

**ANALISIS DINAMIK MODEL SIKLUS BISNIS IS-LM
(INVESTMENT SAVING– LIQUIDITY MONEY) DENGAN
WAKTU TUNDA PADA STOK MODAL**

SKRIPSI

oleh:
REZA AUGUSTA JANNATUL FIRDAUS
0910940030-94



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2013**

**ANALISIS DINAMIK MODEL SIKLUS BISNIS IS-LM
(INVESTMENT SAVING– LIQUIDITY MONEY) DENGAN
WAKTU TUNDA PADA STOK MODAL**

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

oleh:

REZA AUGUSTA JANNATUL FIRDAUS
0910940030-94



JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2012

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

**ANALISIS DINAMIK MODEL SIKLUS BISNIS *IS-LM*
(*INVESTMENT SAVING–LIQUIDITY MONEY*) DENGAN
WAKTU TUNDA PADA STOK MODAL**

oleh

**REZA AUGUSTA JANNATUL FIRDAUS
0910940030-94**

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji
pada tanggal 30 Juli 2013
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Pembimbing

**Dra. Trisilowati, M.Sc
NIP.196309261989032001**

**Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya**

**Dr. Abdul Rouf A., M.Sc.
NIP. 196709071992031001**

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : REZA AUGUSTA JANNATUL
FIRDAUS
NIM : 0910940030
Jurusan : Matematika
Penulis skripsi berjudul : Analisis Dinamik Model Siklus
Bisnis *IS-LM (Investment Saving–
Liquidity Money)* dengan Waktu
Tunda pada Stok Modal

dengan ini menyatakan bahwa :

1. skripsi ini adalah hasil pemikiran saya, bukan hasil plagiat dari tulisan orang lain. Rujukan-rujukan yang tercantum pada daftar pustaka hanya digunakan sebagai acuan atau referensi.
2. Apabila suatu saat nanti diketahui bahwa isi skripsi saya merupakan hasil plagiat, maka saya bersedia menanggung akibat hukum dari keadaan tersebut.

Demikian pernyataan ini dibuat dengan penuh kesadaran.

Malang, 30 Juli 2013
yang menyatakan,

REZA AUGUSTA JANNATUL FIRDAUS
NIM 0910940030

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



Analisis Dinamik Model Siklus Bisnis *IS-LM*
(*Investment Saving– Liquidity Money*) dengan Waktu Tunda
pada Stok Modal

ABSTRAK

Pada skripsi ini dikaji model siklus bisnis *IS-LM* dengan waktu tunda pada stok modal yang diperkenalkan oleh Kaddar dan Talibi. Model tersebut direpresentasikan dalam bentuk sistem otonomus linear dengan tiga variabel tak bebas yang melambangkan pendapatan, stok modal, dan suku bunga serta melibatkan fungsi investasi, simpanan, permintaan uang dan konstanta persediaan akan uang. Waktu tunda diberikan dengan mempertimbangkan asumsi bahwa dibutuhkan waktu persiapan agar investasi dapat digunakan sebagai stok modal untuk produksi. Analisis dinamik seperti penentuan titik kesetimbangan, kestabilan titik kesetimbangan, dan pengaruh waktu tunda terhadap model dihadirkan dalam pembahasan. Adanya nilai kritis tundaan yang memenuhi kondisi transversal menyebabkan terjadinya bifurkasi Hopf. Pada bagian akhir disimulasikan hasil analisis yang telah diperoleh secara numerik.

Kata kunci : model *IS-LM*, siklus bisnis, analisis dinamik, bifurkasi Hopf.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



Dynamical Analysis of IS-LM (Investment Saving-Liquidity Money) Business Cycle Model with Capital Stock Delay

ABSTRACT

In this final project, a delayed business cycle of IS-LM model by Kaddar and Talibi is discussed. This model is represented by an autonomous linear system with three dependent variables, namely income, capital stock, and interest rate. It also involves investment, saving, demand for money function and constant money supply. Delay is given by considering the assumption that preparation time is needed before an investment can be used for production. Dynamical analysis such as equilibrium point determination, stability of equilibrium point, and the effect of delay are presented. The existence of critical time delay that satisfies transversal condition causes Hopf bifurcation. Finally, the result of dynamical analysis are simulated numerically.

Keywords : *IS-LM model, business cycle, dynamical analysis, Hopf bifurcation*

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur atas segala rahmat, petunjuk, hidayah serta bantuan yang Allah SWT berikan, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul *Analisis Dinamik Model Siklus Bisnis IS-LM (Investment Saving– Liquidity Money) dengan Waktu Tunda pada Stok Modal* dengan baik. Shalawat serta salam selalu tercurahkan kepada junjungan kita Nabi Muhammad SAW.

Skripsi ini tidak dapat diselesaikan dengan baik tanpa bantuan, bimbingan serta motivasi dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis ingin menyampaikan terima kasih kepada

1. Dra. Trisilowati, M.Sc selaku dosen pembimbing, atas segala bimbingan, motivasi, bantuan, serta kesabaran yang telah diberikan selama penulisan skripsi ini.
2. Dr. Wuryansari Muharini K., M.Si., dan Dr. Agus Suryanto, M.Sc. selaku dosen penguji, atas segala masukan berupa kritik dan saran yang telah diberikan untuk perbaikan skripsi ini.
3. Dr. Abdul Rouf A., MSc. selaku Ketua Jurusan Matematika, dan Dr. Sobri Abusini, MT. selaku Ketua Program Studi Matematika.
4. Seluruh dosen Jurusan Matematika yang telah memberikan ilmunya kepada penulis, serta segenap staf dan karyawan TU Jurusan Matematika atas segala bantuannya.
5. Ibu, Ayah, Adik, dan seluruh keluarga besarku atas segala doa, bantuan, dan motivasi yang tak pernah habis diberikan.
6. Rif'an, Fauzan, Bahrul, Ochi, Sylvia, Lukman, Fajar, Eko, Ikwana dan teman-teman seperjuangan Matematika B 2009 atas semua motivasi dan kesediaan bantuannya kapan pun penulis perlukan.
7. Semua mahasiswa Angkatan 2010 yang memberikan banyak sekali pelajaran berharga bagi penulis.
8. *The last but most unforgettable*, penulis ingin meminta maaf sekaligus berterima kasih kepada seseorang yang selalu penulis jadikan motivasi, baik dalam belajar maupun dalam proses penulisan skripsi ini.

Sebagai manusia yang memiliki keterbatasan dan tidak luput dari kesalahan, penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini

masih terdapat kekurangan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran yang bersifat membangun, melalui email ke alamat Reza.8th@gmail.com.

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi berbagai pihak, serta menjadi sumber inspirasi untuk penulisan skripsi selanjutnya.

Malang, 30 Juli 2013

Penulis



DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PENGESAHAN	iii
HALAMAN PERNYATAAN	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR GAMBAR	xv
DAFTAR TABEL	xvii
DAFTAR LAMPIRAN	xix
BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	2
1.3 Tujuan	3
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	
2.1 Sistem Dinamik	5
2.2 Sistem Otonomus	5
2.3 Titik Keseimbangan.....	5
2.4 Kestabilan Titik Keseimbangan Sistem Otonomus linear	6
2.5 Kriteria Kestabilan Routh-Hurwitz	7
2.6 Persamaan Diferensial Tundaan	8
2.7 Eksistensi Nilai Kritis Tundaan.....	8
2.8 Bifurkasi Hopf	11
2.8.1 Kondisi Transversal.....	11
2.9 Fungsi Investasi, Simpanan, dan Permintaan Uang	13
2.10 Model Siklus Bisnis <i>IS-LM</i>	14
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN	
3.1 Pengembangan Model	17
3.2 Titik Keseimbangan Model.....	17
3.3 Kestabilan Titik Keseimbangan $E^*(Y^*, K^*, R^*)$	18
3.4 Simulasi Numerik	26

3.4.1 Simulasi 1	26
3.4.2 Simulasi 2	27

BAB IV KESIMPULAN DAN SARAN

4.1 Kesimpulan	31
4.2 Saran	31

DAFTAR PUSTAKA	33
-----------------------------	----

LAMPIRAN	35
-----------------------	----



DAFTAR GAMBAR

	Halaman
Gambar 3.1 Potret fase model dengan $\tau = 0.75$	26
Gambar 3.2 Potret fase model dengan $\tau = 6$	27
Gambar 3.3 Potret fase model dengan $\tau = 0.5$	28
Gambar 3.4 Potret fase model dengan $\tau = 0.99$	29



DAFTAR TABEL

	Halaman
Tabel 3.3.1 Syarat eksistensi dan kestabilan titik kesetimbangan	25
Tabel 3.4.1.1 Parameter untuk Simulasi 1	26
Tabel 3.4.2.1 Parameter untuk Simulasi 2	27

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



DAFTAR LAMPIRAN

	Halaman
Lampiran 1 Perhitungan nilai $E^* = (Y^*, R^*, K^*)$	35
Lampiran 2 Penurunan Persamaan Karakteristik Model	39
Lampiran 3 Penurunan Bagian Real dan Imajiner Persamaan (3.6).....	41
Lampiran 4 Eliminasi τ pada persamaan (3.10) dan Persamaan (3.11).....	43
Lampiran 5 Pembuktian Lemma 3.2.....	45
Lampiran 6 <i>Source Code</i> Program.....	47



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Secara garis besar ilmu ekonomi terbagi menjadi dua cabang utama, yakni ekonomi mikro dan ekonomi makro. Pembagian tersebut didasarkan pada ruang lingkup kajiannya. Ekonomi mikro lebih terfokus pada keputusan-keputusan individu baik sektor rumah tangga maupun perusahaan dalam melakukan optimalisasi berdasarkan tujuan yang ingin dicapai dan hambatan yang mereka hadapi. Sementara itu, ekonomi makro berfokus pada perubahan ekonomi yang mempengaruhi banyak pelaku ekonomi seperti masyarakat, perusahaan dan pasar. Hal-hal yang dibahas dalam ekonomi makro umumnya berkaitan dengan pendapatan nasional, jumlah uang yang beredar, pengeluaran, simpanan, investasi nasional, tingkat bunga, dan sebagainya. Berbagai hal sudah dilakukan untuk mengkaji dinamika perekonomian yang senantiasa mengalami perubahan, salah satunya dengan memodelkan permasalahan tersebut dalam bentuk sistem persamaan diferensial dengan rentang waktu yang kontinu. Demikian juga pada ekonomi makro, para ekonom mencoba memodelkan permasalahan tersebut dalam model siklus bisnis. Model siklus bisnis adalah model yang menggambarkan fluktuasi dari beberapa kegiatan ekonomi di suatu wilayah tertentu. Salah satu model siklus bisnis yang cukup terkenal yaitu model *IS-LM* (*Investment Saving-Liquidity Money*) (Gregory, 2002).

Model *IS-LM* merupakan salah satu model siklus bisnis yang direpresentasikan dalam bentuk sistem dinamik dan melibatkan fungsi investasi (I), fungsi simpanan (S), fungsi permintaan akan uang (L), dan persediaan uang (M). Pada 1940, Kaldor memperkenalkan model siklus bisnis *IS-LM* yang pertama dalam bentuk sistem dua persamaan yang menggambarkan laju pendapatan dan laju stok modal. Setelah itu pada 1977, Torre memperkenalkan model baru yang berbentuk sistem dua persamaan yang menggambarkan laju pendapatan dan laju suku bunga. Selanjutnya Gabisch dan Lorenz (1989) membuat model baru yang merupakan penggabungan dari dua model sebelumnya serta menambahkan beberapa asumsi baru. Kalecki (1935) menyatakan bahwa sebagian dari keuntungan diinvestasikan dan pertumbuhan modal merupakan

hasil dari investasi di masa lalu, sehingga diperlukan masa persiapan atau penundaan sampai modal tersedia untuk melakukan produksi. Berdasarkan ide Kalecki ini, Cai (2005) membuat model siklus bisnis *IS-LM* dengan menambahkan waktu tunda pada model Gabisch dan Lorenz, akan tetapi penambahan waktu tunda pada laju stok modal hanya dilakukan di dalam variabel pendapatan pada fungsi investasi, karena menurut Cai investasi hanya bergantung pada pendapatan saat investasi pertama kali dilakukan dan juga pada stok modal pada saat waktu untuk berinvestasi berakhir. Kemudian pada 2008, Kaddar dan Talibi membuat model siklus bisnis *IS-LM* dengan waktu tunda. Perbedaan model ini dengan model Cai terletak pada laju stok modal, penambahan waktu tunda terdapat pada semua variabel fungsi investasi tidak hanya pada variabel pendapatan. Pada model Kaddar dan Talibi, waktu tunda (τ) diberikan dengan mempertimbangkan asumsi bahwa dibutuhkan waktu persiapan agar investasi bisa digunakan sebagai stok modal untuk produksi.

