right]$$

$$= \frac{C_0}{T} + \frac{1}{2} C_h' DT \left[\frac{C_l + \beta C_{b'} T}{T(C_{h'} + \beta C_{b'})}\right]^2 + \frac{1}{2} \beta C_b' DT$$

$$\left[\frac{T(C_h' + \beta C_{b'}) - [C_l + \beta C_b T]}{T(c_h' + \beta C_{b'})}\right]^2 + C_l D \left[\frac{T(C_h' + \beta C_{b'}) - [C_l + \beta C_{b'} T]}{T(C_h' + \beta C_{b'})}\right]$$

$$= \frac{1}{T^2 (C_h' + \beta C_{b'})^2} \Big[C_o T(C_h' + \beta C_b')^2 + \frac{1}{2} C_h' DT[C_l + \beta C_b' T]^2 +$$

$$\frac{1}{2} \beta C_b' DT[T^2 (C_h' + \beta C_b')^2 - 2T(C_h' + \beta C_b')[C_l + \beta C_b T] +$$

$$(C_l + \beta C_b' T)^2] + C_l DT(C_h' + \beta C_b')\big[T(C_h' + \beta C_b') -$$

$$[C_l + \beta C_b' T]\big]\Big]$$

$$= \frac{1}{2T^2 (C_h' + \beta C_{b'})^2} \big[2C_o T(C_h' + \beta C_b')^2 + C_h' DT[C_l + \beta C_b' T]^2 +$$

$$\beta C_b' DT^3 (C_h' + \beta C_b')^2 - 2T^2 \beta C_b' D(C_h' + \beta C_b')[C_l + \beta C_b' T] +$$

$$\beta C_b' DT[C_l + \beta c_b' T]^2 + 2C_l DT^2 (C_h' + \beta C_b')^2 - 2C_l DT(C_h' +$$

$$\beta C_b')[C_l + \beta C_b' T]\big]$$

$$= \frac{T}{2T^2 (C_h' + \beta C_{b'})^2} [2C_o (C_h' + \beta C_b')^2 + 2C_l DT(C_h' + \beta C_b')^2 +$$

$$\beta C_b' DT^2 (C_h' + \beta C_b')^2 - 2T\beta C_b' D(C_h' + \beta C_b')[C_l + \beta C_b' T] -$$

$$2C_l D(C_h' + \beta C_b')[C_l + \beta C_b' T] + D[C_l + \beta C_b' T]^2 (C_h' + \beta C_b')]$$

$$= \frac{1}{2T (C_h' + \beta C_{b'})^2} [2C_o (C_h' + \beta C_b')^2 + 2C_l DT(C_h' + \beta C_b')^2 +$$

$$\beta C_b' DT^2 (C_h' + \beta C_b')^2 - 2T\beta C_b' D(C_h' + \beta C_b')[C_l + \beta C_b' T] -$$

$$2C_l D(C_h' + \beta C_b')[C_l + \beta C_b' T] + D[C_l + \beta C_b' T]^2 (C_h' + \beta C_b')]$$

$$= \frac{(C_h' + \beta C_b{}')}{2T(C_h' + \beta C_b{}')^2} [2C_o(C_h' + \beta C_b{}') + 2C_l DT(C_h' + \beta C_b{}') +$$

$$\beta C_b' DT^2(C_h' + \beta C_b{}') - 2T\beta C_b' D[C_l + \beta C_b{}'T] - 2C_l D(1 -$$

$$\beta)[C_l + \beta C_b{}'T] + D[C_l + \beta C_b{}'T]^2]$$

$$= \frac{1}{2T(C_h' + \beta C_b{}')} \big[2C_o(C_h' + \beta C_b{}') + 2C_l DT(C_h' + \beta C_b{}') +$$

$$\beta C_b' DT^2(C_h' + \beta C_b{}') - 2T\beta C_b' DC_l - 2T^2\beta^2(C_b{}')^2 D - 2C_l{}^2 D -$$

$$2C_l D\beta C_b' T + DC_l{}^2 + 2DTC_l\beta C_b' + DT^2\beta^2 C_b{}'^2\big],$$

