

**ANALISIS DINAMIK MODEL EPIDEMIK SIR DENGAN  
KERNEL TUNDAAN DAN LAJU INFEKSI TERSATURASI**

**SKRIPSI**

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar  
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

oleh  
**SYIVA FINDI ASTUTI**  
**0810943062-94**



**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS BRAWIJAYA  
MALANG  
2013**

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



**ANALISIS DINAMIK MODEL EPIDEMIK SIR DENGAN  
KERNEL TUNDAAN DAN LAJU INFEKSI TERSATURASI**

oleh  
**SYIVA FINDI ASTUTI**  
**0810943062-94**

**Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji  
pada tanggal ..... 2013  
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar  
Sarjana Sains dalam bidang Matematika**

**Dosen Pembimbing I**

**Dosen Pembimbing II**

**Dr. Wuryansari M.K., M.Si.**  
**NIP. 196607281993032001**

**Kwardiniya A., S.Si., M.Si**  
**NIP. 197006221998022001**

**Mengetahui,**  
**Ketua Jurusan Matematika**  
**Fakultas MIPA Universitas Brawijaya**

**Dr. Abdul Rouf A., M.Sc.**  
**NIP. 196709071992031001**

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



## LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Syiva Findi Astuti

NIM : 081094062

Jurusan : Matematika

Penulis skripsi berjudul : Analisis Dinamik Model Epidemik  
*SIR* dengan Kernel Tundaan dan Laju Infeksi Tersaturasi

dengan ini menyatakan bahwa

1. skripsi ini adalah benar-benar karya saya sendiri dan bukan hasil plagiat dari karya orang lain. Karya-karya yang tercantum dalam Daftar Pustaka skripsi ini semata-mata digunakan sebagai acuan/referensi.
2. Apabila di kemudian hari diketahui bahwa isi skripsi saya merupakan hasil plagiat, maka saya bersedia menanggung akibat hukum dari keadaan tersebut.

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang,  
yang menyatakan,

(Syiva Findi Astuti)  
NIM. 0810943062

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



# ANALISIS DINAMIK MODEL EPIDEMIK SIR DENGAN KERNEL TUNDAAN DAN LAJU INFEKSI TERSATURASI

## ABSTRAK

Pada skripsi ini dibahas model epidemik *SIR* dengan *kernel* tundaan, variabel informasi dan laju infeksi tersaturasi, dimana individu rentan diasumsikan memenuhi persamaan logistik dan laju kejadian adalah bentuk tersaturasi. Eksistensi dan kestabilan lokal titik kesetimbangan ditentukan dan dipengaruhi oleh bilangan reproduksi dasar  $R_0$ . Terdapat dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit yang stabil bila angka reproduksi dasar kurang dari satu, dan titik kesetimbangan endemik yang stabil bila angka reproduksi dasar lebih dari satu. Model ini mengalami dua bifurkasi yaitu bifurkasi transkritikal dan bifurkasi *Hopf*. Selanjutnya simulasi numerik diberikan untuk mengilustrasikan hasil analisis.

**Kata Kunci :** Model epidemik *SIR*, bifurkasi transkritikal, bifurkasi *Hopf*, kernel tundaan, tingkat kejadian infeksi tersaturasi.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA





# DYNAMICAL ANALYSIS OF SIR EPIDEMIC MODEL WITH DELAYING KERNEL AND SATURATED INCIDENCE RATE

## ABSTRACT

The final project discusses a SIR epidemic model with time delay, information variable and saturated incidence rate, where the susceptibles are assumed to satisfy the logistic equation and the incidence term, in the saturated form of susceptible. Existence and local stability of equilibrium points are determined by basic reproduction number  $R_0$ . There are two equilibrium points, namely free disease equilibrium point, which is stable if the basic reproduction number less than one, and the endemic equilibrium point, which is stable if the basic reproduction number is greater than one. This model exhibits two bifurcations, namely transcritical bifurcation and Hopf bifurcation. Numerical simulations are carried out to explain the analytical results.

**Keyword** : *SIR epidemic model, transcritical bifurcation, Hopf bifurcation, delaying kernel, saturated incidence rate.*

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



## KATA PENGANTAR

Alhamdulillah Robbil ‘Aalamin, puji syukur ke hadirat Allah SWT yang senantiasa memberikan rahmat serta hidayah-Nya kepada penulis sehingga skripsi berjudul “Bifurkasi *Transkritisal* dan *Hopf* pada Model Epidemik *SIR* dengan Kernel Tundaan dan Laju Infeksi Tersaturasi” dapat diselesaikan dengan sebaik-baiknya. Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada teladan kita Nabi Muhammad SAW, seluruh keluarga, para sahabat dan pengikutnya yang setia sampai hari kiamat.

Skripsi ini merupakan sebagian persyaratan kelulusan dalam memperoleh gelar kesarjanaan di Fakultas MIPA Jurusan Matematika Universitas Brawijaya.

