BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Aljabar abstrak adalah struktur aljabar yang terdiri dari suatu himpunan dengan elemen-elemennya yang dilengkapi satu atau lebih operasi biner. Aljabar abstrak meliputi teori bilangan, teori grup, dan teori ring. Dalam teori ring terdapat berbagai konsep yang dikaji lagi secara lebih khusus. Konsep yang dipelajari dalam teori-teori tersebut diantaranya adalah ring reguler, matriks atas ring dan semiring.

Matriks atas ring adalah himpunan matriks yang entri-entrinya elemen suatu ring dinotasikan $M_n(R)$ dimana R adalah ring. $(M_n(R), +)$ merupakan grup, sedangkan $(M_n(R), \bullet)$ adalah semigrup komutatif untuk $n \geq 2$ dan juga berlaku hukum distributif sehingga dapat diasumsikan bahwa $M_n(R)$ adalah ring.

Ring reguler pada awalnya diperkenalkan oleh von Neumann dalam rangka memperjelas aspek-aspek tertentu dari aljabar. Terdapat teorema yang menarik dari relasi kereguleran ring dengan matriks atas ring yaitu, untuk ring R dan bilangan bulat n, matriks atas ring $M_n(R)$ reguler jika dan hanya jika R adalah ring reguler. Kemudian dengan analogi dari teorema tersebut akan digunakan untuk menjelaskan reguleritas dari matriks atas semiring.

Sehingga pada skripsi ini dibahas Reguleritas Pada Matriks atas Semiring, kemudian dikaji definisi dan teorema serta contoh yang berkaitan.

1.2 Rumusan Masalah

Permasalahan yang dibahas dalam skripsi ini adalah sebagai berikut.

Bagaimanakah definisi, teorema, dan bukti dari teorema yang berkaitan dengan semiring reguler dan reguleritas pada matriks atas semiring ?

1.3 Tujuan

Untuk memahami definisi, teorema, dan bukti dari teorema yang berkaitan dengan semiring reguler dan reguler pada matriks atas semiring.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan diberikan beberapa definisi, teorema, dan buktinya serta contoh-contoh terkait yang digunakan sebagai acuan dalam pembahasan.

2.1 Aritmatika matriks

Suatu matriks atas field F adalah kumpulan bilangan yang berbentuk segi empat dengan entri elemen-elemen di F yang tersusun dalam baris dan kolom. Kumpulan matriks atas F dinotasikan $M_{m\times n}(F)$. Penulisan matriks biasanya menggunakan huruf besar dan persamaan $A = (a_{ij})$, a_{ij} disebut elemen dari A yang terletak pada baris i dan kolom j.

(Matthews. K. R)

Contoh 2.1.1

Diberikan formula $a_{ij} = \frac{1}{i+j}$ untuk $1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 4$, $a_{ij} \in R$ merupakan matriks 3×4 dinotasikan $A = \left(a_{ij}\right)$, yaitu

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \end{bmatrix}$$

2.1.2. Penjumlahan matriks

Diberikan $A = (a_{ij})$ dan $B = (b_{ij})$ mempunyai ukuran yang sama. Maka $A + B$ adalah matriks yang dibeperoleh dengan menambahkan elemen yang sesuai yaitu $A + B = \left(a_{ij}\right) + \left(b_{ij}\right) = \left(a_{ij} + b_{ij}\right)$

Contoh 2.1.3

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$$

2.1.4 Perkalian matriks dengan matriks

Diberikan $A = (a_{ij})$ adalah matriks $m \times n$ dan $B = (b_{jk})$ adalah matriks berukuran $n \times p$ (yaitu banyak kolom di A sama dengan baris di B). Maka AB adalah matriks $m \times p$ yaitu $C = (c_{ik})$ dimana $(i.k)$ urutan elemen yang didefinisikan dengan rumus

$$C_{ik} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}B_{jk} = A_{i1}B_{1k} + \cdots + A_{in}B_{nk}.$$

Contoh 2.1.5

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}, \mathrm{B} = \begin{bmatrix} k & n \\ l & o \\ m & p \end{bmatrix}, \text{ maka}$$

$$\mathrm{A} \times \mathrm{B} = \begin{bmatrix} ak + bl + cm & an + bo + bp \\ dk + el + fm & dn + eo + fp \end{bmatrix}$$

2.1.6 Perkalian matriks dengan skalar

Misalkan $A = (a_{ij})$ dan $k \in R$ (k merupakan skalar). Maka kA adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan semua elemen di A dengan k yaitu $kA = k(a_{ij}) = (ka_{ij})$

Contoh 2.1.7

$$3\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a & 3b \\ 3c & 3d \end{bmatrix}$$

2.1.8 Transpose matriks

Transpose matriks A (dinotasikan A^t) didefinisikan sebagai matriks yang baris – barisnya merupakan kolom dari A.

Contoh 2.1.9

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

2.2 Operasi Biner

Elemen-elemen suatu himpunan tak kosong dapat dikaitkan dengan operasi biner, atau operasi lainnya. Berikut ini akan diberikan definisi tentang relasi, pemetaan, dan operasi biner.

