

**MODEL PERTUMBUHAN POPULASI *PREDATOR-PREY*
DENGAN EFEK ALLEE DAN FUNGSI RESPON HOLLING
TIPE II**

SKRIPSI

oleh:
RIZKI YUNI ARTHA
0810940016-94



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2013**

**MODEL PERTUMBUHAN POPULASI *PREDATOR-PREY*
DENGAN EFEK ALLEE DAN FUNGSI RESPON HOLLING
TIPE II**

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

oleh :

RIZKI YUNI ARTHA

0810940016-94



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2013**

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

**MODEL PERTUMBUHAN POPULASI *PREDATOR-PREY*
DENGAN EFEK ALLEE DAN FUNGSI RESPON HOLLING
TIPE II**

oleh:

RIZKI YUNI ARTHA
0810940016-94

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji
pada tanggal 24 Juli 2013
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Dosen Pembimbing I

Dosen Pembimbing II

Dr. Wuryansari M.K., M.Si
NIP. 196607281993032001

Prof.Dr.Marjono M.Phil
NIP. 196211161988031004

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Dr. Abdul Rouf Alghofari, M.Sc.

NIP. 196709071992031001

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Rizki Yuni Artha
NIM : 0810940016
Jurusan : Matematika
Penulis Skripsi berjudul : Model pertumbuhan populasi predator-prey dengan efek Allee dan fungsi respon Holling tipe II

dengan ini menyatakan bahwa

1. skripsi ini adalah benar-benar karya saya sendiri dan bukan hasil plagiat dari karya orang lain. Karya-karya yang tercantum dalam Daftar Pustaka Skripsi ini semata-mata digunakan sebagai acuan/referensi.
2. Apabila di kemudian hari diketahui bahwa isi skripsi yang saya tulis terbukti hasil plagiat, maka saya bersedia menanggung akibat hukum dari keadaan tersebut.

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 24 Juli 2013
Yang menyatakan,

Rizki Yuni Artha
NIM. 0810940016

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



MODEL PERTUMBUHAN POPULASI *PREDATOR-PREY* DENGAN EFEK ALLEE DAN FUNGSI RESPON HOLLING TIPE II

ABSTRAK

Pada skripsi ini dibahas model *predator-prey* kontinu dengan efek Allee. Laju pertumbuhan *prey* mengikuti model logistik. Efek Allee pada model ini terjadi pada laju pertumbuhan populasi *prey*. Analisis dinamik model meliputi perhitungan titik kesetimbangan, syarat eksistensi titik kesetimbangan, analisis kestabilan lokal titik kesetimbangan dan kestabilan global titik kesetimbangan. Pada bagian akhir dilakukan simulasi numerik dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat untuk mengilustrasikan hasil analisis. Model dianalisis untuk memperoleh sifat kestabilan lokal titik kesetimbangan model. Selanjutnya, dari simulasi numerik tersebut ditemukan bahwa Allee yang bernilai besar akan menyebabkan populasi *predator* dan *prey* punah namun apabila Allee bernilai kecil maka populasi *prey* dan *predator* tidak akan punah.

Kata kunci: *analisis kestabilan, fungsi respon Holling tipe II, efek Allee, model predator prey*

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



GROWHT MODEL OF POPULATION WITH ALLEE EFFECT ON *PREDATOR-PREY* AND HOLLING TYPE II FUNCTIONAL RESPONSE

ABSTRACT

This final project deals with continous predator prey model with Allee effect. It is assumed that growth rate of prey follows the logistic model. This Allee effect in the prey equation. Dynamical behaviour such as existence condition for each equilibrium point, local property as well as global property are addressed. Finally, numerical simulations are performed using fourth order Runge-Kutta to illustrate the analytical results. From numerical simulations it is found Allee that have big amount causes predator and prey population lose, but if Allee have small amount predator and prey population will never lose.

Keywords: *stability analysis, Holling tipe II, Allee effect, predator prey model*

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



KATA PENGANTAR

Assalamualaikum warrahmatullahi wabarakatuh.

Segala puji dan syukur ke hadirat Allah SWT yang telah melimpahkan nikmat dan karunia-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul *Pengaruh Allee terhadap pertumbuhan populasi predator prey dengan fungsi respon Holling tipe II* dengan baik dan lancar. Shalawat serta salam selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW sebagai suri teladan bagi penulis.

Skripsi ini tidak dapat diselesaikan dengan baik tanpa bantuan, bimbingan serta motivasi dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis ingin menyampaikan terima kasih kepada

1. Dr. Wuryansari M.K., M.Si. dan Prof. Marjono M.Phil selaku pembimbing I dan pembimbing II atas segala bimbingan, arahan, motivasi serta kesabaran yang telah diberikan selama penulisan skripsi ini,
2. Prof. Dr. Agus Suryanto, MSc. selaku dosen penguji atas segala saran yang diberikan untuk perbaikan skripsi ini,
3. Bapak dan Ibu dosen Jurusan Matematika yang telah memberikan bekal ilmu pengetahuan kepada penulis, serta segenap staf dan karyawan Jurusan Matematika atas segala bentuk bantuannya,
4. Papa, Mama, adik dan seluruh keluarga besarku atas segala dukungan, doa, kasih sayang, dukungan dan nasehat yang senantiasa diberikan,
5. Gilang Putra, S.Si atas bantuan, semangat dan doa yang telah diberikan,
6. Suhermin, S.Si., Heni widayani, S.Si., Prila Ika, S.Si dan Reymond Purnomo, S.Si. atas arahan dan bantuan yang telah diberikan kepada penulis,
7. sahabatku *geje* dan rekan-rekan *D'Math B 2008* atas bantuan, dukungan, dan kesetiiaannya mendampingi penulis.

Semoga Allah SWT memberikan rahmat, nikmat, dan karunia-Nya kepada semua pihak yang telah membantu. Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih terdapat banyak kekurangan.

Untuk itu kritik dan saran penulis harapkan sebagai bahan perbaikan dalam karya-karya selanjutnya, melalui *e-mail* penulis kiekie_joe2@yahoo.co.id. Akhir kata, semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak.

Wassalamualaikum warrahmatullahi wabarakatuh.

Malang, 24 Juli 2013

Penulis



DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN	iii
LEMBAR PERNYATAAN	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR TABEL	xv
DAFTAR GAMBAR	xvii
DAFTAR LAMPIRAN	xix
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Tujuan	2
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	3
2.1 Model <i>Predator-Prey</i> Dua Spesies	3
2.2 Fungsi Respon	4
2.3 Sistem Otonomus	5
2.3.1 Sistem Otonomus Linear	6
2.3.2 Sistem Otonomus Nonlinear	8
2.4 Analisis Kestabilan Global	10
2.5 Efek Allee	11
BAB III PEMBAHASAN	13
3.1 Model dengan Efek Allee	13
3.2 Titik Keseimbangan	16
3.2.1 Titik Keseimbangan $E_0(0,0)$	16
3.2.2 Titik Keseimbangan $E_1(X_1, 0)$, $E_2(X_2, 0)$	17
3.2.3 Titik Keseimbangan $E_3(X^*, Y^*)$	18
3.3 Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan	19
3.3.1 Titik Keseimbangan $E_0 = (0, 0)$	20
3.3.2 Titik Keseimbangan $E_1 = (X_1, 0)$	20
3.3.3 Titik Keseimbangan $E_2 = (X_2, 0)$	20
3.3.4 Titik Keseimbangan $E_3 = (X^*, Y^*)$	21
3.4 Kestabilan Global	22
3.5 Simulasi Numerik	25

