

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Perkembangan matematika berperan penting dalam bidang kesehatan, diantaranya mengendalikan penyebaran penyakit, yang dapat dimodelkan secara matematis. Salah satunya adalah model epidemik *SIR* (*Susceptible-Infective-Recovered*) yang diperkenalkan oleh Kermack dan Mc Kendrick pada tahun 1927. Dalam model *SIR* dinyatakan bahwa individu rentan (*Susceptible*) dapat tertular penyakit oleh individu yang terinfeksi (*Infective*). Penularan ini terjadi karena adanya kontak antar individu. Namun model *SIR* tidak menjelaskan secara khusus bagaimana proses kontak antar individu tersebut. Semakin berkembangnya penelitian mengenai model penyebaran penyakit menjadikan model *SIR* sebagai pijakan banyak ilmuwan untuk membuat model penyebaran penyakit yang lebih khusus.

Model *SIR* secara umum mempertimbangkan tingkat kejadian infeksi penyakit yang menyatakan banyaknya individu yang terinfeksi penyakit akibat kontak langsung dengan individu terinfeksi. Tingkat kejadian infeksi pada model epidemik biasanya dirumuskan secara linear. Akan tetapi, tingkat kejadian infeksi yang sebenarnya tidak selalu linear, karena ketika individu yang terinfeksi sedikit, tingkat kejadian infeksi dapat lebih besar dan ketika individu yang terinfeksi banyak, tingkat kejadian infeksi dapat lebih kecil. Hal ini disebabkan adanya perubahan perilaku individu (Hethcote dan Driessche, 1990).

Perilaku dinamis model epidemik juga menunjukkan tingkat kejadian infeksi nonlinear yang berbeda dari tingkat kejadian infeksi linear, sehingga diperkenalkan tingkat kejadian infeksi nonlinear yang disebut tingkat kejadian infeksi tersaturasi (Capasso dan Sergio, 1978).

Dalam skripsi ini dibahas model epidemik *SIR* dengan laju infeksi tersaturasi dan dengan menggunakan variabel baru yang merangkum informasi mengenai keadaan sekarang dan keadaan masa lampau dari suatu penyakit. Variabel baru tersebut diformulasikan

dalam bentuk integral yang mengandung kernel tundaan, yaitu bentuk kernel yang memuat waktu tunda.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, dapat dirumuskan permasalahan yang dikaji dalam skripsi ini, yaitu

1. bagaimana model epidemik *SIR* dengan kernel tundaan dan tingkat kejadian infeksi tersaturasi?
2. bagaimana kestabilan titik kesetimbangan model?
3. bagaimana terjadinya bifurkasi transkritikal dan *Hopf* pada model epidemik *SIR* dengan kernel tundaan dan laju infeksi tersaturasi?
4. bagaimana simulasi hasil analisis model?

1.3 Tujuan

Tujuan yang ingin dicapai dalam skripsi ini adalah

1. menentukan model epidemik *SIR* dengan kernel tundaan dan tingkat kejadian infeksi tersaturasi,
2. menentukan kestabilan titik kesetimbangan model,
3. melakukan analisis bifurkasi transkritikal dan *Hopf* pada model epidemik *SIR* dengan kernel tundaan dan laju infeksi tersaturasi
4. melakukan simulasi hasil analisis model.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Persamaan Diferensial

Definisi 2.1.1 (Persamaan Diferensial Biasa)

Persamaan diferensial biasa (PDB) adalah persamaan diferensial yang memuat hanya satu peubah bebas. Persamaan diferensial biasa orde n adalah suatu persamaan yang dapat ditulis dalam bentuk

$$F\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \dots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right) = \frac{d^n x}{dt^n} \quad (2.1)$$

dengan $x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \dots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}$ adalah fungsi dari t (Finizio dan Ladas, 1982).

Definisi 2.1.2 (Persamaan Diferensial Biasa Linear)

PDB berorde n dengan variabel bebas t dan variabel tak bebas x disebut linear, jika persamaan tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk

$$a_n(t) \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_1(t) \frac{dx}{dt} + a_0(t)x = F(t), \quad (2.2)$$

dengan $a_n(t), a_{n-1}(t), \dots, a_0(t)$ dan $F(t)$ adalah fungsi linear yang hanya bergantung pada variabel bebas t (Nagle dan E.B. Saff, 1993).

Definisi 2.1.3 (Persamaan Diferensial Biasa Nonlinear)

PDB nonlinear adalah persamaan diferensial biasa yang variabel tak bebas atau turunannya berderajat lebih dari satu atau memuat perkalian antara variabel tak bebas dan turunannya (Boyce dan DiPrima, 2005)

Definisi 2.1.4 (Sistem Persamaan Diferensial Biasa Linear)

PDB linear berdimensi n adalah suatu sistem yang terdiri dari n persamaan diferensial biasa linear dengan n variabel yang tidak diketahui. Bentuk umum sistem persamaan diferensial biasa linear orde satu berdimensi n dengan koefisien konstan adalah

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + f_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + f_2(t) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + f_n(t) \end{aligned} \quad (2.3)$$

dengan $a_{i,j}$ adalah konstanta riil dan $i, j = 1, \dots, n$ (Robinson, 2004).

2.2 Sistem Dinamik

Sistem dinamik adalah setiap sistem yang dapat diketahui kondisinya di masa yang akan datang, jika diberikan kondisi pada masa sekarang atau pada masa yang telah lalu (Nagle dan E.B. Saff, 1993).

Definisi 2.2.1 (Sistem Otonomus)

Sistem otonomus merupakan sistem persamaan diferensial yang berbentuk

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= F(x, y, z), \\ \frac{dy}{dt} &= G(x, y, z), \\ \frac{dz}{dt} &= H(x, y, z), \end{aligned} \quad (2.4)$$

dengan fungsi F, G dan H tidak bergantung secara eksplisit terhadap variabel bebas t tetapi hanya bergantung pada variabel tak bebas x, y dan z (Finizio dan Ladas, 1982).

Definisi 2.2.2 (Titik Keseimbangan)

Pandang sistem otonomus (2.4). Titik $\vec{x}^* = (x^*, y^*, z^*)$ yang memenuhi $F(x^*, y^*, z^*) = G(x^*, y^*, z^*) = H(x^*, y^*, z^*) = 0$ disebut *titik kritis* sistem otonomus (2.4). Titik kritis \vec{x}^* merupakan solusi sistem (2.4) yang bernilai konstan, sebab pada x^* nilai $\frac{dx}{dt} = 0$, $\frac{dy}{dt} = 0$, dan $\frac{dz}{dt} = 0$. Keadaan yang menyebabkan $\frac{dx}{dt} = 0$, $\frac{dy}{dt} = 0$ dan $\frac{dz}{dt} = 0$ disebut keadaan setimbang, sehingga titik kritis disebut juga *titik kesetimbangan* (Boyce dan DiPrima, 2005).

Definisi 2.2.3 (Kestabilan Titik Kesetimbangan)

Titik kesetimbangan \vec{x}^* dikatakan

- a. **stabil**, jika $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ sedemikian sehingga setiap solusi $\vec{x} = \vec{x}(t)$ dengan

$$\|\vec{x}(0) - \vec{x}^*\| < \delta$$

maka berlaku

$$\|\vec{x}(t) - \vec{x}^*\| < \varepsilon, \forall t > 0,$$

- b. **stabil asimtotik**, jika stabil dan $\exists \delta_0, 0 < \delta_0 < \delta$ sedemikian sehingga setiap solusi $\vec{x} = \vec{x}(t)$ yang memenuhi

$$\|\vec{x}(t) - \vec{x}^*\| < \delta_0$$

maka

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{x}(t) = \vec{x}^*.$$

Kestabilan asimtotik berarti bahwa titik kesetimbangan stabil dan trayektori solusi-solusi lain di sekitarnya akan konvergen menuju titik kesetimbangan untuk $t \rightarrow \infty$,

- c. **tak stabil**, apabila titik tersebut tidak memenuhi kriteria (a) (Finizio dan Ladas, 1982).