Definisi 2.2.1 (Hasil Kali Kartesius)
Misalkan A dan B adalah himpunan. Himpunan dari semua pasangan terurut $(x, y), x \in A$ dan $y \in B,$ disebut hasil kali kartesius dari A dan $B,$ dan dinotasikan dengan $A \times B.$ Didefinisikan,

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}$$

(Bhattacharya, dkk., 1990)

Definisi 2.2.2 (Relasi)
Misalkan A dan B adalah himpunan, dan misalkan R adalah himpunan bagian $(subset)$ dari $A \times B.$ Maka R disebut relasi dari A ke $B.$

(Bhattacharya, dkk., 1990)

Definisi 2.2.3 (Pemetaan)
Misalkan A dan B adalah himpunan. Suatu relasi f dari A ke B disebut suatu pemetaan jika untuk setiap elemen x dalam A mempunyai peta tepat satu elemen y dalam B sedemikian sehingga $(x, y) \in f$ (y disebut $image\ x$ di bawah f). f adalah pemetaan dari A ke $B,$ dinyatakan dengan

$$f : A \to B.$$

(Bhattacharya, dkk., 1990)

Definisi 2.2.4 (Operasi Biner)
Misalkan S adalah himpunan tak kosong. Suatu pemetaan

$$\begin{aligned} * : S \times S &\to S \\ (a, b) &\mapsto * (a, b) = a * b \end{aligned}$$

disebut operasi biner $*$ pada himpunan $S.$

(Bhattacharya, dkk., 1990)

Definisi 2.2.5 (Sifat Operasi Biner)
Operasi biner $* : S \times S \to S$ pada himpunan S dikatakan
(i) komutatif jika $x * y = y * x,$
(ii) assosiatif jika $x * (y * z) = (x * y) * z,$
Jika $\bullet$ adalah operasi biner yang lain pada S maka operasi biner $*$ dikatakan
(iii) distributif kiri atas $\bullet$ jika $x * (y \bullet z) = (x * y) \bullet (x * z)$
(iv) distributif kanan atas $\bullet$ jika $(y \bullet z) * x = (y * x) \bullet (z * x),$
untuk setiap $x, y, z \in S.$ Jika operasi $*$ adalah distributif kanan dan

kiri atas operasi $\bullet$, maka operasi $*$ dikatakan sebagai distributif atas $\bullet$.

(Bhattacharya, dkk., 1990)

2.3 Grup

Grup merupakan suatu struktur aljabar yang didefinisikan sebagai himpunan tak kosong dengan sebuah operasi biner dan memenuhi aksioma-aksioma tertentu.

Definisi 2.3.1 (Grup)

Misalkan G adalah suatu himpunan tak kosong dengan sebuah operasi biner $*$. Maka G disebut grup jika memenuhi aksioma-aksioma berikut:

(i) tertutup, yaitu untuk setiap $a, b \in G$, berlaku $a * b \in G$,

(ii) assosiatif, yaitu untuk setiap $a, b, c \in G$ berlaku $a * (b * c) = (a * b) * c$,

(iii) memiliki elemen identitas, yaitu terdapat $e \in G$ sedemikian sehingga $a * e = e * a = a$, untuk setiap $a \in G$,

(iv) memiliki invers, yaitu untuk setiap $a \in G$ terdapat $a^{-1} \in G$ sedemikian sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.

(Whitelaw, 1995)

Contoh 2.3.2

Diberikan $G = \{1, -1, i, -i\}$,dimana $i = \sqrt{-1}$. Akan ditunjukkan $(G, \bullet)$ adalah grup.

Bukti

Akan dibuktikan G dengan operasi pergandaan memenuhi aksioma-aksioma berikut:

(i) $(G, \bullet)$ tertutup, yaitu $a \cdot b \in G$ untuk setiap $a, b \in G$. Operasi pergandaan pada G akan diberikan pada tabel berikut.

Tabel 2.1 Operasi Pergandaan pada *G*

$\bullet$	1	-1	i	$-i$
1	1	-1	i	$-i$
-1	-1	1	$-i$	i
i	i	$-i$	-1	1
$-i$	$-i$	i	1	-1

Karena untuk setiap $a, b \in G$ dipenuhi $a \cdot b \in G$ maka G tertutup terhadap operasi pergandaan.

(ii) $(G,\bullet)$ assosiatif, yaitu: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, untuk setiap $a, b, c \in G$. Ambil sebarang $a, b, c \in G$, maka $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$. Jadi $(G,\bullet)$ berlaku sifat assosiatif.

(iii) Terdapat elemen identitas untuk $(G,\bullet)$ yaitu 1, karena untuk setiap $a \in G$ berlaku $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

(iv) Berdasarkan Tabel 2.1, diperoleh bahwa $1 \cdot 1 = 1, (-1) \cdot (-1) = 1, i \times (-i) = 1,$ dan $(-i) \cdot i = 1$. Ini berarti $1^{-1} = 1, (-1)^{-1} = -1, i^{-1} = -i,$ dan $(-i)^{-1} = i$. Jadi terbukti bahwa setiap elemen dalam G mempunyai invers.

Karena $(G,\bullet)$ memenuhi keempat aksioma, maka $(G,\bullet)$ adalah grup. Untuk selanjutnya, penulisan $a \cdot b$ cukup ditulis ab.

Definisi 2.3.3 (Grup Komutatif)

Misalkan $(\boldsymbol{G},*)$ adalah suatu grup. $(\boldsymbol{G},*)$ disebut grup komutatif jika $\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} * \boldsymbol{a}$ untuk setiap $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{G}$.

(Golan, 1999)

Contoh 2.3.4

Diberikan $G = \{ 1, -1, i, -i \}$,$i = \sqrt{-1}$. Akan dibuktikan $(G, \bullet)$ adalah grup komutatif.

Bukti:

Dari Contoh 2.3.2 telah diketahui $(G, \bullet)$ merupakan grup. Ambil sebarang $a, b \in (G, \bullet)$, maka $ab = ba$. Operasi pergandaan pada $(G, \bullet)$ tersebut dapat dilihat pada Tabel 2.1. $(G, \bullet)$ merupakan grup komutatif.

2.4 Semigrup

Semigrup merupakan suatu struktur aljabar yang terdiri dari himpunan tak kosong dengan operasi biner bersifat tertutup dan assosiatif. Suatu semigrup berbeda dengan grup. Tidak semua elemen dari semigrup memiliki invers atau memiliki elemen identitas. Definisi, contoh serta teorema yang berkaitan dengan semigrup diberikan sebagai berikut.