3.5.1 Simulasi 1.....	25
3.5.2 Simulasi 2	26
3.5.3 Simulasi 3.....	27
BAB IV KESIMPULAN DAN SARAN.....	31
4.1 Kesimpulan.....	31
4.2 Saran.....	31
DAFTAR PUSTAKA	33
LAMPIRAN	35



DAFTAR TABEL

	Halaman
Tabel 2.1. Fungsi Respon	4
Tabel 2.2. Syarat Kestabilan Titik Kesetimbangan	7
Tabel 2.3. Kriteria Kestabilan Sistem	8
Tabel 3.1. Syarat Eksistensi dan Kestabilan Titik Kesetimbangan Model dengan Efek Allee	24
Tabel 3.2. Simulasi Numerik	25



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



DAFTAR GAMBAR

	Halaman
Gambar 2.1 Jenis kestabilan titik kesetimbangan	6
Gambar 3.1 Grafik Potret Fase untuk kondisi $E_0(0,0)$	26
Gambar 3.2 Grafik Potret Fase untuk kondisi $E_1(X_1, 0)$ dan $E_2(X_2, 0)$	27
Gambar 3.3 Grafik Potret Fase untuk kondisi $E_3(X^*, Y^*)$	28



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



DAFTAR LAMPIRAN

Halaman

Lampiran 1. Program Model dengan Efek Allee 35

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Model dinamika populasi merupakan model matematika yang menggambarkan peristiwa perubahan yang terjadi pada suatu populasi, seperti pertumbuhan. Salah satu model yang merupakan sistem dinamik adalah model interaksi populasi yakni interaksi antara dua spesies atau lebih. Interaksi ini dapat berbentuk predasi, seperti pada model *predator prey*. *Predator* merupakan populasi yang memakan, sedangkan *prey* adalah populasi yang dimakan. Berbagai teori dan eksperimen telah dilakukan untuk menyelidiki analisis kestabilan sistem *predator prey* tetapi tidak banyak yang membahas analisis kestabilan sistem *predator prey* terkena efek Allee.

Efek Allee mendapatkan banyak perhatian dari para ahli ekologi dan para peneliti karena efek Allee sangat berpengaruh pada dinamika populasi. Efek ini merupakan fenomena penting yang cukup menarik perhatian dari ahli ekologi. Efek Allee adalah hubungan positif antara kepadatan populasi dan laju pertumbuhan. Efek Allee mengurangi laju pertumbuhan populasi ketika kepadatan populasi rendah sehingga individu-individu sukar untuk berinteraksi. Penyebab utama efek ini adalah kesulitan dalam menemukan pasangan antar individu dari suatu spesies dengan kepadatan populasi rendah. Penyebab lainnya adalah disfungsi sosial, depresi penangkaran sanak dan eksploitasi makanan. Beberapa penelitian telah menunjukkan bahwa efek Allee dapat menjadi faktor destabilisasi dalam suatu sistem ekologi. Efek ini dapat berkurang jika ukuran populasi meningkat.

Efek Allee pada dinamika populasi dipelajari dalam model kontinu dan diskrit, namun pada skripsi ini dibahas model *predator-prey* kontinu dengan efek Allee. Model matematika yang terbentuk meliputi laju pertumbuhan populasi *prey* dan populasi *predator*. Selanjutnya akan ditentukan titik kesetimbangan model dan dilakukan analisis kestabilan pada titik kesetimbangan. Pada bagian akhir, hasil analisis yang telah diperoleh diilustrasikan dengan simulasi numerik.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang, pokok permasalahan yang dibahas dalam skripsi ini adalah

1. bagaimana pembentukan model *predator-prey* dengan efek Allee,
2. bagaimana kestabilan titik kesetimbangan model tersebut,
3. bagaimana hasil simulasi numerik model.

1.3 Tujuan

Tujuan penulisan skripsi ini adalah sebagai berikut

1. mengkonstruksi model *predator-prey* dengan efek Allee,
2. menentukan kestabilan titik kesetimbangan model,
3. melakukan simulasi dan interpretasi hasil analisis model tanpa maupun dengan efek Allee numerik model.



BAB II TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Model *Predator-Prey* Dua Spesies

Persamaan diferensial biasa yang menggambarkan interaksi antara spesies *prey* dan *predator* pertama kali diperkenalkan oleh Volterra pada tahun 1928 dan dikenal sebagai model Lotka-Volterra. *Prey* diasumsikan memiliki makanan yang berlebih dan tumbuh secara eksponensial kecuali terjadi pemangsaan. Misalkan x adalah kepadatan populasi *prey* dan y adalah kepadatan populasi *predator*. Pertumbuhan eksponensial *prey* dinyatakan dengan ax . Laju pemangsaan terhadap *prey* oleh *predator* diasumsikan sebanding dengan laju interaksi *prey* dan *predator* yang dinyatakan dengan bxy . Dengan demikian, laju pertumbuhan populasi *prey* dapat dituliskan sebagai

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy. \quad (2.1)$$

Pertumbuhan populasi *predator* dinyatakan oleh δxy yang tidak harus sama besar dengan laju pemangsaan *predator* terhadap *prey* bxy . Jika *predator* mengalami kematian alami secara eksponensial dengan laju cy , maka laju pertumbuhan populasi *predator* adalah (Finizio dan Ladas, 1982).

$$\frac{dy}{dt} = -cy + \delta xy. \quad (2.2)$$

Dari persamaan (2.1) dan (2.2) diperoleh model Lotka-Volterra berupa sistem persamaan diferensial (Chauvet, dkk, 2002).

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, y) = ax - bxy \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y) = -cy + \delta xy \end{aligned} \quad (2.3)$$

dengan

- = laju kelahiran alami *prey*,
- = koefisien interaksi pemangsaan *prey*,
- = laju kematian alami *predator*,
- = koefisien perkembangbiakan *predator*.

Semua parameter a dan δ bernilai positif.

2.2 Fungsi Respon

Definisi 2.2.1

Menurut Skalski dan Gilliam, pemahaman hubungan antara *predator* dan *prey* adalah dasar utama untuk mempelajari ekologi. Salah satu komponen penting dalam hubungan tersebut adalah laju predator memangsa *prey*. Laju memangsa perkapita predator terhadap *prey*, yang sering disebut fungsi respon, memberikan dasar teori *predator-prey*.

Seiring dengan perkembangan penelitian terhadap model *predator-prey*, diperoleh bentuk umum

$$\frac{dx}{dt} = p(x) - aq(x,y)y \quad (2.4)$$

$$\frac{dy}{dt} = q(x,y)y - my$$

dimana $q(x,y)$ menyatakan fungsi respon dan parameter a menyatakan efisiensi pemangsaan. Fungsi respon menjelaskan perpindahan energi yang terjadi pada tingkat pemangsa. Beberapa tipe dan bentuk fungsi respon yang telah dikembangkan terangkum dalam Tabel 2.1.

Table 2.1 Tipe dan bentuk fungsi respon

Type	Bentuk Fungsi Respon $q(x,y)$
Holling tipe I	cx
Holling tipe II	$\frac{cx}{r+cx}$
Holling tipe III	$\frac{cx^2}{r+cx^2}$
Beddington DeAngelis	$\frac{cx}{r+cx+y}$
Ratio-Dependent	$\frac{cx}{ex+y}$
Nicholson-Bailey	axe^{-by}

(Skalski dan Gilliam 2001).

2.3 Sistem Otonomus

Definisi 2.3.1 (Sistem Otonomus)

Sistem otonomus adalah suatu sistem persamaan diferensial orde satu yang berbentuk

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= F(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= G(x, y)\end{aligned}$$

dengan fungsi F dan G tidak bergantung secara eksplisit terhadap variabel bebas t tetapi hanya bergantung pada variabel tak bebas x dan y (Boyce dan DiPrima, 2005).