2.2.1 Sistem Otonomus Linear

Perhatikan sistem otonomus linear

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\ \frac{dy}{dt} &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\ \frac{dz}{dt} &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z,\end{aligned}\tag{2.5}$$

yang dapat dinyatakan sebagai $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$, dengan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, a_{ij} \in \mathbb{R} \text{ dan } \det(A) \neq 0$$

Teorema 2.1

Misalkan λ_1, λ_2 , dan λ_3 adalah nilai eigen matriks koefisien A sistem otonomus linear (2.5) dengan $\det(A) \neq 0$. Titik kesetimbangan $(x^*, y^*, z^*) = (0, 0, 0)$ bersifat

1. **stabil asimtotik** jika bagian riil λ_1, λ_2 , dan λ_3 adalah negatif,
2. **stabil** jika semua nilai eigen memiliki bagian riil tak positif,
3. **tidak stabil** jika sedikitnya satu nilai eigen memiliki bagian riil yang positif (Finizio dan Ladas, 1982).

2.2.2 Sistem Otonomus Nonlinear

Perhatikan sistem otonomus nonlinear

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, y, z) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y, z) \\ \frac{dz}{dt} &= h(x, y, z).\end{aligned}\tag{2.6}$$

Sistem (2.6) dapat didekati oleh sistem otonomus linear secara lokal di sekitar titik $\vec{x}^* = (x^*, y^*, z^*)$ jika f , g , dan h mempunyai turunan parsial sampai orde dua yang kontinu. Untuk menunjukkan hal tersebut dilakukan ekspansi deret Taylor di sekitar titik (x^*, y^*, z^*) sehingga fungsi f , g , dan h dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned}
 f(x, y, z) &= f(\vec{x}^*) + \frac{\partial f(\vec{x}^*)}{\partial x}(x - x^*) \\
 &\quad + \frac{\partial f(\vec{x}^*)}{\partial y}(y - y^*) + \frac{\partial f(\vec{x}^*)}{\partial z}(z - z^*) \\
 &\quad + \eta_1(x, y, z)
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}
 g(x, y, z) &= g(\vec{x}^*) + \frac{\partial g(\vec{x}^*)}{\partial x}(x - x^*) \\
 &\quad + \frac{\partial g(\vec{x}^*)}{\partial y}(y - y^*) + \frac{\partial g(\vec{x}^*)}{\partial z}(z - z^*) \\
 &\quad + \eta_2(x, y, z)
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}
 h(x, y, z) &= h(\vec{x}^*) + \frac{\partial h(x^*, y^*, z^*)}{\partial x}(x - x^*) \\
 &\quad + \frac{\partial h(x^*, y^*, z^*)}{\partial y}(y - y^*) + \frac{\partial h(x^*, y^*, z^*)}{\partial z}(z - z^*) \\
 &\quad + \eta_3(x, y, z)
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

dengan $\eta_1(x, y, z)$, $\eta_2(x, y, z)$, dan $\eta_3(x, y, z)$ adalah suku sisa.

Untuk hampiran orde satu terhadap f, g , dan h , suku sisa memenuhi sifat

$$\begin{aligned}
 \lim_{(x, y, z) \rightarrow (\vec{x}^*)} \frac{\eta_1(x, y, z)}{\|\vec{w}\|} &= 0 \\
 \lim_{(x, y, z) \rightarrow (\vec{x}^*)} \frac{\eta_2(x, y, z)}{\|\vec{w}\|} &= 0 \\
 \lim_{(x, y, z) \rightarrow (\vec{x}^*)} \frac{\eta_3(x, y, z)}{\|\vec{w}\|} &= 0
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

dengan $\vec{w} = (x - x^*, y - y^*, z - z^*)^T$, dan $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)^T$.

Dengan menggunakan persamaan (2.7), (2.8), dan (2.9) serta mengingat

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d(x - x^*)}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{d(y - y^*)}{dt}, \quad \text{dan} \quad \frac{dz}{dt} = \frac{d(z - z^*)}{dt}$$

persamaan (2.6) dapat ditulis dalam bentuk matriks, yaitu

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x - x^* \\ y - y^* \\ z - z^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(\vec{x}^*) \\ g(\vec{x}^*) \\ h(\vec{x}^*) \end{bmatrix} + \left. \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{bmatrix} \right|_{\vec{x}=\vec{x}^*} \begin{bmatrix} x - x^* \\ y - y^* \\ z - z^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1(x, y, z) \\ \eta_2(x, y, z) \\ \eta_3(x, y, z) \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Matriks

$$\left. \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{bmatrix} \right|_{\vec{x}=\vec{x}^*}$$

disebut matriks Jacobi dan dinotasikan sebagai $J(x^*, y^*, z^*)$ atau J .

Jika dimisalkan $u = (x - x^*)$, $v = (y - y^*)$, $w = (z - z^*)$, sehingga $\vec{w} = (u, v, w)^T$ dan dengan mengingat bahwa $f(\vec{x}^*) = g(\vec{x}^*) = h(\vec{x}^*) = 0$, maka persamaan (2.11) dapat ditulis sebagai

$$\begin{bmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \\ \frac{dw}{dt} \end{bmatrix} = \left. \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{bmatrix} \right|_{\vec{x}=\vec{x}^*} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1(x, y, z) \\ \eta_2(x, y, z) \\ \eta_3(x, y, z) \end{bmatrix},$$

atau

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = J\vec{w} + \vec{\eta}. \quad (2.12)$$

Untuk (x, y, z) yang berada cukup dekat dengan (x^*, y^*, z^*) , (u, v, w) bernilai kecil sehingga $\|\vec{\eta}\| \leq \|\vec{w}\|$. Oleh karena itu, $\vec{\eta}$

dapat diabaikan dan sistem nonlinear (2.6) dapat dihipotesis oleh sistem linear

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = J\vec{w}. \quad (2.13)$$

Untuk $x = x^*$, $y = y^*$, dan $z = z^*$ diperoleh $(u^*, v^*, w^*) = (0,0,0)$ sehingga sistem linear (2.13) memiliki titik kesetimbangan $(u^*, v^*, w^*) = (0,0,0)$ (Boyce dan DiPrima, 2005).

Teorema 2.2 (Kestabilan Sistem Otonomus Nonlinear)

1. Titik kesetimbangan sistem otonomus nonlinear (2.6) bersifat stabil asimtotik jika titik kesetimbangan sistem hasil linearisasi stabil asimtotik.
2. Titik kesetimbangan sistem otonomus nonlinear (2.6) bersifat tak stabil jika titik kesetimbangan sistem hasil linearisasi tak stabil (Finizio dan Ladas, 1982).

2.3 Kriteria Kestabilan Routh-Hurwitz

Sistem otonomus dengan sebuah matriks Jacobi berbentuk

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \quad (2.14)$$

mempunyai nilai eigen yang dapat diperoleh dengan menyelesaikan $\det(J - \lambda I) = 0$, sehingga diperoleh persamaan karakteristik dalam bentuk

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (2.15)$$

Titik kesetimbangan sistem otonomus dengan matriks Jacobi (2.14) akan stabil jika semua akar persamaan (2.15) bernilai negatif, atau dengan kata lain $\lambda_i < 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. Persamaan (2.15) umumnya sulit diselesaikan, sehingga sulit pula ditentukan tanda nilai eigennya. Oleh karena itu digunakan kriteria Routh-Hurwitz

untuk menentukan tanda nilai eigen matriks (2.14) dengan menggunakan koefisien-koefisien persamaan (2.15), seperti yang dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 2.3

Dengan menggunakan koefisien-koefisien persamaan karakteristik (2.15), dibangun k matriks sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 D_1 &= [a_1], \\
 D_2 &= \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{bmatrix}, \\
 D_3 &= \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ 1 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{bmatrix}, \dots, \\
 D_k &= \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & a_{2k-1} \\ 1 & a_2 & a_4 & \dots & a_{2k-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & a_{2k-3} \\ 0 & 1 & a_2 & \dots & a_{2k-4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_k \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Jika $a_i > 0, i = 1, \dots, n$, dan $\det(D_k) > 0, k = 1, \dots, n - 1$, maka $\lambda_i < 0, i = 1, \dots, n$ (Murray, 2002).