Definisi 2.4.1 (Semigrup)
Misalkan C himpunan tak kosong dan didefinisikan operasi biner $*$. $(C,*)$ disebut semigrup jika dan hanya jika
(i) $(C,*)$ tertutup : $a*b \in C$,
(ii) $(C,*)$ assosiatif : $a*(b*c) = (a*b)*c$, untuk setiap $a, b, c \in C$.

(Whitelaw, 1995)

Contoh 2.4.2
Diberikan bilangan asli N. Akan ditunjukkan (N,∙) adalah semigrup.
Bukti
Akan dibuktikan N dengan operasi pergandaan memenuhi aksioma-aksioma berikut:
(i) (N, ∙) tertutup, yaitu untuk setiap $a, b \in$ N berlaku $ab = c, c \in$ N. Jadi (N, ∙) berlaku sifat tertutup.
(ii) (N, ∙)assosiatif, yaitu : $a(bc) = (ab)c$, untuk setiap $a, b, c \in$ N. Ambil sebarang $a, b, c \in$ N, maka $a(bc) = (ab)c$. Jadi (N, ∙) berlaku sifat assosiatif.
(iii) Tidak terdapat elemen identitas untuk (N, ∙), karena tidak ditemukan e untuk setiap $a \in$ N sehingga berlaku $ae = ea = a$.
(iv) Karena tidak mempunyai elemen identitas, maka jelas untuk (N, ∙) .tidak mempunyai invers.

Karena (N, ∙) memenuhi sifat tertutup, dan assosiatif, maka (N, ∙) adalah semigrup.

Definisi 2.4.3 (Semigrup Komutatif)
Misalkan $(C,*)$ adalah semigrup. Maka $(C,*)$, disebut semigrup komutatif jika $a*b = b*a$, untuk setiap $a, b \in C$.

(Golan, 1999)

Contoh 2.4.4

Misalkan himpunan bilangan bulat modulo tiga $\mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2},\}$. $(\mathbb{Z}_3,\bullet)$ adalah semigrup komutatif.

Bukti:

Akan dibuktikan $\mathbb{Z}_3$ dengan operasi pergandaan memenuhi aksioma-aksioma berikut:

(i) $(\mathbb{Z}_3,\bullet)$ tertutup, yaitu $a \cdot b \in \mathbb{Z}_3$ untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}_3$. Operasi pergandaan pada Cakan diberikan pada tabel berikut.

Tabel 2.2 Operasi Pergandaan pada $\mathbb{Z}_3$

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$

Karena untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}_3$. memenuhi $ab \in \mathbb{Z}_3$ maka $\mathbb{Z}_3$ tertutup terhadap operasi pergandaan.

(ii) $(\mathbb{Z}_3,\bullet)$ assosiatif, yaitu : $a(bc) = (ab)c$, untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}_3$. Ambil sebarang $a, b, c \in \mathbb{Z}_3$, maka $a(bc) = (ab)c$. Jadi $(\mathbb{Z}_3,\bullet)$ berlaku sifat assosiatif.

(iii) Ambil sebarang $a, b \in \mathbb{Z}_3$, maka $ab = ba$. Operasi pergandaan pada $\mathbb{Z}_3$ tersebut dapat dilihat pada Tabel 2.2. $(\mathbb{Z}_3 ,\cdot)$ merupakan semigrup komutatif.

2.5 Ring

Ring merupakan salah satu bentuk struktur aljabar dengan dua operasi biner di dalamnya.

Definisi 2.5.1 (Ring)

Suatu himpunan tak kosong R dengan dua operasi biner penjumlahan (+) dan pergandaan $(\cdot)$ disebut ring jika R memenuhi aksioma-aksioma berikut:

(i) $(R,+)$ merupakan grup komutatif,

(ii) $(R,\cdot)$ merupakan semigrup,

(iii) $(R, +, \cdot)$ berlaku hukum distributif, yaitu untuk setiap $a, b, c \in R$, berlaku $a(b+c) = (ab) + (ac)$ dan $(a+b)c = (ac) + (bc)$.

(Bhattacharya, dkk., 1994)

Contoh 2.5.2

Diberikan $\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$, maka $(\mathbb{Z}_4,+,\cdot)$ adalah ring.

Bukti:

$\mathbb{Z}_4$ adalah ring jika memenuhi:

(i) $(\mathbb{Z}_4,+)$ grup komutatif.

Himpunan bilangan bulat modulo 4 terhadap operasi pejumlahan didefinisikan pada tabel berikut:

Tabel 2.3 Operasi Penjumlahan pada $\mathbb{Z}_4$

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$

a. Jelas $\mathbb{Z}_4$ tertutup terhadap operasi penjumlahan, karena untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}_4$ berlaku $a + b \in \mathbb{Z}_4$.

b. Akan ditunjukkan berlaku sifat assosiatif pada $\mathbb{Z}_4$. Misal diambil $a = \bar{0}$, $b = \bar{1}$, dan $c = \bar{2}$, maka $(\bar{0}+\bar{1})+\bar{2} = \bar{1}+\bar{2} = \bar{3}$, sedangkan $\bar{0}+(\bar{1}+\bar{2}) = \bar{0}+\bar{3} = \bar{3}$ Dengan cara yang sama, untuk setiap, $a, b, c \in \mathbb{Z}_4$ akan diperoleh $(a+b)+c = a+(b+c)$. Jadi pada $(\mathbb{Z}_4,+)$ berlaku sifat assosiatif.

c. Terdapat elemen identitas untuk $(\mathbb{Z}_4,+)$ yaitu $\bar{0}$, karena untuk setiap $a \in \mathbb{Z}_4$ berlaku $a + \bar{0} = \bar{0} + a = a$.

d. Berdasarkan Tabel 2.3, diperoleh bahwa $\bar{0}+\bar{0} = \bar{0}$, $\bar{1}+\bar{3} = \bar{0}$, $\bar{2}+\bar{2} = \bar{0}$, dan $\bar{3}+\bar{1} = \bar{0}$. Ini berarti $(\bar{0})^{-1} = \bar{0}$, $(\bar{1})^{-1} = \bar{3}$, $(\bar{2})^{-1} = \bar{2}$, dan $(\bar{3})^{-1} = \bar{1}$. Jadi setiap elemen dalam $\mathbb{Z}_4$mempunyai invers.

e. Akan ditunjukkan berlaku sifat komutatif pada $\mathbb{Z}_4$. Misal diambil $a = \bar{2}$ dan $b = \bar{3}$, maka $\bar{2} + \bar{3} = \bar{1}$ sedangkan $\bar{3} + \bar{2} = \bar{1}$. Dengan cara yang sama berlaku untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}_4$.