Dalam skripsi ini akan dikaji ulang model siklus bisnis *IS-LM* yang diperkenalkan oleh Kaddar dan Talibi. Kemudian dibahas titik kesetimbangan, syarat eksistensi, dan kestabilan titik kesetimbangan. Pada bagian akhir, disimulasikan secara numerik hasil analisis model *IS-LM* yang telah diperoleh dengan menggunakan program matlab.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, dapat disusun rumusan masalah sebagai berikut.

1. Bagaimana mengkonstruksi model siklus bisnis *IS-LM* dengan waktu tunda?
2. Bagaimana menentukan titik kesetimbangan model?
3. Bagaimana syarat eksistensi titik kesetimbangan model?
4. Bagaimana kestabilan titik kesetimbangan model?
5. Bagaimana simulasi numerik model?

1.3 Tujuan

Tujuan penulisan skripsi ini adalah sebagai berikut.

1. Mengkontruksi model siklus bisnis *IS-LM* dengan waktu tunda.
2. Menentukan titik kesetimbangan model.
3. Mengetahui syarat eksistensi titik kesetimbangan model.
4. Mengetahui kestabilan titik kesetimbangan model.
5. Melakukan simulasi numerik model.



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



BAB II TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Sistem Dinamik

Sistem dinamik adalah suatu sistem yang dapat diketahui kondisinya di masa yang akan datang jika diberikan kondisi pada masa sekarang atau pada masa yang lalu. Perhatikan sistem dinamik yang dinyatakan dalam bentuk persamaan diferensial berikut.

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad (2.1)$$

dengan $x(t)$ merupakan solusi dari sistem (2.1) pada saat t . (Nagle dan Saff, 2004).

2.2 Sistem Otonomus

Grigorian (2009) menyebutkan bahwa sistem otonomus adalah suatu sistem dimana variabel bebas tidak dinyatakan secara eksplisit. Misal diberikan sistem dalam bentuk persamaan diferensial biasa orde satu yang terdiri dari dua fungsi dengan bentuk umum

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(x(t), y(t)), \\ y'(t) &= g(x(t), y(t)). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Sistem (2.2) disebut sebagai sistem otonomus, karena masing-masing ruas kanan persamaan tidak bergantung secara eksplisit pada variabel bebas t .

2.3 Titik Kesetimbangan

Panfilov (2004) menyebutkan bahwa titik kesetimbangan sistem merupakan titik dimana sistem tersebut tidak mengalami perubahan sepanjang waktu. Secara matematis, definisi titik kesetimbangan diberikan pada Definisi 2.3.1.

Definisi 2.3.1

Suatu titik (x_1^*, x_2^*) disebut titik kesetimbangan sistem (2.2) jika

$$x'(t) = f(x(t), y(t)) = 0,$$

$$y'(t) = g(x(t), y(t)) = 0.$$

2.4 Kestabilan Titik Kesetimbangan Sistem Otonomus Linear

Grigorian (2009) menyebutkan bahwa suatu sistem otonomus dikatakan linear jika tidak terdapat operasi non linear antara variabel tak bebasnya. Perhatikan sistem otonomus linear berikut.

$$\begin{aligned}x_1'(t) &= ax_1 + bx_2 + cx_3, \\x_2'(t) &= dx_1 + ex_2 + fx_3, \\x_3'(t) &= gx_1 + hx_2 + ix_3,\end{aligned}\tag{2.3}$$

dengan $a, b, c, d, e, f, g, h, i \in R$. Sistem (2.3) dapat dinyatakan dalam bentuk matriks sebagai

$$\begin{bmatrix}x_1'(t) \\x_2'(t) \\x_3'(t)\end{bmatrix} = A \begin{bmatrix}x_1(t) \\x_2(t) \\x_3(t)\end{bmatrix},$$

dengan $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$, dan $|A| \neq 0$,

Akar persamaan karakteristik merupakan solusi dari persamaan $|A - \lambda I| = 0$. Akar persamaan karakteristik yang diperoleh, digunakan untuk menentukan jenis kestabilan titik kesetimbangan sistem (2.3). Menurut Edward dan Penney (2001) kriteria jenis kestabilan sistem otonomus linear berdasarkan akar persamaan karakteristik di berikan pada Teorema 2.4.1 di bawah ini.

Teorema 2.4.1

Misalkan λ_1, λ_2 , dan λ_3 adalah nilai eigen matriks A . Titik kesetimbangan (x_1^*, x_2^*, x_3^*) bersifat

1. **stabil**, jika ketiga nilai eigen λ_1, λ_2 , dan λ_3 mempunyai bagian real tak positif,
2. **tidak stabil**, jika sedikitnya satu nilai eigen mempunyai bagian real yang positif.

(Edward dan Penney, 2001).

2.5 Kriteria Kestabilan Routh-Hurwitz

Jika suatu sistem linear mempunyai persamaan karakteristik berbentuk

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0, \quad (2.4)$$

maka kestabilan titik kesetimbangannya dapat ditentukan dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz tanpa harus menentukan nilai eigennya.

Teorema 2.5.1

Dengan menggunakan koefisien-koefisien persamaan (2.4) dibangun m matriks, dengan $2m - 1 = n$, yaitu

$$H_1 = [a_1], H_2 = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{bmatrix}, H_3 = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{bmatrix},$$

$$H_j = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2j-1} & a_{2j-2} & a_{2j-3} & a_{2j-4} & \dots & a_j \end{bmatrix}, \dots, H_m = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_m \end{bmatrix}.$$

Titik kesetimbangan sistem linear berdimensi n bersifat stabil jika dan hanya jika determinan matriks *Routh-Hurwitz* positif, yakni

$$\text{Det } H_i > 0 \text{ untuk } i = 1, 2, 3, \dots, m$$

(Murray, 2002).

Untuk suatu sistem linear tiga dimensi yang mempunyai persamaan karakteristik berbentuk

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0,$$

syarat agar titik kesetimbangan sistem bersifat stabil adalah

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & |H_1| = a_1 > 0, \\ \text{(ii)} \quad & |H_2| = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = a_1a_2 - a_3 > 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

2.6 Persamaan Diferensial Tundaan

Menurut Kuang (1993), persamaan diferensial dengan tundaan dinyatakan dalam bentuk

$$x'(t) = f_1(x(t), x(t - \tau)), \quad (2.6)$$

atau dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k}{dt^k} x(t) + \sum_{k=0}^m b_k \frac{d^k}{dt^k} x(t - \tau) = 0, \quad (2.7)$$

di mana τ adalah waktu tunda dan $\frac{d^0}{dt^0} x(t) = x(t)$.

Misalkan $x(t) = e^{\lambda t}$, maka

$$\sum_{k=0}^n a_k \lambda^k e^{\lambda t} + \sum_{k=0}^m b_k \lambda^k e^{\lambda(t-\tau)} = 0$$
$$e^{\lambda t} \left(\sum_{k=0}^n a_k \lambda^k + \sum_{k=0}^m b_k \lambda^k e^{-\lambda \tau} \right) = 0.$$

Karena $e^{\lambda t} \neq 0$, maka

$$\sum_{k=0}^n a_k \lambda^k + \sum_{k=0}^m b_k \lambda^k e^{-\lambda \tau} = 0. \quad (2.8)$$

Persamaan (2.8) disebut persamaan karakteristik untuk persamaan (2.7). Misalkan

$$P_1(\lambda) = \sum_{k=0}^n a_k \lambda^k \quad \text{dan} \quad P_2(\lambda) = \sum_{k=0}^m b_k \lambda^k,$$

maka persamaan (2.8) dapat ditulis kembali sebagai

$$P_1(\lambda) + P_2(\lambda)e^{-\lambda \tau} = 0 \quad (2.9)$$

(Kuang, 1993).

2.7 Eksistensi Nilai Kritis Tundaan

Jika $\tau = 0$ maka sistem persamaan (2.6) akan menjadi persamaan diferensial biasa yang jenis kestabilannya dapat dianalisis menggunakan kriteria pada Tabel 2.4.1. Menurut Forde (2005),

untuk $\tau \neq 0$ akar karakteristik λ akan mengalami perubahan. Misalkan $\lambda_j = u_j \pm iv_j$, dengan $j = 1, 2, 3$. Kriteria kestabilan pada Tabel 2.4.1 menyatakan, sistem (2.6) bersifat stabil jika $u_j < 0$ dan tidak stabil jika $u_j > 0$. Penambahan waktu tunda pada sistem (2.6) mengakibatkan adanya nilai kritis tundaan. Nilai kritis ini menyebabkan terjadinya transisi dari $u_j < 0$ ke $u_j > 0$. Dengan demikian, untuk mengamati terjadinya perubahan tersebut dipilih $u_j = 0$. Oleh karena itu, akar persamaan karakteristik (2.9) adalah akar karakteristik kompleks murni.

Misal akar persamaan karakteristik (2.9) adalah $\lambda = iv, \eta > 0, \eta \in \mathbb{R}$, oleh karena itu persamaan (2.8) menjadi

$$P_1(iv) + P_2(iv)e^{-iv\tau} = 0.$$

Jika bagian polinomial dipisah menjadi bagian real dan imajiner serta suku eksponennya diubah dalam bentuk trigonometri, maka diperoleh

$$R_1(v) + iQ_1(v) + (R_2(v) + iQ_2(v))(\cos v\tau - i \sin v\tau) = 0, \quad (2.10)$$

dengan

$$R_1(v) = \sum_j (-1)^{j+1} a_j v^{2j}; \quad Q_1(v) = \sum_j (-1)^j a_{j+1} v^{2j+1}$$

$$R_2(v) = \sum_j (-1)^{j+1} b_j v^{2j}; \quad Q_2(v) = \sum_j (-1)^j b_{j+1} v^{2j+1}.$$

Agar persamaan (2.10) dipenuhi, bagian real dan imajiner harus sama dengan nol sehingga

$$R_1(v) + R_2(v) \cos v\tau + Q_2(v) \sin v\tau = 0$$

$$Q_1(v) - R_2(v) \sin v\tau + Q_2(v) \cos v\tau = 0,$$

atau

$$-R_1(v) = R_2(v) \cos v\tau + Q_2(v) \sin v\tau \quad (2.11)$$

$$Q_1(v) = R_2(v) \sin v\tau - Q_2(v) \cos v\tau.$$

Jika persamaan (2.11) dikuadratkan, maka diperoleh

$$(R_1(v))^2 = (R_2(v))^2 \cos^2 v\tau + (Q_2(v))^2 \sin^2 v\tau \quad (2.12) \text{ (a)}$$

$$+ 2R_2(v)Q_2(v) \sin v\tau \cos v\tau,$$

dan

$$\begin{aligned} (Q_1(v))^2 &= (R_2(v))^2 \sin^2 v\tau + (Q_2(v))^2 \cos^2 v\tau \\ &\quad - 2R_2(v)Q_2(v) \sin v\tau \cos v\tau. \end{aligned} \quad (2.12) \text{ (b)}$$

Selanjutnya, kedua persamaan (2.12) (a) dan (b) dijumlahkan sehingga diperoleh

$$(R_1(v))^2 + (Q_1(v))^2 = (R_2(v))^2 + (Q_2(v))^2. \quad (2.13)$$

Misal v_0 memenuhi persamaan (2.13) dan $d = \sqrt{(R_2(v))^2 + (Q_2(v))^2}$, maka persamaan (2.11) dapat ditulis kembali dalam v_0 sebagai

$$-R_1(v_0) = d \left(\frac{R_2(v_0)}{d} \cos v_0\tau + \frac{Q_2(v_0)}{d} \sin v_0\tau \right)$$

$$Q_1(v_0) = d \left(\frac{R_2(v_0)}{d} \sin v_0\tau + \frac{Q_2(v_0)}{d} \cos v_0\tau \right).$$

Misal $\frac{R_2(v_0)}{d} = \cos \beta$ dan $\frac{Q_2(v_0)}{d} = \sin \beta$, maka

$$-R_1(v_0) = d(\cos \beta \cos v_0\tau + \sin \beta \sin v_0\tau) \quad (2.14) \text{ (a)}$$

$$Q_1(v_0) = d(\cos \beta \sin v_0\tau + \sin \beta \cos v_0\tau). \quad (2.14) \text{ (b)}$$

Dengan menggunakan sifat-sifat trigonometri diperoleh

$$\begin{aligned} -R_1(v_0) &= d \cos(v_0\tau - \beta) \\ Q_1(v_0) &= d \sin(v_0\tau - \beta). \end{aligned}$$

Nilai τ^* dapat diperoleh dari persamaan (2.14), yaitu dengan mengalikan (2.14)(a) dengan $\cos \beta$ dan (2.14)(b) dengan $\sin \beta$ kemudian kedua persamaan dikurangkan, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} -R_1(v_0) \cos \beta - Q_1(v_0) \sin \beta &= d \cos^2 \beta \cos v_0\tau + d \sin^2 \beta \cos v_0\tau \\ -R_1(v_0) \cos \beta - Q_1(v_0) \sin \beta &= d \cos v_0\tau \end{aligned}$$

$$v_0\tau = \arccos \left\{ \frac{-R_1(v_0) \cos \beta - Q_1(v_0) \sin \beta}{d} \right\} + 2n\pi,$$

$$\tau_n^* = \frac{1}{v_0} \arccos \left\{ \frac{-R_1(v_0) \cos \beta - Q_1(v_0) \sin \beta}{d} \right\} + \frac{2n\pi}{v_0} \quad (2.15)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

Persamaan (2.15) menunjukkan terdapat tak berhingga τ^* yang memenuhi persamaan (2.10). Karena terdapat tak berhingga nilai n , dipilih $n = 0$ agar efektif. Nilai $\tau^* = \tau_0$ inilah yang merupakan titik kritis tundaan. Setelah titik kritis tundaan τ^* ditemukan, selanjutnya akan ditentukan apakah τ^* memenuhi kondisi transversal.