Sebagai contoh, misalkan diambil $n = 3$, persamaan (2.15) menjadi

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0. \tag{2.16}$$

Akar-akar persamaan (2.16) akan bernilai negatif jika semua koefisien a_1, a_2 , dan a_3 bernilai positif, dan $a_1 a_2 > a_3$.

2.4 Bifurkasi Hopf

Definisi 2.4.1 (Bifurkasi)

Bifurkasi merupakan perubahan perilaku orbit solusi sistem dinamik pada sistem karena terjadi perubahan nilai parameter (Kuznetsov, 1998).

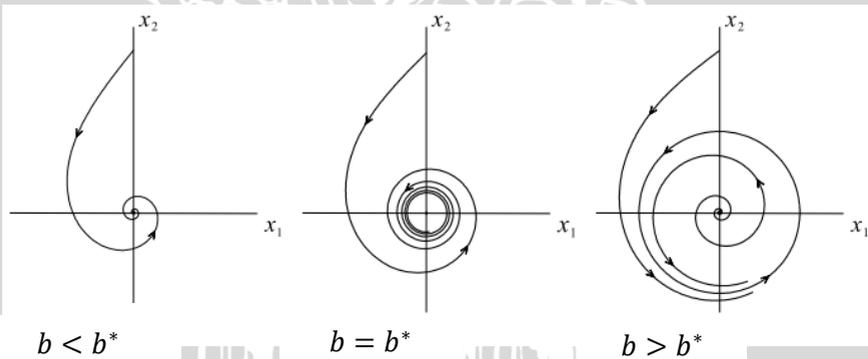
Definisi 2.4.2 (Bifurkasi Hopf)

Bifurkasi yang terjadi berkaitan dengan adanya pasangan nilai eigen imajiner sekawan yang dihasilkan melalui proses linearisasi pada suatu titik tetap disebut bifurkasi Hopf. Pada waktu yang bersamaan muncul suatu orbit periodik disekitar titik tetap tersebut (Kuznetsov, 1998).

Misalkan diberikan sistem otonomus nonlinear dengan $n = 2$ dan parameter b , yaitu

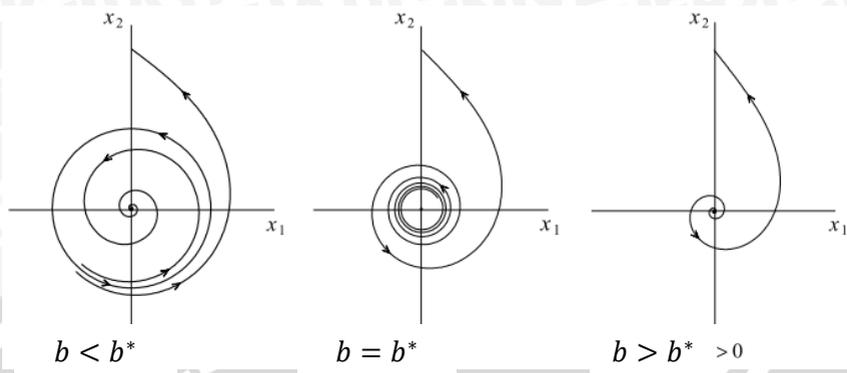
$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, b), \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, b), \end{aligned} \tag{2.17}$$

dengan $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2$ dan $b \in \mathbb{R}$. Menurut Kuznetsov (1998), jika terdapat parameter $b = b^*$ sehingga muncul suatu *limit cycle* stabil pada sistem tersebut ketika b melewati titik kritis b^* maka sistem (2.17) dikatakan mengalami bifurkasi Hopf *supercritical*. Parameter $b = b^*$ menyebabkan nilai eigen matriks Jacobi sistem (2.17) mempunyai bentuk $\lambda_{1,2} = \pm iv$, $v > 0$. Hal ini berakibat pada perubahan struktur orbit dan munculnya *limit cycle* stabil dari sistem seiring dengan perubahan nilai parameter seperti ditunjukkan pada Gambar 2.1.



Gambar 2.1 Bifurkasi Hopf *supercritical*

Jika terdapat nilai parameter $b = b^*$ sehingga *limit cycle* tak stabil pada sistem tereduksi ketika b melewati titik kritis b^* , maka sistem tersebut mengalami bifurkasi Hopf *subcritical*. Parameter $b = b^*$ menyebabkan nilai eigen matriks Jacobi sistem (2.17) mempunyai bentuk $\lambda_{1,2} = \pm iv$, $v > 0$. Perubahan struktur orbit dan tereduksinya *limit cycle* yang tak stabil seiring perubahan nilai parameter yang ditunjukkan pada Gambar 2.2.



Gambar 2.2 Bifurkasi Hopf *subcritical*

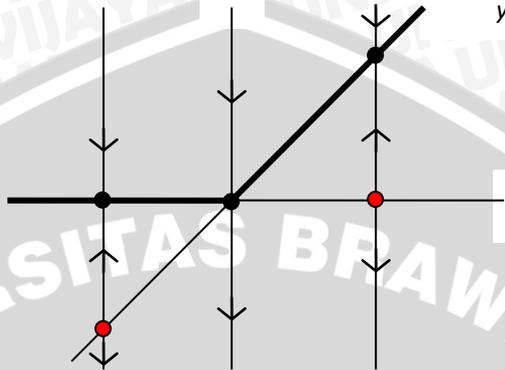
2.5 Bifurkasi Transkritikal

Menurut Wiggins (1990), bifurkasi transkritikal terjadi ketika nilai parameter berubah dari negatif ke positif. Kemudian terjadi perubahan jumlah titik kesetimbangan, dari dua titik kesetimbangan (dengan perilaku stabil dan tidak stabil) bergabung menjadi satu. Selanjutnya titik tersebut kembali menjadi dua titik kesetimbangan dengan perilaku berkebalikan dari perilaku awal, yang stabil menjadi tidak stabil dan sebaliknya yang tidak stabil menjadi stabil.

Sebagai contoh perhatikan persamaan berikut,

$$\frac{dy}{dt} = ry - y^2, \quad (2.18)$$

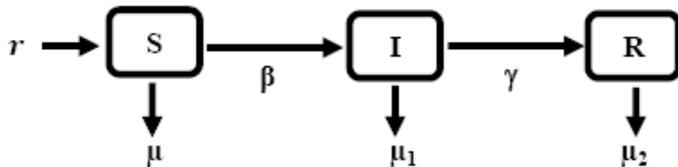
dengan r dan y dapat bernilai positif atau negatif. Persamaan (2.18) mempunyai dua titik kesetimbangan, yaitu $y = 0$ dan $y = r$. Ketika r bernilai negatif, titik kesetimbangan $y = 0$ stabil dan titik kesetimbangan $y = r$ tidak stabil. Sementara itu ketika r bernilai positif, titik kesetimbangan $y = 0$ tidak stabil dan titik kesetimbangan $y = r$ stabil. Jadi, bifurkasi transkritikal terjadi ketika $r = 0$, sehingga $r = 0$ disebut titik bifurkasi. Untuk lebih jelasnya lihat Gambar 2.4.



Gambar 2.3 Bifurkasi Transkritikal

2.6 Model *SIR*

Model *SIR* menjelaskan penyebaran suatu penyakit dengan *S*, *I*, dan *R* berturut-turut menyatakan *susceptible* (subpopulasi yang rentan), *infective* (subpopulasi yang terinfeksi), dan *recovery* (subpopulasi yang sembuh). Secara garis besar, model *SIR* menggambarkan penyebaran penyakit dimana individu yang rentan dapat terinfeksi melalui proses interaksi, baik secara langsung maupun tidak langsung dengan individu yang terinfeksi. Selanjutnya, individu terinfeksi yang mampu bertahan terhadap penyakit akan sembuh dan memasuki subpopulasi individu yang sembuh. Model tersebut mengasumsikan bahwa total populasi (N), penambahan populasi, dan laju kematian adalah konstan. Diagram kompartemen model *SIR* disajikan dalam digram berikut



Gambar 2.4 Model epidemik *SIR*

Berdasarkan penjelasan dan asumsi yang ada, Gambar 2.4. dapat dikonstruksi model berikut,

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= rN - \mu S - \beta SI \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - \mu_1 I - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I - \mu_2 R \\ N(t) &= S(t) + I(t) + R(t)\end{aligned}\tag{2.19}$$

dengan μ , μ_1 , μ_2 , β , dan γ adalah konstanta positif.