(ii) $(\mathbb{Z}_4,\cdot)$ semigrup.

$(\mathbb{Z}_4,\cdot)$ tertutup, yaitu $ab \in \mathbb{Z}_4$, untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}_4$.

Operasi pergandaan pada Z_4 akan diberikan pada tabel berikut:

Tabel 2.4 Operasi Pergandaan pada $\mathbb{Z}_4$

$\bullet$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

a. Karena untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}_4$ memenuhi $ab \in \mathbb{Z}_4$, maka $\mathbb{Z}_4$ tertutup terhadap operasi pergandaan.

b. ambil sebarang $a, b, c \in \mathbb{Z}_4$, maka $(ab)c = a(bc)$. Jadi $(\mathbb{Z}_4,\cdot)$ berlaku sifat assosiatif.

Karena $(\mathbb{Z}_4,\cdot)$ tertutup dan assosiatif maka $(\mathbb{Z}_4,\cdot)$ adalah semigrup.

(iii) $\mathbb{Z}_4$ memenuhi hukum distributif kiri dan kanan.

Akan ditunjukkan berlaku sifat distributif pada $\mathbb{Z}_4$. Misal diambil $a = \bar{0}$, $b = \bar{1}$, dan $c = \bar{2}$, maka

a. $a(b + c) = \bar{0}(\bar{1} + \bar{2}) = \bar{0} \cdot \bar{3} = \bar{0}$, sedangkan
$(ab) + (ac) = (\bar{0} \cdot \bar{1}) + (\bar{0} \cdot \bar{2}) = \bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$.

b. $(a + b) \cdot c = (\bar{0} + \bar{1}) \cdot \bar{2} = \bar{1} \cdot \bar{2} = \bar{2}$, sedangkan
$(ac) + (bc) = (\bar{0} \cdot \bar{2}) + (\bar{1} \cdot \bar{2}) = \bar{0} + \bar{2} = \bar{2}$.

Dengan cara yang sama, untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}_4$ akan diperoleh $a(b + c) = (ab) + (ac)$ dan $(a + b)c = (ac) + (bc)$.

Karena $\mathbb{Z}_4$ memenuhi (i), (ii), dan (iii), maka $\mathbb{Z}_4$ adalah ring.

Definisi 2.5.3 (Ring Komutatif)

Suatu ring R disebut komutatif jika $(R, \bullet)$ bersifat komutatif.

(Bhattacharya, dkk., 1994)

Contoh 2.5.3

Diberikan $\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$, maka $(\mathbb{Z}_4,+,\cdot)$ adalah ring komutatif.

Bukti

Dari Contoh 2.5.2 telah diketahui $(\mathbb{Z}_4 ,\cdot)$ merupakan ring. Ambil sebarang $a, b \in \mathbb{Z}_4$, maka $ab = ba$. Operasi pergandaan pada $\mathbb{Z}_4$ tersebut dapat dilihat pada Tabel 2.4. $(\mathbb{Z}_4 ,\cdot)$ merupakan ring komutatif.

Definisi 2.5.4 (Elemen Identitas pada Ring)

Suatu elemen e dalam ring R disebut elemen identitas atau elemen satuan pada R jika $ea = ae = a$ untuk setiap $a \in R$.

(Bhattacharya, dkk., 1994)

2.6 Matriks Atas Ring dan Ring Reguler

Matriks atas ring adalah matriks yang entri-entrinya elemen suatu ring. Pada subbab ini, akan dikaji definisi dari matriks atas ring dan definisi dari ring reguler.

Definisi 2.6.1 (Matriks Atas Ring)

Diberikan sebarang ring R, matriks atas ring dinotasikan $M_n(R)$ merupakan himpunan matriks berukuran $n \times n$ dengan elemen dari R sebagai entri-entrinya.

(Fraleigh,1967)

Contoh 2.6.2

Diberikan ring $\mathbb{Z}_5 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}$, maka matriks $A = \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{3} & \bar{2} \end{bmatrix}$ merupakan elemen dari $M_2(R)$

Definisi 2.6.3 (Unit)

Misalkan R ring dengan elemen satuan. Suatu elemen $u \in R$ disebut unit di R jika u mempunyai invers di R terhadap pergandaan, yaitu: $u \cdot u^{-1} = u^{-1} \cdot u = 1$.

(Fraleigh,1967)

Contoh 2.6.2

$\mathbb{Z}_5 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$ adalah unit.

Bukti
Pada tabel berikut, akan ditunjukkan bahwa terdapat suatu elemen $u \in \mathbb{Z}_5$ mempunyai invers di R terhadap pergandaan.

Tabel 2.5 Operasi Pergandaan pada $\mathbb{Z}_5$

$\bullet$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

pada tabel diatas ditunjukkan bahwa terdapat $u \in \mathbb{Z}_5$ yang mempunyai invers di $\mathbb{Z}_5$ terhadap pergandaan. Sehingga terbukti bahwa u merupakan unit di $\mathbb{Z}_5$.

Definisi 2.6.5 (Ring Division)
Jika setiap elemen tak nol di R merupakan unit, maka R disebut ring division.

(Fraleigh,1967)

Definisi 2.6.4 (Ring Reguler)
Suatu ring R disebut ring reguler (Von Neumann) jika untuk setiap $x \in R$ terdapat $y \in R$ sedemikian hingga $x = xyx$.