$$= \frac{1}{2T(C_h' + \beta C_b{}')} \big[2C_o(C_h' + \beta C_b{}') + 2C_l DTC_h' + 2C_l DT\beta C_b' +$$

$$DT^2\beta C_b' C_h{}' + DT^2\beta^2 C_b{}'^2 - 2C_l DT\beta C_b' - 2T^2\beta^2 C_b{}'^2 D - 2C_l{}^2 D +$$

$$C_l{}^2 D - 2C_l DT\beta C_b' + 2C_l DT\beta C_b' + DT^2\beta^2 C_b{}'^2\big],$$

$$= \frac{1}{2T(C_h' + \beta C_b{}')} \big[2C_o(C_h + \beta C_b{}') + 2C_l DTC_h' + DT^2\beta C_b' C_h{}' - C_l{}^2 D\big]$$

,

$$= \frac{1}{2T(C_h' + \beta C_b{}')} \big[2C_o(C_h' + \beta C_b{}') - C_l{}^2 D + DT^2\beta C_b' C_h{}' +$$

$$2C_l DTC_h{}'\big],$$

$$= \frac{1}{2T(C_h{}' + \beta C_b{}')} [T^2 DC_h{}' C_b{}'\beta + T^2 DC_h{}' C_b{}'\beta + 2C_l DTC_h{}'],$$

$$= \frac{1}{2T(C_h{}' + \beta C_b{}')} [2T^2 DC_h{}' C_b{}'\beta + 2C_l DTC_h{}'],$$

$$= \frac{2T}{2T(C_h{}' + \beta C_b{}')} [TDC_h{}' C_b{}'\beta + C_l DC_h{}'],$$

$$= \frac{1}{(C_h{}' + \beta C_b{}')} [DC_h{}'(T\beta C_b{}' + C_l)],$$

$$= DC_h{}' \left[\frac{C_l + \beta C_b{}' T}{(C_h{}' + \beta C_b{}')}\right] \frac{T}{T},$$

$$= DC_h{}' \left[\frac{C_l + \beta C_b{}' T}{T(C_h{}' + \beta C_b{}')}\right] T,$$

$$= DC_h{}' F^* T^* .$$

Terbukti bahwa total biaya persediaan optimal pada persamaan (4.37), adalah

$$\Gamma^* = DC_h{}' F^* T^* \tag{3}$$

Lampiran 3.
Membuktikan Bahwa Fungsi Biaya Merupakan Solusi Optimal

Fungsi biaya di dalam persamaan (4.30) adalah *strictly convex* (lampiran 4), untuk membuktikan bahwa solusi yang diberikan pada persamaan (4.35) dan (4.36) adalah global optimum jika kondisi β memenuhi persamaan (4.38) dan (4.39) dengan cara memeriksa karakteristik dari hasil turunan dan kondisi batas.

Fungsi biaya dalam persamaan (4.30):

$$\Gamma(T,F) = \frac{C_o}{T} + \frac{{C_h}'DTF^2}{2} + \frac{\beta {C_b}'DT(1-F)^2}{2} + C_l D(1-F),$$

untuk menyederhanakan persamaan diatas, dapat ditulis:

misalkan,

$$G_0 = C_o$$
$$G_1 = \frac{D({C_h}' + \beta {C_b}')}{2}$$
$$G_2 = \frac{D\beta {C_b}'}{2}$$
$$G_3 = C_l D$$

Semua nilai G_i adalah positif dan $G_1 > G_2$.

Jadi biaya rata-rata $\mu(T,F)$ dapat ditulis, sebagai berikut:

$$\Gamma(T,F) = \frac{G_0}{T} + T(G_1F^2 - 2G_2F + G_2) - G_3F + G_3 \qquad (B_1)$$