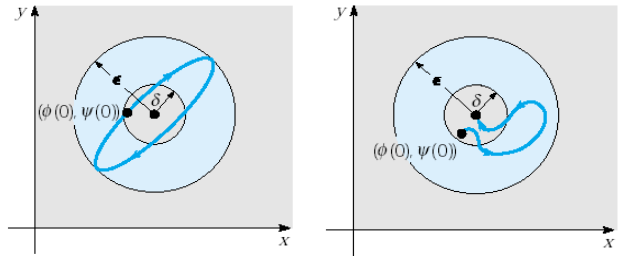
Definisi 2.3.2 (Titik Keseimbangan dan Kestabilan)

Pandang sistem otonomus (1) . Titik (x^*, y^*) yang memenuhi $F(x^*, y^*) = 0$ dan $G(x^*, y^*) = 0$ disebut *titik kritis* sistem otonomus

(1) . Titik kritis (x^*, y^*) adalah solusi sistem (1) yang bernilai konstan, sebab $\frac{dx}{dt} = 0$ dan $\frac{dy}{dt} = 0$. Oleh karena itu, titik kritis disebut juga *titik keseimbangan*.

Jenis kestabilan titik keseimbangan (x^*, y^*) dapat dibagi menjadi tiga kriteria, yaitu:

1. stabil apabila $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ sedemikian sehingga jika $\|(x(0), y(0)) - (x^*, y^*)\| < \delta$ maka $\|(x(t), y(t)) - (x^*, y^*)\| < \varepsilon$, untuk $t \geq 0$
2. tak stabil apabila tidak memenuhi kriteria pertama,
3. stabil asimtotik jika stabil dan $\exists \delta_0, 0 < \delta_0 < \delta$, sedemikian sehingga sebuah solusi $x = x(t)$ dan $y = y(t)$ yang memenuhi $\|(x(t), y(t)) - (x^*, y^*)\| < \delta_0$ akan bersifat $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t)) = (x^*, y^*)$. Untuk lebih jelasnya, kriteria kestabilan tersebut dapat dilihat pada Gambar dengan $(\phi(0), \psi(0)) = (x(0), y(0))$.



(a) (b)

Gambar 2.1 Jenis kestabilan titik kesetimbangan, (a) stabil, (b) stabil asimtotik.

(Boyce dan DiPrima, 2001).

2.3.1 Sistem Otonomus Linear

Perhatikan sistem otonomus linear berikut

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax + by, \\ \frac{dy}{dt} &= cx + dy. \end{aligned}$$

Misalkan ditulis sebagai

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x},$$

dengan

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, maka sistem persamaan dapat

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Dalam hal ini A disebut matriks koefisien sistem (1). Untuk memperoleh akar persamaan karakteristik (2) dan (3) digunakan $\det(A - \lambda I)$. Akar persamaan karakteristik yang diperoleh digunakan untuk menentukan jenis kestabilan titik kesetimbangan sistem (1). Kriteria jenis kestabilan sistem (1) berdasarkan akar persamaan karakteristik dapat dilihat pada Tabel 2.2

Tabel 2.2 Kestabilan titik kesetimbangan sistem

Nilai Eigen		Kestabilan	Jenis
$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$	$\lambda_1, \lambda_2 > 0$	tidak stabil	simpul
	$\lambda_1, \lambda_2 < 0$	stabil asimtotik	simpul
	$\lambda_1 > 0$ $\lambda_2 < 0$	tidak stabil	pelana
$\lambda_{1,2} = p \pm iq \in \mathbb{C}$	$p > 0$	tidak stabil	spiral
	$p < 0$	stabil asimtotik	spiral
	$p = 0$	stabil	center

(Boyce dan DiPrima, 2005).

Dalam menentukan nilai eigen suatu matriks tidak tertutup kemungkinan sangat rumit dan memerlukan analisis sehingga tabel (i) tidak dapat digunakan secara langsung. Untuk mempermudah perhitungan diberikan klasifikasi untuk menentukan kestabilan berdasarkan nilai determinan dan trace.

Misalkan diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ maka persamaan karakteristiknya adalah

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

atau

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0. \quad (2.7)$$

Solusi persamaan (i) adalah

$$\lambda_{1,2} = \frac{\text{trace}(A) \pm \sqrt{(\text{trace}(A))^2 - 4 \det(A)}}{2}, \quad (i)$$

dimana $\text{trace}(A) = a + d$ dan $\det(A) = ad - bc$

Dari persamaan (i) dapat ditentukan kemungkinan nilai λ_1 dan λ_2 yang bergantung pada nilai trace dan \det . Sifat kestabilan masing-masing kriteria disajikan pada Tabel berikut.

Tabel 2.3 Kriteria kestabilan sistem | berdasarkan nilai $\det(A)$ dan $\text{trace}(A)$

$\det(A)$	$\text{tr}(A)$	$(\text{trace}(A))^2 - 4\det(A)$	Nilai Eigen	Kestabilan
$>$	$>$	≥ 0	$\lambda_1, \lambda_2 > 0$	tidak stabil
		< 0	$\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta$ $\alpha > 0$	tidak stabil
	$= 0$	< 0	$\lambda_{1,2} = \pm i\beta$	stabil
	$<$	≥ 0	$\lambda_1, \lambda_2 < 0$	stabil asimtotik
< 0		< 0	$\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta$ $\alpha < 0$	stabil asimtotik
$<$	$>$		$\lambda_1 > 0$ $\lambda_2 < 0$	tidak stabil
	$=$		$\lambda_1 > 0$ $\lambda_2 < 0$	tidak stabil
	$<$		$\lambda_1 > 0$ $\lambda_2 < 0$	tidak stabil

(Panfilov, 2004).

2.3.2 Sistem Otonomus Nonlinear

Perhatikan sistem otonomus nonlinear berikut.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y), \end{aligned} \quad (2.9)$$

dengan dan adalah fungsi nonlinier yang mempunyai turunan parsial yang kontinu di titik kesetimbangan (x^*) . Deret Taylor fungsi dan di sekitar (x^*) adalah

$$f(x, y) = f(x^*, y^*) + \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x} (x - x^*) + \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y} (y - y^*) + \eta_1(x, y) \quad (2.1)$$

$$g(x, y) = g(x^*, y^*) + \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x} (x - x^*) + \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y} (y - y^*) + \eta_2(x, y), \quad (2)$$

dengan $\eta_1(x, y)$ dan $\eta_2(x, y)$ adalah suku sisa. Untuk hampiran orde satu di atas, suku sisa memenuhi sifat-sifat

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (x^*, y^*)} \frac{\eta_1(x, y)}{\|\bar{w}\|} &= 0, \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (x^*, y^*)} \frac{\eta_2(x, y)}{\|\bar{w}\|} &= 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

dengan $\bar{w} = (x - x^*, y - y^*)$. Dengan menggunakan persamaan (2) dan (2) serta mengingat $\frac{dx}{dt} = \frac{d\xi}{dt}$, dan $\frac{dy}{dt} = \frac{d\eta}{dt}$, dapat ditulis dalam bentuk matriks, yaitu

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x - x^* \\ y - y^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x^*, y^*) \\ g(x^*, y^*) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x} & \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x} & \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x^* \\ y - y^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1(x, y) \\ \eta_2(x, y) \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Matriks

$$J(x^*, y^*) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial(x, y)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x} & \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x} & \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y} \end{bmatrix}$$

disebut matriks Jacobi atau *partial derivative matrix*.