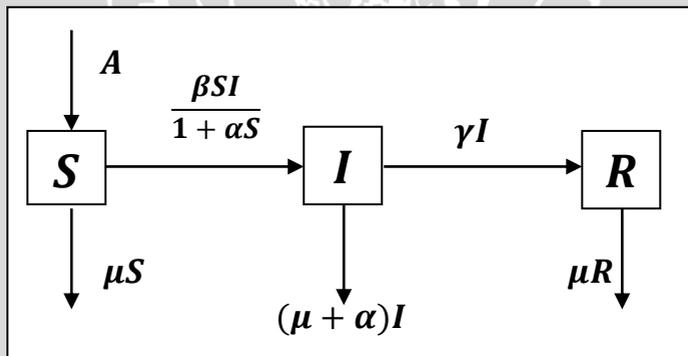


BAB III PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas konstruksi model epidemik SIR dengan kernel tundaan dan laju infeksi tersaturasi. Analisis dinamik dilakukan terhadap model yaitu dengan menentukan titik kesetimbangan model, menguji eksistensi titik kesetimbangan model, menentukan kestabilan titik kesetimbangan model, serta membuktikan keberadaan bifurkasi transkritikal dengan memberikan hasil simulasi numerik model, dengan menggunakan metode Runge Kutta orde 4.

3.1 Formulasi Model

Populasi pada model ini dibagi menjadi tiga subpopulasi yaitu subpopulasi individu yang rentan terhadap penyakit (S), subpopulasi individu terinfeksi (I), dan subpopulasi individu yang sembuh (R), serta menambahkan variabel informasi (Z). Diagram kompartemen modifikasi model SIR oleh T.K. Kar dan Prasanta Kumar Mondal disajikan pada Gambar 3.1.



Gambar 3.1 Diagram kompartemen model epidemik SIR

Keterangan :

- β = laju kontak antara subpopulasi yang rentan dengan subpopulasi yang terinfeksi,
- α = laju kematian yang disebabkan oleh penyakit,
- γ = laju individu terinfeksi yang sembuh karena memperoleh kekebalan,
- μ = laju kematian alami,
- A = penambahan populasi.

3.1.1 Laju Perubahan Populasi *Susceptible*

Perubahan subpopulasi individu rentan diasumsikan bertambah dengan pertumbuhan logistik dan akan mendekati daya dukung lingkungan (K) sehingga jumlah populasi tidak dapat melampaui daya dukung lingkungan. Hal ini dapat dinyatakan dengan rumus sebagai berikut

$$\frac{dS}{dt} = rS \left(1 - \frac{S}{K}\right),$$

dengan r adalah laju pertumbuhan individu rentan.

Kekuatan infeksi penyakit pada subpopulasi rentan βIS (lihat Gambar 2.5) dipengaruhi oleh adanya *inhibitor* (hambatan). Fungsi $\frac{1}{1+\alpha S}$ merupakan hambatan yang timbul akibat meningkatnya individu rentan. Oleh karena itu diperoleh tingkat kejadian infeksi tersaturasi yang dapat mengurangi jumlah subpopulasi individu rentan sebesar

$$\frac{\beta SI}{1 + \alpha S},$$

sehingga perubahan subpopulasi individu rentan dapat dirumuskan sebagai

$$\frac{dS}{dt} = rS \left(1 - \frac{S}{K}\right) - \frac{\beta SI}{1 + \alpha S}. \quad (3.1)$$

3.1.2 Laju Perubahan Populasi *Infectives*

Pada pertumbuhan subpopulasi individu terinfeksi, jumlah subpopulasi rentan (S) yang terinfeksi akan menambah jumlah subpopulasi terinfeksi (I) sebesar

$$\frac{\beta SI}{1 + \alpha S}$$

Laju kematian alami (μ) dan laju penyembuhan (γ), menyebabkan berkurangnya jumlah subpopulasi sebesar

$$(\mu + \gamma)I,$$

sehingga pertumbuhan subpopulasi individu yang terinfeksi dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\beta SI}{1 + \alpha S} - (\mu_1 + \gamma)I. \quad (3.2)$$

Laju infeksi tidak terjadi secara langsung namun merupakan akumulasi infeksi sebelumnya. Untuk itu pandang variabel Z yang merangkum informasi mengenai keadaan penyakit saat ini dan masa lampau. Variabel Z diformulasikan sebagai

$$Z(t) = \int_{-\infty}^t g(S(t), I(t))K(t - \tau)d\tau,$$

dengan $K(t - \tau)$ adalah kernel tundaan, τ adalah distribusi nilai tunda. Individu rentan S dan individu terinfeksi I pada waktu t dipengaruhi oleh variabel tetap S dan I di semua waktu lampau dimana $\tau \leq t$. Dalam skripsi ini digunakan $g(S, I) = S$, dan

$K(t - \tau) = \frac{1}{T} e^{-\frac{1}{T}(t-\tau)}$, dengan T adalah nilai tundaan rata-rata yang diperoleh dari keadaan masa lampau dari penyakit.

Dari asumsi di atas, dipertimbangkan model sebagai berikut

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\beta ZI}{1 + \alpha Z} - (\mu + \gamma)I, \quad (3.3)$$

$$Z(t) = \int_{-\infty}^t S \frac{1}{T} e^{-\left(\frac{1}{T}(t-\tau)\right)} d\tau$$

Jika persamaan

$$Z(t) = \int_{-\infty}^t S \frac{1}{T} e^{-\left(\frac{1}{T}(t-\tau)\right)} d\tau$$

diturunkan terhadap t maka dengan menggunakan teorema dasar kalkulus I diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{dZ}{dt} &= -\frac{1}{T^2} e^{-\frac{t}{T}} \left(\int_{-\infty}^t S e^{-\frac{\tau}{T}} d\tau \right) + \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}} \left(S e^{-\frac{t}{T}} \right) \\ &= -\frac{1}{T} \left(\frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}} \int_{-\infty}^t S e^{-\frac{\tau}{T}} d\tau \right) + \frac{1}{T} S e^{-\frac{-t+t}{T}} \\ &= -\frac{1}{T} Z + \frac{1}{T} S e^0 \\ &= \frac{1}{T} (S - Z). \end{aligned}$$

Berdasarkan perhitungan di atas, persamaan (3.3) menjadi

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \frac{\beta ZI}{1 + \alpha Z} - (\mu + \gamma)I, \\ \frac{dZ}{dt} &= \frac{1}{T} (S - Z), \end{aligned} \quad (3.4)$$

3.1.3 Laju Perubahan Populasi *Recovered*

Pertumbuhan subpopulasi individu yang sembuh diformulasikan sebagai

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu R, \quad (3.5)$$

yang menyatakan terjadinya penyembuhan individu yang terinfeksi dengan laju γI dan adanya kematian alami μR . Dari persamaan (3.1), (3.4), dan (3.5) diperoleh model *SIR* dengan laju pengobatan tersaturasi, yaitu

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= rS \left(1 - \frac{S}{k}\right) - \frac{\beta SI}{1 + \alpha S} \\ \frac{dI}{dt} &= \frac{\beta SI}{1 + \alpha S} - (\mu + \gamma)I \\ \frac{dZ}{dt} &= \frac{1}{T}(S - Z) \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I(t) - \mu R(t).\end{aligned}\tag{3.6}$$