(Goodearl,1979)

Contoh 2.6.5
Sebarang ring division adalah reguler, sebab: jika diambil sebarang $x \in R$ maka terdapat $y \in R$. sehingga $xy = 1$. Akibatnya, $xyx = (xy)x = 1 \cdot x = x$.

2.7 Semiring

Pada bagian ini diberikan definisi dan contoh yang berkaitan dengan semiring. Ide dan konsep semiring menjadi pengantar dalam pendefinisian semiring reguler.

Definisi 2.7.1 (Semiring)
Suatu himpunan tak kosong S dengan dua operasi biner penjumlahan

dan pergandaan disebut semiring jika memenuhi:

1. (S, +) merupakan semigrup komutatif,
2. (S, ·) merupakan semigrup,
3. Berlaku hukum distributif, yaitu untuk setiap $a, b, c \in S$ berlaku $a(b + c) = (ab) + (ac)$ dan $(a + b)c = (ac) + (bc)$.

(Kandasamy, 2002)

R disebut ring jika memenuhi $(R, +)$ grup komutatif,$(R,\cdot)$ semigrup dan sifat distributif kiri dan kanan. Ketika $(R, +)$ memenuhi grup komutatif (tertutup, assosiatif, memiliki elemen identitas, memiliki invers, dan komutatif) maka $(R, +)$ memenuhi semigrup komutatif (tertutup, assosiatif, dan komutatif). Jadi, R juga merupakan semiring. Dengan kata lain, tiap ring adalah semiring.

Contoh 2.7.2

Himpunan $S = (\mathbb{N}, +,\cdot)$ adalah semiring.

Bukti

Akan dibuktikan bahwa $S = (\mathbb{N}, +,\cdot)$ adalah semiring.

1. ($\mathbb{N}$,+) semigrup komutatif. Ambil sebarang $a, b, c \in \mathbb{N}$ maka
   (i) $a + b \in \mathbb{N}$, ($\mathbb{N}$,+) berlaku sifat tertutup.
   (ii) $(a + b) + c = a + (b + c)$, ($\mathbb{N}$,+) berlaku sifat assosiatif
   (iii) $a + b = b + a$, ($\mathbb{N}$,+) berlaku sifat komutatif.
2. ($\mathbb{N}$,·) semigrup. Ambil sebarang $a, b, c \in \mathbb{N}$ maka
   (i) $ab \in \mathbb{N}$, ($\mathbb{N}$,·) berlaku sifat tertutup.
   (ii) $(ab)c = a(bc)$, ($\mathbb{N}$,·) berlaku sifat assosiatif.
3. $\mathbb{N}$ memenuhi hukum distributif, yaitu untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{N}$ berlaku $a(b + c) = (ab) + (ac)$ dan $(a + b) \times c = (ac) + (bc)$.

Dari aksioma 1, 2, dan 3 maka terbukti bahwa $S = (\mathbb{N}, +,\cdot)$ merupakan semiring.

Definisi 2.7.3 (Semiring Komutatif)

Suatu semiring S disebut komutatif jika $a * b = b * a$, untuk setiap $a, b \in S$.

(Kandasamy, 2002)

BAB III
PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibahas mengenai definisi, teorema, akibat, proposisi, lemma, dan contoh yang berkaitan dengan Matriks atas Semiring Reguler.

3.1 Reguleritas pada Matriks atas Ring

Teorema 3.1.1
Untuk suatu ring R dan n bilangan bulat positif, matriks atas ring M_n(R) reguler jika R adalah ring reguler

(Kaplansky,1969)

Bukti

Untuk $n = 2$. Ambil $A \in M_2(R)$ misal $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dengan $a, b, c, d \in R$. Karena R ring regular, maka berlaku $c = crc$, sehingga

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & r \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (arc - a) & (ard - b) \\ 0 & (crd - d) \end{bmatrix}$$

Misal bentuk $\begin{bmatrix} (arc - a) & (ard - b) \\ 0 & (crd - d) \end{bmatrix}$ dianggap berbentuk matrik $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix}$. Kemudian karena R ring regular, maka berlaku $axa = a$ dan $dyd = d$, sehingga

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & (axb - b) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Kemudian bentuk $\begin{bmatrix} 0 & (axb - b) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ dianggap matrik $\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Jika $bzb = b$, maka

$$\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ z & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & bzb \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sehingga dapat disimpulkan bahwa untuk $n = 2$, jika R ring regular maka matrik atas ring $M_2(R)$ merupakan ring reguler seperti yang diinginkan.

Untuk $n = 4$ pembuktian ditunjukkan dengan matriks blok 4×4 sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_4 & b_4 \\ c_4 & d_4 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Dengan memisalkan matriks-matriks blok $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} = A$, $\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} = B$, $\begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{bmatrix} = C$, dan $\begin{bmatrix} a_4 & b_4 \\ c_4 & d_4 \end{bmatrix} = D$. Maka diperoleh matrik 2×2 yaitu $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$. Karena $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in M_2(R)$ maka terbukti bahwa jika R ring regular maka matrik atas ring $M_4(R)$ juga merupakan ring reguler. Dengan induksi maka hasilnya berlaku untuk $n = 2^k$, $k \in Z$.

Jadi dapat disimpulkan untuk sebarang $n \leq 2^k$ terbukti bahwa jika R ring regular maka matrik atas ring $M_n(R)$ merupakan ring reguler seperti yang diinginkan.

Contoh 3.1.2

Misalkan M_2(R) adalah himpunan semua matriks berordo 2×2 atas bilangan riil R. M_2(R) dengan operasi penjumlahan dan pergandaan matriks biasa merupakan ring tak komutatif dengan elemen identitas. Akan ditunjukkan M_2(R) dengan kedua operasi tersebut adalah ring reguler, yaitu untuk suatu $A \in M_2$(R), terdapat $B \in M_2$(R) sedemikian sehingga $A = ABA$.