Jika dimisalkan $u = x - x^*$, dan $v = y - y^*$, sehingga $\bar{w} = (u, v)$ dan dengan mengingat bahwa $f(x^*, y^*) = g(x^*, y^*) = 0$, maka persamaan (2) dapat ditulis sebagai

$$\begin{bmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x} & \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x} & \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix}$$

atau

$$\frac{d\bar{w}}{dt} = J\bar{w} + \bar{\eta}. \quad (2.14)$$

Berdasarkan persamaan (2) bila \bar{w} , maka $\bar{\eta}$, sehingga nilai dapat diabaikan dan di sekitar (x^*) sistem nonlinear (dapat dihipotesis oleh sistem linear

$$\frac{d\bar{w}}{dt} = J\bar{w}. \quad (2.15)$$

Untuk $x = x^*$ dan $y = y^*$ diperoleh $(x^*, y^*) = 1$, sehingga sistem linear (2) memiliki titik kesetimbangan $(x^*, y^*) = 1$ (Boyce dan Di Prima, 2005).

2.4 Analisis Kestabilan Global

Teorema 2.2 (Kriteria Dulac)

Andaikan D adalah suatu daerah terhubung sederhana pada \mathbb{R}^2 , $B(x, y)$ adalah suatu fungsi bernilai riil pada D , dan (f, g) adalah ruas kanan sistem (2.9).

Jika

$$div(Bf, Bg) = \frac{\partial(Bf)}{\partial x} + \frac{\partial(Bg)}{\partial y} \neq 0,$$

dan $div(Bf, Bg)$ tidak berubah tanda pada daerah D , maka tidak terdapat orbit periodik pada daerah D (Richard, 2002).

Limit cycle adalah suatu solusi periodik yang berbentuk lintasan tertutup pada bidang fase. Jika untuk $t \rightarrow \infty$ arah trayektori di sekitar lintasan menuju ke limit cycle, maka limit cycle bersifat stabil. Tetapi, jika arah konvergensi solusi lintasan menjauhi limit cycle, maka limit cycle bersifat tidak stabil (Panfilov, 2004).

2.5 Efek Allee

Efek Allee merupakan fenomena ekologi yang memiliki daya tarik cukup menarik dari ahli ekologi, berbagai mekanisme yang

berkaitan dengan efek Allee telah dibahas secara keseluruhan. Pencetus dari fenomena tersebut adalah Clyde Warder Allee (1885-1955), Zoologist Universitas Chicago dan ekologi hewan, khususnya pada kelompok perilaku hewan. Allee adalah seorang pengamat perilaku hewan, melihat bahwa kerjasama antar individu memiliki efek positif antara individu-individu di ukuran populasi rendah atau kepadatan dikenal dengan efek Allee dan interaksi ini penting untuk suatu kelangsungan hidup dan reproduksi suatu individu (Stephens et al, 1999)

Efek Allee merupakan penurunan laju pertumbuhan penduduk kepadatan rendah yang dapat dihasilkan oleh beberapa populasi pada mekanisme, seperti kesulitan dalam menemukan pasangan. Efek Allee terjadi pada populasi alamiah dari kupu-kupu yang terancam punah, yaitu *fritillary Glanvill (Melitaea cinxia)*. (Courchamp et al, 1999).



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



BAB III PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas model *prey-predator* dengan efek Allee. Dalam merumuskan model diperlukan penskalaan untuk penyederhanaan model. Pembahasan pada skripsi ini lebih ditekankan pada analisis dinamik, yaitu penentuan titik kesetimbangan, uji eksistensi titik kesetimbangan, penentuan jenis kestabilan titik kesetimbangan dan pada tahap akhir dilakukan beberapa simulasi yang mencakup model dengan efek Allee untuk mengilustrasikan hasil analisis dinamik yang telah diperoleh.

3.1 Model dengan efek Allee

Misalkan kepadatan populasi *prey* dan *predator* masing-masing dinyatakan dengan N dan P . Berikut adalah pembentukan model *predator-prey* dengan efek Allee.

1. Laju perubahan jumlah populasi *prey*

Laju pertumbuhan populasi *prey* dengan efek Allee dinyatakan oleh persamaan

$$\frac{dN}{dt} = N \left(\frac{bN}{A_1 + N} - d_1 - \alpha N \right) - \frac{sNP}{1 + sh_1 N} \quad (3.1)$$

Persamaan ini menggambarkan pertumbuhan populasi *prey* dengan adanya Allee. Pada persamaan ini pertumbuhan populasi *prey* tanpa kehadiran *predator*. Persamaan ini juga menggambarkan kompetisi di antara *prey*. Interaksi *prey* dengan *predator* kemungkinan besar akan mengakibatkan *prey* dimangsa oleh *predator*, dengan laju pemangsaan sebesar s . Tingkat konsumsi *predator* diasumsikan mengikuti fungsi respon Holling tipe II.

2. Laju perubahan jumlah populasi *predator*

Laju pertumbuhan populasi *predator* ditinjau dengan fungsi respon Holling tipe II, dengan h_1 adalah laju konversi populasi *predator* dengan populasi *prey* yang berupa konstanta positif. Tanpa keberadaan *prey*, *predator* tentunya akan mati. Laju kematian *predator* sebesar d_2 , laju berkurangnya jumlah populasi *predator*

dalam ketiadaan *prey*, laju perubahan jumlah populasi *predator* pada waktu t dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{dP}{dt} = \frac{e_1 sNP}{1 + sh_1 N} - d_2 P, \quad (3.2)$$

Untuk menyederhanakan sistem (1) dan (2) dilakukan penskalaan dengan menggunakan persamaan-persamaan berikut.

$$X = \frac{\alpha N}{b}, \quad (3.3)$$

$$Y = \frac{sP}{b}, \quad (3.4)$$

$$t = bt, \quad (3.5)$$

dengan menggunakan aturan rantai diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= \frac{dX}{dN} \frac{dN}{dt} \frac{dt}{dt} \\ &= N \left[\frac{N\alpha}{A_1 + N} - \frac{d_1 \alpha}{b} - \frac{\alpha^2 N}{b} - \frac{sP\alpha}{b(1 + sh_1 N)} \right] \frac{1}{b} \\ &= \frac{\alpha}{b} \left[N \left(\frac{bN}{A_1 + N} - d_1 - \alpha N \right) - \frac{sNP}{1 + sh_1 N} \right] \frac{1}{b} \\ &= \frac{Xb}{\alpha} \left[\frac{\frac{Xb}{\alpha} \cdot \alpha}{A_1 + \frac{Xb}{\alpha}} - \frac{d_1 \alpha}{b} - \frac{\alpha^2 \cdot \frac{Xb}{\alpha}}{b} - \frac{sP\alpha}{b \left(1 + sh_1 \cdot \frac{Xb}{\alpha} \right)} \right] \frac{1}{b} \\ &= \frac{X}{\alpha} \left[\frac{b\alpha}{A_1 \alpha + Xb} - \frac{d_1 \alpha}{b} - X\alpha - \frac{sP\alpha}{b\alpha + sh_1 Xb^2} \right] \\ &= X \left[\frac{Xb}{A_1 \alpha + Xb} - \frac{d_1}{b} - X - \frac{sP\alpha}{b\alpha + sh_1 Xb^2} \right] \\ &= X \left[\frac{Xb}{A_1 \alpha + Xb} - \frac{d_1}{b} - X - \frac{s \cdot \frac{Yb}{s} \alpha}{b\alpha + sh_1 Xb^2} \right] \\ &= X \left[\frac{Xb}{A_1 \alpha + Xb} - \frac{d_1}{b} - X - \frac{Y\alpha}{\alpha + sh_1 Xb} \right] \end{aligned}$$

$$= X \left[\frac{X}{\frac{A_1 \alpha}{b} + X} - \frac{d_1}{b} - X - \frac{Y}{1 + \frac{sh_1 b}{\alpha} X} \right] \quad (3.6)$$

$$= X \left(\frac{X}{A + X} - m_1 - X - \frac{Y}{1 + hX} \right),$$

dengan $A = \frac{A_1 \alpha}{b}$, $m_1 = \frac{d_1}{b}$, $h = \frac{sh_1 b}{\alpha}$.