2.8 Bifurkasi Hopf

Bifurkasi Hopf adalah berubahnya jenis kestabilan suatu titik kesetimbangan suatu persamaan diferensial dikarenakan munculnya sepasang nilai eigen yang bernilai imajiner murni. Syarat terjadinya bifurkasi Hopf diberikan di bawah ini.

2.8.1 Kondisi Transversal

Perlu diselidiki kondisi yang dapat menyebabkan perubahan kestabilan titik kesetimbangan ketika waktu tunda berubah. Yaitu kondisi dimana

$$\left. \frac{d}{d\tau} \operatorname{Re}(\lambda) \right|_{\lambda=iv^*, \tau=\tau^*} \neq 0.$$

Kondisi ini menyatakan bahwa sepasang akar imajiner murni dari persamaan karakteristik (2.9) melintasi sumbu imajiner dengan kecepatan yang tidak nol (*Kuznetsov, 1998*). Dengan demikian akan terjadi perubahan nilai real akar persamaan karakteristik dari negatif menuju positif atau sebaliknya.

Berikut ini ditunjukkan lemma yang menjamin terpenuhinya kondisi transversal atau *nondegeneracy*.

Lemma 2.8.1.1 (Forde, 2005)

Jika $\lambda = iv^*$ dan $\tau = \tau^*$ memenuhi persamaan karakteristik (2.9), maka

$$\left. \frac{d}{d\tau} \operatorname{Re}(\lambda) \right|_{\lambda=iv^*, \tau=\tau^*} \neq 0,$$

jika dan hanya jika

$$R_1(v^*)R_1'(v^*) + Q_1(v^*)Q_1'(v^*) \neq R_2(v^*)R_2'(v^*) + Q_2(v^*)Q_2'(v^*).$$

Bukti:

Persamaan karakteristik (2.9) dapat ditulis sebagai

$$e^{-\lambda\tau} = -\frac{P_1(\lambda)}{P_2(\lambda)},$$

sehingga

$$-\lambda\tau = \ln\left(-\frac{P_1(\lambda)}{P_2(\lambda)}\right).$$

Misal λ adalah $\lambda(\tau)$. Jika λ diturunkan terhadap τ maka diperoleh

$$-\lambda - \tau \frac{d\lambda}{d\tau} = \frac{P_1(\lambda)P_2'(\lambda) - P_1'(\lambda)P_2(\lambda)}{P_1(\lambda)P_2(\lambda)} \cdot \frac{d\lambda}{d\tau},$$

dimana $' = \frac{d}{d\lambda}$. Untuk $\lambda = iv^*$ dan $\tau = \tau^*$, ruas kiri persamaan adalah $-iv^* - \tau^* \frac{d\lambda}{d\tau}$. Karena iv^* imajiner dan τ^* adalah real, maka $\frac{d\lambda}{d\tau}$ imajiner jika dan hanya jika

$$\frac{P_1(iv^*)P_2'(iv^*) - P_1'(iv^*)P_2(iv^*)}{P_1(iv^*)P_2(iv^*)} \quad (2.16)$$

bernilai real. Selanjutnya harus ditunjukkan bahwa persamaan (2.16) bernilai real. Persamaan (2.16) dipisah bagian real dan imajinernya,

$$\begin{aligned} & \frac{P_1(iv^*)P_2'(iv^*) - P_1'(iv^*)P_2(iv^*)}{P_1(iv^*)P_2(iv^*)} \\ &= \frac{(Q_1' - iR_1')(R_2 + iQ_2) - (R_1 + iQ_1)(Q_2' - iR_2')}{(R_1 + iQ_1)(R_2 + iQ_2)} \\ &= \frac{(R_1^2 + Q_1^2)(Q_2'R_2 - R_2'Q_2) + (R_2^2 + Q_2^2)(R_1'Q_1 - Q_1'R_1)}{(R_1^2 + Q_1^2)(R_2^2 + Q_2^2)} \\ &+ i \frac{(R_1^2 + Q_1^2)(Q_2'Q_2 + R_2'R_2) - (R_2^2 + Q_2^2)(R_1'R_1 - Q_1'Q_1)}{(R_1^2 + Q_1^2)(R_2^2 + Q_2^2)}. \end{aligned}$$

Agar persamaan (2.16) bernilai real maka

$$(R_1^2 + Q_1^2)(Q_2'Q_2 + R_2'R_2) - (R_2^2 + Q_2^2)(R_1'R_1 + Q_1'Q_1) = 0,$$

atau

$$(R_1^2 + Q_1^2)(Q_2'Q_2 + R_2'R_2) = (R_2^2 + Q_2^2)(R_1'R_1 + Q_1'Q_1).$$

Karena persamaan (2.13) maka

$$R_1R_1' + Q_1Q_1' = R_2R_2' + Q_2Q_2'. \quad (2.17)$$

Ini merupakan syarat perlu dan cukup untuk menunjukkan bahwa

$$\left. \frac{d}{d\tau} Re(\lambda) \right|_{\lambda=iv^*, \tau=\tau^*} = 0.$$

Dengan kata lain,

$$\left. \frac{d}{d\tau} Re(\lambda) \right|_{\lambda=iv^*, \tau=\tau^*} \neq 0$$

jika dan hanya jika

$$R_1(v^*)R_1'(v^*) + Q_1(v^*)Q_1'(v^*) \neq R_2(v^*)R_2'(v^*) + Q_2(v^*)Q_2'(v^*).$$

Jika terdapat akar karakteristik dari persamaan (2.9), maka ditemukan suatu titik kritis tundaan. Dengan demikian bagian real akar persamaan karakteristik dari sistem (2.9) akan berubah dari negatif menjadi positif atau sebaliknya.

2.9 Fungsi Investasi, Simpanan, dan Permintaan akan uang

Pada awalnya besarnya investasi (I), simpanan (S), dan permintaan akan uang (L) dinyatakan oleh masing-masing fungsi yang secara linear hanya bergantung oleh pendapatan (Y) yaitu:

$$\begin{aligned} I(Y, K, R) &= \eta Y, \\ S(Y, R) &= l_1 Y, \\ L(Y, R) &= l_2 Y, \end{aligned} \quad (2.18)$$

dengan η , l_1 , l_2 berturut-turut merupakan tingkat pertumbuhan investasi terhadap pendapatan, tingkat pertumbuhan simpanan terhadap pendapatan, dan tingkat pertumbuhan permintaan akan uang terhadap pendapatan. Semua parameter dalam model ini merupakan konstanta-konstanta positif dalam interval $[0,1]$ (Krawiec dan Szydłowski, 2001).

Setelah itu Cai (2005) menambahkan beberapa asumsi yaitu besarnya investasi (I) secara linear bergantung pada pendapatan (Y) dan berkurang oleh stok modal (K) dan suku bunga (R). Sementara

itu besarnya simpanan (S) secara linear bergantung pada pendapatan (Y) dan suku bunga (R). Dan besarnya permintaan akan uang (L) secara linear bergantung pada pendapatan (Y) dan berkurang oleh suku bunga (R). Fungsi investasi, simpanan dan permintaan akan uang dapat dinotasikan sebagai

$$\begin{aligned} I(Y, K, R) &= \eta Y - \delta_1 K - \beta_1 R, \\ S(Y, R) &= l_1 Y + \beta_2 R, \\ L(Y, R) &= l_2 Y - \beta_3 R, \end{aligned} \tag{2.19}$$

dengan

η = tingkat pertumbuhan investasi terhadap pendapatan

δ_1 = tingkat penurunan investasi terhadap stok modal

l_1 = tingkat pertumbuhan simpanan terhadap pendapatan

l_2 = tingkat pertumbuhan permintaan akan uang terhadap pendapatan

β_1 = tingkat penurunan investasi terhadap suku bunga

β_2 = tingkat pertumbuhan simpanan terhadap suku bunga

β_3 = tingkat penurunan permintaan akan uang terhadap suku bunga

dimana $\eta, \delta_1, l_1, l_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ adalah konstanta-konstanta positif dalam interval $[0,1]$ (Cai, 2005).

2.10 Model Siklus Bisnis IS-LM

Model *IS-LM* merupakan salah satu model siklus bisnis yang direpresentasikan dalam bentuk sistem dinamik dengan melibatkan fungsi investasi (I), fungsi simpanan (S), fungsi permintaan akan uang (L) dan konstanta persediaan uang (M).

Kaldor memperkenalkan model siklus bisnis dalam bentuk sistem persamaan diferensial sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dt} &= \alpha [I(Y(t), K(t)) - S(Y(t), K(t))], \\ \frac{dK}{dt} &= I(Y(t), K(t)). \end{aligned} \tag{2.20}$$

Dalam model tersebut, Kaldor beranggapan bahwa Laju pendapatan ($\frac{dY}{dt}$) merupakan selisih antara investasi dengan simpanan ($I(Y(t), K(t)) - S(Y(t), K(t))$) dikalikan dengan parameter α yang melambangkan percepatan yang diakibatkan oleh kelebihan atau kekurangan investasi, hal ini mengakibatkan apabila nilai

investasi kurang dari nilai simpanan maka laju pendapatan akan bernilai negatif, begitu pula sebaliknya. Sementara itu, laju pertumbuhan modal ($\frac{dK}{dt}$) merupakan jumlah investasi (Kaldor, 1940).

Setelah itu Tore (1977) merevisi model ini dengan cara mengganti stok modal $K(t)$ dengan suku bunga $R(t)$ serta menambahkan beberapa asumsi, oleh karena itu sistem (2.20) berubah menjadi

$$\begin{aligned}\frac{dY}{dt} &= \alpha [I(Y(t), R(t)) - S(Y(t), R(t))], \\ \frac{dR}{dt} &= \beta [L(Y(t), R(t)) - \bar{M}],\end{aligned}\quad (2.21)$$

dengan \bar{M} merupakan konstanta persediaan uang, β adalah percepatan akibat kelebihan atau kekurangan permintaan akan uang, dan $L(Y, R)$ merupakan fungsi permintaan akan uang.

