BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar belakang

Struktur aljabar adalah salah satu bidang matematika yang mengalami perkembangan pesat. Struktur aljabar didefinisikan sebagai himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan satu operasi biner atau lebih. Salah satu struktur aljabar yang dilengkapi dengan sebuah operasi biner adalah grup dan struktur aljabar yang dilengkapi dengan dua operasi biner diantaranya adalah ring dan seminearring.

Ring adalah suatu struktur aljabar dengan dua operasi biner yang memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Seminearring merupakan perumuman dari ring. Konsep seminearring diperkenalkan oleh B. V. Rootselaar dan W. G. Van Hoorn pada tahun 1967. Penulis lain yang juga membahas seminearring yaitu H. J. Weinert pada tahun 1976.

Pada tahun 2012, R. Perumal dan R. Balakrishnan dalam jurnalnya yang berjudul Left Bipotent Seminearrings memperkenalkan seminearring yang memenuhi suatu kondisi sehingga menjadi Seminearring Bipoten Kiri. Oleh karena itu, dalam skripsi ini dibahas definisi, sifat-sifat serta membuktikan teorema yang berlaku di Seminearring Bipoten Kiri.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan di atas, permasalahan yang dibahas dalam penulisan skripsi ini adalah bagaimana definisi, contoh dan teorema yang berlaku di Seminearring Bipoten Kiri?

1.3 Tujuan

Tujuan pada penulisan skripsi ini adalah mempelajari definisi dan contoh serta membuktikan teorema yang berlaku di Seminearring Bipoten Kiri.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan diberikan beberapa definisi dan contoh-contoh terkait yang digunakan sebagai acuan dalam pembahasan.

2.1 Operasi Biner

Elemen-elemen suatu himpunan tak kosong dapat dikaitkan dengan operasi biner. Berikut ini akan diberikan definisi tentang relasi, pemetaan, dan operasi biner.

Definisi 2.1.1 (Hasil Kali Kartesius)

Misal A dan B adalah himpunan tak kosong. Himpunan pasangan terurut (x,y) dengan $x \in A$ dan $y \in B$ disebut hasil kali kartesius dari himpunan A dan B, dinotasikan sebagai

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}.$$

(Bhattacharya, dkk., 1986)

Definisi 2.1.2 (Relasi)

Misalkan A dan B adalah himpunan tak kosong, dan misalkan R adalah himpunan bagian dari $A \times B$. Maka R disebut relasi dari A ke B.

(Bhattacharya, dkk., 1986)

Definisi 2.1.3 (Pemetaan)

Misalkan A dan B adalah himpunan tak kosong. Pemetaan f dari A ke B adalah suatu relasi sedemikian sehingga untuk setiap $x \in A$ terdapat dengan tunggal $y \in B$ dengan $(x, y) \in f$, selanjutnya dituliskan sebagai $f(x) = y$.

Pada pemetaan f dari A ke B, himpunan A disebut daerah asal (domain) f dan himpunan B disebut daerah kawan (kodomain) f. Bayangan pemetaan f adalah $Im(x) = \{y \in B | y = f(x)\}$.

(Bhattacharya, dkk., 1986)

Definisi 2.1.4 (Pemetaan Surjektif)

f disebut pemetaan onto (surjektif) jika untuk setiap $y \in B$ terdapat $x \in A$, sedemikian sehingga $y = f(x)$.

(Bhattacharya, dkk, 1986)

Definisi 2.1.5 (Operasi Biner)

Misalkan S adalah himpunan tak kosong. Operasi biner $*$ pada himpunan S adalah pemetaan dari $S \times S$ ke S, atau dinotasikan sebagai

$$* : S \times S \to S$$
$$(a, b) \mapsto *(a, b) = c \in S.$$

(Bhattacharya, dkk., 1986)

Definisi 2.1.6 (Sifat Operasi Biner)

Operasi biner $* : S \times S \to S$ pada himpunan S dikatakan

(i) komutatif jika $x * y = y * x$,

(ii) assosiatif jika $x * (y * z) = (x * y) * z$,
Jika $\circ$ adalah operasi biner yang lain pada S maka operasi biner $*$ dikatakan

(iii) distributif kiri atas $\circ$ jika $x * (y \circ z) = (x * y) \circ (x * z)$,

(iv) distributif kanan atas $\circ$ jika $(y \circ z) * x = (y * x) \circ (z * x)$,

untuk setiap $x, y, z \in S$. Jika operasi $*$ adalah distributif kanan dan kiri atas operasi $\circ$, maka operasi $*$ dikatakan sebagai distributif atas $\circ$.

(Bhattacharya, dkk., 1986)

2.2 Semigrup

Semigrup merupakan suatu struktur aljabar yang terdiri dari himpunan tak kosong bersama dengan satu operasi biner. Definisi, contoh serta teorema yang berkaitan dengan semigrup diberikan sebagai berikut.

Definisi 2.2.1 (Semigrup)

Misalkan L himpunan tak kosong dan didefinisikan operasi biner $*$.
$(L, *)$ disebut semigrup jika

(i) $(L,*)$ tertutup : $a * b \in L$

(ii) $(L,*)$ assosiatif : $(a * b) * c = a * (b * c)$, untuk setiap $a, b, c \in L$.

(Whitelaw, 1995)

Contoh 2.2.2

Diberikan himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$ dengan operasi penjumlahan. Maka $(\mathbb{N}, +)$ adalah semigrup.

Bukti:

Akan dibuktikan $(\mathbb{N}, +)$ adalah semigrup dengan memenuhi aksioma-aksioma berikut:

1. $(\mathbb{N}, +)$ tertutup yaitu $a + b \in \mathbb{N}$ untuk setiap $a, b \in \mathbb{N}$.
   Ambil sebarang $a, b \in \mathbb{N}$ maka $a + b \in \mathbb{N}$. Ambil $a = 1$ dan $b = 2$ maka $1 + 2 \in \mathbb{N}$. Dengan cara yang sama untuk setiap $a, b \in \mathbb{N}$ berlaku $a + b \in \mathbb{N}$. Jadi $(\mathbb{N}, +)$ bersifat tertutup.
2. $(\mathbb{N}, +)$ assosiatif yaitu $(a + b) + c = a + (b + c)$ untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{N}$.
   Ambil sebarang a, b, $c \in \mathbb{N}$, maka $(a + b) + c = a + (b + c)$. Ambil $a = 1, b = 2$, dan $c = 3$ maka
   $$(a + b) + c = a + (b + c).$$
   Dari ruas kiri diperoleh $(a + b) + c = (1 + 2) + 3 = 6$.
   Dari ruas kanan diperoleh $a + (b + c) = 1 + (2 + 3) = 6$.
   Dengan cara yang sama untuk setiap a, b, $c \in \mathbb{N}$ berlaku $(a + b) + c = a + (b + c)$. Jadi $(\mathbb{N}, +)$ berlaku sifat assosiatif.

Karena $(\mathbb{N}, +)$ memenuhi (1) dan (2) maka $(\mathbb{N}, +)$ adalah semigrup.

■

Definisi 2.2.3 (Semigrup Komutatif)

Misalkan $(L, *)$ adalah semigrup. Maka $(L, *)$ disebut semigrup komutatif jika $a * b = b * a$, untuk setiap $a, b \in L$

(Golan, 1999)

Contoh 2.2.4

Diberikan semigrup $(\mathbb{N}, +)$. Maka $(\mathbb{N}, +)$ adalah semigrup komutatif.

Bukti:

1. Akan dibuktikan $(\mathbb{N}, +)$ adalah semigrup.
   $(\mathbb{N}, +)$ adalah semigrup telah dibuktikan pada Contoh 2.2.2

2. Akan dibuktikan $(\mathbb{N}, +)$ adalah semigrup komutatif.
   Ambil sebarang $a, b \in \mathbb{N}$ maka $a + b = b + a$. Ambil $a = 1$ dan $b = 3$ maka $1 + 3 = 3 + 1 = 4$. Dengan cara yang sama untuk setiap $a, b \in \mathbb{N}$ berlaku $a + b = b + a$.
   Jadi $(\mathbb{N}, +)$ merupakan semigrup dan memenuhi sifat komutatif.

Karena $(\mathbb{N}, +)$ memenuhi (1) dan (2) maka terbukti bahwa $(\mathbb{N}, +)$ adalah semigrup komutatif.

■

Definisi 2.2.5 (Semigrup *Monoid*)

Misalkan $(L, *)$ suatu semigrup dan mempunyai elemen identitas e terhadap operasi biner penjumlahan atau pergandaan, sedemikian sehingga $e * a = a * e = a$ untuk setiap $a \in L$. Maka $(L, *)$ disebut semigrup dengan elemen identitas atau semigrup *monoid*.

(Durbin, 1992)

Contoh 2.2.6

Diberikan $\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ dengan operasi pergandaan. Maka $(\mathbb{Z}_4, \bullet)$ adalah semigrup *monoid*.

Bukti:

1. Akan dibuktikan $(\mathbb{Z}_4, \bullet)$ adalah semigrup dengan memenuhi aksioma-aksioma berikut:
   (i) $(\mathbb{Z}_4, \bullet)$ tertutup yaitu $a \bullet b \in \mathbb{Z}_4$ untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}_4$.
   Operasi pergandaan pada $\mathbb{Z}_4$ diberikan pada Tabel 2.1 berikut:

Tabel 2.1 Operasi Pergandaan pada $\mathbb{Z}_4$

$\bullet$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Ambil sebarang $a, b \in \mathbb{Z}_4$ maka $a \bullet b \in \mathbb{Z}_4$. Jadi $(\mathbb{Z}_4, \bullet)$ berlaku sifat tertutup.

(ii) $(\mathbb{Z}_4, \bullet)$ assosiatif yaitu $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$ untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}_4$.

Ambil sebarang $, b, c \in \mathbb{Z}_4$, maka $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$.

Berdasarkan Tabel 2.1, ambil $a = \overline{0}$, $b = \overline{2}$, dan $c = \overline{3}$ maka dari ruas kiri diperoleh

$$(a \bullet b) \bullet c = (\overline{0} \bullet \overline{2}) \bullet \overline{3} = \overline{0},$$

dan dari ruas kanan diperoleh

$$a \bullet (b \bullet c) = \overline{0} \bullet (\overline{2} \bullet \overline{3}) = \overline{0}.$$

Dengan cara yang sama untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{N}$ berlaku

$$(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$$

Jadi $(\mathbb{Z}_4, \bullet)$ berlaku sifat assosiatif.

Karena $(\mathbb{Z}_4, \bullet)$ memenuhi (i) dan (ii) maka $(\mathbb{Z}_4, \bullet)$ adalah semigrup.

2. Akan dibuktikan $(\mathbb{Z}_4, \bullet)$ adalah semigrup yang *monoid*.
   Elemen identitas $\mathbb{Z}_4$ untuk pergandaan adalah $\overline{1}$ karena untuk setiap $a \in \mathbb{Z}_4$ berlaku $a \bullet \overline{1} = \overline{1} \bullet a = a$.

Karena $(\mathbb{Z}_4, \bullet)$ memenuhi (1) dan (2) maka terbukti bahwa $(\mathbb{Z}_4, \bullet)$ adalah semigrup *monoid*.

■

Definisi 2.2.7 (Ideal)

Misalkan $(L, *)$ adalah semigrup. I adalah himpunan bagian tak kosong dari L. Maka I adalah ideal kanan atau kiri dari L jika $IL \subseteq I$ atau $LI \subseteq I$. I adalah ideal jika I ideal kanan dan ideal kiri.

(Harju, 1966)

Contoh 2.2.8

$L = \mathbb{Z}_8 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}\}$ adalah semigrup terhadap operasi pergandaan. Maka $I = \{\overline{0}, \overline{4}\}$ adalah ideal dari $\mathbb{Z}_8$.

Bukti:

1. Diketahui L adalah semigrup terhadap operasi pergandaan modulo 8. Akan dibuktikan $I = \{\overline{0}, \overline{4}\}$ adalah ideal kanan, yaitu $i \in I$ dan $l \in L$ maka $il \in I$.

   (i) Untuk $i = \overline{0}$

   $\overline{0} \bullet \overline{0} = \overline{0}$, $\quad \overline{0} \bullet \overline{4} = \overline{0}$,
   $\overline{0} \bullet \overline{1} = \overline{0}$, $\quad \overline{0} \bullet \overline{5} = \overline{0}$,
   $\overline{0} \bullet \overline{2} = \overline{0}$, $\quad \overline{0} \bullet \overline{6} = \overline{0}$,
   $\overline{0} \bullet \overline{3} = \overline{0}$, $\quad \overline{0} \bullet \overline{7} = \overline{0}$.

(ii) Untuk $i = \overline{4}$

$\overline{4} \bullet \overline{0} = \overline{0}$, $\overline{4} \bullet \overline{4} = \overline{0}$,
$\overline{4} \bullet \overline{1} = \overline{4}$, $\overline{4} \bullet \overline{5} = \overline{4}$,
$\overline{4} \bullet \overline{2} = \overline{0}$, $\overline{4} \bullet \overline{6} = \overline{0}$,
$\overline{4} \bullet \overline{3} = 4$, $\overline{4} \bullet \overline{7} = \overline{4}$.

2. Akan dibuktikan $I = \{\overline{0}, \overline{4}\}$ adalah ideal kiri, yaitu $i \in I$ dan $l \in L$ maka $li \in I$.

(i) Untuk $i = \overline{0}$

$\overline{0} \bullet \overline{0} = \overline{0}$, $\overline{4} \bullet \overline{0} = \overline{0}$,
$\overline{1} \bullet \overline{0} = \overline{0}$, $\overline{5} \bullet \overline{0} = \overline{0}$,
$\overline{2} \bullet \overline{0} = \overline{0}$, $\overline{6} \bullet \overline{0} = \overline{0}$,
$\overline{3} \bullet \overline{0} = \overline{0}$, $\overline{7} \bullet \overline{0} = \overline{0}$.