$$\begin{aligned} \frac{dY}{d\tau} &= \frac{dYGF}{dP dt d\tau} \\ &= \frac{s}{b} \left[\frac{c_1 s N \frac{Yb}{s}}{1 + sh_1 N} - d_2 \frac{Yb}{s} \right] \frac{1}{b} \\ &= \frac{s}{b} \left[\frac{c_1 N Y b}{1 + sh_1 N} - \frac{d_2 Y b}{s} \right] \frac{1}{b} \\ &= \frac{s}{b} \left[\frac{c_1 \frac{Xb}{\alpha} Y b}{1 + sh_1 \frac{Xb}{\alpha}} - \frac{d_2 Y b}{s} \right] \frac{1}{b} \\ &= \frac{s}{b} \left[\frac{c_1 X Y b^2}{1 + sh_1 X b} - \frac{d_2 Y b}{s} \right] \frac{1}{b} \\ &= \frac{s}{b} \left[\frac{c_1 X Y b^2}{\alpha + sh_1 X b} - \frac{d_2 Y b}{s} \right] \frac{1}{b} \\ &= \frac{s}{b} \cdot Y \left[\frac{c_1 X b^2}{\alpha + sh_1 X b} - \frac{d_2 b}{s} \right] \frac{1}{b} \\ &= Y \left[\frac{c_1 X b^2 s}{b(\alpha + sh_1 X b)} - \frac{s d_2 b}{s b} \right] \frac{1}{b} \\ &= Y \left[\frac{c_1 X b s}{(\alpha + sh_1 X b)} - d_2 \right] \frac{1}{b} \\ &= Y \left[\frac{c_1 X s}{(\alpha + sh_1 X b)} - \frac{d_2}{b} \right] \\ &= Y \left[\frac{\frac{c_1 s}{\alpha} X}{1 + \frac{sh_1 b}{\alpha} X} - \frac{d_2}{b} \right] \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$= Y \left(\frac{cX}{1+hX} - m_2 \right),$$

dengan $c = \frac{c_2 s}{a}$, $m_2 = \frac{d_2}{b}$.

Dari penskalaan diperoleh sistem yang lebih sederhana untuk (3.6) dan (3.7) dengan A, m_1, m_2, h, c yaitu

$$\begin{aligned} \frac{dX}{d\tau} &= X \left(\frac{X}{A+X} - m_1 - X - \frac{Y}{1+hX} \right) \\ \frac{dY}{d\tau} &= Y \left(\frac{cX}{1+hX} - m_2 \right). \end{aligned} \quad (3.8)$$

3.2 Titik Kesetimbangan

Titik kesetimbangan sistem persamaan (3.8) diperoleh ketika

$$\frac{dX}{d\tau} = \frac{dY}{d\tau} = 0.$$

Sehingga diperoleh

$$X \left(\frac{X}{A+X} - m_1 - X - \frac{Y}{1+hX} \right) = 0, \quad (3.9)$$

$$Y \left(\frac{cX}{1+hX} - m_2 \right) = 0, \quad (3.10)$$

Dari persamaan (3.9) dan (3.10) diperoleh

$$X = 0 \vee \frac{X}{A+X} - m_1 - X - \frac{Y}{1+hX} = 0 \quad (3.11)$$

$$Y = 0 \vee \frac{cX}{1+hX} - m_2 = 0 \quad (3.12)$$

Dari perhitungan, dapat dibentuk kombinasi sehingga menghasilkan empat kemungkinan titik kesetimbangan. Tetapi, dari empat. Pada sub bab 3.2.1 sampai 3.2.4 ditunjukkan cara untuk memperoleh ketiga titik kesetimbangan tersebut.

3.2.1 Titik kesetimbangan $E_0 = \{$

Titik kesetimbangan ini diperoleh dari kombinasi X dan Y menghasilkan titik kesetimbangan $(X, Y) = 1$, yang merupakan titik kesetimbangan trivial.

3.2.2 Titik kesetimbangan $E_1 = (X$ dan $E_2 = (X$

Titik kesetimbangan ini diperoleh dari kombinasi Y dan X . Diketahui bahwa Y sehingga persamaan menjadi

$$\begin{aligned} \frac{X}{A+X} - m_1 - X - \frac{Y}{1+X} &= 0 \\ \frac{X - m_1(A+X) - X(A+X)}{A+X} &= 0 \\ X - m_1A - m_1X - XA - X^2 &= 0 \\ X - m_1A - m_1X - XA - X^2 &= 0 \\ -X^2 + X(1 - m_1 - A) - m_1A &= 0 \\ X_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ X_{1,2} &= \frac{-(1 - m_1 - A) \pm \sqrt{(1 - m_1 - A)^2 - 4m_1A}}{-2} \\ X_1 &= \frac{1}{2} \left(1 - m_1 - A - \sqrt{(1 - m_1 - A)^2 - 4m_1A} \right) \\ X_2 &= \frac{1}{2} \left(1 - m_1 - A + \sqrt{(1 - m_1 - A)^2 - 4m_1A} \right) \end{aligned}$$

Maka diperoleh titik kesetimbangan $E_1(X$ dan $E_2(X$.
Titik kesetimbangan $E_1(X$ dan $E_2(X$ eksis jika #
 $A < 1$ - dan $A < (1 - \sqrt{1 - 4m_1A})$

Bukti:

- i. $1 - m_1 - A$
 $-A > -1 + m_1$
 $A < 1 - m_1$
- ii. $(1 - m_1 - A)^2 > 4$
 $1 - m_1 - A > \sqrt{4m_1A}$

$$\begin{aligned}
 1 - m_1 - A &> 2\sqrt{m_1 A} \\
 1 &> 2\sqrt{m_1 A} + A + m_1 \\
 1 &> A + 2\sqrt{m_1 A} + m_1 \\
 1 &> (\sqrt{A} + \sqrt{m_1})^2 \\
 1 &> \sqrt{A} + \sqrt{m_1} \\
 (1 - \sqrt{m_1})^2 &> A \\
 A &< (1 - \sqrt{m_1})^2
 \end{aligned}$$

3.2.3 Titik kesetimbangan $E_3 = (X^*, Y^*)$

Titik kesetimbangan interior $E_3(X^*, Y^*)$ merupakan titik kesetimbangan interior yang diperoleh dari persamaan

$$\frac{X}{A+X} - m_1 - X - \frac{Y}{1+hX} \text{ dan } \frac{cX}{1+hX} - m_2, \text{ yaitu}$$

$$\frac{X}{A+X} - m_1 - X - \frac{Y}{1+hX} = \frac{cX}{1+hX} - m_2$$

Dari perhitungan, diperoleh

$$\begin{aligned}
 X^* &= \frac{m_2}{c - m_2 h} \\
 Y^* &= \frac{c}{c - m_2 h} \left(\frac{m_2}{m_2 + A(c - m_2 h)} - \frac{m_2}{c - m_2 h} - m_1 \right)
 \end{aligned}$$

Titik kesetimbangan interior dinyatakan dengan $E_3(X^*, Y^*)$ dimana X^* dan Y^* harus bernilai positif. Titik kesetimbangan

$$(X^*, Y^*) \text{ eksis jika } c > \frac{m_2}{1 - m_1} \text{ dan } \frac{m_2}{c - m_2 h} + m_1 < \frac{m_2}{A(c - m_2 h)}$$