Setelah itu Gabisch dan Lorenz (1989) mencoba menyempurnakan sistem (2.21) dengan menggabungkan ide Kaldor dan Tore, serta menambahkan parameter δ yang merupakan tingkat penyusutan stok modal sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{dY}{dt} &= \alpha [I(Y(t), K(t), R(t)) - S(Y(t), R(t))], \\ \frac{dR}{dt} &= \beta [L(Y(t), R(t)) - \bar{M}], \\ \frac{dK}{dt} &= I(Y(t), K(t), R(t)) - \delta K(t).\end{aligned}\quad (2.22)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (2.19) ke persamaan (2.22) diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{dY}{dt} &= \alpha [(\eta - l_1)Y(t) - \delta_1 K(t) - (\beta_1 + \beta_2)R(t)], \\ \frac{dR}{dt} &= \beta [l_2 Y(t) - \beta_3 R(t) - \bar{M}], \\ \frac{dK}{dt} &= \eta Y(t) - \delta_1 K(t) - \delta K(t) - \beta_1 R(t).\end{aligned}\quad (2.23)$$

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



BAB III PEMBAHASAN

3.1 Pengembangan Model

Pada skripsi ini dibahas model siklus bisnis *IS-LM* dengan waktu tunda yang merupakan pengembangan model (2.23) (Kaddar dan Talibi, 2008). Waktu tunda (τ) diberikan dengan mempertimbangkan asumsi bahwa dibutuhkan waktu persiapan agar investasi bisa digunakan sebagai stok modal untuk produksi. Oleh karena itu sistem (2.23) berubah menjadi

$$\begin{aligned}\frac{dY}{dt} &= \alpha [(\eta - l_1)Y(t) - \delta_1 K(t) - (\beta_1 + \beta_2)R(t)], \\ \frac{dR}{dt} &= \beta [l_2 Y(t) - \beta_3 R(t) - \bar{M}], \\ \frac{dK}{dt} &= \eta Y(t - \tau) - \delta_1 K(t - \tau) - \delta K(t) - \beta_1 R(t - \tau).\end{aligned}\tag{3.1}$$

3.2 Titik Keseimbangan Model

Titik keseimbangan sistem (3.1) diperoleh pada saat sistem (3.1) tidak mengalami perubahan sepanjang waktu. Oleh karena itu diperoleh

$$(\eta - l_1)Y(t) - \delta_1 K(t) - (\beta_1 + \beta_2)R(t) = 0,\tag{3.2.a}$$

$$l_2 Y(t) - \beta_3 R(t) - \bar{M} = 0,\tag{3.2.b}$$

$$\eta Y(t) - \delta_1 K(t) - \delta K(t) - \beta_1 R(t) = 0\tag{3.2.c}$$

Seperti yang diuraikan pada Lampiran 1, dari persamaan (3.2.a), (3.2.b), dan (3.2.c) diperoleh titik keseimbangan $E^* = (Y^*, R^*, K^*)$ di bawah ini

$$\begin{aligned}Y^* &= \frac{-((\beta_1 + \beta_2)\delta + \beta_2 \delta_1)\bar{M}}{\theta}, \\ R^* &= \frac{((\delta + \delta_1)l_1 - \delta\eta)\bar{M}}{\theta}, \\ K^* &= \frac{-(\beta_1 l_1 + \beta_2 \eta)\bar{M}}{\theta}\end{aligned}\tag{3.3}$$

di mana $\theta = \delta(\beta_3\eta - \beta_1l_2) - (\delta + \delta_1)(\beta_2l_2 + \beta_3l_1)$. Titik kesetimbangan (3.2) eksis jika $\theta < 0$, dan $((\delta + \delta_1)l_1 - \delta\eta) < 0$.

3.3 Kestabilan Titik Kesetimbangan $E^* = (Y^*, R^*, K^*)$

Sebelum menentukan kestabilan titik kesetimbangan E^* , terlebih dahulu ditentukan persamaan karakteristik dari model. Karena model yang diperoleh merupakan sistem linier non homogen, maka dilakukan penskalaan pada sistem (3.1). Dengan permisalan $\bar{Y} = Y - Y^*$, $\bar{R} = R - R^*$, dan $\bar{K} = K - K^*$ sistem (3.1) berubah menjadi

$$\begin{aligned} \frac{d(\bar{Y} + Y^*)}{dt} &= \alpha [(\eta - l_1)(\bar{Y} + Y^*) - \delta_1\bar{K} - (\beta_1 + \beta_2)(\bar{R} + R^*)], \\ \frac{d(\bar{R} + R^*)}{dt} &= \beta [l_2(\bar{Y} + Y^*) - \beta_3(\bar{R} + R^*)] \\ \frac{d(\bar{K} + K^*)}{dt} &= \eta e^{-\lambda\tau}(\bar{Y} + Y^*) - (\delta_1 e^{-\lambda\tau} + \delta)(\bar{K} + K^*) \\ &\quad - \beta_1 e^{-\lambda\tau}(\bar{R} + R^*). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Karena $\frac{dY^*}{dt} = \frac{dR^*}{dt} = \frac{dK^*}{dt} = 0$, sistem (3.4) berubah menjadi

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{Y}}{dt} &= \alpha [(\eta - l_1)\bar{Y} - \delta_1\bar{K} - (\beta_1 + \beta_2)\bar{R}], \\ \frac{d\bar{R}}{dt} &= \beta [l_2\bar{Y} - \beta_3\bar{R}], \\ \frac{d\bar{K}}{dt} &= \eta e^{-\lambda\tau}\bar{Y} - (\delta_1 e^{-\lambda\tau} + \delta)\bar{K} - \beta_1 e^{-\lambda\tau}\bar{R}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Sistem (3.5) dapat dinyatakan dalam bentuk matriks di bawah ini

$$\begin{bmatrix} \bar{Y}' \\ \bar{R}' \\ \bar{K}' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \bar{Y} \\ \bar{R} \\ \bar{K} \end{bmatrix},$$

dengan

$$A = \begin{bmatrix} \alpha(\eta - l_1) & -\alpha(\beta_1 + \beta_2) & -\alpha\delta_1 \\ \beta l_2 & -\beta\beta_3 & 0 \\ \eta e^{-\lambda\tau} & \beta_1 e^{-\lambda\tau} & -\delta_1 e^{-\lambda\tau} - \delta \end{bmatrix}.$$

Kemudian seperti yang diuraikan pada Lampiran 2, diperoleh persamaan karakteristik dari sistem (3.1) sebagai berikut.

$$P(\lambda) + Q(\lambda)e^{-\lambda\tau} = 0, \quad (3.6)$$

dengan

$$P(\lambda) = \lambda^3 + A\lambda^2 + B\lambda + C,$$

$$Q(\lambda) = D\lambda^2 + E\lambda + F,$$

di mana

$$A = \delta + \beta\beta_3 - \alpha(\eta - l_1),$$

$$B = \alpha l_2\beta(\beta_1 + \beta_2) + \beta\beta_3\delta - \alpha(\delta + \beta\beta_3)(\eta - l_1),$$

$$C = \alpha\beta\delta((\beta_1 + \beta_2)l_2 - \beta_3(\eta - l_1)),$$

$$D = \delta_1,$$

$$E = \delta_1(\beta\beta_3 + \alpha l_1),$$

$$F = \alpha\beta\delta_1(l_2\beta_2 + l_1\beta_3).$$

Titik kesetimbangan E^* bersifat stabil apabila semua bagian real akar persamaan karakteristik (3.6) bernilai negatif, dan perubahan kestabilan titik kesetimbangan E^* akan terjadi apabila bagian real akar persamaan karakteristiknya bernilai nol, hal itu terjadi apabila terdapat akar persamaan karakteristik yang imajiner murni. Untuk menentukan kestabilan titik kesetimbangan E^* , dimulai dengan menganggap tidak ada waktu tunda ($\tau = 0$). Oleh karena itu persamaan karakteristik (3.6) berubah menjadi

$$\lambda^3 + (A + D)\lambda^2 + (B + E)\lambda + (C + F) = 0. \quad (3.7)$$

Menurut kriteria kestabilan Routh-Hurwitz, kestabilan titik kesetimbangan E^* diberikan pada Proposisi 3.1 sebagai berikut .

Proposisi 3.1

Untuk $\tau = 0$, titik kesetimbangan sistem (3.1) bersifat stabil asimtotik apabila memenuhi

$$(H1): A + D > 0,$$

$$(H2): (A + D)(B + E) - (C + F) > 0.$$

Setelah itu ditentukan kestabilan titik kesetimbangan E^* pada saat terdapat waktu tunda ($\tau > 0$). Untuk kasus ini, $\lambda(\tau) = u(\tau) + iv(\tau)$ disubstitusikan ke dalam persamaan karakteristik (3.6) seperti pada Lampiran 3, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
 u^3 - 3uv^2 + Au^2 - Av^2 + Bu + C, \\
 = -e^{-u\tau}(Du^2 \cos(v\tau) Dv^2 \cos(v\tau) + Eu \cos(v\tau) + \\
 F \cos(v\tau) + 2Duv \sin(v\tau) + Ev \sin(v\tau)), \quad (3.8)
 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
 u^2v - v^3 + 2Auv + Bv \\
 = -e^{-u\tau}(2Duv \cos(v\tau) + Ev \cos(v\tau) - Du^2 \sin(v\tau) + \\
 Dv^2 \sin(v\tau) - Eu \sin(v\tau) - F \sin(v\tau)). \quad (3.9)
 \end{aligned}$$

Untuk memperoleh perubahan kestabilan dari sistem (3.1) diperlukan solusi yang imajiner murni, maka $u = 0$ disubstitusikan ke persamaan (3.8) dan (3.9) sehingga diperoleh

$$-Av^2 + C = (Dv^2 - F) \cos(v\tau) - Ev \sin(v\tau), \quad (3.10)$$

dan

$$v^3 - Bv = Ev \cos(v\tau) + (Dv^2 - F) \sin(v\tau). \quad (3.11)$$

Selanjutnya seperti pada Lampiran 4, untuk mengeliminasi τ , persamaan (3.10) dan (3.11) dikuadratkan, kemudian hasilnya dijumlahkan sehingga diperoleh

$$v^6 + av^4 + bv^2 + c = 0, \quad (3.12)$$

dengan

$$\begin{aligned}
 a &= A^2 - D^2 - 2B, \\
 b &= B^2 - 2AC - E^2 + 2DF, \\
 c &= C^2 - F^2.
 \end{aligned}$$

Untuk mempermudah proses perhitungan, dimisalkan $z = v^2$ sehingga persamaan (3.12) berubah menjadi

$$z^3 + az^2 + bz + c = 0. \quad (3.13)$$

Menurut Ruan dan Wei(2001), nilai akar-akar dari persamaan (3.13) ditentukan oleh Lemma 3.2 sebagai berikut, dengan pembuktian Lemma 3.2 terdapat pada Lampiran 5.

Lemma 3.2

Misalkan $\Delta = a^2 - 3b$.

- (i) Jika $c < 0$, maka persamaan (3.13) paling tidak mempunyai 1 akar yang bernilai positif.
- (ii) Jika $c \geq 0$ dan $\Delta < 0$, maka persamaan (3.13) tidak mempunyai akar yang bernilai positif.
- (iii) Jika $c \geq 0$ dan $\Delta \geq 0$, maka persamaan (3.13) mempunyai akar-akar yang bernilai positif jika dan hanya jika $\bar{z} = \frac{1}{3}(-a + \sqrt{\Delta}) > 0$ dan $h(\bar{z}) \leq 0$.

Misal persamaan (3.13) memiliki akar positif, yang dilambangkan dengan z_1, z_2 , dan z_3 . Maka persamaan (3.12) memiliki akar positif yaitu

$$v_1 = \sqrt{z_1}; v_2 = \sqrt{z_2}; v_3 = \sqrt{z_3},$$

nilai τ^j dapat ditentukan dari persamaan (3.10) dan (3.11) dengan memisalkan $R_1(v) = Av^2 - C, R_2(v) = Dv^2 - F, Q_1(v) = v^3 - bv$ dan $Q_2(v) = -Ev$. Oleh karena itu persamaan (3.10) dan (3.11) berubah menjadi

$$-R_1(v) = R_2(v) \cos(v\tau) + Q_2(v) \sin(v\tau), \quad (3.14)$$

$$Q_1(v) = R_2(v) \sin(v\tau) - Q_2(v) \cos(v\tau). \quad (3.15)$$

Misal v_l memenuhi persamaan (3.10) dan (3.11), serta dengan memisalkan $d = \sqrt{R_2(v)^2 + Q_2(v)^2}$ maka persamaan (3.14) dan (3.15) dapat ditulis kembali dalam bentuk

$$-R_1(v_l) = \left(\frac{R_2(v_l)}{d} \cos(v_l\tau) + \frac{Q_2(v_l)}{d} \sin(v_l\tau) \right) d,$$

$$Q_1(v_l) = \left(\frac{R_2(v_l)}{d} \sin(v_l\tau) - \frac{Q_2(v_l)}{d} \cos(v_l\tau) \right) d.$$