Untuk menyederhanakan notasi, persamaan (B_1) dapat ditulis menjadi:

$$\Gamma(T,F) = \frac{G_0}{T} + Tr(F) + q(F) \qquad (B_2)$$

di mana

$$r(F) = G_1F^2 - 2G_2F + G_2, \tag{B_3}$$

$$q(F) = -G_3F + G_3. \tag{B_4}$$

Persamaan (B_2) diturunkan terhadap T sama dengan nol, diperoleh:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial T} = 0\ ,$$

$$\Leftrightarrow -\frac{G_0}{T^2} + r(F) = 0\ ,$$

$$\Leftrightarrow -\frac{G_0}{T^2} = r(F)\ ,$$

$$\Leftrightarrow T^2\, r(F) = G_0\ ,$$

$$\Leftrightarrow T^2 = \frac{G_0}{r(F)}\,,$$

$$T = \sqrt{\frac{G_0}{r(F)}}\,,$$

sehingga diperoleh nilai optimal untuk panjang siklus pemesanan (T^*) adalah

$$T^* = \sqrt{\frac{G_0}{r(F)}}\ . \tag{B_5}$$

Catatan bahwa untuk persamaan (B_5) merupakan hasil yang sama dengan persamaan (4.32) walaupun ada perubahan notasi.

Diskriminan $r(F)$ pada persamaan (B_3) bernilai negatif sehingga persamaan $r(F)$ tidak memiliki akar. Persamaan $r(F)$ mungkin bernilai positif atau negatif pada seluruh domain F. Misalkan $F = 0$, maka $r(0) = G_2 > 0$, sedangkan untuk $F = 1$ maka $r(1) = G_1 - G_2 > 0$. Jadi $r(F)$ merupakan fungsi yang pasti bernilai positif di dalam rentang [0,1]. Dengan demikian, persamaan (B_5) dapat memberikan untuk masing-masing nilai F, dimana fungsi $T^* =$

$T^*(F)$ dapat meminimalkan fungsi biaya yang diberikan oleh persamaan (B_2).

Substitusi persamaan $T^*(F)$ pada persamaan (B_5) ke dalam $\Gamma(T,F)$ pada persamaan (B_2), diperoleh:

$$\Gamma(T,F) = \frac{G_0}{T^*} + T^* r(F) + q(F)$$

$$= \frac{G_0}{\sqrt{\frac{G_0}{r(F)}}} + r(F)\sqrt{\frac{G_0}{r(F)}} + q(F)$$

$$= G_0\sqrt{\frac{G_0}{r(F)}\frac{r(F)}{G_0}} + r(F)\sqrt{\frac{G_0}{r(F)}} + q(F)$$

$$= r(F)\sqrt{\frac{G_0}{r(F)}} + r(F)\sqrt{\frac{G_0}{r(F)}} + q(F)$$

$$= 2r(F)\sqrt{\frac{G_0}{r(F)}} + q(F)$$

$$= 2\sqrt{\frac{G_0\left(r(F)\right)^2}{r(F)}} + q(F)$$

$$= 2\sqrt{G_0 r(F)} + q(F) \qquad (B_6)$$

Sehingga diperoleh total biaya persediaan optimal adalah $\Gamma(F) = \Gamma(T^*(F),F) = 2\sqrt{G_0 r(F)} + q(F)$, untuk setiap nilai F. Nilai $\Gamma(F)$ kontinu pada rentang [0,1] dan memiliki satu atau lebih nilai minimum lokal. Nilai minimum lokal yang terkecil akan menjadi nilai minimum global dari fungsi biaya tersebut. Untuk menentukan bahwa fungsi biaya minimum dapat dicari turunan pertama dan kedua dari persamaan $\Gamma(F)$ terhadap F, diperoleh:

$$\Gamma(F) = 2\sqrt{G_0 r(F)} + q(F)$$

$$\Gamma'(F) = 2\frac{1}{2}\left(G_0 r(F)\right)^{-1/2} G_0 r'(F) + q'(F)\,,$$

$$= \frac{G_0 r'(F)}{\sqrt{G_0 r(F)}} + q'(F)\,,$$

$$= \frac{G_0 r'(F)}{\sqrt{G_0}\sqrt{r(F)}} + q'(F)\,,$$

$$= \sqrt{G_0}\,\frac{r'(F)}{r(F)^{1/2}} + q'(F)\,. \qquad (B_7)$$

$$\Gamma''(F) = \sqrt{G_0}\,\frac{r''(F)\,r(F)^{1/2} - r'(F)\frac{1}{2}r(F)^{-1/2}r'(F)}{\left(r(F)^{1/2}\right)^2}\,,$$