Misalkan $A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$

Kasus 1: $xw - zy \neq 0$. Maka $B = \begin{bmatrix} \frac{w}{xw-yz} & \frac{-y}{xw-yz} \\ \frac{-z}{xw-yz} & \frac{x}{xw-yz} \end{bmatrix} \in M_2(\mathrm{R})$ dan $A = ABA$.

Kasus 2: $xw - yz = 0 \ \rightarrow w = yz/x$

Subkasus 2a: x, y, z, dan w semuanya nol. Dalam kasus ini $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, sehingga untuk sebarang $B \in M_2(\mathrm{R}), ABA = A$.

Subkasus 2b: x, y, z, dan w tidak semuanya nol. Misalkan $x \neq 0$ dan misalkan $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{x} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Maka

$$ABA = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{x} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{z}{x} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x & y \\ z & \frac{yz}{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$$

Karena $xw - yz = 0$ dan $x \neq 0$ sehingga mengakibatkan $w = \frac{yz}{x}$.

Jika $y \neq 0$ maka misalkan $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{y} & 0 \end{bmatrix}$. Maka

$$ABA = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{y} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{w}{y} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x & y \\ \frac{wx}{y} & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix},$$

Karena $xw - yz = 0$ dan $y \neq 0$ sehingga $z = \frac{wx}{y}$.

Dengan cara yang serupa, jika $z \neq 0$ atau $w \neq 0$ maka terdapat matriks B sedemikian sehingga $ABA = A$. Dengan demikian, $M_2(R)$ adalah ring reguler.

3.2 Semiring Reguler

Definisi 3.2.1 (Semiring Reguler)
Suatu semiring S disebut semiring reguler (Von Neumann) jika untuk setiap $x \in S$ terdapat $y \in$ S sedemikian hingga $x = xyx$.
(S.Chaopraknoi,et al,2009)

Contoh 3.2.2
Diberikan $S = \{0,1\}$ didefinisikan $x \oplus y =$ maks $\{x, y\}$ dan $x \odot y = \min\{x, y\}$. Maka $(S,\oplus,\odot)$ adalah semiring.

Bukti
Perhatikan tabel operasi berikut,

Tabel 3.1 operasi $\oplus$ pada *S*

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	1

Tabel 3.2 operasi $\odot$ pada *S*

$\odot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Akan dibuktikan bahwa $(S,\oplus,\odot)$ adalah semiring.

1. $(S,\oplus)$ semigrup komutatif. Ambil sebarang $a, b, c \in S$ maka
   (i) $a + b \in S$, $(S,\oplus)$ berlaku sifat tertutup.
   (ii) $(a + b) + c = a + (b + c)$, $(S,\oplus)$ berlaku sifat assosiatif

(iii) $a + b = b + a$, $(S,\bigoplus)$ berlaku sifat komutatif.

2. $(S,\bigodot)$ semigrup. Ambil sebarang $a, b, c \in \mathbb{N}$ maka
   (i) $ab \in S$,sehingga $(S,\bigodot)$ berlaku sifat tertutup.
   (ii) $(ab)c = a(bc)$, $(S,\bigodot)$ berlaku sifat assosiatif.
3. S memenuhi hukum distributif, yaitu untuk setiap $a, b, c \in S$ berlaku $a(b + c) = (ab) + (ac)$ dan $(a + b) \times c = (ac) + (bc)$.

Dari aksioma 1, 2, dan 3 maka terbukti bahwa $(S,\bigoplus,\bigodot)$ merupakan semiring *additive* komutatif dengan elemen identitas 0.

Jelas bahwa S adalah semiring reguler karena terdapat $y \in S$ yaitu $y = 0$ sedemikian sehingga $x = xyx$ dimana $x \in S$

3.3 Matriks atas Semiring

Definisi 3.3.1 (Matriks atas Semiring)

Misalkan S adalah semiring *additive* komutatif S dengan elemen identitas nol, $M_n(S)$ adalah himpunan seluruh matriks $n \times n$ atas S. Maka $(M_n(S), +,\cdot)$ juga merupakan semiring *additive* komutatif dengan elemen identitas matrik nol .

(S.Chaopraknoi,et al,2009)

Untuk $A \in M_n(S)$ dan $i, j \in \{1, \dots, n\}$, diberikan A_{ij} sebagai entri dari A dengan i baris dan j kolom.

3.4 Reguleritas pada Matrks atas Semiring

Jika S adalah sebuah semiring komutatif dengan elemen identitas 0, n adalah bilangan bulat positif dan $A \in M_n(S)$ sedemikian rupa sehingga $A_{ij} = 0$ untuk semua $i, j \in \{1, \dots, n\}$ dengan $(i, j) \neq (1,1)$, maka untuk $B \in M_n(S)$, $A = ABA$ dinyatakan,

$$A_{11} = (ABA)_{11} = \sum_{k=1}^{n} (AB)_{1k} A_{k1} = (AB)_{11} A_{11}$$
$$= \left(\sum_{k=1}^{n} A_{1k} B_{k1} \right) A_{11} = A_{11} B_{11} A_{11}.$$

Dari uraian diatas, maka diperoleh proposisi sebagai berikut:

Proposisi 3.4.1

Diberikan S semiring komutatif dengan elemen identitas 0 dan n bilangan bulat positif. Jika $M_n(S)$ adalah semiring reguler, maka S juga semiring reguler.

(S.Chaopraknoi,et al,2009)

Bukti

Diketahui $M_n(S)$ reguler. Akan dibuktikan S semiring reguler. Ambil $n = 2$.

Andaikan S tidak reguler. Berarti terdapat elemen $a \in S$ sedemikian sehingga $a \neq ara$.