Misal $\frac{R_2(v_l)}{d} = \cos\beta$, dan $\frac{Q_2(v_l)}{d} = \sin\beta$ maka diperoleh

$$-R_1(v_l) = (\cos\beta \cos(v_l\tau) + \sin\beta \sin(v_l\tau))d, \quad (3.16)$$

$$Q_1(v_l) = (\cos\beta \sin(v_l\tau) - \sin\beta \cos(v_l\tau))d, \quad (3.17)$$

dengan menggunakan sifat trigonometri pada persamaan (3.16) dan (3.17) diperoleh

$$-R_1(v_l) = d \cos(v_l \tau - \beta), \quad (3.18)$$

$$Q_1(v_l) = d \sin(v_l \tau - \beta). \quad (3.19)$$

Nilai τ^j dapat diperoleh dengan cara mengalikan persamaan (3.18) dengan $\cos \beta$ dan (3.19) dengan $\sin \beta$, kemudian kedua persamaan tersebut dijumlahkan, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} -R_1(v_l) \cos \beta + Q_1(v_l) \sin \beta &= d \cos^2 \beta \cos(v_l \tau) + d \sin^2 \beta \cos(v_l \tau), \\ -R_1(v_l) \cos \beta + Q_1(v_l) \sin \beta &= d \cos(v_l \tau) (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta), \\ -R_1(v_l) \cos \beta + Q_1(v_l) \sin \beta &= d \cos(v_l \tau), \\ \frac{-R_1(v_l) \cos \beta + Q_1(v_l) \sin \beta}{d} &= \cos(v_l \tau), \\ \arccos\left(\frac{-R_1(v_l) \cos \beta + Q_1(v_l) \sin \beta}{d}\right) + 2n\pi &= v_l \tau, \\ \frac{1}{v_l} \arccos\left(\frac{-R_1(v_l) \cos \beta + Q_1(v_l) \sin \beta}{d}\right) + \frac{2n\pi}{v_l} &= \tau_l^j. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Untuk memperoleh nilai τ_l^j , nilai $R_1(v_l)$, $\cos \beta$, $Q_1(v_l)$, $\sin \beta$, dan d disubstitusikan ulang pada persamaan (3.20) sehingga diperoleh.

$$\begin{aligned} \tau_l^j &= \frac{1}{v_l} \arccos\left(\frac{(Av_l^2 - C)(F - Dv_l^2) + (v_l^3 - Bv_l)(Ev_l)}{(Dv_l^2 - F)^2 + E^2v_l^2}\right) \\ &\quad + \frac{2n\pi}{v_l}, \quad l = 1, 2, 3; j = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (3.21)$$

Dari persamaan (3.21) dapat diketahui bahwa terdapat tak terhingga nilai τ^j yang memenuhi persamaan (3.10) dan (3.11), untuk itu dipilih τ_0 yang merupakan nilai terkecil dari tak terhingga τ_l^j sebagai nilai kritis tundaan yang dinyatakan dalam bentuk

$$\tau_0 = \tau_{l_0}^{j_0} = \min_{j=0,1,\dots,l=1,2,3} (\tau_l^j), v_0 = v_{l_0}. \quad (3.22)$$

Dari penggabungan Proposisi 3.1 dan Lemma 3.2 diperoleh Lemma 3.3 sebagai berikut.

Lemma 3.3 Misal E^* eksis, $(H1)$, dan $(H2)$ terpenuhi

(i) Jika salah satu dari tiga syarat di bawah ini :

$$(N1) \ c \geq 0, \text{ dan } \Delta < 0;$$

$$(N2) \ c \geq 0, \Delta \geq 0, \text{ dan } \bar{z} \leq 0;$$

$$(N3) \ c \geq 0, \Delta \geq 0, \bar{z} > 0, \text{ dan } h(\bar{z}) > 0;$$

terpenuhi, maka semua akar dari persamaan (3.6) mempunyai bagian real yang bernilai negatif untuk semua $\tau \geq 0$.

(ii) Jika $c < 0$, atau $c \geq 0, \Delta > 0, \bar{z} > 0$, dan $h(\bar{z}) \leq 0$, maka semua akar dari persamaan (3.6) mempunyai bagian real yang bernilai negatif pada $\tau \in [0, \tau_0)$.

Karena persamaan karakteristik (3.12) pada saat titik kritis tundaan τ_0 memiliki sepasang akar imajiner, maka memungkinkan terjadinya bifurkasi atau perubahan struktur orbit. Kondisi transversal dibutuhkan sebagai syarat terjadinya bifurkasi Hopf. Untuk itu harus diketahui apakah kondisi transversal terpenuhi. Syarat terpenuhinya kondisi transversal adalah

$$\left. \frac{d}{d\tau} \operatorname{Re}(\lambda) \right|_{\lambda=iv^*, \tau=\tau^*} \neq 0.$$

Kondisi di atas terpenuhi jika dan hanya jika kondisi di bawah ini terpenuhi

$$R_1(v_0)R_1'(v_0) + Q_1(v_0)Q_1'(v_0) \neq R_2(v_0)R_2'(v_0) + Q_2(v_0)Q_2'(v_0).$$

Misal $\lambda(\tau) = u(\tau) + iv(\tau)$ sebagai akar dari persamaan (3.6) yang memenuhi $u(\tau_0) = 0$ dan $v(\tau_0) = v_0$. Dari persamaan (3.10) dan (3.11) diperoleh

$$\begin{aligned} R_1(v) &= -Av^2 + C, & Q_1(v) &= v^3 + Bv, \\ R_2(v) &= -Dv^2 + F, & Q_2(v) &= -Ev. \end{aligned}$$

Dengan menurunkan persamaan di atas terhadap v diperoleh

$$\begin{aligned} R_1'(v) &= -2Av, & Q_1'(v) &= 3v^2 + B, \\ R_2'(v) &= -2Dv, & Q_2'(v) &= -E. \end{aligned}$$

Oleh karena itu diperoleh

$$R_1(v)R_1'(v) + Q_1(v)Q_1'(v) = 2A^2v^3 - 2ACv + 3v^5 + 4Bv^3 + B^2v$$

$$R_2(v)R_2'(v) + Q_2(v)Q_2'(v) = 2D^2v^3 - 2DFv + E^2v$$

Dengan mensubstitusikan v_0 ke dalam v terlihat jelas bahwa

$$R_1(v_0)R_1'(v_0) + Q_1(v_0)Q_1'(v_0) \neq R_2(v_0)R_2'(v_0) + Q_2(v_0)Q_2'(v_0).$$

Dari pembuktian di atas, terbukti bahwa persamaan karakteristik (3.6) memenuhi kondisi transversal sehingga mengakibatkan bagian real dari akar persamaan karakteristiknya, yang sebelumnya bernilai negatif akan menuju kearah positif yang diakibatkan oleh adanya penambahan waktu tunda. Untuk $\tau > \tau_0$ mengakibatkan bagian real akar persamaan karakteristiknya menjadi positif. Dari analisa kestabilan sebelumnya, diperoleh Tabel 3.3.1 yang merupakan syarat eksistensi dan kestabilan titik kesetimbangan.



Tabel 3.3.1 Syarat eksistensi dan kestabilan titik kesetimbangan

Titik Tetap	Syarat Eksistensi	Jenis Kestabilan	Syarat Kestabilan
$E^* = (Y^*, K^*, R^*)$	(i) $\theta < 0$ (ii) $((\delta + \delta_1)l_1 - \delta\eta) < 0$	Stabil asimtotik untuk semua $\tau \geq 0$.	(i) $C + F > 0, A + D > 0$, dan $(A + D)(B + E) - (C + F) > 0$. (ii) Salah satu dari (N1), (N2), (N3) terpenuhi.
		Stabil asimtotik untuk $0 \leq \tau < \tau_0$	(i) $C + F > 0, A + D > 0$, dan $(A + D)(B + E) - (C + F) > 0$. (ii) $c < 0$ atau $c \geq 0, \Delta \geq 0, \bar{z} > 0$, dan $h(\bar{z}) \leq 0$

3.4 Simulasi Numerik

Untuk mensimulasikan dinamika model dengan waktu tunda digunakan *command dde* pada *software matlab*, *listing source code* terdapat pada Lampiran 7.

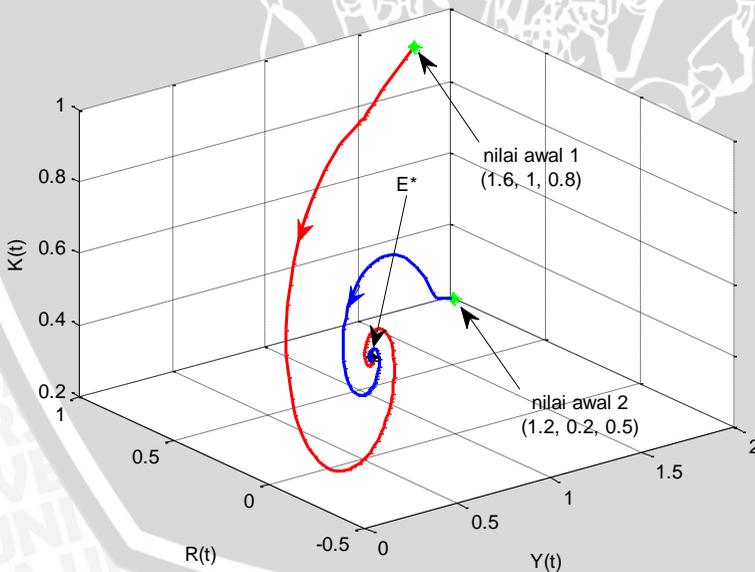
3.4.1 Simulasi 1

Pada Simulasi 1 digambarkan perilaku bahwa E^* bersifat stabil asimtotik untuk semua $\tau \geq 0$. Untuk itu dipilih nilai parameter sebagai berikut.

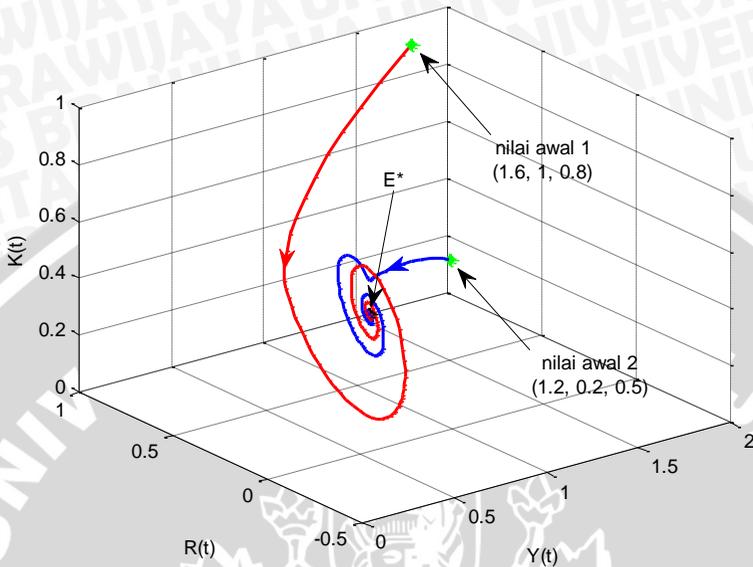
Tabel 3.4.1.1 Parameter untuk Simulasi 1

α	β	δ	δ_1	β_1	β_2	β_3	l_1	l_2	η	\bar{M}
1.3	1.1	0.35	0.1	0.25	0.4	0.5	0.2	0.3	0.35	0.15

Dengan menggunakan nilai parameter pada Tabel 3.4.1.1, sistem (3.1) memiliki titik kesetimbangan $E^* = (0.6270, 0.0762, 0.4453)$. Potret fase dari sistem (3.1) untuk $\tau = 0.75$ dan $\tau = 6$, diberikan pada Gambar 3.1 dan Gambar 3.2.



Gambar 3.1 Potret fase model dengan $\tau = 0.75$



Gambar 3.2 Potret fase model dengan $\tau = 6$

Nilai parameter pada Tabel 3.4.1.1 memenuhi kriteria (N3) yaitu $c \geq 0$, $\Delta > 0$, $\bar{z} > 0$, dan $h(\bar{z}) > 0$ sehingga kestabilan titik kesetimbangan E^* bersifat stabil asimtotik untuk semua $\tau \geq 0$. Pada Gambar 3.1 dan Gambar 3.2 meskipun dengan nilai τ yang berbeda, variabel pendapatan ($Y(t)$), stok modal ($K(t)$), dan suku bunga ($R(t)$) akan bergerak menuju E^* dari nilai awal $(1.6, 0.8, 1)$ maupun untuk nilai awal $(1.2, 0.2, 0.5)$.