Penyelesaian skripsi ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak. Untuk itu ucapan terima kasih yang sebanyak-banyaknya penulis haturkan kepada:

1. Dr. Wuryansari M.K., M.Si dan Kwardiniya A., S.Si., M.Si selaku dosen pembimbing atas segala bimbingan, motivasi, bantuan serta kesabaran yang telah diberikan selama penulisan skripsi ini.
2. Dr. Agus Suryanto, M.Sc selaku dosen penguji atas segala saran yang diberikan untuk perbaikan skripsi ini.
3. Dr. Abdul Rouf A., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika dan Dr. Sobri Abusini, M.T. selaku Ketua Program Studi Matematika,
4. Seluruh Bapak/Ibu Dosen Jurusan Matematika yang telah memberikan bekal ilmu pengetahuannya kepada penulis, serta segenap staf dan karyawan TU Jurusan Matematika atas segala bantuannya.
5. Bapak, Ibu, Adek Asrhy, Adek Novi, dan seluruh keluarga besar atas semua dukungan dan doa yang selalu dipanjatkan untuk penulis.
6. Sahabat-sahabat penulis yang selalu menghibur, memotivasi dan memberikan dukungan serta do'a kepada penulis, Aya, Trianai, Nurul teman-teman kos semanggi baraters It3
7. Teman-teman seperjuangan Riva, Mazi, Heni, Mimin, Nisa, Icha, Weny, Andan, Kiky, dan seluruh keluarga besar Matematika khususnya Matematika 2008 atas segala bantuan, dukungan, doa serta kebersamaan selama ini.
8. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Seperti kata pepatah “tak ada gading yang tak retak”, skripsi ini pun masih banyak kekurangan dan jauh dari sempurna. Oleh karena itu penulis mengharapkan saran dan kritik melalui [syivafindy@gmail.com](mailto:syivafindy@gmail.com). Akhir kata penulis berharap skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua baik pembaca maupun penulis.

Malang, Juli 2013

Penulis.



## DAFTAR ISI

	Halaman
<b>HALAMAN JUDUL</b> .....	i
<b>LEMBAR PENGESAHAN</b> .....	iii
<b>LEMBAR PERNYATAAN</b> .....	v
<b>ABSTRAK</b> .....	vii
<b>ABSTRACT</b> .....	ix
<b>KATA PENGANTAR</b> .....	xi
<b>DAFTAR ISI</b> .....	xiii
<b>DAFTAR TABEL</b> .....	xv
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	xvii
<b>BAB I PENDAHULUAN</b> .....	1
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	2
1.3 Batasan Masalah .....	2
1.4 Tujuan .....	2
<b>BAB II TINJAUAN PUSTAKA</b> .....	3
2.1 Persamaan Diferensial .....	3
2.2 Sistem Dinamik.....	4
2.3 Kriteria Kestabilan Routh-Hurwitz.....	10
2.4 Bifurkasi <i>Hopf</i> .....	12
2.5 Bifurkasi Transkritikal.....	14
2.6 Model SIR.....	15
<b>BAB III PEMBAHASAN</b> .....	17
3.1 Formulasi Model .....	17
3.2 Titik Keseimbangan dan Bilangan Reproduksi Dasar .....	21
3.3 Kestabilan Titik Keseimbangan .....	23
3.3.1 Titik Keseimbangan $E_1(k, \mathbf{0}, k)$ .....	24
3.3.2 Titik Keseimbangan $E^*(S^*, I^*, Z^*)$ .....	25
3.4 Simulasi Numerik.....	28
3.4.1 Simulasi untuk $R_0 < 1$ .....	28
3.4.2 Simulasi untuk $R_0 > 1$ dan $T < T^*$ .....	29
3.4.3 Simulasi untuk $R_0 > 1$ dan $T > T^*$ .....	31

<b>BAB IV KESIMPULAN</b> .....	33
Kesimpulan .....	35
<b>DAFTAR PUSTAKA</b> .....	37

**UNIVERSITAS BRAWIJAYA**



## DAFTAR TABEL

Tabel 3.1 Syarat eksistensi dan kestabilan titik kesetimbangan ..... 28

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



UNIVERSITAS BRAWIJAYA





## DAFTAR GAMBAR

	Halaman
Gambar 2.1 Bifurkasi <i>Hopf Supercritical</i> .....	13
Gambar 2.2 Bifurkasi <i>Hopf Subcritical</i> .....	14
Gambar 2.3 Bifurkasi <i>transkritikal</i> .....	15
Gambar 2.4 Model epidemik <i>SIR</i> .....	15
Gambar 3.1 Diagram kompartemen model epidemik <i>SIR</i> .....	17
Gambar 3.2 Potret fase untuk $R_0 < 1$ .....	29
Gambar 3.3 Potret fase untuk $R_0 > 1$ dan $T < T^*$ .....	30
Gambar 3.4 Grafik solusi untuk $R_0 > 1$ dan $T < T^*$ .....	30
Gambar 3.5 Potret fase untuk $R_0 > 1$ dan $T > T^*$ .....	31
Gambar 3.6 Grafik solusi $S(t)$ untuk $R_0 > 1$ dan $T > T^*$ .....	32
Gambar 3.7 Grafik solusi $I(t)$ untuk $R_0 > 1$ dan $T > T^*$ .....	32
Gambar 3.8 Grafik solusi $Z(t)$ untuk $R_0 > 1$ dan $T > T^*$ .....	33



UNIVERSITAS BRAWIJAYA