(ii) Untuk $i = \overline{4}$

$\overline{0} \bullet \overline{4} = \overline{0}$, $\overline{4} \bullet \overline{4} = \overline{0}$,
$\overline{1} \bullet \overline{4} = \overline{4}$, $\overline{5} \bullet \overline{4} = \overline{4}$,
$\overline{2} \bullet \overline{4} = \overline{0}$, $\overline{6} \bullet \overline{4} = \overline{0}$,
$\overline{3} \bullet \overline{4} = 4$, $\overline{7} \bullet \overline{4} = \overline{4}$.

Berdasarkan (1) dan (2) maka terbukti bahwa $I = \{\overline{0}, \overline{4}\}$ adalah ideal dari $\mathbb{Z}_8$.

■

2.3 Grup

Struktur aljabar yang lain adalah grup yang didefinisikan sebagai himpunan tak kosong dengan sebuah operasi biner dan memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Perbedaan semigrup dan grup adalah grup memiliki elemen identitas dan setiap elemennya memiliki invers sedangkan semigrup tidak memiliki elemen identitas dan setiap elemennya tidak memiliki invers.

Definisi 2.3.1 (Grup)

Misalkan G adalah suatu himpunan tak kosong dengan sebuah operasi biner $*$. Maka $(G,*)$ disebut grup jika memenuhi aksioma-aksioma berikut:

(i) tertutup, yaitu untuk setiap $a, b \in G$, berlaku $a * b \in G$,
(ii) assosiatif, yaitu untuk setiap $a, b, c \in G$ berlaku $a * (b * c) = (a * b) * c$,

(iii) memiliki elemen identitas, yaitu terdapat $e \in G$ sedemikian sehingga $a * e = e * a = a$, untuk setiap $a \in G$,

(iv) memiliki invers, yaitu untuk setiap $a \in G$ terdapat $a^{-1} \in G$ sedemikian sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.

(Whitelaw, 1995)

Contoh 2.3.2

Diberikan $G = \{\bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}\}$ dengan operasi pergandaan terhadap $\mathbb{Z}_{10}$. Maka $(G, \bullet)$ adalah grup.

Bukti:

Akan dibuktikan G adalah grup.

(i) $(G, \bullet)$ tertutup, yaitu $a \bullet b \in G$, untuk setiap $a, b \in G$.
Operasi pergandaan pada G diberikan pada Tabel 2.2 berikut:

Tabel 2.2 Operasi Pergandaan pada *G*

$\bullet$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$
$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$
$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$
$\bar{8}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$

Karena untuk setiap $a, b \in G$ memenuhi $a \bullet b \in G$, maka $(G, \bullet)$ berlaku sifat tertutup.

(ii) $(G, \bullet)$ assosiatif, yaitu $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$ untuk setiap $a, b, c \in G$. Ambil sebarang $, b, c \in G$, maka $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$. Berdasarkan Tabel 2.2, ambil $a = \bar{4}$, $b = \bar{6}$, dan $c = \bar{8}$ maka dari ruas kiri diperoleh

$$(a \bullet b) \bullet c = (\bar{4} \bullet \bar{6}) \bullet \bar{8} = \bar{2},$$

dan dari ruas kanan diperoleh

$$a \bullet (b \bullet c) = \bar{4} \bullet (\bar{6} \bullet \bar{8}) = \bar{2}.$$

Dengan cara yang sama berlaku untuk setiap $a, b, c \in G$.
Jadi $(G, \bullet)$ berlaku sifat assosiatif.

(iii) Elemen identitas G untuk pergandaan adalah $\bar{6}$ karena untuk setiap $a \in G$ berlaku $a \bullet \bar{6} = \bar{6} \bullet a = a$.

(iv) Berdasarkan Tabel 2.2, diperoleh bahwa $\overline{2} \bullet \overline{8} = \overline{6}$, $\overline{4} \bullet \overline{4} = \overline{6}$, $\overline{6} \bullet \overline{6} = \overline{6}$, dan $\overline{8} \bullet \overline{2} = \overline{6}$. Ini berarti $(\overline{2})^{-1} = \overline{8}$, $(\overline{4})^{-1} = \overline{4}$, $(\overline{6})^{-1} = \overline{6}$, dan $(\overline{8})^{-1} = \overline{2}$. Jadi setiap elemen dalam G mempunyai invers.

Karena $(G, \bullet)$ memenuhi keempat aksioma, maka terbukti $(G, \bullet)$ adalah grup.

■

Definisi 2.3.3 (Grup Komutatif)

Misalkan $(G,*)$ adalah suatu grup. $(G,*)$ disebut grup komutatif jika $a * b = b * a$ untuk setiap $a, b \in G$.

(Dummit dan Foote, 2002)

2.4 Ring dan Ideal

Ring merupakan salah satu bentuk struktur aljabar dengan dua operasi biner di dalamnya dan memenuhi aksioma-aksioma tertentu.

Definisi 2.4.1 (Ring)

Suatu himpunan tak kosong R dengan dua operasi biner penjumlahan $(+)$ dan pergandaan $(\bullet)$ disebut ring, jika R memenuhi aksioma-aksioma berikut:

(i) $(R, +)$ merupakan grup komutatif,

(ii) $(R, \bullet)$ merupakan semigrup,

(iii) $(R, +, \bullet)$ memenuhi hukum distributif, yaitu untuk setiap $a, b, c \in R$ berlaku

$$a \bullet (b + c) = (a \bullet b) + (a \bullet c) \text{ dan } (a + b) \bullet c = (a \bullet c) + (b \bullet c).$$

(Bhattacharya, dkk., 1986**)**

Contoh 2.4.2

Diberikan $\mathbb{Z}_6 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\}$. Maka $(\mathbb{Z}_6, +, \bullet)$ adalah ring.

Bukti:

$\mathbb{Z}_6$ adalah ring jika memenuhi:

(i) $(\mathbb{Z}_6, +)$ grup komutatif.

Himpunan bilangan bulat modulo 6 terhadap operasi penjumlahan diberikan pada Tabel 2.3 berikut:

Tabel 2.3 Operasi Penjumlahan pada $\mathbb{Z}_6$

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$

a. Jelas $\mathbb{Z}_6$ tertutup terhadap operasi penjumlahan, karena untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}_6$ berlaku $a + b \in \mathbb{Z}_6$.
b. Akan ditunjukkan berlaku sifat assosiatif pada $\mathbb{Z}_6$.
   Ambil $a = \bar{2}, b = \bar{3}$, dan $c = \bar{4}$, maka dari ruas kiri diperoleh
   $$(\bar{2} + \bar{3}) + \bar{4} = \bar{5} + \bar{4} = \bar{3},$$
   dan dari ruas kanan diperoleh
   $$\bar{2} + (\bar{3} + \bar{4}) = \bar{2} + \bar{1} = \bar{3}.$$
   Dengan cara yang sama, untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}_6$ berlaku $(a + b) + c = a + (b + c)$. Jadi pada $(\mathbb{Z}_6, +)$ berlaku sifat assosiatif.
c. Elemen identitas $\mathbb{Z}_6$ untuk penjumlahan adalah $\bar{0}$, karena untuk setiap $a \in \mathbb{Z}_6$ berlaku $a + \bar{0} = \bar{0} + a = a$.
d. Berdasarkan Tabel 2.3, diperoleh bahwa $\bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$, $\bar{1} + \bar{5} = \bar{0}$, $\bar{2} + \bar{4} = \bar{0}, \bar{3} + \bar{3} = \bar{0}$, $\bar{4} + \bar{2} = \bar{0}$, dan $\bar{5} + \bar{1} = \bar{0}$. Ini berarti $(\bar{0})^{-1} = \bar{0}$, $(\bar{1})^{-1} = \bar{5}$, $(\bar{2})^{-1} = \bar{4}$, $(\bar{3})^{-1} = \bar{3}$, $(\bar{4})^{-1} = \bar{2}$, dan $(\bar{5})^{-1} = \bar{1}$. Jadi setiap elemen dalam $\mathbb{Z}_6$ mempunyai invers.
e. Akan ditunjukkan berlaku sifat komutatif pada $\mathbb{Z}_6$. Ambil $a = \bar{3}$ dan $b = \bar{4}$, maka dari ruas kiri diperoleh $\bar{3} + \bar{4} = \bar{1}$ dan dari ruas kanan diperoleh $\bar{4} + \bar{3} = \bar{1}$. Dengan cara yang sama berlaku untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}_6$.

(ii) Akan dibuktikan $(\mathbb{Z}_6, \bullet)$ adalah semigrup.

a. $(\mathbb{Z}_6, \bullet)$ tertutup, yaitu $a \bullet b \in \mathbb{Z}_6$, untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}_6$. Operasi pergandaan pada $\mathbb{Z}_6$ diberikan pada Tabel 2.4 berikut:

Tabel 2.4 Operasi Pergandaan pada $\mathbb{Z}_6$

$\bullet$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Ambil sebarang $a, b \in \mathbb{Z}_6$ maka $a \bullet b \in \mathbb{Z}_6$. Jadi $(\mathbb{Z}_6, \bullet)$ berlaku sifat tertutup.

b. $(\mathbb{Z}_6, \bullet)$ assosiatif, yaitu $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$, untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}_6$. Ambil sebarang $a, b, c \in \mathbb{Z}_6$, maka $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$. Jadi $(\mathbb{Z}_6, \bullet)$ berlaku sifat assosiatif.

(iii) Akan ditunjukkan berlaku sifat distributif pada $\mathbb{Z}_6$.

Ambil $a = \bar{1}$, $b = \bar{2}$, dan $c = \bar{3}$ maka

a. Distributif kiri:

Dari ruas kiri diperoleh $a \bullet (b + c) = \bar{1} \bullet (\bar{2} + \bar{3}) = \bar{5}$ dan dari ruas kanan diperoleh $(a \bullet b) + (a \bullet c) = (\bar{1} \bullet \bar{2}) + (\bar{1} \bullet \bar{3}) = \bar{5}$.

b. Distributif kanan:

Dari ruas kiri diperoleh $(a + b) \bullet c = (\bar{1} + \bar{2}) \bullet \bar{3} = \bar{3}$ dan dari ruas kanan diperoleh $(a \bullet c) + (b \bullet c) = (\bar{1} \bullet \bar{3}) + (\bar{2} \bullet \bar{3}) = \bar{3}$.

Dengan cara yang sama, untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}_6$ berlaku

$$a \bullet (b + c) = (a \bullet b) + (a \bullet c)$$

dan

$$(a + b) \bullet c = (a \bullet c) + (b \bullet c).$$

Karena $\mathbb{Z}_6$ memenuhi (i), (ii), dan (iii) maka terbukti $\mathbb{Z}_6$ adalah ring.

■

Definisi 2.4.3 (Ring Komutatif)

Suatu ring R disebut komutatif jika $(R, \bullet)$ bersifat komutatif yaitu $a \bullet b = b \bullet a$ untuk setiap $a, b \in R$.

(Bhattacharya, dkk., 1986)

Definisi 2.4.4 (Pembagi Nol)

Elemen $a$dalam ring R disebut pembagi nol kanan jika terdapat elemen $b \neq 0$ dari R sedemikian sehingga $b \bullet a = 0$. Elemen a dalam ring R disebut pembagi nol kiri jika terdapat elemen $b \neq 0$ dari R sedemikian sehingga $a \bullet b = 0$. Elemen a disebut pembagi nol jika a pembagi nol kanan dan kiri.

(Bhattacharya, dkk., 1986)

Contoh 2.4.5

Diberikan ring $M_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{Z} \right\}$. Maka $M_2(\mathbb{Z})$ memuat pembagi nol.

Bukti:

Akan ditunjukkan $M_2(\mathbb{Z})$ memuat pembagi nol.

Ambil $A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $a_1 \neq 0$ dan pilih $B = \begin{pmatrix} 0 & a_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $a_2 \neq 0$ sehingga dari ruas kiri diperoleh

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

dari ruas kanan diperoleh

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & a_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Terbukti bahwa $M_2(\mathbb{Z})$ memuat pembagi nol.

■

Definisi 2.4.6 (Homomorfisma Ring)

Misal R dan R' adalah ring. Homomorfisma R ke R' adalah pemetaan : $R \to R'$ jika untuk setiap $x, y \in R$ berlaku:

(i) $\sigma(x + y) = \sigma(x) + \sigma(y)$,

(ii) $\sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y)$.

(Bhattacharya, dkk., 1986)

Contoh 2.4.7

Diberikan ring $U = \{k + l\sqrt{2} | k, l \in \mathbb{Z}\}$ dan $V = \left\{ \begin{pmatrix} k & 2l \\ l & k \end{pmatrix} \middle| k, l \in \mathbb{Z} \right\}$. Maka pemetaan σ yang didefinisikan sebagai berikut merupakan homomorfisma ring

$$\sigma : U \to V$$
$$k + l\sqrt{2} \mapsto \sigma(k + l\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} k & 2l \\ l & k \end{pmatrix}.$$

Bukti:

Akan dibuktikan bahwa σ merupakan homomorfisma ring.
Ambil $x, y \in U$ dimana $x = (k + l\sqrt{2})$ dan $y = (m + n\sqrt{2})$,

(i) $\sigma(x + y) = \sigma((k + l\sqrt{2}) + (m + n\sqrt{2}))$

$$\begin{aligned} &= \sigma\left((k + m) + (l + n)\sqrt{2}\right) \\ &= \begin{pmatrix} k + m & 2(l + n) \\ l + n & k + m \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} k & 2l \\ l & k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m & 2n \\ n & m \end{pmatrix} \\ &= \sigma(k + l\sqrt{2}) + \sigma(m + n\sqrt{2}) \\ &= \sigma(x) + \alpha(y). \end{aligned}$$

(ii) $\sigma(xy) = \sigma((k + l\sqrt{2})(m + n\sqrt{2}))$

$$\begin{aligned} &= \sigma(km + kn\sqrt{2} + lm\sqrt{2} + 2ln) \\ &= \sigma\left((km + 2ln) + (kn + lm)\sqrt{2}\right) \\ &= \begin{pmatrix} (km + 2ln) & 2(kn + lm) \\ (kn + lm) & (km + 2ln) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} k & 2l \\ l & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & 2n \\ n & m \end{pmatrix} \\ &= \sigma(k + l\sqrt{2})\sigma(m + n\sqrt{2}) \\ &= \sigma(x)\sigma(y). \end{aligned}$$

Berdasarkan (i) dan (ii) maka σ adalah homomorfisma ring.