Diketahui $M_2(S)$ reguler, ambil $A \in M_2(S)$. Karena $M_2(S)$ reguler maka terdapat $B \in M_2(S)$ sedemikian sehingga $ABA = A$

Ambil $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & r \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ maka $ABA = A$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & r \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} arc & ard \\ crc & crd \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Karena S tidak reguler maka $crc \neq c$ sehingga $ABA \neq A$ terjadi kontradiksi, maka haruslah S semiring reguler.

Kebalikan dari proposisi diatas tidak selalu benar untuk $n = 2$, Akan ditunjukkan dengan contoh berikut:

Contoh 3.4.2

Diberikan $S = \{0,1,2,3\}$, didefinisikan $x \oplus y =$ maks $\{x, y\}$ dan $x \odot y = \min\{x, y\}$. Untuk semua $x, y \in S$ maka $(S, \oplus, \odot)$ merupakan semiring komutatif dengan min S sebagai elemen identitas.

Karena $x \odot y \odot x = \min\{x, y, x\}$. Untuk semua $x, y \in S$ maka $(S, \oplus, \odot)$ reguler. Andaikan $M_n(S)$ adalah semiring regular. Misal diberikan $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \in M_n(S)$. Maka $A = ABA$ untuk suatu $B \in M_2(S)$. kemudian dari definisi $\oplus$ dan $\odot$ diperoleh,

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 \odot B_{21} & 1 \odot B_{22} \\ 2 \odot B_{11} \oplus 3 \odot B_{21} & 2 \odot B_{12} \oplus 3 \odot B_{22} \end{bmatrix}$$

Maka dari itu

$ABA = (AB)A$

$$= \begin{bmatrix} 1 \odot B_{21} & 1 \odot B_{22} \\ 2 \odot B_{11} \oplus 3 \odot B_{21} & 2 \odot B_{12} \oplus 3 \odot B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \odot 1 \odot B_{22} & 1 \odot B_{21} \oplus 3 \odot 1 \odot B_{22} \\ (2 \odot B_{12} \oplus 3 \odot B_{22}) \odot 2 & (2 \odot B_{11} \oplus 3 \odot B_{21}) \odot 1 \oplus (2 \odot B_{12} \oplus 3 \odot B_{22}) \end{bmatrix}$$

Karena $A = ABA$, sehingga diperoleh

$$2 \odot 1 \odot B_{22} = 0 \quad (1)$$

$$(2 \odot B_{11} \oplus 3 \odot B_{21}) \odot 1 \oplus (2 \odot B_{12} \oplus 3 \odot B_{22}) = 3 \quad (2)$$

Dari (1), $B_{22} = 0$. Karena ($2 \odot B_{11} \oplus 3 \odot B_{21}) \odot 1 \leq 1$, dari (2) kita dapatkan $2 \odot B_{12} \oplus 3 \odot B_{22} = 3$. Akan tetapi $B_{22} = 0$, jadi

$$3 = 2 \odot B_{12} \oplus 3 \odot B_{22} = 2 \odot B_{12} \leq 2$$

terjadi kontradiksi. Hal ini menunjukkan bahwa $M_2(S)$ tidak reguler, seperti yang diinginkan.

Teorema 3.4.3 :

Diberikan S adalah semiring *additive* komutatif dengan elemen identitas 0 dan n suatu bilangan bulat positif dengan $n \geq 3$. Maka $M_n(S)$ adalah semiring reguler jika dan hanya jika S adalah sebuah ring reguler.

Bukti :

Asumsikan bahwa $M_n(S)$ adalah semiring reguler. Dengan Proposisi 3.3.1, S adalah semiring reguler. Untuk menunjukkan bahwa S adalah ring, tinggal ditunjukkan bahwa untuk sebarang $a \in S$ mempunyai invers . Didefinisikan $A \in M_n(S)$ dengan

$$A_{ij} = \begin{cases} a \; jika \; (i,j) \in \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,3),(3,1),(3,3)\}, \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad yang \; lain, \end{cases}$$

$$\text{Yaitu } A = \begin{bmatrix} a & a & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & a & a & 0 & ... & 0 \\ a & 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(i)}$$

Karena $M_n(S)$ reguler, maka berlaku $A = ABA$ untuk suatu $B \in M_n(S)$. Kemudian dari (i), didapatkan