Nilai $r, k, \alpha, \beta, \gamma, \mu, T$ selalu positif. Karena perubahan nilai $R(t)$ tidak mempengaruhi nilai $S(t)$, $I(t)$ dan $Z(t)$, maka pada pembahasan selanjutnya cukup dipandang tiga persamaan dari persamaan (3.6), yaitu

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= rS \left(1 - \frac{S}{k}\right) - \frac{\beta SI}{1 + \alpha S} \\ \frac{dI}{dt} &= \frac{\beta SI}{1 + \alpha S} - (\mu + \gamma)I \\ \frac{dZ}{dt} &= \frac{1}{T}(S - Z).\end{aligned}\tag{3.7}$$

3.2 Titik Kesetimbangan dan Bilangan Reproduksi Dasar

Titik kesetimbangan sistem persamaan (3.7) diperoleh ketika

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dI}{dt} = \frac{dZ}{dt} = 0,$$

sehingga

$$rS \left(1 - \frac{S}{k}\right) - \frac{\beta SI}{1 + \alpha S} = 0,\tag{3.8a}$$

$$\frac{\beta I Z}{1+\alpha Z} - \mu_1 I - \gamma I = 0, \quad (3.8b)$$

$$\frac{1}{T}(S - Z) = 0. \quad (3.8c)$$

Dari persamaan (3.8a) diperoleh

$$S = 0 \quad (3.9)$$

atau

$$r \left(1 - \frac{S}{k}\right) - \frac{\beta I}{1+\alpha S} = 0, \quad (3.10)$$

sedangkan dari persamaan (3.8b) diperoleh

$$I = 0 \quad (3.11)$$

atau

$$\left(\frac{\beta Z}{1+\alpha Z} - \mu_1 - \gamma\right) = 0. \quad (3.12)$$

Dari persamaan (3.8c) diperoleh

$$S = Z. \quad (3.13)$$

Jika $I = 0$ dan $r \left(1 - \frac{S}{k}\right) - \frac{\beta I}{1+\alpha S} = 0$ maka

$$S = Z = k, \quad (3.14)$$

sehingga diperoleh titik kesetimbangan $E_1(k, 0, k)$

Jika $I \neq 0$ maka menurut persamaan (3.12) diperoleh

$$1 + \alpha Z = \frac{\beta Z}{\mu_1 + \gamma}$$

$$\beta Z = (1 + \alpha Z)(\mu_1 + \gamma)$$

$$\beta Z - \alpha Z \mu_1 - \alpha Z \gamma = \mu_1 + \gamma$$

$$Z(\beta - \alpha \mu_1 - \alpha \gamma) = \mu_1 + \gamma$$

$$Z^* = \frac{\mu_1 + \gamma}{\beta - \alpha \mu_1 - \alpha \gamma}, \text{ asalkan } (\mu_1 - \gamma) \neq \beta \quad (3.15)$$

Karena $S = Z$, jadi $S = \frac{\mu_1 + \gamma}{\beta - \alpha \mu_1 - \alpha \gamma} \neq 0$.

Karena $S \neq 0$ dan $S = Z$ maka berdasarkan persamaan (3.10) dan (3.12)

$$\frac{\beta I}{r \left(1 - \frac{S}{k}\right)} = 1 + \alpha Z$$

$$\beta I k = (1 + \alpha Z)r(k - Z)$$

$$I^* = \frac{r}{\beta k} (1 + \alpha Z) r (k - Z) \quad (3.16)$$

Dengan demikian diperoleh titik kesetimbangan $E^* = (S^*, I^*, Z^*)$ dengan $S^* = Z^* = \frac{\mu_1 + \gamma}{\beta - \alpha\mu_1 - \alpha\gamma}$ dan $I^* = \frac{r}{\beta k} (1 + \alpha Z) r (k - Z)$.

Diperoleh dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit $E_1 = (k, 0, k)$ dan titik kesetimbangan endemik $E^* = (S^*, I^*, Z^*)$.

Untuk mengetahui nilai dari bilangan reproduksi dasar perlu dilihat eksistensi S^* , I^* dan Z^* . S^* dan Z^* akan eksis apabila $\beta - \alpha\mu_1 - \alpha\gamma$ bernilai positif. I^* akan eksis apabila $k > Z$. Dari syarat eksistensi I^*

$$\begin{aligned} k &> \frac{\mu_1 + \gamma}{\beta - \alpha\mu_1 - \alpha\gamma} \\ k(\beta - \alpha\mu_1 - \alpha\gamma) &> \mu_1 + \gamma, \\ k\beta - k\alpha(\mu_1 + \gamma) &> \mu_1 + \gamma, \\ k\beta - k\alpha(\mu_1 + \gamma) - (\mu_1 + \gamma) &> 0, \\ k\beta - (\mu_1 + \gamma)(k\alpha + 1) &> 0, \\ k\beta &> (\mu_1 + \gamma)(k\alpha + 1) \\ \frac{k\beta}{(\mu_1 + \gamma)(k\alpha + 1)} &> 1 \end{aligned}$$

Misalkan

$$R_0 = \frac{k\beta}{(\mu_1 + \gamma)(k\alpha + 1)}$$

R_0 adalah bilangan reproduksi dasar, yaitu banyaknya infeksi sekunder yang dihasilkan oleh satu individu tertentu.

3.3 Kestabilan Titik Kesetimbangan

Untuk mengetahui jenis kestabilan titik kesetimbangan suatu sistem maka harus dicari nilai eigen dari matriks Jacobi di titik kesetimbangan tersebut. Matriks Jacobi persamaan (3.7) adalah

$$J(S, I, Z) = \begin{pmatrix} r \left(1 - \frac{S}{k}\right) - \frac{\beta I}{(1+\alpha S)} + S \left(-\frac{r}{k} + \frac{\alpha \beta I}{(1+\alpha S)^2}\right) & -\frac{\beta S}{1+\alpha S} & 0 \\ 0 & \frac{\beta Z}{1+\alpha S} - \mu_1 - \gamma & \frac{\beta I}{(1+\alpha Z)^2} \\ \frac{1}{T} & 0 & -\frac{1}{T} \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

3.3.1 Titik kesetimbangan $E_1 = (k, 0, k)$

Dengan mensubstitusikan $S = Z = k$ dan $I = 0$ ke dalam matriks (3.17), akan dihasilkan matriks

$$J(k, 0, k) = \begin{pmatrix} -r & -\frac{\beta k}{1+\alpha k} & 0 \\ 0 & \frac{\beta k}{1+\alpha k} - \mu_1 - \gamma & 0 \\ \frac{1}{T} & 0 & -\frac{1}{T} \end{pmatrix}, \quad (3.18)$$

yang memiliki nilai eigen $\lambda_1 = -r$, $\lambda_2 = \frac{\beta k}{1+\alpha k} - \mu_1 - \gamma$ dan $\lambda_3 = -\frac{1}{T}$. Kestabilan E_1 bergantung pada λ_2

$$\lambda_2 = \frac{\beta k}{1+\alpha k} - \mu_1 - \gamma$$

$$\lambda_2 = \frac{\beta k}{1+\alpha k} - (\mu_1 + \gamma)$$

kedua ruas dikalikan dengan $1/(\mu_1 + \gamma)$ sehingga

$$\frac{\lambda_2}{(\mu_1 + \gamma)} = \frac{\beta k}{1 + \alpha k(\mu_1 + \gamma)} - \frac{(\mu_1 + \gamma)}{(\mu_1 + \gamma)}$$

$$\frac{\lambda_2}{(\mu_1 + \gamma)} = R_0 - 1$$

$$\lambda_2 = (R_0 - 1)(\mu_1 + \gamma).$$

Jika $R_0 > 1$ maka titik kesetimbangan E_1 bersifat tidak stabil. jika $R_0 < 1$ maka titik kesetimbangan E_1 bersifat stabil asimtotik.