Bukti :

$$\begin{aligned}
 \text{i. } \frac{m_2}{c - m_2 h} + m_1 &< \frac{m_2}{A(c - m_2 h) + m_2} \\
 \frac{m_2^2 + m_1 m_2 (c - m_2 h)}{m_2 (c - m_2 h)} &< \frac{m_2}{A(c - m_2 h) + m_2} \\
 \frac{m_2 (c - m_2 h)}{(m_2 + m_1 (c - m_2 h))} &< \frac{1}{A(c - m_2 h) + m_2}
 \end{aligned}$$

$$\frac{m_2(c - m_2h)}{(m_2 + m_1(c - m_2h))} > A(c - m_2h) + m_2$$

$$\frac{m_2(c - m_2h)}{(m_2 + m_1(c - m_2h))} - m_2 > A(c - m_2h)$$

$$\frac{m_2((c - m_2h) - (m_2 + m_1(c - m_2h)))}{(m_2 + m_1(c - m_2h))} >$$

$$\frac{A(c - m_2h)}{m_2((-m_1(c - m_2h) + (c - m_2h) - m_2))} > A(c - m_2h)$$

$$\frac{m_2((c - m_2h)(1 - m_1) - m_2)}{(m_2 + m_1(c - m_2h))} > A(c - m_2h)$$

$$\frac{m_2((c - m_2h)(1 - m_1) - m_2)}{(c - m_2h)(m_2 + m_1(c - m_2h))} > A$$

$$0 < A < \frac{m_2((c - m_2h)(1 - m_1) - m_2)}{(c - m_2h)(m_2 + m_1(c - m_2h))}$$

ii. $(c - m_2h)(1 - m_1) > m_2$

$$c(1 - m_1) - m_2h(1 - m_1) > m_2$$

$$c(1 - m_1) > m_2 + m_2h(1 - m_1)$$

$$c(1 - m_1) > m_2(1 + (1 - m_1)h)$$

$$c > \frac{m_2(1 + (1 - m_1)h)}{1 - m_1}$$

$$c > \frac{m_2(1 + (1 - m_1)h)}{1 - m_1}, 0 < m_1 < 1$$

3.3 Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan

Sebelum menentukan kestabilan setiap titik kesetimbangan terlebih dahulu dilakukan perhitungan matriks Jacobi sistem persamaan sehingga diperoleh nilai eigen yang merupakan penentu kestabilan titik kesetimbangan. Matriks Jacobi dari sistem persamaan (adalah

$$J = \begin{bmatrix} \frac{2AX + N^2}{(A + X)^2} - m_1 - 2X - \frac{Y}{(1 + hX)^2} & -\frac{X}{1 + hX} \\ \frac{cY}{(1 + hX)^2} & \frac{cX}{1 + hX} - m_2 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

3.3.1 Titik kesetimbangan $E_0 = (0, 0)$

Jika titik kesetimbangan disubstitusikan ke dalam matriks (3) maka diperoleh matriks J , yaitu

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} -m_1 & 0 \\ 0 & -m_2 \end{bmatrix}$$

Nilai eigen dari matriks J adalah $\lambda_1 = 0$ dan $\lambda_2 = 0$. Jadi titik kesetimbangan stabil karena $\lambda_1 = -m_1$ dan $\lambda_2 = -m_2$.

3.3.2 Titik kesetimbangan $E_1 = (X_1, 0)$

Jika titik kesetimbangan disubstitusikan ke dalam matriks (3) maka diperoleh matriks Jacobi J , yaitu

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} X_1 \left(\frac{1 - A - m_1 - 2X_1}{A + X_1} \right) & -\frac{X_1}{1 + hX_1} \\ 0 & \frac{cX_1}{1 + hX_1} - m_2 \end{bmatrix}$$

Nilai eigen dari matriks J adalah $\lambda_1 = X_1 \left(\frac{1 - A - m_1}{A + X_1} \right)$ dan $\lambda_2 = \frac{cX_1}{1 + hX_1}$. Nilai $\lambda_1 = X_1 \left(\frac{1 - A - m_1}{A + X_1} \right)$ bernilai positif karena $\lambda_1 = X_1 \left(\frac{1 - m_1 - A^2 - 4m_1A}{A + X_1} \right)$. Titik kesetimbangan tak stabil karena salah satu nilai eigennya bernilai positif maka titik kesetimbangan tak stabil.

3.3.3 Titik kesetimbangan $E_2 = (X_2, 0)$

Jika titik kesetimbangan disubstitusikan ke dalam matriks (3) maka diperoleh matriks Jacobi J , yaitu

$$J(E_2) = \begin{bmatrix} X_2 \left(\frac{1-A-m_1-2X_2}{A+X_2} \right) & -\frac{X_2}{1+hX_2} \\ 0 & \frac{cX_2}{1+hX_2} - m_2 \end{bmatrix}$$

Nilai eigen dari matriks J adalah $\lambda_1 = X_2 \left(\frac{1-A-m_1}{A+X_2} \right)$ dan $\lambda_2 = \frac{cX_2}{1+hX_2}$. Nilai $\lambda_1 = X_2 \left(\frac{1-A-m_1}{A+X_2} \right)$ bernilai negatif karena $\lambda_1 = -X_2 \left(\frac{\sqrt{(1-m_1-A)^2 - 4m_1A}}{A+X_2} \right)$. Sedangkan nilai $\lambda_2 = \frac{cX_2}{1+hX_2}$ akan bernilai positif jika $\frac{cX_2}{1+hX_2} > 0$ dan akan bernilai negatif jika $\frac{cX_2}{1+hX_2} < 0$. Dari penjelasan diatas, kestabilan titik kesetimbangan bergantung pada nilai λ_1 dan titik akan stabil jika $\frac{cX_2}{1+hX_2} < 0$.

3.3.4 Titik kesetimbangan $E_3 = (X^*, Y^*)$

Jika titik kesetimbangan disubstitusikan ke dalam matriks (3) maka diperoleh matriks Jacobi

$$J(E_3) = \begin{bmatrix} \left(X^* \left(\frac{A}{(A+X^*)^2} + \frac{hY^*}{(1+hX^*)^2} - 1 \right) \right) & -\frac{X^*}{1+hX^*} \\ \frac{cY^*}{(1+hX^*)^2} & 0 \end{bmatrix}$$

Persamaan karakteristik matriks J adalah

$$\lambda^2 - \left(X^* \left(\frac{A}{(A+X^*)^2} + \frac{hY^*}{(1+hX^*)^2} - 1 \right) \right) \lambda + \frac{cX^*Y^*}{(1+hX^*)^2} = 0.$$

Sehingga diperoleh

2_{xx}

$$= \frac{X \left(\frac{A}{(A+X)^2} + \frac{hY^2}{(1+hX)^2} - 1 \right) + \sqrt{\left(X \left(\frac{A}{(A+X)^2} + \frac{hY^2}{(1+hX)^2} - 1 \right) \right)^2 - \frac{4hX^2Y^2}{(1+hX)^2}}{2}$$

Titik kesetimbangan $E_3(X^*)$ akan stabil asimtotik jika $\frac{A}{(A+X^*)^2} + \frac{hY^2}{(1+hX^*)^2}$ dan tidak stabil jika $\frac{A}{(A+X^*)^2} + \frac{hY^2}{(1+hX^*)^2}$