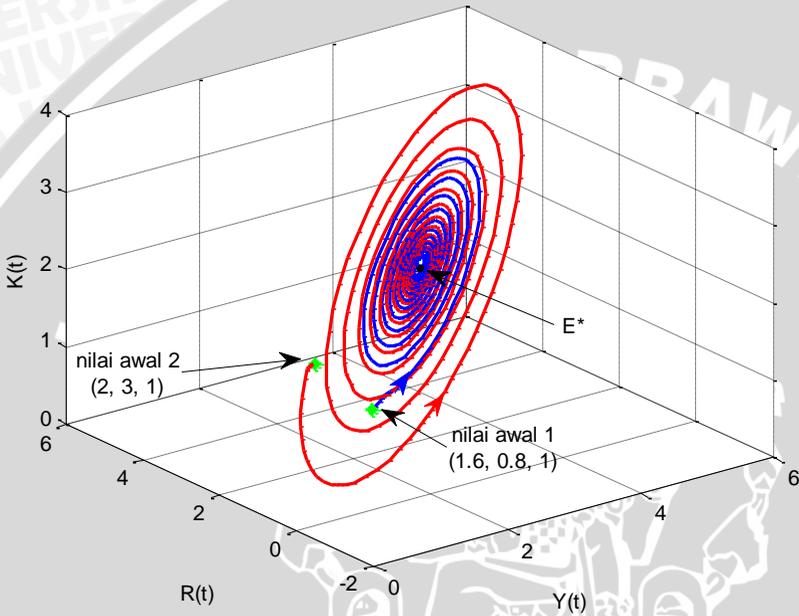
3.4.2 Simulasi 2

Pada Simulasi 2 digambarkan perubahan kestabilan E^* yang disebabkan adanya nilai kritis tundaan. Nilai parameter yang digunakan pada simulasi ini diberikan oleh Tabel 3.4.2.1 di bawah ini.

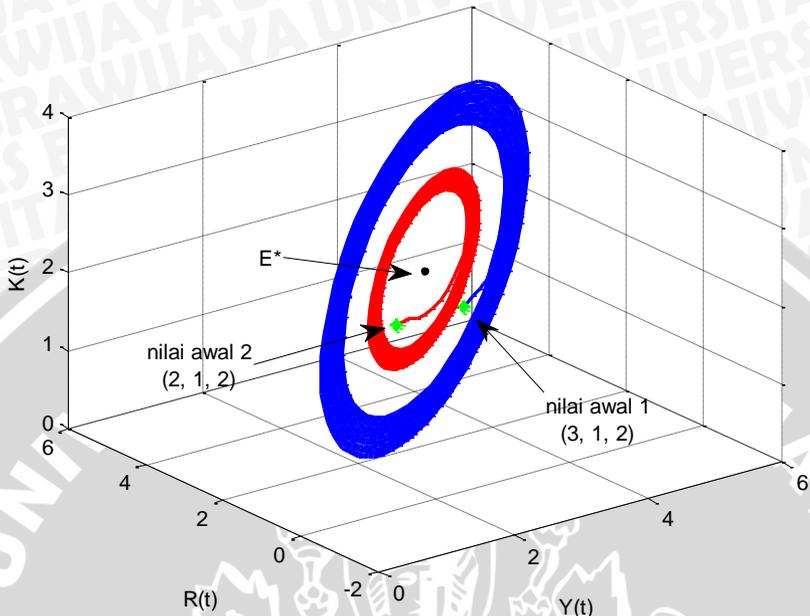
Tabel 3.4.2.1 Parameter untuk Simulasi 2

α	β	δ	δ_1	β_1	β_2	β_3	l_1	l_2	η	\bar{M}
1.5	3	0.3	0.1	0.3	0.1	0.17	0.15	0.2	0.5	0.25

Dari Tabel 3.4.2.1 diperoleh $E^* = (3.0374, 2.1028, 2.2196)$ dan $\tau_0 = 0.9598$ yang merupakan nilai kritis tundaan. Untuk mengetahui perubahan jenis kestabilan yang terjadi di pilih $\tau = 0.5$ dan $\tau = 0.99$ yang diberikan pada Gambar 3.3 dan Gambar 3.4 di bawah ini.



Gambar 3.3 Potret fase model dengan $\tau = 0.5$



Gambar 3.4 Potret fase model dengan $\tau = 0.99$

Nilai parameter pada Tabel 3.4.2.1 memenuhi kriteria $c \geq 0, \Delta > 0, \bar{z} > 0$, dan $h(\bar{z}) \leq 0$, yang menyebabkan kestabilan titik kesetimbangan E^* bersifat stabil asimtotik untuk $0 \leq \tau < \tau_0$. Pada Gambar 3.3 terlihat bahwa kestabilan titik kesetimbangan E^* bersifat stabil asimtotik saat $\tau = 0.5$ di mana nilai dari $Y(t), K(t)$, dan $R(t)$ bergerak dari nilai awal 1 (1.6, 0.8, 1) dan nilai awal 2 (2, 3, 1) menuju E^* . Sementara itu pada Gambar 3.4 terlihat kestabilan titik kesetimbangan E^* bersifat tak stabil saat $\tau = 0.99$. Perubahan kestabilan akibat adanya perubahan nilai parameter τ menunjukkan adanya bifurkasi Hopf pada kasus ini.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



BAB IV KESIMPULAN DAN SARAN

4.1 Kesimpulan

Dari pembahasan pada skripsi ini, dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut.

1. Model siklus bisnis *IS-LM* dengan waktu tunda pada stok modal merupakan sistem persamaan diferensial linear non homogen dengan tiga variabel tak bebas dan sebelas parameter.
2. Pada model *IS-LM* dengan waktu tunda pada stok modal diperoleh satu titik kesetimbangan yaitu $E^* = (Y^*, R^*, K^*)$. Titik kesetimbangan E^* eksis apabila $\theta < 0$, dan $((\delta + \delta_1)l_1 - \delta\eta) < 0$.
3. Kestabilan titik kesetimbangan E^* bersifat stabil asimtotik untuk $\tau \geq 0$ apabila Proposisi 3.1 terpenuhi serta (i) pada Lemma 3.3 terpenuhi, sedangkan kestabilan titik kesetimbangan E^* bersifat stabil asimtotik untuk $0 \leq \tau < \tau_0$ apabila Proposisi 3.1 terpenuhi, serta (ii) pada Lemma 3.4 terpenuhi.
4. Simulasi numerik yang dilakukan menunjukkan hasil yang sesuai dengan hasil analisis. Pada Simulasi 1 didapatkan kestabilan E^* bersifat stabil untuk $\tau \geq 0$, sedangkan pada Simulasi 2 didapatkan E^* bersifat stabil untuk $0 \leq \tau \leq \tau_0$, dan ketika $\tau > \tau_0$ menyebabkan kestabilan titik kesetimbangan E^* bersifat tak stabil.

4.2 Saran

Pada penelitian selanjutnya disarankan adanya penambahan asumsi-asumsi yang lebih spesifik lagi seperti tingkat peluang kehilangan uang akibat investasi dan sebagainya, agar hasil yang didapatkan lebih mendekati situasi yang sebenarnya.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



DAFTAR PUSTAKA

- Cai, J. P. 2005. Hopf Bifurcation in the IS-LM Business Cycle Model with Time Delay. *Electronic Journal of Differential Equations*, Vol. 2005, 1-6.
- Edward, C. H dan D. E. Penney. 2001. *Differential Equations and Linear Algebra*. Prentice-Hall. New Jersey.
- Forde, J. E. 2005. *Delay Differential Equation Models in Mathematical Biology*. University of Michigan. Michigan.
- Gabisch G. dan H.W. Lorenz. 1987. *Business Cycle Theory: A survey of Methods and Concepts*. 1989 edition Berlin:Springer-Verlag.
- Grigorian, A. 2009. *Ordinary Differential Equations*. University of Bielefeld. Germany.
- Gregory, N. M. 2003. *Macroeconomics 5th edition*. Worth Publisher. United States.
- Kaddar, A. dan H. A. Talibi. 2008. On the Dynamic Behavior of a Delayed IS-LM Business Cycle Model. *Applied Mathematical Science*, Vol. 2, 1529-1539.
- Kaldor, N. 1940. A Model of Trade Cycle. *Economic Journal*, Vol. 50, 78-92.
- Krawiec, A. dan M. Szydlowski. 1999. The Kaldor-Kalecki Business Cycle Model. *Ann. of Operation Research*, Vol. 89, 89-100.
- Kuang, Y. 1993. *Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics*. Academic Press. London.
- Kuznetsov, Y. A. 1998. *Elements of Applied Bifurcations Theory, Second Edition*, *Applied Mathematical Science 112*. Springer-Verlag. New York, USA.

- Kalecki, M. A Macrodynamic Theory of Business Cycle. *Econometrica*, 1935, Vol. 3, 327-344.
- Murray, J. 2002. *Mathematical Biology: I. An Introduction*. Third Edition, Springer, New York.
- Nagle, R. K. dan E. B. Saff. 2004. *Fundamental of Differential Equation and Boundary Value Problem*. Addison-Wesley Publishing Company. USA.
- Panfilov, A. 2004. *Qualitative Analysis of Differential Equations*. Utrecht University. Utrecht.
- Robinson, R. C. 2004. *An Introduction to Dynamical Systems: Continous and Discrete*. Prentice Hall Education. USA.
- Ruan, S. dan J. Wei. 2001. On the Zeros of a Third Degree Exponential Polynomial with Applications to a Delayed Model for the Control of Testosterone Secretion. *IMA journal of Applied in Medicine and Biology*, 18, 41-52.
- Torre, V. 1977. Existence of Limit Cycles and Control in Complete Kynesian Systems by Theory of Bifurcations. *Econometrica*, Vol. 45, 1457-1466.

LAMPIRAN

Lampiran 1. Perhitungan Nilai $E^* = (Y^*, R^*, K^*)$

Nilai Y^* , R^* , dan K^* diperoleh dari

$$(\eta - l_1)Y^* - \delta_1 K^* - (\beta_1 + \beta_2)R^* = 0, \quad (1)$$

$$l_2 Y^* - \beta_3 R^* - \bar{M} = 0, \quad (2)$$

$$\eta Y^* - \delta_1 K^* - \delta K^* - \beta_1 R^* = 0. \quad (3)$$

Dari persamaan (2) diperoleh

$$R^* = \frac{l_2 Y^* - \bar{M}}{\beta_3}. \quad (4)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (4) ke persamaan (3), diperoleh

$$\eta Y^* - \delta_1 K^* - \delta K^* - \beta_1 R^* = 0,$$

$$\eta Y^* - \delta_1 K^* - \delta K^* - \beta_1 \left(\frac{l_2 Y^* - \bar{M}}{\beta_3} \right) = 0,$$

$$(\delta + \delta_1) K^* = \eta Y^* - \beta_1 \left(\frac{l_2 Y^* - \bar{M}}{\beta_3} \right),$$

$$(\delta + \delta_1) K^* = \frac{\beta_3 \eta Y^* - \beta_1 (l_2 Y^* - \bar{M})}{\beta_3},$$

$$K^* = \frac{\beta_3 \eta Y^* - \beta_1 (l_2 Y^* - \bar{M})}{\beta_3 (\delta + \delta_1)},$$

$$K^* = \frac{Y^* (\beta_3 \eta - \beta_1 l_2) + \beta_1 \bar{M}}{\beta_3 (\delta + \delta_1)}. \quad (5)$$

Apabila persamaan (4) dan (5) disubstitusikan ke persamaan (1), menghasilkan

$$(\eta - l_1)Y^* - \delta_1 K^* - (\beta_1 + \beta_2)R^* = 0,$$

$$(\eta - l_1)Y^* - \delta_1 \left(\frac{Y^*(\beta_3\eta - \beta_1l_2) + \beta_1\bar{M}}{\beta_3(\delta + \delta_1)} \right) - (\beta_1 + \beta_2) \frac{l_2Y^* - \bar{M}}{\beta_3} = 0,$$

$$\frac{\beta_3(\delta + \delta_1)(\eta - l_1)Y^* - \delta_1(Y^*(\beta_3\eta - \beta_1l_2) + \beta_1\bar{M})}{\beta_3(\delta + \delta_1)} - \frac{(\beta_1 + \beta_2)(\delta + \delta_1)(l_2Y^* - \bar{M})}{\beta_3(\delta + \delta_1)}, = 0$$

$$\beta_3(\delta + \delta_1)(\eta - l_1)Y^* - \delta_1(Y^*(\beta_3\eta - \beta_1l_2) + \beta_1\bar{M}) - (\beta_1 + \beta_2)(\delta + \delta_1)(l_2Y^* - \bar{M}), = 0$$

$$Y^*(\beta_3\delta\eta - \beta_3\delta l_1 + \beta_3\delta_1\eta - \beta_3\delta_1l_1 - \beta_3\delta_1\eta + \beta_1\delta_1l_2 - \beta_1\delta l_2 - \beta_1\delta_1l_2 - \beta_2\delta l_2 - \beta_2\delta_1l_2) + \bar{M}(-\beta_1\delta_1 + \beta_1\delta + \beta_1\delta_1 + \beta_2\delta + \beta_2\delta_1), = 0$$

$$Y^*(\beta_3\delta\eta - \beta_3\delta l_1 - \beta_3\delta_1l_1 - \beta_1\delta l_2 - \beta_2\delta l_2 - \beta_2\delta_1l_2) + \bar{M}(\beta_1\delta + \beta_2\delta + \beta_2\delta_1), = 0$$

$$Y^* = \frac{\bar{M}(-\beta_1\delta - \beta_2\delta - \beta_2\delta_1)}{(\beta_3\delta\eta - \beta_3\delta l_1 - \beta_3\delta_1l_1 - \beta_1\delta l_2 - \beta_2\delta l_2 - \beta_2\delta_1l_2)}$$

atau dapat dinyatakan dalam bentuk

$$Y^* = \frac{-((\beta_1 + \beta_2)\delta + \beta_2\delta_1)\bar{M}}{\delta(\beta_3\eta - \beta_1l_2) - (\delta + \delta_1)(\beta_2l_2 + \beta_3l_1)}. \quad (6)$$