3.3.2 Titik kesetimbangan $E^* = (S^*, I^*, Z^*)$

Dengan mensubstitusikan $S^* = Z^* = \frac{\mu_1 + \gamma}{\beta - \alpha\mu_1 - \alpha\gamma}$ dan $I^* = \frac{r}{\beta k} \left(1 + \alpha \frac{\mu_1 + \gamma}{\beta - \alpha\mu_1 - \alpha\gamma}\right) r \left(k - \frac{\mu_1 + \gamma}{\beta - \alpha\mu_1 - \alpha\gamma}\right)$ ke matriks (3.17) dihasilkan

$$J(S^*, I^*, Z^*) = \begin{bmatrix} S^* \left(-\frac{r}{k} + \frac{\alpha\beta I^*}{(1 + \alpha S^*)^2}\right) - (\mu + \gamma) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\beta I^*}{(1 + \alpha Z^*)^2} \\ \frac{1}{T} & 0 & -\frac{1}{T} \end{bmatrix} \quad (3.19).$$

Selanjutnya dicari nilai eigen dengan menyelesaikan

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} S^* \left(-\frac{r}{k} + \frac{\alpha\beta I^*}{(1 + \alpha S^*)^2}\right) - \lambda & -(\mu + \gamma) & 0 \\ 0 & -\lambda & \frac{\beta I^*}{(1 + \alpha Z^*)^2} \\ \frac{1}{T} & 0 & -\frac{1}{T} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(S^* \left(-\frac{r}{k} + \frac{\alpha\beta I^*}{(1 + \alpha S^*)^2}\right) - \lambda\right) (-\lambda) \left(-\frac{1}{T} - \lambda\right) + (-(\mu + \gamma)) \left(\frac{\beta I^*}{(1 + \alpha Z^*)^2}\right) \left(\frac{1}{T}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^3 + \lambda^2 \frac{(1 + rS^* - \alpha\beta S^*)}{kT(1 + \alpha S^*)^2} - \lambda \frac{(-rS^* + \alpha\beta I^* S^*)}{kT^*(1 + \alpha S^*)^2} - \frac{\beta I^*(\gamma - \mu)}{T(1 + \alpha Z^*)^2} = 0, \quad (3.20)$$

disebabkan cukup sulit untuk menentukan akar dari persamaan karakteristik (3.20) yang berpangkat lebih dari dua, maka untuk mengetahui kestabilan titik tetap ini dapat digunakan kriteria Routh-Hurwitz.

Misalkan persamaan karakteristik (3.21) adalah

$$\lambda^3 + A\lambda^2 + B\lambda + C = 0, \quad (3.21)$$

dimana

$$A = \frac{1}{T} + \frac{rm_1}{k} - \frac{\alpha\beta m_1 m_2}{(1 + \alpha m_1)^2}$$

$$B = \frac{1}{T} \left[\frac{rm_1}{k} - \frac{\alpha\beta m_1 m_2}{(1 + \alpha m_1)^2} \right]$$

$$C = \frac{\beta m_2 (\mu + \gamma)}{T(1 + \alpha m_1)^2}$$

dengan $m_1 = S^* = \frac{\mu_1 + \gamma}{\beta - \alpha\mu_1 - \alpha\gamma}$ dan

$$m_2 = I^* = \frac{r}{\beta k} \left(1 + \alpha \frac{\mu_1 + \gamma}{\beta - \alpha\mu_1 - \alpha\gamma} \right) r \left(k - \frac{\mu_1 + \gamma}{\beta - \alpha\mu_1 - \alpha\gamma} \right)$$

Berdasarkan **Teorema 2.3** titik kesetimbangan sistem bersifat stabil jika dan hanya jika

- (i) $A, B, C > 0$,
- (ii) $AB - C > 0$.

Karena semua parameter bernilai positif ($r, k, \alpha, \beta, \mu, \gamma, T > 0$)

- (i) $A > 0$ dan $B > 0$ jika

$$\frac{rm_1}{k} > \frac{\alpha\beta m_1 m_2}{(1 + \alpha m_1)^2}$$

Jelas bahwa $C > 0$.

- (ii) $AB - C > 0$,

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{T} + \frac{rm_1}{k} - \frac{\alpha\beta m_1 m_2}{(1 + \alpha m_1)^2} \right) \left(\frac{1}{T} \left[\frac{rm_1}{k} - \frac{\alpha\beta m_1 m_2}{(1 + \alpha m_1)^2} \right] \right) - \frac{\beta m_2 (\mu + \gamma)}{T(1 + \alpha m_1)^2} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{T^2} \frac{rm_1}{k} + \frac{1}{T^2} \frac{\alpha\beta m_1 m_2}{(1 + \alpha m_1)^2} + \frac{1}{T} \left(\frac{rm_1}{k} \right)^2 - 2 \frac{1}{T} \frac{rm_1}{k} \frac{\alpha\beta m_1 m_2}{(1 + \alpha m_1)^2} + \frac{1}{T} \left(\frac{\alpha\beta m_1 m_2}{(1 + \alpha m_1)^2} \right)^2 - \frac{\beta m_2 (\mu + \gamma)}{T(1 + \alpha m_1)^2} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{T^2} \left(\frac{rm_1}{k} + \frac{\alpha\beta m_1 m_2}{(1 + \alpha m_1)^2} \right) + \frac{1}{T} \left(\frac{rm_1}{k} - \frac{\alpha\beta m_1 m_2}{(1 + \alpha m_1)^2} \right)^2 - \frac{\beta m_2 (\mu + \gamma)}{T(1 + \alpha m_1)^2} > 0.$$

Misalkan

$$P = \frac{rm_1}{k} - \frac{\alpha\beta m_1 m_2}{(1+\alpha m_1)^2} \text{ dan } Q = P^2 - \frac{\beta m_2(\mu+\gamma)}{T(1+\alpha m_1)^2}$$

sehingga

$$AB - C = \frac{1}{T^2}(P + QT) > 0$$

$$\Leftrightarrow (P + QT) > 0$$

$$\Leftrightarrow T < -\frac{P}{Q}$$

karena T menunjukkan waktu yang selalu bernilai positif, maka $-\frac{P}{Q}$ harus positif, dari syarat (i) jelas $P > 0$ sehingga $Q < 0$.

Misalkan

$$T^* = -\frac{P}{Q}$$

titik kesetimbangan E^* akan stabil asimtotik jika dan hanya jika $T < T^*$, yang artinya E^* tidak stabil untuk $T > T^*$. Ketika $T = T^*$ maka $AB = C$, sehingga persamaan (3.21) menjadi

$$\lambda^3 + A\lambda^2 + B\lambda + AB = 0$$

$$\lambda^3 + A(\lambda^2 + B) + B\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda^2 + B) + A(\lambda^2 + B) = 0$$

$$(\lambda + A)(\lambda^2 + B) = 0$$

$$\lambda_1 = \pm\sqrt{B}i \text{ dan } \lambda_2 = -A.$$

Kestabilan titik kesetimbangan E^* mengalami perubahan kestabilan pada saat T meningkat sampai T^* dan persamaan karakteristik (3.21) memiliki pasangan akar imajiner murni, sehingga titik kesetimbangan E^* mengalami bifurkasi *Hopf*. Karena kestabilan ditentukan oleh T^* maka T^* disebut parameter bifurkasi.

Selanjutnya untuk $R_0 = 1$ terjadi perubahan kestabilan, yang mana titik kesetimbangan E_1 menjadi tidak stabil dan titik kesetimbangan E^* menjadi stabil. Situasi ini disebut bifurkasi transkritikal.