■

Definisi 2.4.8 (Bayangan Homomorfisma)

Misalkan R adalah ring dan R' adalah struktur aljabar. Maka R' adalah bayangan homomorfisma dari R jika untuk setiap $x, y \in R$ dan $x', y' \in R'$ berlaku:

$$\sigma : R \longrightarrow R' \text{ surjektif}$$
$$x \longmapsto \sigma(x) = x'$$
$$y \longmapsto \sigma(y) = y'$$

(i) $x + y \longmapsto (x + y)' = x' + y'$
$$\sigma(x + y) = \sigma(x) + \sigma(y).$$

(ii) $x \bullet y \longmapsto (x \bullet y)' = x' \bullet y'$
$$\sigma(x \bullet y) = \sigma(x) \bullet \sigma(y).$$

(Andari, 2011)

Contoh 2.4.9

Pada Contoh 2.4.7 diberikan ring $U = \{k + l\sqrt{2} | k,\ l \in \mathbb{Z}\}$ dan $V = \left\{ \begin{pmatrix} k & 2l \\ l & k \end{pmatrix} \middle| k, l \in \mathbb{Z} \right\}$. Pemetaan σ merupakan homomorfisma ring yang didefinisikan sebagai berikut

$$\sigma : U \to V$$
$$k + l\sqrt{2} \mapsto \sigma\left(k + l\sqrt{2}\right) = \begin{pmatrix} k & 2l \\ l & k \end{pmatrix}.$$

Maka V adalah bayangan homomorfisma dari U.

Bukti:

Akan dibuktikan V adalah bayangan homomorfisma dari U.

1. Pemetaan σ merupakan homomorfisma ring telah dibuktikan pada Contoh 2.4.7.
2. Akan dibuktikan pemetaan $\sigma: U \longrightarrow V$ surjektif.
   Ambil $y \in V$, terdapat $x \in U$ sedemikian sehingga $\sigma(x) = y$.

Berdasarkan (1) dan (2) maka V adalah bayangan homomorfisma dari U.

■

Definisi 2.4.10 (Elemen Nilpoten)

Elemen a dalam ring R adalah nilpoten jika terdapat n bilangan bulat positif sehingga $a^n = 0$. Himpunan semua elemen nilpoten yang merupakan elemen dari ring R disebut $nil\ (R)$.

(Fraleigh, 1994)

Contoh 2.4.11

Diberikan ring $\mathbb{Z}_9 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}\}$ dengan operasi penjumlahan dan pergandaan. Maka $\bar{0}$, $\bar{3}$ dan $\bar{6}$ merupakan elemen nilpoten dari $\mathbb{Z}_9$ dan nil $(\mathbb{Z}_9)$ adalah $\{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}\}$.

Bukti:

$\bar{3}^2 = 0$ dan $\bar{6}^3 = 0$ sedemikian sehingga $\bar{0}$, $\bar{3}$ dan $\bar{6}$ masing-masing adalah elemen nilpoten dan nil $(\mathbb{Z}_9)$ adalah $\{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}\}$.

■

Definisi 2.4.12 (Ideal)

Himpunan bagian tak kosong I pada ring R disebut ideal kanan (kiri) pada R jika:
(i) $a - b \in I$,
(ii) $ar \in I$ $(ra \in I)$,
untuk setiap $a, b \in I$ dan setiap $r \in R$. Jika I ideal kiri dan ideal kanan pada R maka I disebut ideal dua sisi.

(Bhattacharya, dkk., 1986)

Contoh 2.4.13

Diberikan ring $\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ dan $A = \{\bar{0}, \bar{2}\}$. Maka A adalah ideal dari ring $\mathbb{Z}_4$.

Bukti:

Diketahui $(\mathbb{Z}_4, +, \bullet)$ adalah ring. Akan dibuktikan $A = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ adalah ideal dari ring $\mathbb{Z}_4$.
(i) Operasi pengurangan pada A diberikan pada Tabel 2.5 berikut:

Tabel 2.5 Operasi Pengurangan pada *A*

$-$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$

Berdasarkan Tabel 2.5, untuk setiap $a, b \in A$ berlaku $a - b \in A$.

(ii) Akan dibuktikan $ar \in A$ dan $ra \in A$. Operasi pergandaan ar diberikan pada Tabel 2.6 dan operasi pergandaan ra diberikan pada Tabel 2.7 berikut:

Tabel 2.6 Operasi Pergandaan pada ar

a	r	ar
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$
$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$
$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$

Tabel 2.7 Operasi Pergandaan pada ra

r	a	ra
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{2}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$
$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{2}$

Berdasarkan Tabel 2.6 dan Tabel 2.7, untuk setiap $a \in A$ dan setiap $r \in R$ berlaku $ar \in A$ dan $ra \in A$.

Karena memenuhi (i) dan (ii), maka A adalah ideal dari $\mathbb{Z}_4$. ■

(Andari, 2011)

BAB III
PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibahas beberapa definisi, teorema dan proposisi serta contoh yang berkaitan dengan seminearring bipoten kiri berserta buktinya.

3.1 Seminearring

Seminearring merupakan struktur aljabar dengan dua operasi biner dan memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Pada dasarnya seminearring dibedakan menjadi dua yaitu seminearring kiri dan seminearring kanan. Pada skripsi ini hanya akan dibahas pada seminearring kanan sebagaimana didefinisikan dibawah ini.

Definisi 3.1.1 (Seminearring Kanan)

Misalkan S himpunan tak kosong dengan operasi penjumlahan dan pergandaan. $(S, +, \bullet)$ disebut seminearring (atau seminearring kanan) jika memenuhi aksioma-aksioma berikut:

(i) $(S, +)$ adalah semigrup (tidak perlu komutatif),
(ii) $(S, \bullet)$ adalah semigrup,
(iii) $(S, \bullet, +)$ memenuhi $(a + b) \bullet c = a \bullet c + b \bullet c$ (hukum distributif kanan) untuk semua $a, b, c \in S$.

Jika S memenuhi hukum distributif kiri yaitu $a \bullet (b + c) = a \bullet b + a \bullet c$ untuk semua $a, b, c \in S$ maka S disebut seminearring kiri. Untuk selanjutnya dalam skripsi ini penulisan seminearring kanan cukup ditulis seminearring. Seminearring disebut komutatif jika berlaku $a \bullet b = b \bullet a$ untuk semua $a, b \in S$.

(Pilz, 1997)

Contoh 3.1.2

Diberikan himpunan bilangan bulat positif dengan operasi penjumlahan dan pergandaan. Maka $(\mathbb{Z}^+, +, \bullet)$ merupakan seminearring.

Bukti:

Akan ditunjukkan bahwa $(\mathbb{Z}^+, +, \bullet)$ adalah seminearring.

1. $(\mathbb{Z}^+, +)$ adalah semigrup.
   (i) $(\mathbb{Z}^+, +)$ tertutup.
   Ambil sebarang $a, b \in \mathbb{Z}^+$ maka $a + b \in \mathbb{Z}^+$

(ii) $(\mathbb{Z}^+, +)$ assosiatif.

Ambil sebarang $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$, maka

$$(a+b)+c = a+(b+c).$$

Ambil $a = 2, b = 4$, dan $c = 7$ maka dari ruas kiri diperoleh

$$(a+b)+c = (2+4)+7 = 13,$$

dan dari ruas kanan diperoleh

$$a+(b+c) = 2+(4+7) = 13.$$

Dengan cara yang sama untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$ berlaku

$$(a+b)+c = a+(b+c).$$

2. $(\mathbb{Z}^+, \bullet)$ adalah semigrup.

(i) $(\mathbb{Z}^+, \bullet)$ tertutup.

Ambil sebarang $a, b \in \mathbb{Z}^+$ maka $a \bullet b \in \mathbb{Z}^+$

(ii) $(\mathbb{Z}^+, \bullet)$ assosiatif.

Ambil sebarang $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$, maka

$$(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c).$$

Ambil $a = 2, b = 4$, dan $c = 7$ maka dari ruas kiri diperoleh

$$(a \bullet b) \bullet c = (2 \bullet 4) \bullet 7 = 56,$$

dan dari ruas kanan diperoleh

$$a \bullet (b \bullet c) = 2 \bullet (4 \bullet 7) = 56.$$

Dengan cara yang sama untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$ berlaku

$$(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c).$$

3. $(\mathbb{Z}^+, +, \bullet)$ memenuhi hukum distributif kanan yaitu untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$ berlaku $(a+b) \bullet c = a \bullet c + b \bullet c$.

Ambil $a = 2, b = 4$, dan $c = 7$ maka dari ruas kiri diperoleh

$$(a+b) \bullet c = (2+4) \bullet 7 = 42,$$

dan dari ruas kanan diperoleh

$$a \bullet c + b \bullet c = 2 \bullet 7 + 4 \bullet 7 = 42.$$

Dengan cara yang sama untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$ berlaku

$$(a+b) \bullet c = a \bullet c + b \bullet c.$$

Dari (1), (2) dan (3) terbukti bahwa $(\mathbb{Z}^+, +, \bullet)$ merupakan seminearring.

■

Definisi 3.1.3

Suatu seminearring dikatakan memiliki *absorbing zero* jika terdapat $0 \in S$ sedemikian sehingga

$$a + 0 = 0 + a = a \text{ dan } a \bullet 0 = 0 \bullet a = 0,$$

untuk setiap $a \in S$.

(Perumal dan Balakrishnan, 2012)

Contoh 3.1.4

Diberikan seminearring $S = \{0, \text{a}, \text{b}, \text{c}, \text{d}\}$ dengan operasi penjumlahan dan pergandaan yang didefinisikan pada Tabel 3.1 dan Tabel 3.2. Maka $(S, +, \bullet)$ merupakan seminearring dengan *absorbing zero*.

Tabel 3.1 Operasi Penjumlahan pada *S*

+	0	a	b	c	d
0	0	a	b	c	d
a	a	a	b	d	d
b	b	b	b	d	d
c	c	d	d	c	d
d	d	d	d	d	d

Tabel 3.2 Operasi Pergandaan pada *S*

$\bullet$	0	a	b	c	d
0	0	0	0	0	0
a	0	a	a	a	a
b	0	a	b	b	b
c	0	a	b	c	d
d	0	a	d	d	d

Bukti:

(i) Akan ditunjukkan bahwa $(S, +)$ merupakan semigrup dengan elemen identitas 0:

a. Untuk setiap $a, b \in S$ maka $a + b \in S$.

b. Untuk setiap $a, b, c \in S$ maka $(a + b) + c = a + (b + c)$. Ambil $a = \text{a}, b = \text{c}$, dan $c = \text{d}$ maka dari ruas kiri diperoleh

$$(a + b) + c = (\text{a} + \text{c}) + \text{d} = \text{d},$$

dan dari ruas kanan diperoleh

$$a + (b + c) = \text{a} + (\text{c} + \text{d}) = \text{d}.$$

Dengan cara yang sama untuk setiap $a, b, c \in S$ berlaku

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

c. Memiliki elemen identitas 0 sedemikian sehingga

$$a + 0 = 0 + a = a,$$

untuk setiap $a \in S$.

Jadi terbukti bahwa $(S, +)$ merupakan semigrup dengan *absorbing zero*.

(ii) Akan ditunjukkan bahwa $(S, \bullet)$ merupakan semigrup terhadap pergandaan:

a. Untuk setiap $a, b \in S$ maka $a \bullet b \in S$.

b. Untuk setiap $a, b, c \in S$ maka $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$.

Ambil $a =$ a, $b =$ c, dan $c =$ d maka dari ruas kiri diperoleh

$$(a \bullet b) \bullet c = (\mathrm{a} \bullet \mathrm{c}) \bullet \mathrm{d} = \mathrm{a},$$

dan dari ruas kanan dipereoleh

$$a \bullet (b \bullet c) = \mathrm{a} \bullet (\mathrm{c} \bullet \mathrm{d}) = \mathrm{a}.$$

Dengan cara yang sama untuk setiap $a, b, c \in S$ berlaku

$$(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c).$$

Jadi terbukti bahwa $(S, \bullet)$ merupakan semigrup.

(iii) Berlaku hukum distributif kanan.

Untuk setiap $a, b, c \in S$ maka $(a + b) \bullet c = a \bullet c + b \bullet c$. Ambil $a =$ a, $b =$ c, dan $c =$ d maka dari ruas kiri diperoleh

$$(a + b) \bullet c = (\mathrm{a} + \mathrm{c}) \bullet \mathrm{d} = \mathrm{d},$$

dan dari ruas kanan diperoleh

$$a \bullet c + b \bullet c = \mathrm{a} \bullet \mathrm{d} + \mathrm{c} \bullet \mathrm{d} = \mathrm{d}.$$

Dengan cara yang sama untuk setiap $a, b, c \in S$ berlaku

$$(a + b) \bullet c = a \bullet c + b \bullet c.$$

Berdasarkan (i), (ii) dan (iii) maka terbukti bahwa himpunan $S = \{0, \mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d}\}$ adalah suatu seminearring.