$$= \sqrt{G_0}\,\frac{r''(F)\,r(F)^{1/2} - \frac{1}{2}r(F)^{-1/2}\left(r'(F)\right)^2}{r(F)}\,,$$

$$= \frac{\sqrt{G_0}\left[2r''(F)\,r(F) - \frac{1}{\sqrt{r(F)}}\left(r'(F)\right)^2\right]}{2r(F)\sqrt{r(F)}}\,,$$

$$= \frac{\sqrt{G_0}\left[2r''(F)r(F) - \left(r'(F)\right)^2\right]}{2r(F)\sqrt{r(F)}}\,,$$

$$= \frac{\sqrt{G_0}\left[2r''(F)r(F) - \left(r'(F)\right)^2\right]}{2\left(r(F)\right)^{3/2}}\,. \qquad (B_8)$$

Perhatikan bahwa turunan pertama dari fungsi biaya adalah sama dengan persamaan $\partial\Gamma(T,F)/\partial F = 0$ yang diberikan pada persamaan (4.34). Misalkan $F = 0$ maka fungsi biaya $\Gamma'(0) < 0$ karena $r'(0) = -2G_2 < 0, r(0) = G_2 > 0,$ dan $q'(0) = -G_3 < 0,$ sedangkan jika $F = 1$, diperoleh:

$$\hat{\mu}'(1) = \sqrt{G_0}\frac{r'(1)}{r(1)^{\frac{1}{2}}} + q'(1)\ ,$$

$$= \sqrt{G_0}\frac{2(G_1 - G_2)}{\sqrt{G_1 - G_2}} - G_3\ ,$$

$$= 2\sqrt{\frac{G_0(G_1 - G_2)^2}{(G_1 - G_2)}} - G_3\ ,$$

$$= 2\sqrt{G_0(G_1 - G_2)} - G_3\ ,$$

$$= 2\sqrt{C_0\left[D\left(\frac{C_h{}' + \beta C_b{}'}{2}\right) - \frac{D\beta C_b{}'}{2}\right]} - C_1 D\ \ ,$$

$$= \sqrt{2C_0 D C_h{}'} - C_1 D,$$

jadi fungsi biaya $\Gamma'(1) > 0$ terpenuhi, jika dan hanya jika

$$\sqrt{\frac{2C_o}{DC_h{}'}} > \frac{C_l}{C_h{}'}. \qquad (B_9)$$

Selanjutnya untuk turunan kedua dari fungsi biaya $\Gamma''(F)$ yang diberikan pada persamaan (B_8), diperoleh:

$$\Gamma''(F) = \sqrt{G_0}\frac{\left[2r''(F)r(F) - \left(r'(F)\right)^2\right]}{2r(F)\sqrt{r(F)}}\ ,$$

$$= \frac{\sqrt{G_0}\left[2(2G_1)\left(G_1F^2 - 2G_2F + G_2\right) - (2G_1F - 2G_2)^2\right]}{2r(F)\sqrt{r(F)}},$$

$$= \frac{\sqrt{G_0}\left[4G_1{}^2F^2 - 8G_1G_2F + 4G_1G_2\right] - 4G_1{}^2F^2 + 8G_1G_2F + 4G_2{}^2}{2r(F)^{3/2}},$$

$$= \frac{\sqrt{G_0}\left[4G_1G_2 - 4G_2{}^2\right]}{2r(F)^{3/2}},$$

$$= \frac{4G_2\sqrt{G_0}[G_1 - G_2]}{2r(F)^{3/2}},$$

$$= \frac{2G_2\sqrt{G_0}[G_1 - G_2]}{r(F)^{3/2}},$$

di mana nilai tersebut bernilai positif untuk semua F.

Jika pertidaksamaan (B_9) berlaku maka fungsi biaya $\Gamma(F)$ memiliki nilai minimum yang terletak di dalam interval [0,1], sebaliknya jika pertidaksamaan (B_9) tidak berlaku maka nilai minimum akan terletak pada titik batas $F = 1$. Misalkan fungsi biaya $\Gamma'(1) = 0$ maka solusi yang diberikan pada persamaan (4.35) dan (4.36) identik dengan solusi pada batas $F = 1$ yang merupakan solusi EPQ dasar. Jika kondisi β pada persamaan (4.38) atau (4.39) terpenuhi maka solusi pada persamaan (4.35) dan (4.36) dapat meminimalkan fungsi biaya pada persamaan (4.30).