Kemudian, substitusi persamaan (6) ke persamaan (4) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} R^* &= \frac{l_2Y^* - \bar{M}}{\beta_3} \\ &= - \left(-l_2Y^* \frac{1}{\beta_3} + \frac{\bar{M}}{\beta_3} \right) \\ &= - \left(l_2 \frac{((\beta_1 + \beta_2)\delta + \beta_2\delta_1)\bar{M}}{\delta(\beta_3\eta - \beta_1l_2) - (\delta + \delta_1)(\beta_2l_2 + \beta_3l_1)} \frac{1}{\beta_3} + \frac{\bar{M}}{\beta_3} \right) \\ &= \frac{(l_2)((\beta_1 + \beta_2)\delta + \beta_2\delta_1)\bar{M}\bar{M}}{\delta(\beta_3\eta - \beta_1l_2) - (\delta + \delta_1)(\beta_2l_2 + \beta_3l_1)(\beta_3)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(\delta(\beta_3\eta - \beta_1l_2) - (\delta + \delta_1)(\beta_2l_2 + \beta_3l_1))}{\delta(\beta_3\eta - \beta_1l_2) - (\delta + \delta_1)(\beta_2l_2 + \beta_3l_1)(\beta_3)} \\
& = - \left(\frac{-\beta_3\bar{M}(-\delta\eta + \delta l_1 + \delta_1 l_1)}{\delta(\beta_3\eta - \beta_1l_2) - (\delta + \delta_1)(\beta_2l_2 + \beta_3l_1)(\beta_3)} \right) \\
& = \frac{\beta_3\bar{M}(-\delta\eta + \delta l_1 + \delta_1 l_1)}{\delta(\beta_3\eta - \beta_1l_2) - (\delta + \delta_1)(\beta_2l_2 + \beta_3l_1)(\beta_3)} \\
R^* & = \frac{\bar{M}(-\delta\eta + \delta l_1 + \delta_1 l_1)}{\delta(\beta_3\eta - \beta_1l_2) - (\delta + \delta_1)(\beta_2l_2 + \beta_3l_1)}
\end{aligned}$$

atau dapat dinyatakan dalam bentuk

$$R^* = \frac{((\delta + \delta_1)l_1 - \delta\eta)\bar{M}}{\delta(\beta_3\eta - \beta_1l_2) - (\delta + \delta_1)(\beta_2l_2 + \beta_3l_1)}. \quad (7)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (6) ke persamaan (5), diperoleh

$$\begin{aligned}
K^* & = \frac{Y^*(\beta_3\eta - \beta_1l_2) + \beta_1\bar{M}}{\beta_3(\delta + \delta_1)}, \\
& = Y^* \frac{(\beta_3\eta - \beta_1l_2)}{\beta_3(\delta + \delta_1)} + \frac{\beta_1\bar{M}}{\beta_3(\delta + \delta_1)}, \\
& = \frac{-(\beta_1 + \beta_2)\delta + \beta_2\delta_1}{\delta(\beta_3\eta - \beta_1l_2) - (\delta + \delta_1)(\beta_2l_2 + \beta_3l_1)} \frac{\beta_1\bar{M}}{\beta_3(\delta + \delta_1)} \\
& \quad + \frac{\beta_1\bar{M}}{\beta_3(\delta + \delta_1)}, \\
& = \frac{\bar{M}(-\beta_2\beta_3\delta\eta - \beta_2\beta_3\delta_1\eta - \beta_1\beta_3\delta l_1 - \beta_1\beta_3\delta_1 l_1)}{(\delta(\beta_3\eta - \beta_1l_2) - (\delta + \delta_1)(\beta_2l_2 + \beta_3l_1))\beta_3(\delta + \delta_1)}, \\
& = \frac{\bar{M}(\beta_3\delta + \beta_3\delta_1)(-\beta_2\eta - \beta_1 l_1)}{(\delta(\beta_3\eta - \beta_1l_2) - (\delta + \delta_1)(\beta_2l_2 + \beta_3l_1))\beta_3(\delta + \delta_1)}, \\
K^* & = \frac{\bar{M}(\beta_3)(\delta + \delta_1)(-\beta_2\eta - \beta_1 l_1)}{(\delta(\beta_3\eta - \beta_1l_2) - (\delta + \delta_1)(\beta_2l_2 + \beta_3l_1))\beta_3(\delta + \delta_1)},
\end{aligned}$$

atau dapat dinyatakan dalam bentuk

$$K^* = \frac{\bar{M}(-\beta_2\eta - \beta_1 l_1)}{(\delta(\beta_3\eta - \beta_1l_2) - (\delta + \delta_1)(\beta_2l_2 + \beta_3l_1))}. \quad (8)$$

Jadi dari (6), (7), dan (8) diperoleh

$$Y^* = \frac{-((\beta_1 + \beta_2)\delta + \beta_2\delta_1)\bar{M}}{\delta(\beta_3\eta - \beta_1l_2) - (\delta + \delta_1)(\beta_2l_2 + \beta_3l_1)}$$

$$R^* = \frac{((\delta + \delta_1)l_1 - \delta\eta)\bar{M}}{\delta(\beta_3\eta - \beta_1l_2) - (\delta + \delta_1)(\beta_2l_2 + \beta_3l_1)}$$

$$K^* = \frac{\bar{M}(-\beta_2\eta - \beta_1l_1)}{(\delta(\beta_3\eta - \beta_1l_2) - (\delta + \delta_1)(\beta_2l_2 + \beta_3l_1))}$$



Lampiran 2. Penurunan Persamaan Karakteristik model

Persamaan karakteristik model diperoleh dari

$$|A - \lambda I| = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \alpha(\eta - l_1) - \lambda & -\alpha(\beta_1 + \beta_2) & -\alpha\delta_1 \\ \beta l_2 & -\beta\beta_3 - \lambda & 0 \\ \eta e^{-\lambda\tau} & \beta_1 e^{-\lambda\tau} & -\delta_1 e^{-\lambda\tau} - \delta - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{aligned} & (\alpha(\eta - l_1) - \lambda)(-\beta\beta_3 - \lambda)(-\delta_1 e^{-\lambda\tau} - \delta - \lambda) \\ & + (-\alpha\delta_1)(\beta l_2)(\beta_1 e^{-\lambda\tau}) \\ & - ((\eta e^{-\lambda\tau})(-\beta\beta_3 - \lambda)(-\alpha\delta_1) \\ & + (-\delta_1 e^{-\lambda\tau} - \delta - \lambda)(\beta l_2)(-\alpha(\beta_1 + \beta_2))) = 0. \end{aligned}$$

Untuk mempermudah perhitungan, persamaan di atas dibagi menjadi 4 suku, yaitu

1. $(\alpha(\eta - l_1) - \lambda)(-\beta\beta_3 - \lambda)(-\delta_1 e^{-\lambda\tau} - \delta - \lambda),$
2. $(-\alpha\delta_1)(\beta l_2)(\beta_1 e^{-\lambda\tau}),$
3. $-(\eta e^{-\lambda\tau})(-\beta\beta_3 - \lambda)(-\alpha\delta_1),$
4. $-(\delta_1 e^{-\lambda\tau} - \delta - \lambda)(\beta l_2)(-\alpha(\beta_1 + \beta_2)).$

Keempat suku tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk sebagai berikut.

1. $\begin{aligned} & (\alpha(\eta - l_1) - \lambda)(-\beta\beta_3 - \lambda)(-\delta_1 e^{-\lambda\tau} - \delta - \lambda) \\ & = \alpha\eta\beta\beta_3\delta_1 e^{-\lambda\tau} + \alpha\eta\delta_1\lambda e^{-\lambda\tau} - \alpha l_1\beta\beta_3\delta_1 e^{-\lambda\tau} \\ & - \alpha l_1\delta_1\lambda e^{-\lambda\tau} - \beta\beta_3\delta_1\lambda e^{-\lambda\tau} - \delta_1\lambda^2 e^{-\lambda\tau} \\ & + \alpha\eta\beta\beta_3\delta + \alpha\eta\delta\lambda - \alpha l_1\beta\beta_3\delta - \alpha l_1\delta\lambda - \beta\beta_3\delta\lambda \\ & - \delta\lambda^2 + \alpha\eta\beta\beta_3\lambda + \alpha\eta\lambda^2 - \alpha l_1\beta\beta_3\lambda - \alpha l_1\lambda^2 \\ & - \beta\beta_3\lambda^2 - \lambda^3, \end{aligned}$
2. $(-\alpha\delta_1)(\beta l_2)(\beta_1 e^{-\lambda\tau}) = -\alpha l_2\beta\beta_1\delta_1 e^{-\lambda\tau},$
3. $-(\eta e^{-\lambda\tau})(-\beta\beta_3 - \lambda)(-\alpha\delta_1) = -(\alpha\eta\beta\beta_3\delta_1 e^{-\lambda\tau} + \alpha\eta\delta_1\lambda e^{-\lambda\tau},$
4. $\begin{aligned} & -(\delta_1 e^{-\lambda\tau} - \delta - \lambda)(\beta l_2)(-\alpha(\beta_1 + \beta_2)) \\ & = -(\alpha l_2\beta\beta_1\delta_1 e^{-\lambda\tau} + \alpha l_2\beta\beta_1\delta + \alpha l_2\beta\beta_1\lambda \\ & + \alpha l_2\beta\beta_2\lambda e^{-\lambda\tau} + \alpha l_2\beta\beta_1\delta + \alpha l_2\beta\beta_2\lambda). \end{aligned}$

Kemudian keempat suku tersebut dijumlahkan dan disederhanakan menjadi

$$\begin{aligned}
& \lambda^3 + \lambda^2(\delta + \beta\beta_3 - \alpha(\eta - l_1)) \\
& + \lambda(\alpha l_2\beta(\beta_1 + \beta_2) + \beta\beta_3\delta - \alpha(\delta + \beta\beta_3)(\eta - l_1)) \\
& + \alpha\beta\delta((\beta_1 + \beta_2)l_2 - \beta_3(\eta - l_1)) \\
& + e^{-\lambda\tau}(\lambda^2(\delta_1) + \lambda(\delta_1(\beta\beta_3 + \alpha l_1)) \\
& + \alpha\beta\delta_1(l_2\beta_2 + l_1\beta_3)) = 0,
\end{aligned}$$

atau dapat dinyatakan dalam bentuk

$$P(\lambda) + Q(\lambda)e^{-\lambda\tau} = 0, \quad (9)$$

dengan

$$P(\lambda) = \lambda^3 + A\lambda^2 + B\lambda + C,$$

$$Q(\lambda) = D\lambda^2 + E\lambda + F,$$

di mana

$$A = \delta + \beta\beta_3 - \alpha(\eta - l_1),$$

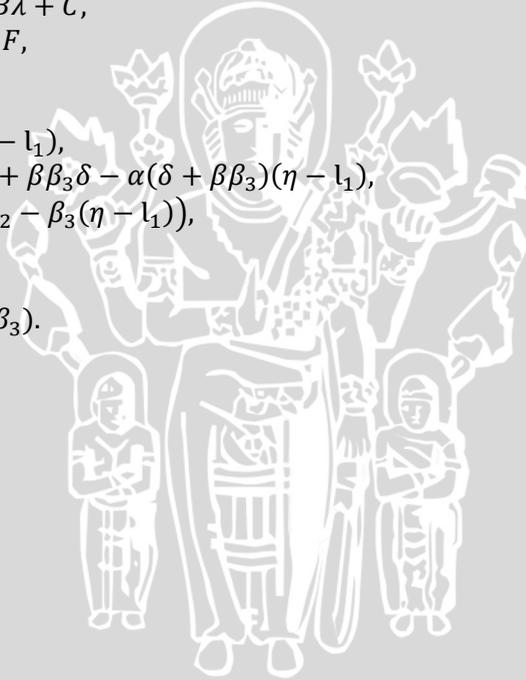
$$B = \alpha l_2\beta(\beta_1 + \beta_2) + \beta\beta_3\delta - \alpha(\delta + \beta\beta_3)(\eta - l_1),$$

$$C = \alpha\beta\delta((\beta_1 + \beta_2)l_2 - \beta_3(\eta - l_1)),$$

$$D = \delta_1,$$

$$E = \delta_1(\beta\beta_3 + \alpha l_1),$$

$$F = \alpha\beta\delta_1(l_2\beta_2 + l_1\beta_3).$$



Lampiran 3. Penurunan bagian real dan imajiner persamaan (3.6)