■

Teorema 3.1.5

Elemen nilpoten seminearring S adalah nol jika dan hanya jika $x^2 = 0$ mengakibatkan $x = 0$ untuk semua $x \in S$.

Bukti:

(⇒) Asumsikan elemen nilpoten S adalah nol. Ambil $x \in S$ dengan x elemen nilpoten S, karena elemen nilpoten adalah nol maka jelas berlaku $x^2 = 0$ maka $x = 0$.

($\Leftarrow$) Diketahui jika $x^2 = 0$ maka $x = 0$ untuk semua x dalam S. Akan dibuktikan seminearring S memuat elemen nilpoten nol. Karena $x^2 = 0$ maka $x = 0$ untuk semua x dalam S maka terbukti bahwa seminearring S memuat elemen nilpoten nol.

■

Contoh 3.1.6

Diberikan seminearring $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$. Maka elemen nilpoten $\mathbb{Z}_2$ adalah $\bar{0}$.

Bukti:

1. Akan dibuktikan $\mathbb{Z}_2$ adalah seminearring.
   (i) $(\mathbb{Z}_2, +)$ semigrup.
   a. Tertutup: $a + b \in \mathbb{Z}_2$ untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}_2$. Operasi penjumlahan yang didefinisikan pada Tabel 3.3 berikut.
   Tabel 3.3 Operasi Penjumlahan pada $\mathbb{Z}_2$

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$

   Ambil sebarang $a, b \in \mathbb{Z}_2$ maka $a + b \in \mathbb{Z}_2$. Jadi $(\mathbb{Z}_2, +)$ berlaku sifat tertutup.
   b. Assosiatif: $(a + b) + c = a + (b + c)$ untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}_2$. Berdasarkan Tabel 3.3 misal diambil $a = \bar{0}$, $b = \bar{1}$, dan $c = \bar{1}$ maka dari ruas kiri diperoleh
$$(a + b) + c = (\bar{0} + \bar{1}) + \bar{1} = \bar{0},$$
   dan dari ruas kanan diperoleh
$$a + (b + c) = \bar{0} + (\bar{1} + \bar{1}) = \bar{0}.$$
   Dengan cara yang sama untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}_2$ berlaku $(a + b) + c = a + (b + c)$. Jadi $(\mathbb{Z}_2, +)$ berlaku sifat assosiatif.
   (ii) $(\mathbb{Z}_2, \bullet)$ semigrup.
   a. Tertutup: $a \bullet b \in \mathbb{Z}_2$ untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}_2$. Operasi pergandaan pada $\mathbb{Z}_2$ diberikan pada Tabel 3.4 berikut.

Tabel 3.4 Operasi Pergandaan pada $\mathbb{Z}_2$

$\bullet$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

Ambil sebarang $a, b \in \mathbb{Z}_\mathbf{2}$ maka $a \bullet b \in \mathbb{Z}_\mathbf{2}$. Jadi $(\mathbb{Z}_\mathbf{2}, \bullet)$ berlaku sifat tertutup.

b. Assosiatif: $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$ untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}_\mathbf{2}$. Berdasarkan Tabel 3.4, misal diambil $a = \bar{0}$, $b = \bar{1}$, dan $c = \bar{1}$ maka dari ruas kiri diperoleh

$$(a \bullet b) \bullet c = (\bar{0} \bullet \bar{1}) \bullet \bar{1} = \bar{0},$$

dan dari ruas kanan diperoleh

$$a \bullet (b \bullet c) = \bar{0} \bullet (\bar{1} \bullet \bar{1}) = \bar{0}.$$

Dengan cara yang sama untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}_2$ berlaku

$$(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$$

Jadi $(\mathbb{Z}_\mathbf{2}, \bullet)$ berlaku sifat assosiatif.

(iii) $(\mathbb{Z}_2, +, \bullet)$ memenuhi hukum distributif kanan.

Untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}_2$ maka $(a + b) \bullet c = a \bullet c + b \bullet c$.

2. Akan dibuktikan elemen nilpoten $\mathbb{Z}_\mathbf{2}$ adalah $\bar{0}$.

   $x \in \mathbb{Z}_2$, $\bar{0}^2 = \bar{0}$ sehingga $x = \bar{0}$.

Berdasarkan (1) dan (2) maka terbukti bahwa elemen nilpoten $\mathbb{Z}_2$ adalah $\bar{0}$.

■

Definisi 3.1.7

Misalkan S adalah seminearring dan A adalah sebarang himpunan bagian dari S. Maka *radical* dari A yang dinotasikan dengan $\sqrt{A}$ yaitu $\sqrt{A} = \{x \in S | x^k \in A\}$ dengan k suatu bilangan bulat positif.

(Perumal dan Balakrishnan, 2012)

Contoh 3.1.8

Diberikan seminearring $S = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$ dengan operasi penjumlahan dan pergandaan terhadap modulo 8 dan $A = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$. Maka *radical* dari A adalah $\sqrt{A} = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$.

Bukti:

Akan dibuktikan bahwa S = $\{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$ memuat *radical* A.
S = $\{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$ dan A = $\{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$.
(i) Jika $x = \bar{0}$ maka $\bar{0}^1 = \bar{0}$.
(ii) Jika $x = \bar{2}$ maka $\bar{2}^1 = \bar{2}$.
(iii) Jika $x = \bar{4}$ maka $4^1 = \bar{4}$.
Sehingga $\sqrt{A} = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$. Terbukti bahwa S = $\{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$ memuat *radical* A.

■

Definisi 3.1.9

Himpunan bagian tak kosong I pada seminearring S disebut ideal kanan (kiri) pada S jika:
(iii) $a + b \in I$,
(iv) $as \in I$ $(sa \in I)$,
untuk setiap $a, b \in I$ dan setiap $s \in S$.

(Kandassamy, 2002)

Contoh 3.1.10

Diberikan seminearring $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$. Maka $I = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ adalah ideal dari $\mathbb{Z}_2$.

Bukti:

1. Akan dibuktikan $\mathbb{Z}_2$ adalah seminearring.
   $\mathbb{Z}_2$ adalah seminearring telah dibuktikan di Contoh 3.1.6.
2. Akan dibuktikan I adalah ideal dari $\mathbb{Z}_2$.
   (i) Operasi penjumlahan pada I diberikan pada Tabel 3.5 berikut.

   Tabel 3.5 Operasi Penjumlahan pada ***I***

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$

   Berdasarkan Tabel 3.5, untuk setiap $a, b \in I$ berlaku $a + b \in I$.

(ii) Akan dibuktikan $as \in I$ dan $sa \in I$. Operasi pergandaan as dan sa diberikan pada Tabel 3.6 dan Tabel 3.7 berikut:

Tabel 3.6 Operasi Pergandaan pada as

a	s	as
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$

Tabel 3.7 Operasi Pergandaan pada sa

s	a	sa
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$

Berdasarkan Tabel 3.6 dan Tabel 3.7, untuk setiap $a \in I$ dan $s \in \mathbb{Z}_2$ berlaku $as \in I$ dan $sa \in I$.

Berdasarkan (1) dan (2) maka I adalah ideal dari $\mathbb{Z}_2$.

■

Contoh 3.1.11

Diberikan seminearring $\mathbb{N}$. Maka $I = \{2, 4, 6, \ldots\}$ adalah ideal dari $\mathbb{N}$.

Bukti:

1. Akan dibuktikan $\mathbb{N}$ adalah seminearring.
   (i) $(\mathbb{N}, +)$ adalah semigrup.
   $(\mathbb{N}, +)$ adalah semigrup sudah dibuktikan pada contoh 2.2.2
   (ii) $(\mathbb{N}, \bullet)$ adalah semigrup.
   a. Ambil sebarang $a, b \in \mathbb{N}$, maka $a \bullet b \in \mathbb{N}$.
   Jadi pada $(\mathbb{N}, \bullet)$ berlaku sifat tertutup.
   b. Ambil sebarang $a, b, c \in \mathbb{N}$, maka
   $$a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c.$$
   Jadi pada $(\mathbb{N}, \bullet)$ berlaku sifat assosiatif.
   (iii) $(\mathbb{N}, +, \bullet)$ memenuhi hukum distributif kanan yaitu untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{N}$ berlaku $(a + b) \bullet c = a \bullet c + b \bullet c$.

Dari (i), (ii) dan (iii) terbukti bahwa $\mathbb{N}$ merupakan *seminearring*.

2. Akan dibuktikan I adalah ideal dari $\mathbb{N}$.

(i) Operasi penjumlahan pada I diberikan pada Tabel 3.8 berikut.

Tabel 3.8 Operasi Penjumlahan pada I

$+$	2	4	6
2	4	6	8
4	6	8	10
6	8	10	12

Berdasarkan Tabel 3.8, untuk setiap $a, b \in I$ berlaku $a + b \in I$.

(ii) Akan dibuktikan $as \in I$ dan $sa \in I$. Operasi pergandaan as dan sa diberikan pada Tabel 3.9 dan Tabel 3.10 berikut:

Tabel 3.9 Operasi Pergandaan pada as

a	s	as
2	1	2
2	2	4
2	3	6
4	1	4
4	2	8
4	3	12
6	1	6
6	2	12
6	3	18

Tabel 3.10 Operasi Pergandaan pada sa

s	a	sa
1	2	2
2	2	4
3	2	6
1	4	4
2	4	8
3	4	12
1	6	6
2	6	12
3	6	18

Berdasarkan Tabel 3.9 dan Tabel 3.10, untuk setiap $a \in I$ dan $s \in \mathbb{N}$ berlaku $as \in I$ dan $sa \in I$.

Berdasarkan (1) dan (2) maka I adalah ideal dari $\mathbb{N}$.

■

Definisi 3.1.12

Ideal P dalam seminearring S disebut ideal prima jika A dan B adalah ideal dalam S sedemikian sehingga $AB \subseteq P$ maka $A \subseteq P$ atau $B \subseteq P$.

(Bhattacharya, dkk., 1986)

Contoh 3.1.13

Misalkan $\mathbb{N}$ adalah seminearring. A, B dan P adalah ideal dari $\mathbb{N}$ dengan $P = 2\mathbb{N}$, $A = 4\mathbb{N}$ dan $B = 6\mathbb{N}$. Maka P merupakan ideal prima dari $\mathbb{N}$.

Bukti:

Diketahui A, B dan P adalah ideal dari $\mathbb{N}$ dengan
$P = 2\mathbb{N} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, \dots\}$,
$A = 4\mathbb{N} = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, \dots\}$ dan
$B = 6\mathbb{N} = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, \dots\}$.
Sehingga jelas ideal P merupakan ideal *prime* karena jika $AB \subseteq P$ maka $A \subseteq P$ atau $B \subseteq P$.

■

3.2 Seminearring Bipoten Kiri

Definisi 3.2.1

Suatu seminearring S disebut normal kiri jika $a \in Sa$ untuk setiap $a \in S$.

(Perumal dan Balakrishnan, 2012)

Contoh 3.2.2

Diberikan seminearring $S = \{0, \text{a}, \text{b}, \text{c}, \text{d}\}$ dengan operasi penjumlahan dan pergandaan yang didefinisikan pada Tabel 3.11 dan Tabel 3.12 sebagai berikut.

Tabel 3.11 Operasi Penjumlahan pada *S*

+	0	a	b	c	d
0	0	a	b	c	d
a	a	a	b	d	d
b	b	b	b	d	d
c	c	d	d	c	d
d	d	d	d	d	d

Tabel 3.12 Operasi Pergandaan pada *S*

•	0	a	b	c	d
0	0	0	0	0	0
a	0	a	a	a	a
b	0	a	b	b	b
c	0	a	b	c	d
d	0	a	d	d	d

Maka S adalah seminearring normal kiri.

Bukti:

1. Akan ditunjukkan bahwa $S = \{0, \text{a}, \text{b}, \text{c}, \text{d}\}$ adalah seminearring. $S = \{0, \text{a}, \text{b}, \text{c}, \text{d}\}$ adalah suatu seminearring sudah dibuktikan pada Contoh 3.1.4.
2. Akan ditunjukkan bahwa S adalah seminearring normal kiri. Ambil sebarang $a \in S$. Akan dibuktikan bahwa $a \in Sa$.

   (i) Jika $a = 0$ maka

$$0 \bullet 0 = 0,$$
$$\text{a} \bullet 0 = 0,$$
$$\text{b} \bullet 0 = 0,$$
$$\text{c} \bullet 0 = 0,$$
$$\text{d} \bullet 0 = 0.$$

   (ii) Jika $a = \text{a}$ maka

$$0 \bullet \text{a} = 0,$$
$$\text{a} \bullet \text{a} = \text{a},$$

$$b \bullet a = a,$$
$$c \bullet a = a,$$
$$d \bullet a = a.$$

(iii) Jika $a =$ b maka

$$0 \bullet b = 0,$$
$$a \bullet b = a,$$
$$b \bullet b = b,$$
$$c \bullet b = b,$$
$$d \bullet b = d.$$

(iv) Jika $a =$ c maka

$$0 \bullet c = 0,$$
$$a \bullet c = a,$$
$$b \bullet c = b,$$
$$c \bullet c = c,$$
$$d \bullet c = d.$$

(v) Jika $a =$ d maka

$$0 \bullet d = 0,$$
$$a \bullet d = a,$$
$$b \bullet d = b,$$

$$c \bullet d = d$$
$$d \bullet d = d.$$

Berdasarkan (1) dan (2) maka terbukti bahwa himpunan $S = \{0, \mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d}\}$ adalah suatu seminearring normal kiri.

■

Definisi 3.2.3

Suatu seminearring S disebut bipoten kiri jika $Sa = Sa^2$ untuk setiap $a \in S$.