Lampiran 4.
Uji Konveksitas

Tujuan dilakukan uji konveksitas adalah untuk menjamin bahwa solusi yang didapatkan adalah optimal. Secara analitis, apabila sebuah fungsi berbentuk cekung (konvek) maka fungsi tersebut mempunyai nilai minimum. Sebaiknya, jika fungsi tersebut berupa cembung (konkaf) maka fungsi tersebut mempunyai nilai maksimum. Pembahasan pada skripsi ini adalah meminimumkan fungsi $\Gamma(T,F)$ pada persamaan (4.30), sehingga harus dibuktikan bahwa fungsi $\Gamma(T,F)$ adalah sebuah cekungan yang *strictly convex.*

Suatu fungsi dengan variabel tunggal bersifat *strictly convex* jika $\frac{d^2f(x)}{dx^2} > 0$. Fungsi $\Gamma(T,F)$ merupakan fungsi dengan dua variabel, maka harus ditentukan determinan hessiannya yaitu determinan dari turunan orde 2. Determinan hessian untuk permasalahan ini dapat didefinisikan sebagai berikut.

$$|H_1| > 0, |H_2| > 0,$$
$$|H_1| = g_{11} > 0,$$

$$= \frac{\partial^2\Gamma(T,F)}{\partial T^2} > 0$$

$$|H_2| = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial^2\Gamma(T,F)}{\partial T^2} & \frac{\partial^2\Gamma(T,F)}{\partial T\partial F} \\ \frac{\partial^2\Gamma(T,F)}{\partial F\partial T} & \frac{\partial^2\Gamma(T,F)}{\partial F^2} \end{vmatrix}$$

$$= \left[\left(\frac{\partial^2\Gamma(T,F)}{\partial T^2}\right)\left(\frac{\partial^2\Gamma(T,F)}{\partial F^2}\right)\right] - \left[\left(\frac{\partial^2\Gamma(T,F)}{\partial T\partial F}\right)\left(\frac{\partial^2\Gamma(T,F)}{\partial F\partial T}\right)\right]$$

$$g_{11} = \frac{\partial^2 \Gamma(T,F)}{\partial T^2},$$

$$= \frac{\partial}{\partial T}\left[\frac{\partial\left(\frac{C_0}{T}+\frac{C_h{}'DTF^2}{2}+\frac{\beta C_b{}'DT(1-F)^2}{2}+C_l D(1-F)\right)}{\partial T}\right],$$

$$= \frac{\partial}{\partial T}\left[-\frac{C_o}{T^2}+\frac{C_h{}'DF^2}{2}+\frac{\beta C_b{}'D(1-F)^2}{2}\right],$$

$$= \frac{2C_0}{T^3}.$$

$$g_{12} = \frac{\partial}{\partial F}\left[\frac{\partial\left(\frac{C_0}{T}+\frac{C_h{}'DTF^2}{2}+\frac{\beta C_b{}'DT(1-F)^2}{2}+C_l D(1-F)\right)}{\partial T}\right],$$

$$= \frac{\partial}{\partial F}\left[-\frac{C_0}{T^2}+\frac{C_h{}'DF^2}{2}+\frac{\beta C_b{}'D(1-F)^2}{2}\right],$$

$$= C_h'DF - \beta C_b{}'D(1-F).$$

$$g_{21} = \frac{\partial^2 \Gamma(T,F)}{\partial F \partial T},$$

$$= \frac{\partial}{\partial T}\left[\frac{\partial\left(\frac{C_0}{T}+\frac{C_h{}'DTF^2}{2}+\frac{\beta C_b{}'DT(1-F)^2}{2}+C_l D(1-F)\right)}{\partial F}\right],$$

$$= \frac{\partial}{\partial T}\left[C_h'DTF - \beta C_b'DT(1-F) - C_l D\right],$$