3.4 Kestabilan global

Untuk menganalisa kestabilan di titik endemik digunakan Kriteria Dulac dalam Teorema Dulac [1]. Dalam bahasan ini titik kesetimbangan endemik berada dalam suatu daerah D . Jika di sekitar titik kesetimbangan tidak terdapat orbit periodik, maka titik kesetimbangan bersifat stabil global. Keberadaan orbit periodik dapat ditunjukkan dengan menggunakan kriteria Dulac, dengan suatu fungsi Dulac yang berada di daerah D adalah

$$D(X, Y) = \frac{(A+X)(1+hX)}{XY} \tag{3.14}$$

Pada teorema tersebut fungsi D dan f adalah ruas kanan persamaan (3.1) dan (3.2) pada sistem (3.1), sehingga

$$\# \frac{Df(X, Y)}{XY} = \frac{X^2 + hX^2 - (m_1X^2 + m_2X^2Ah + m_2X^2 + m_2hX^2) - (X^2A + AhX^2 + X^2 + hX^2) - (AXY + X^2Y)}{XY}$$

dan

$$\frac{\partial}{\partial Y}(Dg) = \frac{CXY + CX^2Y - m_2Y - m_2AhXY - m_2XY - m_2hX^2Y}{XY}$$

Dengan demikian diperoleh

$$\frac{\partial}{\partial X}(Df) + \frac{\partial}{\partial Y}(Dg) = - \frac{3hX^2 + 2AhX + 2m_1Xh - 2hX + 2X + A + m_1Ah + m_1 - 1 + Y}{Y} \tag{3.15}$$

Teorema 3.1

Jika $A > \max\left\{\frac{1-m_1}{1+m_1h'}, \frac{h(1-m)}{h}\right\}$, maka tidak terdapat orbit periodik.

Bukti :

Jika $A > \max\left\{\frac{1-m_1}{1+m_1h'}, \frac{h(1-m)}{h}\right\}$, maka $A > \frac{1}{1}$ dan $A > \frac{h(1-m)}{h}$. Oleh karena itu, diperoleh bahwa $\frac{\partial}{\partial x}(Df) + \frac{\partial}{\partial y}(Dg)$. Berdasarkan Teorema Dulac (, apabila $\frac{\partial}{\partial x}(Df) + \frac{\partial}{\partial y}(Dg)$ dan tidak terdapat perubahan tanda, maka dapat disimpulkan bahwa tidak ditemukan orbit periodik pada sistem (sehingga bentuk dari orbit solusi yang terjadi adalah menuju ke suatu titik kesetimbangan.



Tabel 3.1 Syarat eksistensi dan kestabilan lokal titik kesetimbangan model dengan efek Allee

Titik Kesetimbangan	Syarat eksistensi	Syarat Kestabilan	Jenis Kestabilan
$E_0(0,0)$	-	-	Stabil lokal
$E_1(X_1, 0)$	-	-	Tidak Stabil
$E_2(X_2, 0)$	$1 - m_1 - A > 0$ $(1 - m_1 - A)^2 > 4m_1A$	$\frac{\sigma X_2}{1 + hX_2} > m_2$	Tidak Stabil
		$\frac{\sigma X_2}{1 + hX_2} < m_2$	Stabil
$E_3(X^*, Y^*)$	$\frac{m_2}{\sigma - m_2 h} + m_1 < \frac{m_2}{A(\sigma - m_2 h) + m_2}$	$\frac{A}{(A + X^*)^2} + \frac{hY^*}{(1 + hX^*)^2} > 1$	Tidak Stabil
		$\frac{A}{(A + X^*)^2} + \frac{hY^*}{(1 + hX^*)^2} < 1$	Stabil asimtotik global

3.5 Simulasi Numerik dan Kajian Perilaku Solusi

Pada subbab ini, untuk mensimulasikan hasil analisis pada sub bab sebelumnya, ditentukan solusi sistem dengan adanya efek Allee numerik dengan menggunakan metode Runge Kutta orde 4. *Source code* dapat dilihat pada Lampiran 1 dan Lampiran 2.

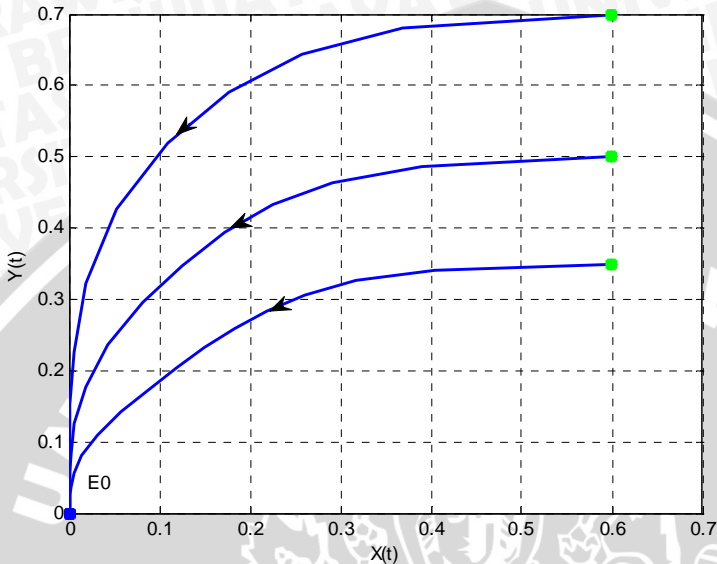
Tabel 3.2 Simulasi Numerik

No.	Parameter				
	A	h	m_1	m_2	c
1	0.088	11.25	0.5	0.2	2.5
2	0.016	11.25	0.5	0.2	2.5
3	0.02	7.8	0.5	0.2	2.5
4	0.05	7.8	0.5	0.2	2.5
5	0.072	7.8	0.5	0.2	2.5

3.5.1 Simulasi untuk titik kesetimbangan $E_0 = (0, 0)$

Simulasi ini digunakan parameter seperti yang tertera pada Tabel 3.2 bagian pertama. Titik kesetimbangan E_0 ini eksis. Berdasarkan hasil analisis, diperoleh dua nilai eigen yang bernilai negatif sehingga sifat kestabilan titik kesetimbangan E_0 stabil lokal. Kondisi ini masih dapat dilihat dari hasil simulasi numerik, seperti yang diperlihatkan oleh Gambar 3.1

Dengan diberikan tiga nilai awal, semua grafik menuju titik kesetimbangan E_0 , sehingga dapat disimpulkan bahwa titik kesetimbangan E_0 bersifat stabil lokal. Hal ini juga berarti bahwa jika parameter pada simulasi ini terjadi dalam populasi *predator prey* dengan efek Allee, maka dalam waktu jangka panjang lama-lama populasi *predator prey* akan punah. Titik kesetimbangan E_0 stabil maka solusi akan menuju titik $E_1(X_1, 0)$, $E_2(X_2, 0)$ dan $E_3(X^*, 0)$.