(Perumal dan Balakhrisnan, 2012)

Contoh 3.2.4

Diberikan seminearring $S = \{0, \mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d}\}$ dengan operasi penjumlahan dan pergandaan yang didefinisikan pada Tabel 3.13 dan Tabel 3.14 sebagai berikut.

Tabel 3.13 Operasi Penjumlahan pada *S*

+	0	a	b	c	d
0	0	a	b	c	d
a	a	a	b	d	d
b	b	b	b	d	d
c	c	d	d	c	d
d	d	d	d	d	D

Tabel 3.14 Operasi Pergandaan pada *S*

•	0	a	b	c	D
0	0	0	0	0	0
a	0	a	a	a	A
b	0	a	b	b	B
c	0	a	b	c	D
d	0	a	d	d	D

Maka S adalah seminearring bipoten kiri.

Bukti:

1. Akan ditunjukkan bahwa $S = \{0, \mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d}\}$ adalah seminearring. $S = \{0, \mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d}\}$ adalah suatu seminearring sudah dibuktikan pada Contoh 3.1.4.
2. Akan ditunjukkan bahwa seminearring S adalah bipoten kiri. Ambil sebarang $a \in S$. Akan dibuktikan bahwa $Sa = Sa^2$.

   (i) Jika $a = 0$ maka

$$0 \bullet 0 = 0 \bullet 0^2 = 0,$$

$$\mathrm{a} \bullet 0 = \mathrm{a} \bullet 0^2 = 0,$$
$$\mathrm{b} \bullet 0 = \mathrm{b} \bullet 0^2 = 0,$$
$$\mathrm{c} \bullet 0 = \mathrm{c} \bullet 0^2 = 0,$$
$$\mathrm{d} \bullet 0 = \mathrm{d} \bullet 0^2 = 0.$$

   (ii) Jika $a = \mathrm{a}$ maka

$$0 \bullet \mathrm{a} = 0 \bullet \mathrm{a}^2 = 0,$$
$$\mathrm{a} \bullet \mathrm{a} = \mathrm{a} \bullet \mathrm{a}^2 = \mathrm{a},$$

$$\mathrm{b} \bullet \mathrm{a} = \mathrm{b} \bullet \mathrm{a}^2 = \mathrm{a},$$
$$\mathrm{c} \bullet \mathrm{a} = \mathrm{c} \bullet \mathrm{a}^2 = \mathrm{a},$$
$$\mathrm{d} \bullet \mathrm{a} = \mathrm{d} \bullet \mathrm{a}^2 = \mathrm{a}.$$

(iii) Jika $a = \mathrm{b}$ maka

$$0 \bullet \mathrm{b} = 0 \bullet \mathrm{b}^2 = 0,$$
$$\mathrm{a} \bullet \mathrm{b} = \mathrm{a} \bullet \mathrm{b}^2 = \mathrm{a},$$
$$\mathrm{b} \bullet \mathrm{b} = \mathrm{b} \bullet \mathrm{b}^2 = \mathrm{b},$$
$$\mathrm{c} \bullet \mathrm{b} = \mathrm{c} \bullet \mathrm{b}^2 = \mathrm{b},$$
$$\mathrm{d} \bullet \mathrm{b} = \mathrm{d} \bullet \mathrm{b}^2 = \mathrm{d}.$$

(iv) Jika $a = \mathrm{c}$ maka

$$0 \bullet \mathrm{c} = 0 \bullet \mathrm{c}^2 = 0,$$
$$\mathrm{a} \bullet \mathrm{c} = \mathrm{a} \bullet \mathrm{c}^2 = \mathrm{a},$$
$$\mathrm{b} \bullet \mathrm{c} = \mathrm{b} \bullet \mathrm{c}^2 = \mathrm{b},$$
$$\mathrm{c} \bullet \mathrm{c} = \mathrm{c} \bullet \mathrm{c}^2 = \mathrm{c},$$
$$\mathrm{d} \bullet \mathrm{c} = \mathrm{d} \bullet \mathrm{c}^2 = \mathrm{d}.$$

(v) Jika $a = \mathrm{d}$ maka

$$0 \bullet \mathrm{d} = 0 \bullet \mathrm{d}^2 = 0,$$
$$\mathrm{a} \bullet \mathrm{d} = \mathrm{a} \bullet \mathrm{d}^2 = \mathrm{a},$$
$$\mathrm{b} \bullet \mathrm{d} = \mathrm{b} \bullet \mathrm{d}^2 = \mathrm{b},$$
$$\mathrm{c} \bullet \mathrm{d} = \mathrm{c} \bullet \mathrm{d}^2 = \mathrm{d},$$
$$\mathrm{d} \bullet \mathrm{d} = \mathrm{d} \bullet \mathrm{d}^2 = \mathrm{d}.$$

Berdasarkan (1) dan (2) maka terbukti bahwa himpunan $S = \{0, \mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d}\}$ adalah suatu seminearring bipoten kiri.

■

Teorema 3.2.5

Seminearring normal kiri S adalah bipoten kiri jika dan hanya jika $A = \sqrt{A}$ untuk setiap ideal kiri dari S.

Bukti:

(⇒) Misalkan $x \in \sqrt{A}$ maka terdapat bilangan bulat positif k sedemikian sehingga $x^k \in A$. S adalah seminearring normal kiri sehingga $x \in Sx$. Kemudian S adalah bipoten kiri sehingga $x \in Sx = Sx^2$.

Karena S adalah seminearring normal kiri bipoten kiri maka

$$x \in Sx = Sx^2$$
$$x = yx^2, \text{ untuk suatu } y \in S.$$
$$x = yxx$$

$$x = y(yx^2)x$$
$$x = (y^2x^3)$$
$$x = y^2xx^2$$
$$x = y^2(yx^2)x^2$$
$$x = y^3x^4$$

Secara umum, x dapat dinyatakan sebagai

$$x = y^{k-1}x^k \in SA \subseteq A \text{ untuk } x \in A.$$

Sehingga,

$$\sqrt{A} \subseteq A.$$

Akan dibuktikan jika $x \in A$ maka $x \in \sqrt{A}$. Menurut Definisi 3.1.7, $\sqrt{A} = \{x \in S | x^k \in A\}$ dengan k suatu bilangan bulat positif. Jelas $x \in A$ maka $x \in \sqrt{A}$. Sehingga $A \subseteq \sqrt{A}$

Karena $A \subseteq \sqrt{A}$ dan $\sqrt{A} \subseteq A$ maka $A \subseteq \sqrt{A}$.

($\Leftarrow$) Misal Sa^2 adalah ideal kiri S. Jika $a \in S$, $a^3 = aa^2 \in Sa^2$ maka $a \in \sqrt{Sa^2} = Sa^2$.

Sehingga untuk sebarang $x \in S$ dan untuk suatu $y \in S$

$$xa = x(ya^2) \in Sa^2,$$
$$Sa \subseteq Sa^2.$$

Misal Sa adalah ideal kiri S. Jika $a \in S$, $a^2 = aa \in Sa$ maka $a \in Sa = \sqrt{Sa}$.

Sehingga untuk sebarang $x \in S$ dan untuk suatu $y \in S$

$$a \in Sa = \sqrt{Sa}$$
$$xa^2 = x(ya^2)^2 \in Sa,$$
$$xa^2 \in Sa$$
$$Sa^2 \subseteq Sa.$$

S adalah bipoten kiri.

■

Contoh 3.2.6

Diberikan seminearring normal kiri $S = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}\}$ dengan operasi penjumlahan dan pergandaan yang didefinisikan pada Tabel 3.15 dan Tabel 3.16 sebagai berikut serta $A = \{\overline{0}, \overline{2}\}$. Maka S bipoten kiri.

Tabel 3.15 Operasi Penjumlahan pada *S*

$+$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{8}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{8}$
$\overline{6}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$	$\overline{8}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$
$\overline{8}$	$\overline{8}$	$\overline{8}$	$\overline{8}$	$\overline{8}$	$\overline{8}$

Tabel 3.16 Operasi Pergandaan pada *S*

$\bullet$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{4}$
$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$
$\overline{8}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{8}$	$\overline{8}$	$\overline{8}$

Bukti:

1. Akan ditunjukkan $S = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}\}$ adalah seminearring normal kiri.

   Ambil sebarang $a \in S$. Akan dibuktikan $a \in Sa$.

   (i) Jika $a = \overline{0}$ maka

$$\overline{0} \bullet \overline{0} = \overline{0},$$
$$\overline{2} \bullet \overline{0} = \overline{0},$$
$$\overline{4} \bullet \overline{0} = \overline{0},$$
$$\overline{6} \bullet \overline{0} = \overline{0},$$
$$\overline{8} \bullet \overline{0} = \overline{0}.$$

   (ii) Jika $a = \overline{2}$ maka

$$\overline{0} \bullet \overline{2} = \overline{0},$$
$$\overline{2} \bullet \overline{2} = \overline{2},$$
$$\overline{4} \bullet \overline{2} = \overline{2},$$
$$\overline{6} \bullet \overline{2} = \overline{2},$$

$$\bar{8} \bullet \bar{2} = \bar{2}.$$

(iii) Jika $a = \bar{4}$ maka

$$\bar{0} \bullet \bar{4} = \bar{0},$$
$$\bar{2} \bullet \bar{4} = \bar{2},$$
$$\bar{4} \bullet \bar{4} = \bar{4},$$
$$\bar{6} \bullet \bar{4} = \bar{4},$$
$$\bar{8} \bullet \bar{4} = \bar{8}.$$

(iv) Jika $a = \bar{6}$ maka

$$\bar{0} \bullet \bar{6} = \bar{0},$$
$$\bar{2} \bullet \bar{6} = \bar{2},$$
$$\bar{4} \bullet \bar{6} = \bar{4},$$
$$\bar{6} \bullet \bar{6} = \bar{6},$$
$$\bar{8} \bullet \bar{6} = \bar{8}.$$

(v) Jika $a = \bar{8}$ maka

$$\bar{0} \bullet \bar{8} = \bar{0},$$
$$\bar{2} \bullet \bar{8} = \bar{2},$$
$$\bar{4} \bullet \bar{8} = \bar{4},$$
$$\bar{6} \bullet \bar{8} = \bar{8},$$
$$\bar{8} \bullet \bar{8} = \bar{8}.$$

2. Akan ditunjukkan $A = \sqrt{A}$.

$$\bar{0}^1 = \bar{0},$$
$$\bar{2}^1 = \bar{2}.$$

Sehingga $\sqrt{A} = \{\bar{0}, \bar{2}\}$.

Berdasarkan (1) dan (2) maka terbukti bahwa S adalah bipoten kiri.

■

Teorema 3.2.7

Bayangan homomorfisme dari seminearring normal kiri bipoten kiri adalah seminearring normal kiri bipoten kiri.

Bukti:

Misalkan S adalah seminearring normal kiri bipoten kiri dan S' adalah bayangan homomorfisme dari S. σ merupakan pemetaan homomorfisme dari S ke S' yang surjektif. Ambil sebarang $a', b', c', y' \in S'$. Karena σ surjektif, maka terdapatlah $a, b, c, y \in S$ sehingga $a' = \sigma(a)$, $b' = \sigma(b)$, $c' = \sigma(c)$, $y' = \sigma(y)$, dan $S' = \sigma(S)$.

1. Akan ditunjukkan S' seminearring.

(i) $(S', +)$ semigrup (tidak harus komutatif)

a. Tertutup.

Ambil sebarang $a', b' \in S'$ sehingga

$$\begin{aligned} a' + b' &= \sigma(a) + \sigma(b) \\ &= \sigma(a+b) \in \sigma(S) \\ &= \sigma(a+b) \in S' \\ &= a' + b' \in S' \end{aligned}$$

b. Assosiatif

Ambil sebarang $a', b', c' \in S'$ sehingga

$$\begin{aligned} (a' + b') + c' &= \big(\sigma(a) + \sigma(b)\big) + \sigma(c) \\ &= \big(\sigma(a+b)\big) + \sigma(c) \\ &= \sigma\big((a+b) + c\big) \\ &= \sigma\big(a + (b+c)\big) \\ &= \sigma(a) + \sigma(b+c) \\ &= \sigma(a) + \big(\sigma(b) + \sigma(c)\big) \\ &= a' + (b' + c'). \end{aligned}$$

(ii) $(S', \bullet)$ semigrup

a. Tertutup

Ambil sebarang $a', b' \in S'$ sehingga

$$\begin{aligned} a' \bullet b' &= \sigma(a) \bullet \sigma(b) \\ &= \sigma(a \bullet b) \in \sigma(S) \\ &= \sigma(a \bullet b) \in S' \\ &= a' \bullet b' \in S' \end{aligned}$$

b. Assosiatif

Ambil sebarang $a', b', c' \in S'$ sehingga

$$\begin{aligned} (a' \bullet b') \bullet c' &= \big(\sigma(a) \bullet \sigma(b)\big) \bullet \sigma(c) \\ &= \big(\sigma(a \bullet b)\big) \bullet \sigma(c) \\ &= \sigma\big((a \bullet b) \bullet c\big) \\ &= \sigma\big(a \bullet (b \bullet c)\big) \\ &= \sigma(a) \bullet \sigma(b \bullet c) \\ &= \sigma(a) \bullet \big(\sigma(b) \bullet \sigma(c)\big) \\ &= a' \bullet (b' \bullet c'). \end{aligned}$$

(iii) $(S', \bullet, +)$ memenuhi hukum distributif kanan

Ambil sebarang $a', b', c' \in S'$ sehingga

$$\begin{aligned} (a' + b') \bullet c' &= \big(\sigma(a) + \sigma(b)\big) \bullet \sigma(c) \\ &= \big(\sigma(a) \bullet \sigma(c)\big) + \big(\sigma(b) \bullet \sigma(c)\big) \\ &= \sigma(a) \bullet \sigma(c) + \sigma(b) \bullet \sigma(c) \end{aligned}$$

$$= \sigma(a \bullet c) + \sigma(b \bullet c)$$
$$= a' \bullet c' + b' \bullet c'$$

2. Akan ditunjukkan S' seminearring normal kiri.
   Seminearring S normal kiri jika $a \in Sa$ untuk setiap $a \in S$. Ambil $a \in S$ maka $a \in Sa$. Ambil $a \in S$ maka $a = ya$ untuk suatu $y \in S$ sehingga
$$a = ya$$
$$\sigma(a) = \sigma(ya)$$
$$\sigma(a) = \sigma(y)\sigma(a)$$
$$a' = y'a'$$
$$a' \in S'a'$$
3. Akan ditunjukkan S' bipoten kiri.
   Seminearring S bipoten kiri jika $Sa = Sa^2$ untuk setiap $a \in S$. Ambil $a \in S$ maka $Sa = Sa^2$. Ambil $a \in S$ maka $ya = ya^2$ untuk suatu $y \in S$ sehingga
$$ya = ya^2$$
$$\sigma(ya) = \sigma(ya^2)$$
$$\sigma(y)\sigma(a) = \sigma(y)\sigma(a^2)$$
$$y'a' = y'a^{2'}$$
$$S'a' = S'a^{2'}$$

Berdasarkan (1), (2), dan (3) maka terbukti S' adalah seminearring normal kiri bipoten kiri.