$$= C_h'DF - \beta C_b{}'D(1-F).$$

$$g_{12} = g_{21},$$

$$C_h'DF - \beta C_b'D(1-F) = C_h'DF - \beta C_b{}'D(1-F).$$

$$g_{22} = \frac{\partial^2 \Gamma(T,F)}{\partial F^2},$$

$$= \frac{\partial}{\partial F}\left[\frac{\partial\left(\frac{C_0}{T}+\frac{C_h{}'DTF^2}{2}+\frac{\beta C_b{}'DT(1-F)^2}{2}+C_l D(1-F)\right)}{\partial F}\right],$$

$$= \frac{\partial}{\partial F}\left[C_h' DTF - \beta C_b' DT(1-F) - C_l D\right],$$

$$= C_h' DT + \beta C_b{}' DT .$$

$$|H_1| = g_{11} = \frac{2C_0}{T^3},$$

$$|H_2| = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix},$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \Gamma(T,F)}{\partial T^2} & \frac{\partial^2 \Gamma(T,F)}{\partial T \partial F} \\ \frac{\partial^2 \Gamma(T,F)}{\partial F \partial T} & \frac{\partial^2 \Gamma(T,F)}{\partial F^2} \end{bmatrix},$$

$$= \left[\frac{2C_0}{T^3}(C_h' DT + \beta C_b{}' DT)\right] - \left[\left(C_h' DF - \beta C_b{}' D(1-F)\right)^2\right],$$

$$= \frac{2C_0}{T^2} D(C_h' + \beta C_b{}') - [(C_h{}'DF)^2 - 2C_h' D^2 C_b{}' \beta F + 2C_h' C_b{}' \beta D^2 F^2 + (\beta C_b{}' D)^2 - 2\beta^2 (C_b{}')^2 D^2 F + (\beta C_b{}' DF)^2],$$

$$= \frac{2C_0}{T^2} D(C_h' + \beta C_b{}') - (C_h{}'DF)^2 + 2C_h' D^2 C_b' \beta F - 2C_h' C_b' \beta D^2 F^2 - (\beta C_b{}' D)^2 + 2\beta^2 (C_b{}')^2 D^2 F - (\beta C_b{}' DF)^2,$$

$$= \frac{2C_0}{T^2} D(C_h' + \beta C_b{}') - F^2[(C_h{}'D)^2 + 2C_h' C_b{}' D^2 \beta + (\beta C_b{}' D)^2] + F[2C_h' C_b{}' D^2 \beta + 2\beta^2 (C_b{}')^2 D^2] - [\beta C_b{}' D]^2,$$

$$= \frac{2C_0}{T^2} D(C_h' + \beta C_b{}') - F^2\left[\left(D(C_h' + \beta C_b{}')\right)^2\right] + 2F\beta C_b' D[D(C_h' + \beta C_b{}')] - (\beta C_b{}' D)^2,$$

$$= \frac{2G_0}{T^2} 2G_1 - F^2(2G_1)^2 + 2F2G_2(2G_1) - (2G_2)^2 ,$$

$$= \frac{4G_0G_1}{T^2} - 4{G_1}^2F^2 + 8G_1G_2 - 4{G_2}^2 .$$

Misalkan:

$$a = -4{G_1}^2 ,$$

$$b = 8G_1G_2 ,$$

$$c = \frac{4G_0G_1}{T^2} - 4{G_2}^2 ,$$

$$D = b^2 - 4ac ,$$

$$= (8G_1G_2)^2 - 4\left(-4{G_1}^2\right)\left(\frac{4G_0G_1}{T^2} - 4{G_2}^2\right) ,$$

$$= 64{G_1}^2{G_2}^2 - \left(-\frac{64{G_1}^3G_0}{T^2} + 64{G_1}^2{G_2}^2\right) ,$$

$$= 64{G_1}^2{G_2}^2 + \frac{64{G_1}^3G_0}{T^2} - 64{G_1}^2{G_2}^2 ,$$

$$= \frac{64{G_1}^3G_0}{T^2} ,$$

$|H_2| = \frac{64{G_1}^3G_0}{T^2}, D > 0$ untuk $G_1 > 0$

Karena $|H_1| > 0$ dan $|H_2| > 0$, maka terbukti bahwa fungsi biaya $\Gamma(T, F)$ adalah suatu fungsi yang bersifat *strictly convex* dan mempunyai nilai minimum.