$$a = A_{11} = (ABA)_{11} = \sum_{k=1}^{n} A_{1k} \, (BA)_{k1}$$

$$= a(BA)_{11} + a(BA)_{21}$$

$$= a\left(\sum_{k=1}^{n} B_{1k}A_{k1} + \sum_{k=1}^{n} B_{2k}A_{k2}\right)$$

$$= a(B_{11}a + B_{13}a + B_{21}a + B_{23}a)$$

$$= a(B_{11} + B_{13} + B_{21} + B_{23})a \qquad \text{(ii)}$$

$$0 = A_{13} = (ABA)_{13} = \sum_{k=1}^{n} A_{1k}\,(BA)_{k3}$$

$$= a(BA)_{13} + a(BA)_{23}$$

$$= a\left(\sum_{k=1}^{n} B_{1k}A_{k3} + \sum_{k=1}^{n} B_{2k}A_{k3}\right)$$

$$= a(B_{12}a + B_{13}a + B_{22}a + B_{23}a)$$

$$= a(B_{12} + B_{13} + B_{21} + B_{23})a \qquad \text{(iii)}$$

$$0 = A_{21} = (ABA)_{21} = \sum_{k=1}^{n} A_{2k}\,(BA)_{k1}$$

$$= a(BA)_{21} + a(BA)_{31}$$

$$= a\left(\sum_{k=1}^{n} B_{2k}A_{k1} + \sum_{k=1}^{n} B_{3k}A_{k1}\right)$$

$$= a(B_{21}a + B_{23}a + B_{31}a + B_{33}a)$$

$$= a(B_{21} + B_{23} + B_{31} + B_{33})a \qquad \text{(iv)}$$

$$0 = A_{32} = (ABA)_{32} = \sum_{k=1}^{n} A_{3k}\,(BA)_{k2}$$

$$= a(BA)_{12} + a(BA)_{32}$$

$$= a\left(\sum_{k=1}^{n} B_{1k}A_{k2} + \sum_{k=1}^{n} B_{3k}A_{k2}\right)$$

$$= a(B_{11}a + B_{12}a + B_{31}a + B_{32}a)$$

$$= a(B_{11} + B_{12} + B_{31} + B_{32})a \qquad \text{(v)}$$

Kemudian (iii) + (iv) + (v) menghasilkan

$$0 = a(B_{12} + B_{13} + B_{22} + B_{23} + B_{21} + B_{23} + B_{31} + B_{33} + B_{11} + B_{12} + B_{31} + B_{32})a$$

$$= a(B_{11} + B_{13} + B_{21} + B_{23})a + a(2B_{12} + B_{22} + B_{23} + B_{31} + B_{33} + B_{31} + B_{32})a$$

$$= a + a(2B_{12} + B_{22} + B_{23} + B_{31} + B_{33} + B_{31} + B_{32})a$$

Dengan memisalkan $x = a(2B_{12} + B_{22} + B_{23} + B_{31} + B_{33} + B_{31} + B_{32})a$ maka dapat ditunjukkan bahwa untuk setiap $a \in S$, $a + x = 0$ untuk suatu $x \in S$. Terbukti S adalah ring reguler.

Dengan teorema 3.4.3 jelas terbukti bahwa jika S adalah ring regular maka $M_n(S)$ semiring regular.

Contoh 3.4.4

Untuk bilangan rasional dan bilangan real positif dengan elemen identitas 0. Jika Q_0^+ dan R_0^+ semiring regular maka matrik atas semiring $M_2(Q_0^+)$ dan $M_2(R_0^+)$ adalah bukan semiring reguler.

Bukti

Misalkan $M_2(Q_0^+)$ reguler, misal $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_2(Q_0^+)$.

Maka $A = ABA$ untuk suatu $B \in M_2(Q_0^+)$ Karena A invertibel terhadap Q, berarti

$$I_2 = AA^{-1} = ABAA^{-1} = AB$$

Karena A^{-1} merupakan invers dari matriks A atas Q dan I_2 adalah matriks identitas atas Q untuk ordo $n \times n$. Ini berarti bahwa $B = A^{-1}$ atas Q. Sehingga $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \notin M_2(Q_0^+)$, Terjadi kontradiksi.

Oleh karena itu $M_2(Q_0^+)$ tidak reguler. Dengan mengganti Q dengan R dalam pembuktian di atas, kita mendapati bahwa $M_2(R_0^+)$ juga tidak reguler. Oleh karena itu untuk semua $n \geq 2$ semirings $M_n(Q_0^+)$ dan $M_n(R_0^+)$ juga tidak reguler.

Contoh 3.4.5.

Jika $M_2(S)$ reguler, apakah S pasti merupakan ring ?. Berikut akan ditunjukkan bahwa S bukan ring.

Diberikan $(S = \{0,1\}, \oplus, \odot)$ Merupakan semiring komutatif, yaitu, $0 \oplus 0 = 0, 0 \oplus 1 = 1 \oplus 0 = 1 \oplus 1 = 1$, $0 \odot 0 = 0 \odot 1 = 1 \odot 0 = 0$ dan $1 \odot 1 = 1$. Kemudian S bukanlah ring. Kita mengklaim bahwa $M_2(S)$ adalah semiring reguler. Kita memiliki $M_2(S)$ berisi tepat 16 elemen yaitu

$$\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}.$$

Dengan mudah kita memeriksa bahwa untuk $A \in M_2(S), A^2 = A$ jika dan hanya jika A salah satu dari 11 matriks berikut

$$\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix},$$

Sedangkan 5 matriks lainya

$$A = \begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}.$$

Juga berlaku, $A = ABA, B = BAB, C = C^3, D = DED$ dan $E = EDE$. Oleh karena itu $M_2(S)$ adalah semiring reguler seperti yang diinginkan.

BAB IV

KESIMPULAN

Dari pembahasan skripsi ini dapat disimpulkan hal-hal sebagai berikut :

1. Jika $M_n(S)$ adalah semiring reguler, maka S juga semiring reguler. Akan tetapi kebalikannya tidak berlaku untuk $n = 2$.
2. Diberikan S adalah semiring *additive* komutatif dengan elemen identitas dan n suatu bilangan bulat positif dengan $n \geq 3$. Maka $M_n(S)$ adalah semiring reguler jika dan hanya jika S adalah sebuah ring reguler.

DAFTAR PUSTAKA

Anton , Howard. 1991. *Elementary Linear Algebra* .John Wiley and Sons Inc. New York.

Bhattacharya, P.B, S.K. Jain, dan S.R. Nagpaul. 1990. *Basic Abstract Algebra*. Cambridge University Press. New York.

Fang Li, *Regulerity of semigroup rings*, 53(1996), 72-81, Semigroup Forum.

Fraleigh, John B., *A First Course in Abstract Algebra,7th Edition*, 2003, Addison-Wesley. Boston.

Golan, J.S. 1999. Semiring and Their Applications. Kluwer Academic Publisher. London.

I. Kaplansky, *Fields and Rings*, 1969, The University of Chicago Press, Chicago.

Kandasamy, W.B.V. 2002. Smarandache Near-Rings. American Research Press. Rehoboth.

K. R. Goodearl, *Von Neumann Reguler Rings*,1979, Pitman, London.

K. R. Matthew, *Elementary Linear Algebra*, 1998, Department of Mathematics University of Queensland.

S. Chaopraknoi, K. Savettaseranee and P. Lertwichitsilp, *On Reguler Matrix Semirings* ,2009,69-75, www.math.science.cmu.ac.th/thaijournal

Whitelaw, T.A. 1995. Introduction to Abstract Algebra. Chapman and Hall Press. Florida.