■

Contoh 3.2.8

Diberikan seminearring normal kiri bipoten kiri $S = 2\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ dan $S' = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}\}$ dengan operasi penjumlahan dan pergandaan terhadap modulo 10 yang didefinisikan pada Contoh 3.2.6. S' adalah bayangan homomorfisme dari S. Maka S' adalah seminearring normal kiri bipoten kiri.

Bukti:

σ merupakan pemetaan homomorfisme dari S ke S' yang surjektif yang didefinisikan dengan $\sigma(a) = \bar{a}$. Ambil sebarang $a', b', c', y' \in S'$. Karena σ surjektif maka terdapatlah $a, b, c, y \in S$ sehingga $\bar{0} = \sigma(0)$, $\bar{2} = \sigma(2)$, $\bar{4} = \sigma(4)$, $\bar{6} = \sigma(6)$, $\bar{8} = \sigma(8)$, dan $S' = \sigma(S)$.

1. Akan ditunjukkan $S' = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}\}$ adalah seminearring.

(i) $(S', +)$ semigrup (tidak harus komutatif)

a. Tertutup

Ambil $a', b' \in S'$. Berdasarkan Tabel 3.15 misal diambil $a' = \bar{0}$ dan $b' = \bar{2}$ maka

$$\begin{aligned} \bar{0} + \bar{2} &= \sigma(0) + \sigma(2) \\ &= \sigma(0+2) \in S' \\ &= \bar{0} + \bar{2} \in S' \end{aligned}$$

b. Assosiatif

Ambil $a', b', c' \in S'$. Berdasarkan Tabel 3.15 misal diambil $a' = \bar{0},\ b' = \bar{2}$, dan $c' = \bar{4}$ maka

$$\begin{aligned} (\bar{0} + \bar{2}) + \bar{4} &= \big(\sigma(0) + \sigma(2)\big) + \sigma(4) \\ &= \sigma\big((0+2)+4\big) \\ &= \sigma\big(0+(2+4)\big) \\ &= \sigma(0) + \big(\sigma(2) + \sigma(4)\big) \\ &= \bar{0} + (\bar{2} + \bar{4}). \end{aligned}$$

(ii) $(S', \bullet)$ semigrup

a. Tertutup

Ambil $a', b' \in S'$. Berdasarkan Tabel 3.16 misal diambil $a' = \bar{0}$ dan $b' = \bar{2}$ maka

$$\begin{aligned} \bar{0} \bullet \bar{2} &= \sigma(0) \bullet \sigma(2) \\ &= \sigma(0 \bullet 2) \in S' \\ &= \bar{0} \bullet \bar{2} \in S' \end{aligned}$$

b. Assosiatif

Ambil $a', b', c' \in S'$. Berdasarkan Tabel 3.16 misal diambil $a' = \bar{0},\ b' = \bar{2}$, dan $c' = \bar{4}$ maka

$$\begin{aligned} (\bar{0} \bullet \bar{2}) \bullet \bar{4} &= \big(\sigma(0) \bullet \sigma(2)\big) \bullet \sigma(4) \\ &= \sigma\big((0 \bullet 2) \bullet 4\big) \\ &= \sigma\big(0 \bullet (2 \bullet 4)\big) \\ &= \sigma(0) \bullet \big(\sigma(2) \bullet \sigma(4)\big) \\ &= \bar{0} \bullet (\bar{2} \bullet \bar{4}). \end{aligned}$$

(iii) $(S', \bullet, +)$ memenuhi hukum distributif kanan.

Ambil sebarang $a', b', c' \in S'$. Berdasarkan Tabel 3.15 dan Tabel 3.16 misal diambil $a' = \bar{0},\ b' = \bar{2}$, dan $c' = \bar{4}$ maka

$$\begin{aligned} (\bar{0} + \bar{2}) \bullet \bar{4} &= \big(\sigma(0) + \sigma(2)\big) \bullet \sigma(4) \\ &= \big(\sigma(0) \bullet \sigma(4)\big) + \big(\sigma(2) \bullet \sigma(4)\big) \\ &= \sigma(0 \bullet 4) + \sigma(2 \bullet 4) \\ &= \bar{0} \bullet \bar{4} + \bar{2} \bullet \bar{4} \end{aligned}$$

2. Akan ditunjukkan $S' = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}\}$ adalah seminearring normal kiri bipoten kiri. $S' = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}\}$ adalah seminearring normal kiri bipoten kiri telah dibuktikan di Contoh 3.2.6.

Berdasarkan (1) dan (2) maka $S' = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}\}$ adalah seminearring normal kiri bipoten kiri.

■

Proposisi 3.2.9

Jika S adalah seminearring normal kiri bipoten kiri maka elemen nilpoten S adalah nol.

Bukti:

Didefinisikan S adalah seminearring normal kiri bipoten kiri. Misal $x \in S - \{0\}$ dan P adalah himpunan elemen nilpotent dari S. Karena S adalah seminearring normal kiri bipoten kiri maka $x \in Sx = Sx^2$. Sehingga $x = sx^2$, untuk suatu $s \in S$. Jadi , menurut Teorema 3.1.5 jika $x^2 = 0$ maka $x = 0$. Sehingga $P = \{0\}$. Jadi elemen nilpotent S adalah nol.

■

Contoh 3.2.10

Diberikan seminearring normal kiri bipoten kiri $S = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}\}$ dengan operasi yang sama seperti Contoh 3.2.6. Maka elemen nilpoten S adalah nol.

Bukti:

1. Akan ditunjukkan S adalah seminearring normal kiri bipoten kiri. Telah dibuktikan di Contoh 3.2.6.
2. Akan ditunjukkan elemen nilpoten S adalah nol. Ambil $x = \bar{0}, x \in S$ sehingga $\bar{0}^1 = \bar{0}$.

Berdasarkan (1) dan (2) maka terbukti elemen nilpoten S adalah nol.

■

Definisi 3.2.11

Jika T adalah sebarang himpunan bagian tak kosong dari seminearring S maka annihilator kiri dari T dalam S adalah

$$l(T) = \{x \in S | xt = 0 \text{ untuk setiap } t \in T\}$$

(Weinert, 1977).

Contoh 3.2.12

Diberikan seminearring $\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ dan $T = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{3}\}$. Maka $l(T) = \{\bar{0}\}$ adalah annihilator kiri dari $\mathbb{Z}_4$. Jadi $l(T)$ ideal kiri.

Bukti:

1. Akan ditunjukkan $(\mathbb{Z}_4, +, \bullet)$ merupakan seminearring.

   (i) $(\mathbb{Z}_4, +)$ semigrup.

   Himpunan bilangan bulat modulo 4 terhadap operasi penjumlahan didefinisikan pada Tabel 3.17 berikut:

   Tabel 3.17 Operasi Penjumlahan pada $\mathbb{Z}_4$

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$

   Berdasarkan Tabel 3.17 di atas maka untuk sebarang $a, b, c \in \mathbb{Z}_4$ berlaku tertutup $(a + b \in \mathbb{Z}_4)$ dan assosiatif $(a + b) + c = a + (b + c)$.

   (ii) $(\mathbb{Z}_4, \bullet)$ semigrup.

   Himpunan bilangan bulat modulo 4 terhadap operasi pergandaan didefinisikan pada Tabel 3.18 berikut:

   Tabel 3.18 Operasi Pergandaan pada $\mathbb{Z}_4$

$\bullet$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

   Berdasarkan Tabel 3.18 di atas maka untuk sebarang $a, b, c \in \mathbb{Z}_3$ berlaku tertutup $(a \bullet b \in \mathbb{Z}_4)$ dan assosiatif $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$.

(iii) Berlaku sifat distributif kanan pada $\mathbb{Z}_4$ yaitu untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}_4$ diperoleh

$$(a + b) \bullet c = (a \bullet c) + (b \bullet c).$$

2. Akan ditunjukkan $l(T) = \{\overline{0}\}$ untuk setiap $T \subseteq \mathbb{Z}_4$.
   $\mathbb{Z}_4 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$ dan $T = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{3}\}$.
   (i) Jika $x = \overline{0}$ maka
   $$\overline{0} \bullet \overline{0} = \overline{0},$$
   $$\overline{0} \bullet \overline{2} = \overline{0},$$
   $$\overline{0} \bullet \overline{3} = \overline{0}.$$
   (ii) Jika $x = \overline{1}$ maka
   $$\overline{1} \bullet \overline{0} = \overline{0},$$
   $$\overline{1} \bullet \overline{2} = \overline{2},$$
   $$\overline{1} \bullet \overline{3} = \overline{3}.$$
   (iii) Jika $x = \overline{2}$ maka
   $$\overline{2} \bullet \overline{0} = \overline{0},$$
   $$\overline{2} \bullet \overline{2} = \overline{0},$$
   $$\overline{2} \bullet \overline{3} = \overline{2}.$$
   (iv) Jika $x = \overline{3}$ maka
   $$\overline{3} \bullet \overline{0} = \overline{0},$$
   $$\overline{3} \bullet \overline{2} = \overline{2},$$
   $$\overline{3} \bullet \overline{3} = \overline{1}.$$
   Sehingga $l(T) = \{\overline{0}\}$.
3. Akan ditunjukkan $l(T) = \{\overline{0}\}$ adalah ideal kiri.
   (i) Ambil sebarang $a, b \in l(T)$ sehingga $a + b \in l(T)$.
   (ii) Akan dibuktikan $sa \in l(T)$. Operasi pergandaan sa diberikan pada Tabel 3.19 berikut:

   Tabel 3.19 Operasi Pergandaan pada sa

s	a	sa
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$

   Berdasarkan Tabel 3.19, untuk setiap $a \in l(T)$ dan $s \in \mathbb{Z}_4$ berlaku $sa \in l(T)$.

Berdasarkan (1), (2), dan (3) maka $l(T) = \{\overline{0}\}$ adalah annihilator kiri dari $\mathbb{Z}_4$.

$\blacksquare$

Proposisi 3.2.13

Jika elemen nilpoten dari S adalah nol maka $l(T)$ merupakan ideal untuk setiap himpunan bagian tak kosong T dari S.

Bukti:

Akan dibuktikan bahwa $l(T)S \subseteq l(T)$. Misalkan $x \in l(T)$ dan $t \in T$ maka $xt = 0$ sehingga $(tx)^2 = t(xt)x = 0$. Berdasarkan asumsi, didapatkan $tx = 0$. Untuk sebarang $s \in S$,

$$\left((xs)t\right)^2 = xs(tx)st = 0.$$

Dan didapatkan $(xs)t = 0$. Maka $xs \in l(T)$. Jadi $l(T)S \subseteq l(T)$.

■

Contoh 3.2.14

Diberikan seminearring $\mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$ yang elemen nilpotennya nol dan $T = \{\bar{0}, \bar{2}\}$. Maka $l(T)$ merupakan ideal untuk setiap $T \subseteq \mathbb{Z}_3$.

Bukti:

1. Akan ditunjukkan $(\mathbb{Z}_3, +, \bullet)$ merupakan seminearring dan elemen nilpotennya adalah nol.
   (i) $(\mathbb{Z}_3, +, \bullet)$ merupakan seminearring.
      a. $(\mathbb{Z}_3, +)$ semigrup.
      Himpunan bilangan bulat modulo 3 terhadap operasi penjumlahan didefinisikan pada Tabel 3.20 berikut:

      Tabel 3.20 Operasi Penjumlahan pada $\mathbb{Z}_3$

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

      Berdasarkan Tabel 3.20 di atas maka untuk sebarang $a, b, c \in \mathbb{Z}_3$ berlaku tertutup $(a + b \in \mathbb{Z}_3)$ dan assosiatif $(a + b) + c = a + (b + c)$. Ambil $a = \bar{1}$, $b = \bar{2}$, dan $c = \bar{0}$ maka $a + b = \bar{1} + \bar{2} = \bar{0}$ (tertutup) dan berlaku (assosiatif)

$$(a + b) + c = a + (b + c),$$

$$(\bar{1}+\bar{2})+\bar{0}=\bar{1}+(\bar{2}+\bar{0}),$$
$$\bar{0}+\bar{0}=\bar{1}+\bar{2},$$
$$\bar{0}=\bar{0}.$$

b. $(\mathbb{Z}_3, \bullet)$ semigrup.
Himpunan bilangan bulat modulo 3 terhadap operasi pergandaan didefinisikan pada Tabel 3.21 berikut:

Tabel 3.21 Operasi Pergandaan pada $\mathbb{Z}_3$

$\bullet$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Berdasarkan Tabel 3.21 di atas maka untuk sebarang $a, b, c \in \mathbb{Z}_3$ berlaku tertutup ($a \bullet b \in \mathbb{Z}_3$) dan assosiatif $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$.

c. Berlaku sifat distributif kanan pada $\mathbb{Z}_3$ yaitu untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}_3$ diperoleh
$$(a+b)\bullet c = (a\bullet c)+(b\bullet c).$$
Ambil $a=\bar{1}$, $b=\bar{2}$, dan $c=\bar{0}$ maka
$$(a+b)\bullet c = (a\bullet c)+(b\bullet c),$$
$$(\bar{1}+\bar{2})\bullet \bar{0} = (\bar{1}\bullet \bar{0})+(\bar{2}\bullet \bar{0}),$$
$$\bar{0}=\bar{0}.$$

(ii) Akan ditunjukkan elemen nilpoten $\mathbb{Z}_3$ adalah $\bar{0}$.
Ambil $=\bar{0}$, $x \in \mathbb{Z}_3$ sehingga $\bar{0}^1=\bar{0}$.

2. (i) Akan ditunjukkan $l(T)=\{\bar{0}\}$ untuk setiap $T \subseteq \mathbb{Z}_3$.
$\mathbb{Z}_3=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2}\}$ dan $T=\{\bar{0},\bar{2}\}$.

a. Jika $x=\bar{0}$ maka
$$\bar{0}\bullet\bar{0}=\bar{0},$$
$$\bar{0}\bullet\bar{2}=\bar{0}.$$

b. Jika $x=\bar{1}$ maka
$$\bar{1}\bullet\bar{0}=\bar{0},$$
$$\bar{1}\bullet\bar{2}=\bar{2}.$$

c. Jika $x=\bar{2}$ maka
$$\bar{2}\bullet\bar{0}=\bar{0},$$
$$\bar{2}\bullet\bar{2}=\bar{1}.$$

Sehingga $l(T)=\{\bar{0}\}$.

(iii) Akan ditunjukkan $l(T) = \{\bar{0}\}$ adalah ideal.

a. Ambil sebarang $a, b \in l(T)$ sehingga $a + b \in l(T)$.

b. Akan dibuktikan $sa \in l(T)$ dan $as \in l(T)$. Operasi Pergandaan sa dan as diberikan pada Tabel 3.22 dan Tabel 3.23 berikut:

Tabel 3.22 Operasi Pergandaan pada sa

s	a	sa
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$

Tabel 3.23 Operasi Pergandaan pada as

a	s	as
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$

Berdasarkan Tabel 3.22 dan Tabel 3.23, untuk setiap $a \in l(T)$ dan $s \in \mathbb{Z}_3$ berlaku $sa \in l(T)$ dan $as \in l(T)$.

Berdasarkan (1) dan (2) maka terbukti bahwa $l(T) = \{\bar{0}\}$ pada $\mathbb{Z}_3$ adalah ideal.

■

Proposisi 3.2.15

Annihilator kiri pada seminearring normal kiri bipoten kiri merupakan ideal.

Bukti:

Asumsi berdasarkan Proposisi 3.2.9, yaitu seminearring normal kiri bipoten kiri S memuat elemen nilpotent nol.
Maka berdasarkan Proposisi 3.2.13, jika S memuat elemen nilpotent nol, annihilator kiri pada S merupakan ideal.

■

Contoh 3.2.16

Diberikan seminearring normal kiri bipoten kiri $S = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}\}$ dengan operasi yang sama seperti Contoh 3.2.6 dan $T = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\}$. Maka $l(T)$ adalah ideal pada S.

Bukti:

1. Akan dibuktikan $S = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}\}$ adalah seminearring normal kiri bipoten kiri.
   $S = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}\}$ adalah seminearring normal kiri bipoten kiri telah dibuktikan pada Contoh 3.2.6.
2. (i) Akan ditentukan nilai $l(T)$ merupakan elemen di S.
   $S = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}\}$ dan $T = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\}$.
   a. Jika $x = \bar{0}$ maka
   $$\bar{0} \bullet \bar{0} = \bar{0},$$
   $$\bar{0} \bullet \bar{4} = \bar{0},$$
   $$\bar{0} \bullet \bar{8} = \bar{0}.$$
   b. Jika $x = \bar{2}$ maka
   $$\bar{2} \bullet \bar{0} = \bar{0},$$
   $$\bar{2} \bullet \bar{4} = \bar{2},$$
   $$\bar{2} \bullet \bar{8} = \bar{2}.$$
   c. Jika $x = \bar{4}$ maka
   $$\bar{4} \bullet \bar{0} = \bar{0},$$
   $$\bar{4} \bullet \bar{4} = \bar{4},$$
   $$\bar{4} \bullet \bar{8} = \bar{4}.$$
   d. Jika $x = \bar{6}$ maka
   $$\bar{6} \bullet \bar{0} = \bar{0},$$
   $$\bar{6} \bullet \bar{4} = \bar{4},$$
   $$\bar{6} \bullet \bar{8} = \bar{4}.$$
   e. Jika $x = \bar{8}$ maka
   $$\bar{8} \bullet \bar{0} = \bar{0},$$
   $$\bar{8} \bullet \bar{4} = \bar{4},$$
   $$\bar{8} \bullet \bar{8} = \bar{8}.$$
   Sehingga $l(T) = \{\bar{0}\}$.

   (ii) Akan dibuktikan $l(T) = \{\bar{0}\}$ pada S adalah ideal.
   a. Ambil sebarang $a, b \in l(T)$ sehingga $a + b \in l(T)$.
   b. Akan dibuktikan $sa \in l(T)$ dan $as \in l(T)$. Operasi Pergandaan sa dan as diberikan pada Tabel 3.24 dan Tabel 3.25 berikut:

Tabel 3.24 Operasi Pergandaan pada sa

s	a	sa
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$

Tabel 3.25 Operasi Pergandaan pada as

a	s	as
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{8}$	$\bar{0}$

Berdasarkan Tabel 3.24 dan Tabel 3.25, untuk setiap $a \in l(T)$ dan $s \in S$ berlaku $sa \in l(T)$ dan $as \in l(T)$.

Berdasarkan (1) dan (2) maka terbukti bahwa $l(T) = \{\bar{0}\}$ pada S adalah ideal.

■

Proposisi 3.2.17

Misalkan S adalah seminearring normal kiri bipoten kiri. Maka berikut ini benar:

(i) $x^3 = x^2$ sehingga $x^2 = x$ untuk setiap x dalam S.

(ii) $l(a) = l(a^2)$ untuk setiap a dalam S.

Bukti:

(i) Diasumsikan S adalah seminearring normal kiri bipoten kiri sehingga $x \in Sx = Sx^2$.
Akan ditunjukkan jika $x^3 = x^2$ maka $x^2 = x$ untuk $x \in S$.
Karena $x \in Sx = Sx^2$ maka

$$x = yx^2 \text{ untuk suatu } y \in S$$

sehingga

$$\begin{aligned} xx &= yx^2x, \\ x^2 &= yx^3, \\ x^2 &= yx^2, \end{aligned}$$

$$x^2 = x.$$

(ii) Diasumsikan $a \in S$ sehingga $l(a) \subseteq l(a^2)$

Akan ditunjukkan $ya^2 = 0$ untuk suatu $y \in S$.

$$\begin{aligned} (aya)^2 &= (aya)(aya), \\ &= ay(aa)ya, \\ &= aya^2ya, \\ &= aya, \\ &= 0. \end{aligned}$$

Sehingga

$$\begin{aligned} (aya)^3 &= (aya)^2(aya), \\ &= 0. \end{aligned}$$

Karena $(aya)^2 = 0$ dan $(aya)^3 = 0$ maka $(aya)^3 = (aya)^2$.

$$\begin{aligned} (ya)^2 &= (ya)(ya), \\ &= y(aya), \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dan

$$\begin{aligned} (ya)^3 &= (ya)^2(ya) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Karena $(ya)^2 = 0$ dan $(ya)^3 = 0$ maka $(ya)^3 = (ya)^2$.

Karena $(ya)^2 = 0$ maka $ya = 0$.

Sehingga $y \in l(a)$ dan $l(a^2) \subseteq l(a)$

Karena $l(a) \subseteq l(a^2)$ dan $l(a^2) \subseteq l(a)$ maka $l(a) = l(a^2)$.

■

Contoh 3.2.18

Diberikan seminearring normal kiri bipoten kiri $S = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}\}$.
Buktikan:

(i) $x^3 = x^2$ sehingga $x^2 = x$ untuk setiap x dalam S.

(ii) $l(a) = l(a^2)$ untuk setiap a dalam S.

Bukti:

1. Akan dibuktikan jika $x^3 = x^2$ maka $x^2 = x, \forall\, x \in S$.

   (i) Untuk $x = \bar{0}$

   $\bar{0}^3 = \bar{0}^2 = \bar{0}$ maka $\bar{0}^2 = \bar{0} = \bar{0}$

   (ii) Untuk $x = \bar{2}$

   $\bar{2}^3 = \bar{2}^2 = \bar{2}$ maka $\bar{2}^2 = \bar{2} = \bar{2}$

   (iii) Untuk $x = \bar{4}$

   $\bar{4}^3 = \bar{4}^2 = \bar{4}$ maka $\bar{4}^2 = \bar{4} = \bar{4}$

(iv) Untuk $x = \overline{6}$

$\overline{6}^3 = \overline{6}^2 = \overline{6}$ maka $\overline{6}^2 = \overline{6} = \overline{6}$

(v) Untuk $x = \overline{8}$

$\overline{8}^3 = \overline{8}^2 = \overline{8}$ maka $\overline{8}^2 = \overline{8} = \overline{8}$

2. Akan dibuktikan $l(a) = l(a^2), \forall\, a \in S$.

(i) Untuk $a = \overline{0}$

$\overline{0} \bullet \overline{0} = \overline{0}$, $\quad \overline{0} \bullet \overline{0}^2 = \overline{0}$,
$\overline{2} \bullet \overline{0} = \overline{0}$, $\quad \overline{2} \bullet \overline{0}^2 = \overline{0}$,
$\overline{4} \bullet \overline{0} = \overline{0}$, $\quad \overline{4} \bullet \overline{0}^2 = \overline{0}$,
$\overline{6} \bullet \overline{0} = \overline{0}$, $\quad \overline{6} \bullet \overline{0}^2 = \overline{0}$,
$\overline{8} \bullet \overline{0} = \overline{0}$. $\quad \overline{8} \bullet \overline{0}^2 = \overline{0}$.

$l(a) = l(a^2) = \{\overline{0}\}$.

(ii) Untuk $a = \overline{2}$

$\overline{0} \bullet \overline{2} = \overline{0}$, $\quad \overline{0} \bullet \overline{2}^2 = \overline{0}$,
$\overline{2} \bullet \overline{2} = \overline{2}$, $\quad \overline{2} \bullet \overline{2}^2 = \overline{2}$,
$\overline{4} \bullet \overline{2} = \overline{2}$, $\quad \overline{4} \bullet \overline{2}^2 = \overline{2}$,
$\overline{6} \bullet \overline{2} = \overline{2}$, $\quad \overline{6} \bullet \overline{2}^2 = \overline{2}$,
$\overline{8} \bullet \overline{2} = \overline{2}$. $\quad \overline{8} \bullet \overline{2}^2 = \overline{2}$.

$l(a) = l(a^2) \neq \{\overline{0}\}$.

(iii) Untuk $a = \overline{4}$

$\overline{0} \bullet \overline{4} = \overline{0}$, $\quad \overline{0} \bullet \overline{4}^2 = \overline{0}$,
$\overline{2} \bullet \overline{4} = \overline{2}$, $\quad \overline{2} \bullet \overline{4}^2 = \overline{2}$,
$\overline{4} \bullet \overline{4} = \overline{2}$, $\quad \overline{4} \bullet \overline{4}^2 = \overline{2}$,
$\overline{6} \bullet \overline{4} = \overline{4}$, $\quad \overline{6} \bullet \overline{4}^2 = \overline{2}$,
$\overline{8} \bullet \overline{4} = \overline{4}$. $\quad \overline{8} \bullet \overline{4}^2 = \overline{4}$.

$l(a) = l(a^2) \neq \{\overline{0}\}$.

(iv) Untuk $a = \overline{6}$

$\overline{0} \bullet \overline{6} = \overline{0}$, $\quad \overline{0} \bullet \overline{6}^2 = \overline{0}$,
$\overline{2} \bullet \overline{6} = \overline{2}$, $\quad \overline{2} \bullet \overline{6}^2 = \overline{2}$,
$\overline{4} \bullet \overline{6} = \overline{4}$, $\quad \overline{4} \bullet \overline{6}^2 = \overline{4}$,
$\overline{6} \bullet \overline{6} = \overline{6}$, $\quad \overline{6} \bullet \overline{6}^2 = \overline{6}$,
$\overline{8} \bullet \overline{6} = \overline{8}$. $\quad \overline{8} \bullet \overline{6}^2 = \overline{8}$.

$l(a) = l(a^2) \neq \{\overline{0}\}$.

(v) Untuk $a = \overline{4}$

$\overline{0} \bullet \overline{8} = \overline{0}$, $\quad \overline{0} \bullet \overline{8}^2 = \overline{0}$,
$\overline{2} \bullet \overline{8} = \overline{2}$, $\quad \overline{2} \bullet \overline{8}^2 = \overline{2}$,
$\overline{4} \bullet \overline{8} = \overline{4}$, $\quad \overline{4} \bullet \overline{8}^2 = \overline{4}$,
$\overline{6} \bullet \overline{8} = \overline{8}$, $\quad \overline{6} \bullet \overline{8}^2 = \overline{8}$,

$\overline{8} \bullet \overline{8} = \overline{8}.$ $\overline{8} \bullet \overline{8}^2 = \overline{8}.$

$l(a) = l(a^2) \neq \{\overline{0}\}.$

Berdasarkan (1) dan (2) maka terbukti bahwa aksioma-aksioma tersebut benar.