Tabel 3.1 Syarat eksistensi dan kestabilan titik kesetimbangan

Titik Kesetimbangan	Syarat Eksistensi	Jenis Kestabilan	Syarat Kestabilan
$E_0(0,0,0)$	tidak ada	Tidak stabil	-
$E_1(k, 0, k)$	Tidak ada	stabil	$R_0 < 1$
		bifurkasi transkritikal	$R_0 = 1$
$E^*(S^*, I^*, Z^*)$	$R_0 > 1,$ $\beta > \alpha(\mu + \gamma)$	stabil	$R_0 > 1,$ $T < T^*$
		bifurkasi Hopf <i>supercritikal</i>	$R_0 > 1,$ $T > T^*$

3.4 Simulasi Numerik

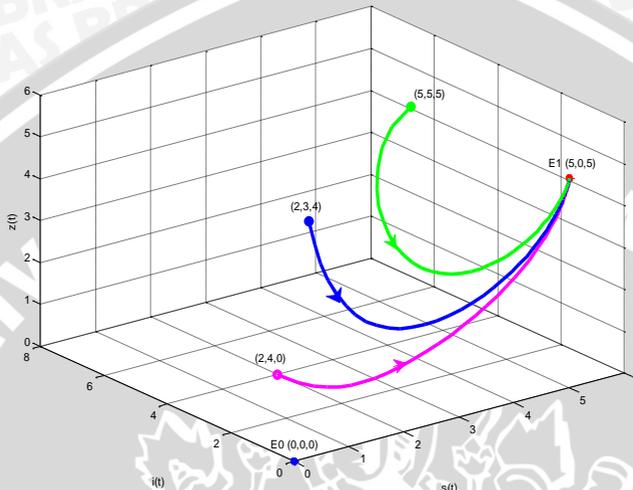
Pada bagian ini akan disajikan simulasi numerik dengan metode Runge Kutta orde 4 untuk verifikasi hasil analitik yang diperoleh.

3.4.1 Simulasi untuk $R_0 < 1$

Pada simulasi ini digunakan nilai $r = 2$, $k = 5$, $\beta = 0,5$, $\mu = 0,3$, $\gamma = 0,2$, dan $T = 0,65$. Nilai parameter tersebut $R_0 = 0.5556 < 1$. Berdasarkan syarat eksistensi titik kesetimbangan untuk $R_0 < 1$, mengakibatkan hanya satu titik kesetimbangan yang eksis yaitu $E_1(k, 0, k)$.

Pada potret fase Gambar 3.2 dengan nilai awal (2,4,0), (2,3,4) dan (5,5,5) grafik solusi akan menuju ke titik kesetimbangan yang sama yaitu $E_1(5,0,5)$ dan bersifat stabil asimtotik karena *trace* bernilai negative dan *determinan* bernilai positif. Hasil simulasi

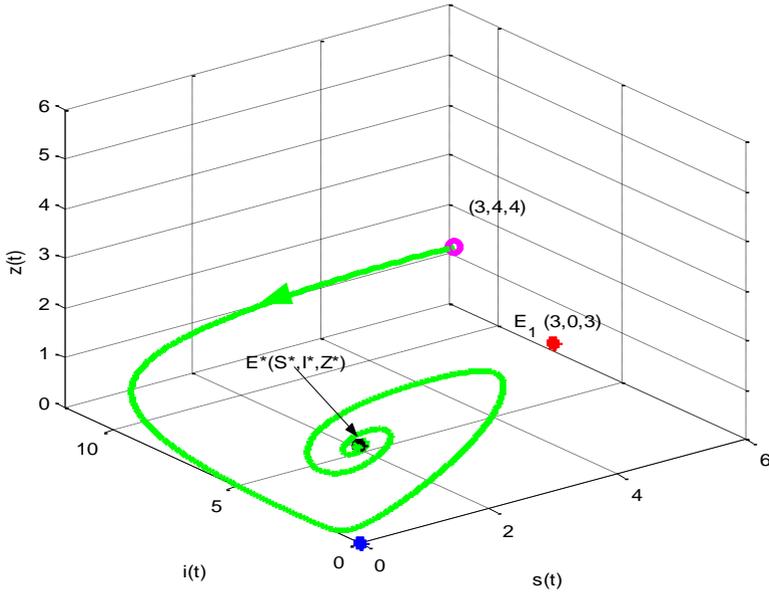
numerik mendukung hasil analisis bahwa untuk $R_0 < 1$ hanya ada nilai kesetimbangan bebas penyakit maka dapat dikatakan dalam simulasi ini tidak terjadi endemik.



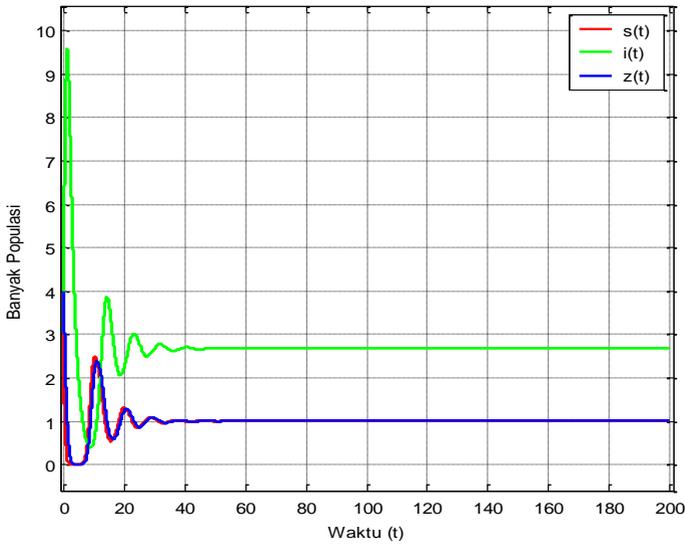
Gambar 3.2. Potret fase untuk $R_0 < 1$

3.4.2 Simulasi untuk $R_0 > 1$ dan $T < T^*$

Pada simulasi ini digunakan nilai $r = 2$, $k = 5$, $\beta = 0.5$, $\mu = 0.3$, $\gamma = 0.2$, dan $T = 0.58$. Berdasarkan parameter-parameter tersebut, titik kesetimbangan E_1 eksis dengan nilai awal (3,4,4). Pada Gambar 3.3 memperlihatkan potret fase yang menunjukkan kestabilan titik kesetimbangan E_1 . Titik E_1 mulai stabil pada waktu yang cukup lama yaitu $t=1000$. Grafik juga menunjukkan bahwa dalam kehidupan nyata dapat diinterpretasikan bahwa parameter pada simulasi ini menunjukkan terjadinya penyebaran penyakit dalam suatu populasi. Gambar 3.4 terlihat bahwa kelas *infective* dan *susceptive* masih mengalami osilasi dengan amplitudo yang semakin mengecil dan menuju ke suatu nilai



Gambar 3.3. Potret fase untuk $R_0 > 1$ dan $T < T^*$



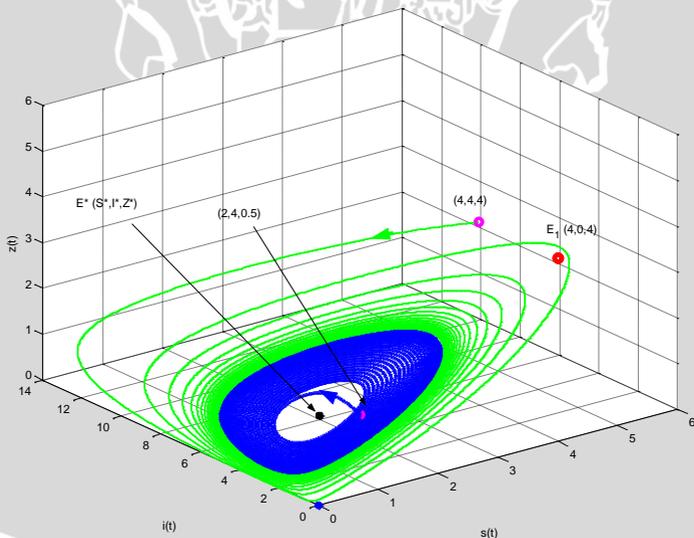
Gambar 3.4 Grafik solusi untuk $R_0 > 1$ dan $T < T^*$

3.4.3 Simulasi untuk $R_0 > 1$ dan $T > T^*$

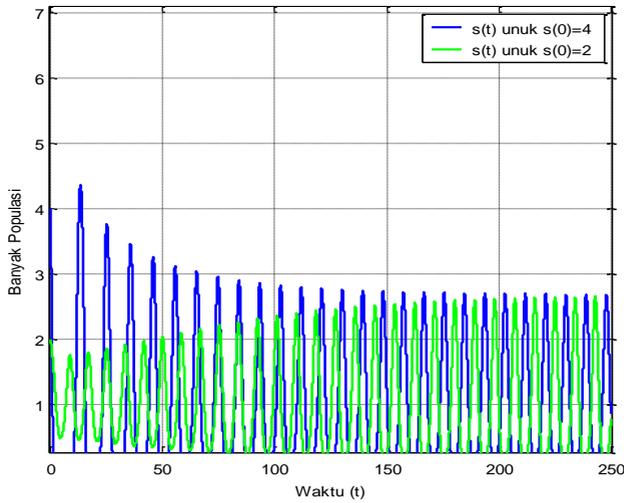
Pada simulasi ini digunakan nilai $r = 2$, $k = 5$, $\beta = 0,5$, $\mu = 0,3$, $\gamma = 0,2$, dan $T = 0,65$. Nilai parameter tersebut memenuhi syarat kestabilan $R_0 = 4.7619 > 1$ dan $T = 0,65 > T^* = 0.3645$. Nilai $S^* = 1.0101$, $I^* = 3.2242$ dan $Z^* = 1.0101$.