Substitusi $\lambda(\tau) = u(\tau) + iv(\tau)$ ke persamaan (9) menghasilkan

$$(u + iv)^3 + A(u + iv)^2 + B(u + iv) + C + (D(u + iv)^2 + E(u + iv) + F)e^{-(u+iv)\tau} = 0,$$

persamaan di atas dapat dinyatakan dalam bentuk

$$M + N = 0,$$

di mana

$$M = (u + iv)^3 + A(u + iv)^2 + B(u + iv) + C, \\ N = (D(u + iv)^2 + E(u + iv) + F)e^{-(u+iv)\tau}.$$

Kemudian disederhanakan nilai N dan M seperti di bawah ini

$$M = (u + iv)^3 + A(u + iv)^2 + B(u + iv) + C \\ = (u^3 + 3u^2iv + 3u(iv)^2 - (iv)^3) + A(u^2 + 2u(iv) + (iv)^2) \\ + B(u + iv) + C, \\ = (u^3 + 3u^2iv - 3uv^2 - iv^3) + A(u^2 + 2uiv - v^2) \\ + B(u + iv) + C, \\ = u^3 + Au^2 + Bu + (3u^2iv - iv^3 + 2Aui v + Biv) - 3uv^2 - Av^2,$$

$$M = u^3 - 3uv^2 + A(u^2 - v^2) + Bu + C \\ + (3u^2v - v^3 + 2Auv + Bv)i,$$

$$N = (D(u + iv)^2 + E(u + iv) + F)e^{-(u+iv)\tau}, \\ = (D(u^2 + 2uiv + (iv)^2) + E(u + iv) + F)e^{-(u+iv)\tau}, \\ = (D(u^2 + 2uiv - v^2) + E(u + iv) + F)e^{-(u+iv)\tau}, \\ = (D(u^2 - v^2) + Eu + F + i(2Duv + Ev))e^{-(u+iv)\tau}, \\ = (D(u^2 - v^2) + Eu + F + i(2Duv + Ev))e^{-u\tau}e^{-iv\tau}, \\ = (D(u^2 - v^2) + Eu + F + i(2Duv + Ev))e^{-u\tau}(\cos(v\tau) - i \sin(v\tau)),$$

$$= \left((D(u^2 - v^2) + Eu + F + i(2Duv + Ev))\cos(v\tau) - i(D(u^2 - v^2) + Eu + F + i(2Duv + Ev))\sin(v\tau) \right) e^{-u\tau},$$

$$\begin{aligned}
&= ((D(u^2 - v^2) + Eu + F)\cos(v\tau) + i(2Duv + Ev)\cos(v\tau) \\
&\quad - (D(u^2 - v^2) + Eu + F) i \sin(v\tau) \\
&\quad + (2Duv + Ev) \sin(v\tau))e^{-u\tau}, \\
N &= (((D(u^2 - v^2) + Eu + F)\cos(v\tau) + (2Duv + Ev)\sin(v\tau) \\
&\quad + i((2Duv + Ev)\cos(v\tau) \\
&\quad - (D(u^2 - v^2) + Eu + F))\sin(v\tau)))e^{-u\tau}.
\end{aligned}$$

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



Lampiran 4. Eliminasi τ pada persamaan (3.10) dan (3.11)

$$-Av^2 + C = (Dv^2 - F) \cos(v\tau) - Ev \sin(v\tau), \quad (10)$$

$$v^3 - Bv = Ev \cos(v\tau) + (Dv^2 - F) \sin(v\tau). \quad (11)$$

Apabila persamaan (10) dan (11) dikuadratkan, maka diperoleh

$$\begin{aligned} A^2v^4 - 2ACv^2 + C^2 &= (Dv^2 - F)^2 \cos^2(v\tau) - 2(Dv^2 - F)Ev \sin(v\tau) \cos(v\tau) + \\ &\quad E^2v^2 \sin^2(v\tau), \end{aligned} \quad (12)$$

dan

$$\begin{aligned} v^6 - 2Bv^4 + B^2v^2 &= E^2v^2 \cos^2(v\tau) + 2(Dv^2 - F)Ev \sin(v\tau) \cos(v\tau) + \\ &\quad (Dv^2 - F)^2 \sin^2(v\tau). \end{aligned} \quad (13)$$

Selanjutnya untuk mengeliminasi τ , persamaan (12) dengan (13) dijumlahkan, sehingga menghasilkan

$$v^6 + (A^2 - 2B)v^4 + (B^2 - 2AC)v^2 + C^2 = E^2v^2 + D^2v^4 - 2DFv^2 + F^2,$$

$$\begin{aligned} v^6 + (A^2 - 2B - D^2)v^4 &+ (B^2 - 2AC - E^2 + 2DF)v^2 \\ &- F^2 = 0, \end{aligned}$$

atau dapat dinyatakan dalam bentuk

$$v^6 + av^4 + bv^2 + c = 0. \quad (14)$$

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



Lampiran 5. Pembuktian Lemma 3.2

$$h(z) = z^3 + az^2 + bz + c. \quad (15)$$

Lemma 3.2

Misalkan $\Delta = a^2 - 3b$,

(i) Jika $c < 0$, maka persamaan (15) paling tidak mempunyai satu akar yang bernilai positif.

(ii) Jika $c \geq 0$ dan $\Delta < 0$, maka persamaan (15) tidak mempunyai akar yang bernilai positif.

(iii) Jika $c \geq 0$ dan $\Delta \geq 0$, maka persamaan (15) mempunyai akar-akar yang bernilai positif jika dan hanya jika $\bar{z} = \frac{1}{3}(-a + \sqrt{\Delta}) > 0$ dan $h(\bar{z}) \leq 0$.

Bukti.

(i) Jelas bahwa, $h(0) = c < 0$, dan $\lim_{z \rightarrow \infty} h(z) = \infty$. sehingga, terdapat $z_0 \in (0, \infty)$ yang menyebabkan $h(z_0) = 0$.

(ii) Dengan menurunkan persamaan (15) terhadap z , diperoleh

$$\frac{dh(z)}{dz} = 3z^2 + 2az + b. \quad (16)$$

Oleh karena itu pembuat nol dari persamaan (16) dapat ditentukan dengan cara :

$$z_{1,2} = \frac{-2a \pm \sqrt{4a^2 - 12b}}{6} = \frac{-a \pm \sqrt{\Delta}}{3}$$

Karena nilai $\Delta < 0$, maka nilai dari $\frac{dh(z)}{dz}$ akan selalu lebih besar dari 0 sehingga menyebabkan persamaan (15) selalu monoton naik di z , hal ini dikarenakan $\Delta < 0$ merupakan syarat definit positif dari fungsi tersebut. Selanjutnya karena nilai dari $h(0) = c \geq 0$, maka menyebabkan persamaan (15) tidak mempunyai akar real positif.

(iii) Jika $\Delta \geq 0$, maka $z_1 = \frac{-p + \sqrt{\Delta}}{3}$ merupakan minimum lokal dari $h(z)$. Selanjutnya kita membuktikan (iii) secara kontradiksi, yaitu untuk $z_1 \leq 0$ atau $z_1 > 0$ dan $h(z_1) > 0$. Untuk $z_1 \leq 0$, karena $h(z)$ monoton naik pada saat $z \geq z_1$ dan $h(0) = r \geq 0$, sehingga $h(z)$ tidak mempunyai akar positif. Sedangkan untuk $z_1 > 0$ dan $h(z_1) > 0$, karena $z_2 = \frac{-p - \sqrt{\Delta}}{3}$ merupakan maksimum lokal dari $h(z)$,

menyebabkan $h(z_2) < h(z_1)$. Oleh karena $h(0) = r \geq 0$, sehingga h tidak mempunyai akar real.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



Lampiran 6 Source code Program

```
function ISLM=AA(t,y,Z)
y1ag=Z(:,1);
ISLM=zeros(3,1);
alfa=1.5; beta=3; delta=0.3; delta1=0.1;
beta1=0.3; beta2=0.1; beta3=0.17;
l1=0.15; l2=0.2; miu=0.5; M=0.25;
ISLM(1)=alfa*((miu-l1)*y(1)-delta1*y(3)-
(beta1+beta2)*y(2));
ISLM(2)=beta*(l2*y(1)-beta3*y(2)-M);
ISLM(3)=miu*y1ag(1)-delta1*y1ag(3)-delta*y(3)-
beta1*y1ag(2);
```

```
function polka=titik(t)
alfa=1.5; beta=3; delta=0.3; delta1=0.1;
beta1=0.3; beta2=0.1; beta3=0.17;
l1=0.15; l2=0.2; miu=0.5; M=0.25;
polka(1)=(-
M*((beta1+beta2)*delta+beta2*delta1)/(delta*(bet
a3*miu-beta1*l2)-
(delta+delta1)*(beta2*l2+beta3*l1));
polka(2)=(M*((delta+delta1)*l1-
delta*miu))/(delta*(beta3*miu-beta1*l2)-
(delta+delta1)*(beta2*l2+beta3*l1));
polka(3)=(-
M*(beta1*l1+beta2*miu))/(delta*(beta3*miu-
beta1*l2)-(delta+delta1)*(beta2*l2+beta3*l1));
end
```

```
function delay
alfa=1.5; beta=3; delta=0.3; delta1=0.1;
beta1=0.3; beta2=0.1; beta3=0.17;
l1=0.15; l2=0.2; miu=0.5; M=0.25;
A=delta+beta*beta3-alfa*(miu-l1);
B=alfa*beta*l2*(beta1+beta2)+beta*beta3*delta-
alfa*(delta+beta*beta3)*(miu-l1);
C=alfa*beta*delta*((beta1+beta2)*l2-beta3*(miu-
l1));
D=delta1;
E=delta1*(beta*beta3+alfa*l1);
F=alfa*beta*delta1*(beta2*l2+beta3*l1);
vo=sqrt(0.1511673109);
```

```

to=1/vo*acos(((A*vo^2-C)*(F-D*vo^2)+(vo^3-
B*vo)*E*vo)/((D*vo^2-F)^2+E^2*vo^2))
figure (5);
options = ddeset('RelTol',1e-4,'AbsTol',1e-
7,'InitialY',[1.6 0.8 1]);
q=(-
M*((beta1+beta2)*delta+beta2*delta1)/(delta*(bet
a3*miu-beta1*l2)-
(delta+delta1)*(beta2*l2+beta3*l1))
w=(M*((delta+delta1)*l1-
delta*miu)/(delta*(beta3*miu-beta1*l2)-
(delta+delta1)*(beta2*l2+beta3*l1))
r=(-M*(beta1*l1+beta2*miu)/(delta*(beta3*miu-
beta1*l2)-(delta+delta1)*(beta2*l2+beta3*l1))
sol =dde23(@AA,0.99,@titik,[0 1500],options);
plot3(sol.y(1,:),sol.y(2,:),sol.y(3,:),'b','linewidth
idth',2);
hold on;
plot3(q,w,r,'black.','linewidth',2);
plot3(1.6,0.8,1,'g*','linewidth',2);
ylabel('R(t)');
xlabel('Y(t)');
zlabel('K(t)');grid;hold on;
figure (5);
options = ddeset('RelTol',1e-4,'AbsTol',1e-
7,'InitialY',[2.5 2 1]);
sol =dde23(@AA,0.99,@titik,[0 1500],options);
plot3(sol.y(1,:),sol.y(2,:),sol.y(3,:),'r','linewidth
idth',2);
hold on;
plot3(2.5,2,1,'g*','linewidth',2);
ylabel('R(t)');
xlabel('Y(t)');
zlabel('K(t)');hold on;
figure (5);
options = ddeset('RelTol',1e-4,'AbsTol',1e-
7,'InitialY',[4 3 2]);
sol =dde23(@AA,0.99,@titik,[0 1500],options);
plot3(sol.y(1,:),sol.y(2,:),sol.y(3,:),'y','linewidth
idth',2);
hold on;
plot3(4,3,2,'g*','linewidth',2);ylabel('R(t)');
xlabel('Y(t)');zlabel('K(t)');hold on;

```