■

Definisi 3.2.19

Seminearring S disebut prima jika $\{0\}$ adalah ideal prima dari S.

(Perumal dan Balakrishnan, 2012)

Contoh 3.2.20

Diberikan seminearring $\mathbb{Z}_3 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$. Maka $I = \{\overline{0}\}$ adalah ideal prima dari $\mathbb{Z}_3$.

Bukti:

1. Akan dibuktikan $\mathbb{Z}_3$ adalah seminearring.
   $\mathbb{Z}_3$ adalah seminearring telah dibuktikan pada Contoh 3.2.12.
2. Akan dibuktikan $I = \{\overline{0}\}$ adalah ideal prima.
   $I = \{\overline{0}\}$ adalah ideal prima jika $AB \subset \{\overline{0}\}$dimana A dan B adalah ideal dalam $\mathbb{Z}_3$ maka $A = \{\overline{0}\}$ atau $B = \{\overline{0}\}$.

Berdasarkan (1) dan (2) maka terbukti bahwa $I = \{\overline{0}\}$ adalah ideal prima dari $\mathbb{Z}_3$.

■

Proposisi 3.2.21

Misalkan S adalah seminearring normal kiri bipoten kiri. Jika S merupakan prima maka S tidak memiliki pembagi nol.

Bukti:

Asumsikan S adalah seminearring normal kiri bipoten kiri dan S merupakan prima jika ideal primanya adalah $\{0\}$. Misalkan untuk $a, b \in S$. Maka $ab = 0$ sehingga untuk sebarang $x \in S$

$$\begin{aligned}(bxa)^2 &= (bxa)(bxa),\\ &= bx(ab)xa,\\ &= 0.\end{aligned}$$

Dan berdasarkan Proposisi 3.2.9 $bxa = 0$ sehingga $SbSa = \{0\}$.

Karena S adalah prima dan Sb, Sa merupakan ideal kiri maka $Sb = 0$ atau $Sa = 0$ dengan S adalah normal kiri sehingga $b = 0$ atau $a = 0$.

■

Contoh 3.2.22

Diberikan seminearring normal kiri bipoten kiri $S = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}\}$ dengan operasi yang sama seperti Contoh 3.2.6. Jika S prima maka S tidak memiliki pembagi nol.

Bukti:

1. Akan dibuktikan $S = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}\}$ adalah prima. Ideal dalam S adalah $I = \{\bar{0}\}$ dan $I = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}\}$. $I = \{\bar{0}\}$ adalah ideal prima karena $AB \subset \{\bar{0}\}$ dimana A dan B adalah ideal dalam $\mathbb{Z}_3$ maka $A = \{\bar{0}\}$ atau $B = \{\bar{0}\}$. Karena $I = \{\bar{0}\}$ adalah ideal prima dari S maka $S = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}\}$ adalah prima.
2. Akan dibuktikan $S = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}\}$ tidak memiliki pembagi nol. Ideal dalam S adalah $I = \{\bar{0}\}$ dan $I = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}\}$. Berdasarkan definisi pembagi nol, yaitu jika $a \neq 0$ maka terdapat $b \neq 0$ sedemikian sehingga $a \bullet b = 0$ dan $b \bullet a = 0$.
   Sehingga dengan jelas $S = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}\}$ tidak memiliki pembagi nol .

■

Definisi 3.2.23

Misalkan S adalah seminearring. Maka S adalah *simple* jika memiliki ideal trivial.

(Perumal dan Balakrishnan, 2012)

Contoh 3.2.24

Seminearring $\mathbb{Z}_5 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$ adalah *simple*.

Bukti:

1. Akan dibuktikan $\mathbb{Z}_5$ adalah seminearring.
   (i) $(\mathbb{Z}_5, +)$ semigrup
      a. Tertutup: $a + b \in \mathbb{Z}_2$ untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}_2$. Operasi penjumlahan pada $\mathbb{Z}_2$ diberikan pada Tabel 3.26 berikut.

Tabel 3.26 Operasi Penjumlahan pada $\mathbb{Z}_5$

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$

Ambil sebarang $a, b \in \mathbb{Z}_5$ maka $a + b \in \mathbb{Z}_5$. Jadi $(\mathbb{Z}_2, +)$ berlaku sifat tertutup.

b. Assosiatif: $(a + b) + c = a + (b + c)$ untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}_5$. Berdasarkan Tabel 3.26 ambil sebarang $, b, c \in \mathbb{Z}_5$, maka $(a + b) + c = a + (b + c)$. Jadi $(\mathbb{Z}_5, +)$ berlaku sifat assosiatif.

(ii) $(\mathbb{Z}_5, \bullet)$ semigrup.

a. Tertutup: $a \bullet b \in \mathbb{Z}_5$ untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}_5$. Operasi penjumlahan pada $\mathbb{Z}_5$ diberikan pada Tabel 3.27 berikut.

Tabel 3.27 Operasi Pergandaan pada $\mathbb{Z}_5$

$\bullet$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Ambil sebarang $a, b \in \mathbb{Z}_5$ maka $a \bullet b \in \mathbb{Z}_5$. Jadi $(\mathbb{Z}_5, \bullet)$ berlaku sifat tertutup.

b. Assosiatif: $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$ untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}_5$. Berdasarkan Tabel 3.27 ambil sebarang $, b, c \in \mathbb{Z}_5$, maka $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$. Jadi $(\mathbb{Z}_5, \bullet)$ berlaku sifat assosiatif.

(iii) $(\mathbb{Z}_5, +, \bullet)$ memenuhi hukum distributif kanan.

Untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}_5$ maka $(a + b) \bullet c = a \bullet c + b \bullet c$.

2. Akan dibuktikan ideal di $\mathbb{Z}_5$ adalah ideal *trivial*.

Ideal di $\mathbb{Z}_5 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$ adalah $I_1 = \{\bar{0}\}$ dan $I_2 = \mathbb{Z}_5$.

Berdasarkan (1) dan (2) maka terbukti bahwa $\mathbb{Z}_5$ adalah simple.

■

Definisi 3.2.25

Seminearring S disebut *cancellative* jika memenuhi aksioma berikut:

(i) $a + b = a + c \Rightarrow b = c$,

(ii) $b + a = c + a \Rightarrow b = c$.

untuk setiap $a, b, c \in S$

(Ramachandram, 2011)

Contoh 3.2.26

Diberikan seminearring $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$. Maka $\mathbb{Z}_2$ adalah *cancellative*.

Bukti:

Akan dibuktikan untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}_2$ memenuhi hukum *cancellative* berikut:

(i) Misalkan ambil $a = \bar{0}$, $b = \bar{1}$, dan $c = \bar{1}$ maka

$$\begin{aligned} a + b &= a + c \\ \bar{0} + \bar{1} &= \bar{0} + \bar{1} \\ \bar{1} &= \bar{1} \\ b &= c \end{aligned}$$

(ii) Misalkan ambil $a = \bar{0}$, $b = \bar{1}$, dan $c = \bar{1}$ maka

$$\begin{aligned} b + a &= c + a \\ \bar{1} + \bar{0} &= \bar{1} + \bar{0} \\ \bar{1} &= \bar{1} \\ b &= c \end{aligned}$$

Berdasarkan (i) dan (ii) maka terbukti bahwa $\mathbb{Z}_2$ merupakan *cancellative*.

■

Proposisi 3.2.27

Misalkan S adalah seminearring bipoten kiri. Jika S *cancellative* kanan maka S *simple*.

Bukti:

Asumsikan S adalah seminearring bipoten kiri dan A merupakan ideal kiri tak nol dari S. Didefinisikan S merupakan *cancellative* kanan. Akan dibuktikan S adalah *simple*.
Misalkan a adalah sebarang elemen tak nol dari A maka $Sa = Sa^2$. Jika $z, s \in S$ maka $sa = za^2$. Sehingga $s = za$ (S merupakan *cancellative* kanan). Maka jelas $s \in A$ dan $A = S$ sehingga S adalah *simple*.

■

Contoh 3.2.28

Diberikan seminearring bipoten kiri $\mathbb{Z}_2 = \{\overline{0}, \overline{1}\}$ dan $I = \{\overline{0}, \overline{1}\}$ adalah ideal kiri. Jika $\mathbb{Z}_2$ *cancellative* maka $\mathbb{Z}_2$ *simple.*

Bukti:

1. Akan dibuktikan $\mathbb{Z}_2$ adalah seminearring bipoten kiri.
   (i) $\mathbb{Z}_2$ adalah seminearring telah dibuktikan pada Contoh 3.1.6.
   (ii) $\mathbb{Z}_2 = \{\overline{0}, \overline{1}\}$, untuk setiap $a \in \mathbb{Z}_2$ berlaku:
      a. Jika $a = \overline{0}$ maka
      $$\overline{0} \bullet \overline{0} = \overline{0} \bullet \overline{0}^2 = \overline{0},$$
      $$\overline{1} \bullet \overline{0} = \overline{1} \bullet \overline{0}^2 = \overline{0}.$$
      b. Jika $a = \overline{1}$ maka
      $$\overline{0} \bullet \overline{1} = \overline{0} \bullet \overline{1}^2 = \overline{0},$$
      $$\overline{1} \bullet \overline{1} = \overline{1} \bullet \overline{1}^2 = \overline{1}.$$
2. Akan dibuktikan $I = \{\overline{0}, \overline{1}\}$ adalah ideal kiri dari $\mathbb{Z}_2$.
   (i) Operasi penjumlahan pada I diberikan pada Tabel 3.28 berikut.

   Tabel 3.28 Operasi Penjumlahan pada I

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$

   Berdasarkan Tabel 3.28, untuk setiap $a, b \in I$ berlaku $a + b \in I$.
   (ii) Akan dibuktikan $sa \in I$. Operasi pergandaan sa diberikan pada Tabel 3.29 berikut.

Tabel 3.29 Operasi Pergandaan pada sa

s	a	sa
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$

Berdasarkan Tabel 3.29, untuk setiap $a \in I$ dan $s \in \mathbb{Z}_2$ berlaku $sa \in I$.

3. Misalkan $a = \{\bar{1}\}$ dengan $a \in I$ maka

$$Sa = Sa^2$$
$$\bar{0} \bullet \bar{1} = \bar{0} \bullet \bar{1}^2 = \bar{0}$$
$$\bar{1} \bullet \bar{1} = \bar{1} \bullet \bar{1}^2 = \bar{1}.$$

Misalkan $r = \{\bar{1}\}$ dengan $r \in \mathbb{Z}_2$ maka

$$\bar{1} \bullet \bar{1} = \bar{1} \bullet \bar{1}^2,\ s = \{\bar{1}\} \text{ untuk suatu } s \in \mathbb{Z}_2$$
$$\bar{1} = \bar{1}$$

Sehingga dengan jelas $r \in I$ maka $I = S$.

Berdasarkan (1), (2), dan (3) maka terbukti bahwa $\mathbb{Z}_2$ *simple.*

■

BAB IV
KESIMPULAN

Dari pembahasan skripsi ini dapat disimpulkan hal-hal sebagai berikut:

1. Seminearring normal kiri merupakan bipoten kiri jika dan hanya jika $A = \sqrt{A}$ untuk setiap ideal kiri dari S.
2. Misalkan S merupakan seminearring normal kiri bipoten kiri, sehingga:
   (i) Bayangan homomorfisme dari S adalah S' yaitu seminearring normal kiri bipoten kiri.
   (ii) Jika elemen nilpotent S adalah nol maka annihilator kiri adalah ideal dari S.
   (iii) Jika S adalah prima maka S tidak memiliki pembagi nol.
3. Jika seminearring bipoten kiri S merupakan *cancellative* kanan maka S *simple*.

DAFTAR PUSTAKA

Andari, Ari. 2011. *Diktat Kuliah: Aljabar Abstrak*. FMIPA Universitas Brawijaya. Malang.

Bhattacharya, P.B, S.K. Jain, dan S.R. Nagpaul. 1986. *Basic Abstract Algebra*. Cambridge University Press. New York.

Dummit, D. S. dan R. M. Foote. 2002. *Abstract Algebra Second Edition.* John Wiley and Sons, Inc. New York, hal: 224-231.

Durbin, J. R. 1992. *Modern Algebra. An Introduction 3rd Edition.* John Wiley and Sons, inc. New York.

Fraleigh, J. B. 1994. *A First Course in Abstract Algebra Fifth Edition*. Addision Wesley Publishing Company. California.

Golan, J. S. 1999. *Semiring and Their Applications*. Kluwer Academic Publisher. London.

Harju, Tero. 1966. *Lecture Notes in Semigroups*. University of Turku. Finland.

Kandasamy, W.B.V. 2002. *Smarandache Near-Rings*. American Research Press. Rehoboth.

Perumal, R. dan Balakrishnan, R. 2012. *Left Bipotent Seminearrings*. International Journal of Algebra, Vol. 6(26), hal: 1289-1295.

Pilz, G. 1977. *Nearrings.* North Holland. Amsterdam.

Ramachandram, Volety. V. S. 2011. *Commutativity of Seminearrings.* Journal of Science and Arts, Vol.4(17), hal: 367-368.

Weinert, H. J. 1977. *Related Representation Theorems for Rings, Semirings, Nearrings and Seminearrings by Partial*

Transformation and Partial Endomorbhisms. Proceedings of The Edinburg Mathematical Society. 20, hal: 307-315.

Whitelaw, T. A. 1995. *Introduction to Abstract Algebra*. Chapman and Hall Press. Florida.