Berdasarkan pembahasan sebelumnya, ketika $R_0 > 1$ terdapat titik kesetimbangan bebas penyakit $E_1(k, 0, k)$ dan titik kesetimbangan endemik $E^*(S^*, I^*, Z^*)$. Potret fase pada Gambar 3.5 menunjukkan bahwa titik kesetimbangan endemik bersifat tidak stabil dan solusi dari sistem menuju ke orbit periodik.

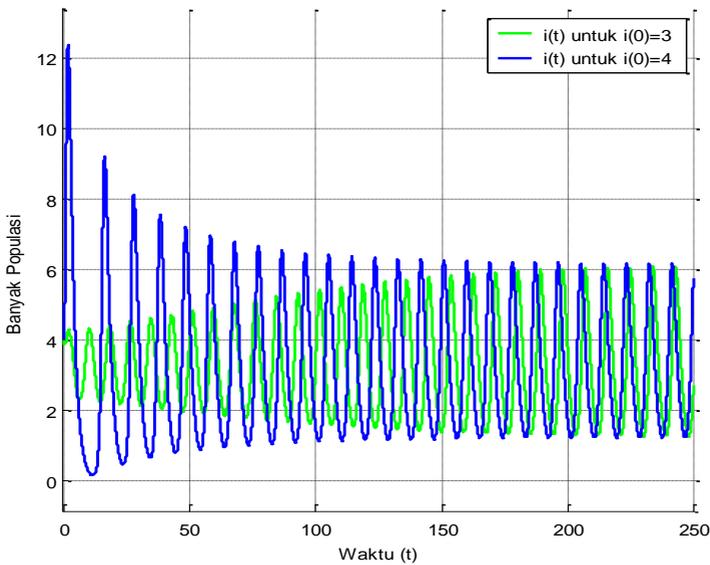
Gambar 3.6, 3.7 dan 3.8 dapat dilihat bahwa $S(t)$, $I(t)$ dan $Z(t)$ mengalami osilasi. Jika diambil nilai awal yang dekat dengan titik kesetimbangan, maka osilasi akan terus naik hingga mencapai amplitudo yang sama. Jika diambil nilai awal yang jauh dari titik kesetimbangan, maka osilasi akan terus turun hingga mencapai amplitudo yang sama.



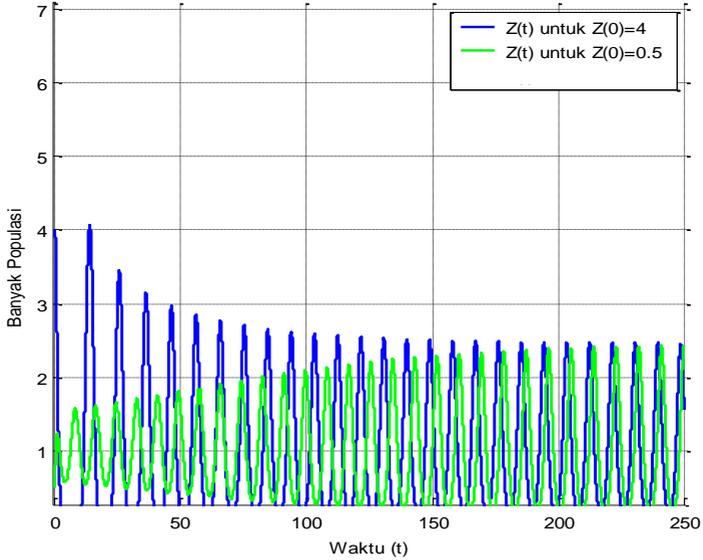
Gambar 3.5. Potret fase untuk $R_0 > 1$ dan $T > T^*$



Gambar 3.6. Grafik solusi $S(t)$ untuk $R_0 > 1$ dan $T > T^*$



Gambar 3.7. Grafik solusi $I(t)$ untuk $R_0 > 1$ dan $T > T^*$



Gambar 3.8. Grafik solusi $Z(t)$ untuk $R_0 > 1$ dan $T > T^*$

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



BAB IV KESIMPULAN

Berdasarkan tujuan pengerjaan skripsi ini dapat diambil kesimpulan sebagai berikut.

1. Model SIR dengan *kernel* tundaan berupa sistem otonomus nonlinier dengan tiga persamaan dan delapan parameter, dimana semua parameter bernilai positif.
2. Pada model SIR dengan *kernel* tundaan diperoleh dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas infeksi $E_1(k, 0, k)$ dan titik kesetimbangan endemik $E^*(x^*, y^*, z^*)$. Eksistensi tiga titik kesetimbangan tersebut ditentukan oleh R_0 . Apabila $R_0 < 1$ hanya terdapat satu titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan $E_1(k, 0, k)$. Sedangkan jika $R_0 > 1$ maka kedua titik kesetimbangan eksis.
3. Kestabilan titik kesetimbangan ditentukan oleh nilai R_0 dan T^* .
4. Titik kesetimbangan $E_1(k, 0, k)$ stabil asimtotik jika $R_0 < 1$ dan mengalami bifurkasi *Transkritikal* jika $R_0 = 1$. Titik kesetimbangan $E^*(x^*, y^*, z^*)$ eksis jika $R_0 > 1$ dan bersifat stabil asimtotik lokal untuk $T < T^*$, namun berubah menjadi tidak stabil jika $R_0 > 1$ dan $T > T^*$, sedangkan untuk $T = T^*$ titik kesetimbangan endemik mengalami bifurkasi *Hopf*.
5. Simulasi numerik yang dilakukan menunjukkan hasil yang sesuai dengan analisis.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



DAFTAR PUSTAKA

- Boyce, W. E. dan R. C. DiPrima. 2005. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems Eight Edition*. John Wiley&Sons Inc. USA.
- Dhar, J dan A.K Sharma. 2009. The Role of the Incubation Period in a Disease Model. *Applied Mathematics E-Notes*, Vol. 9, pp. 146-153
- Finizio, N. dan G. Ladas. 1982. *Ordinary Differential Equations with Modern Applications*. Second Edition. Wadsworth. USA.
- Guckenheimer J. dan P. Holmes. 1993. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag, New York
- Kar, T.K dan Mondal P.K. 2011. Global dynamics and bifurcation in delayed SIR epidemic model. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, vol.12
- Kuznetsov, Y. A. 1998. *Elements of Applied Bifurcations Theory, Second Edition, Applied Mathematical Science 112*. Springer-Verlag. New York, USA.
- Murray, J. D. 2002. *Mathematical Biology I: An Introduction Third Edition*. Springer–Verlag Berlin Heidelberg. Halaman 507.
- Nagle, R.K. dan E.B.Saff. 1993. *Fundamentals of Differential Equations and Boundary Value Problems*. Addison-Wesley. Florida.
- Robinson, R.C. 2004. *An Introduction to Dynamical System, Continuous and Discrete*. Pearson Education. United States of America.
- Verhulst, F. 1996. *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg

Wiggins, S. 1990. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical System and Chaos*. Springer-Verleg. New York.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA