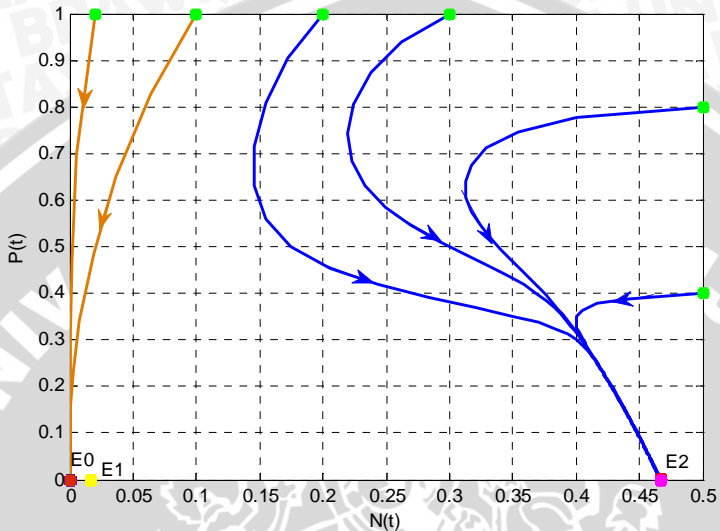
Gambar 3.1 Potret fase untuk kondisi $E_0(\cdot)$

3.5.2 Simulasi untuk titik kesetimbangan $E_1 = (X_1, 0)$ dan $E_2 = (X_2, 0)$

Simulasi ini menggunakan parameter seperti yang tertera pada Tabel 3.2 bagian kedua. Dengan parameter yang diberikan, jelas bahwa syarat eksistensi $A < 1$ - dan $A < (1 - \sqrt{\dots})$ terpenuhi karena hasil yang diperoleh $0.016 < \dots$ dan $0.016 < 0.1$. Kedua titik kesetimbangan yang eksis yaitu titik kesetimbangan $E_1 = (X_1, 0)$ dan $E_2 = (X_2, 0)$. Titik kesetimbangan $E_1 = (X_1, 0)$ bersifat tidak stabil dan titik kesetimbangan $E_2 = (X_2, 0)$ bersifat stabil dengan syarat $\frac{rX_2}{1+rX_2} < \dots$ terpenuhi untuk nilai parameter yang telah diberikan pada simulasi ini seperti yang ditunjukkan pada Gambar 3.2.

Berdasarkan Gambar 3.2 memperlihatkan bahwa dengan empat nilai awal yang diberikan keempat grafik solusi menuju titik $E_3(\lambda)$. Hal ini membuktikan bahwa titik kesetimbangan $E_3(\lambda)$ bersifat stabil. Terlihat juga bahwa titik kesetimbangan $E_3(\lambda)$

eksis. Hal ini berarti bahwa bila parameter pada simulasi ini terjadi pada *predator* yang penuh sehingga hanya ada populasi *prey*.



Gambar 3.2 Potret fase untuk kondisi E_0, E_1

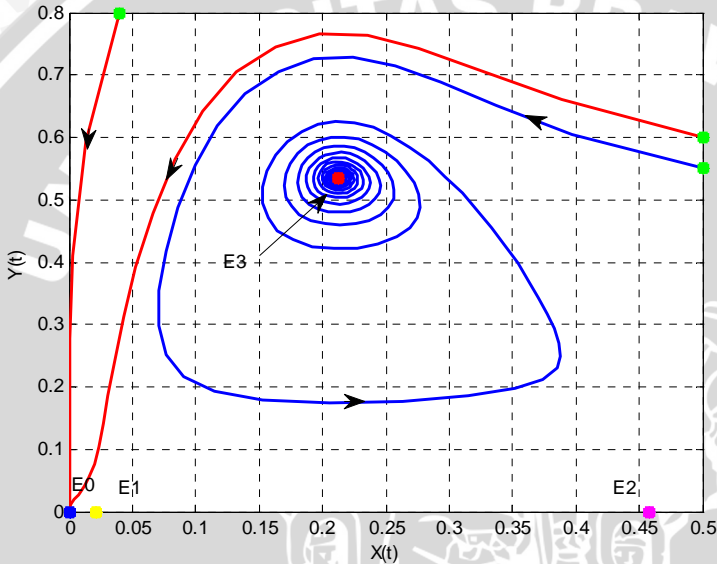
3.5.3 Simulasi untuk titik kesetimbangan $E_3 = (X^*, Y^*)$

Simulasi ini menggunakan parameter seperti yang tertera pada Tabel 3.2 bagian ketiga sampai kelima. Berdasarkan parameter yang diberikan terlihat bahwa syarat eksistensi titik kesetimbangan $E_3 = (X^*, Y^*)$ terpenuhi dengan dengan nilai $X^* = 0.21$ dan $Y^* = 0$. Pada titik kesetimbangan $E_3 = (X^*, Y^*)$ diberikan nilai $A =$ maka sifat kestabilan titik kesetimbangan $E_3 = (X^*, Y^*)$ bersifat stabil. Akan tetapi, bila diberikan nilai parameter $A =$ dan $A = 0$ titik kesetimbangan $E_3 = (X^*, Y^*)$ tidak stabil. Kondisi ini masih dapat dilihat dari hasil simulasi numerik, seperti yang diperlihatkan oleh Gambar 3.3, Gambar 3.4 dan Gambar 3.5.

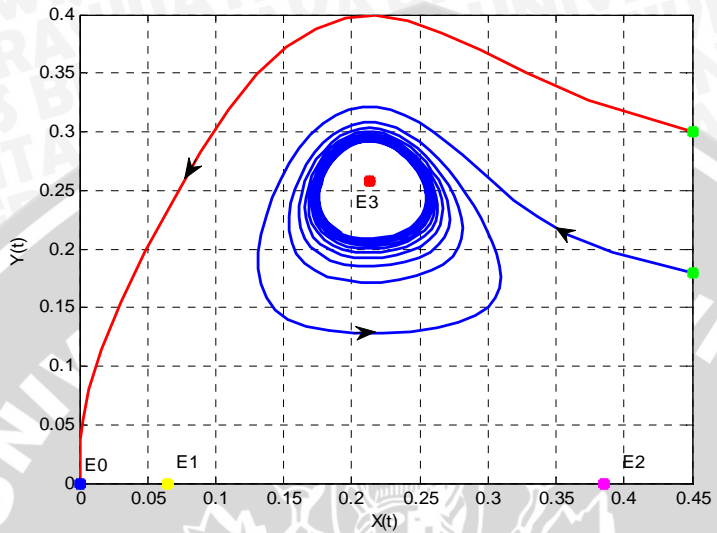
Berdasarkan Gambar 3.3 pada titik kesetimbangan $E_3 = (X^*, Y^*)$ dimana diambil titik awal $(0.5, 0)$ grafik solusi akan menuju titik kesetimbangan $E_3 = (X^*, Y^*)$, sehingga dapat disimpulkan bahwa titik kesetimbangan $E_3 = (X^*, Y^*)$ bersifat stabil global dengan $A =$. Dalam kondisi ini, jika parameter pada simulasi ini terjadi dalam

populasi *predator prey* dengan efek Allee, maka kedua populasi yaitu *predator* dan *prey* akan hidup berdampingan.

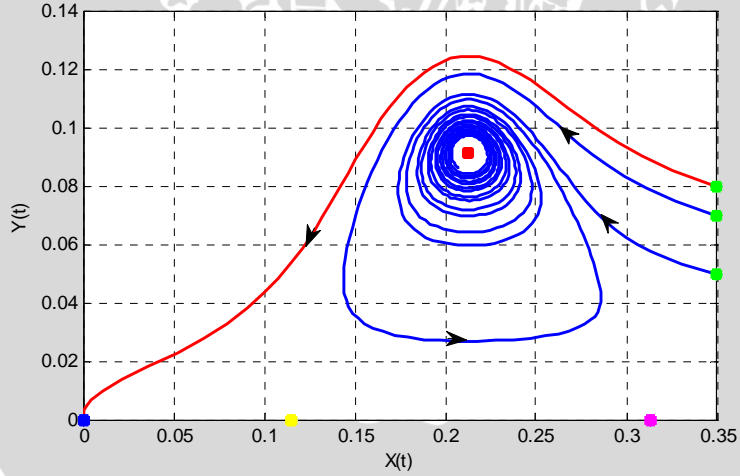
Berdasarkan Gambar 3.4 dan Gambar 3.5 pada titik kesetimbangan dimana diambil titik awal $(0.45, 0)$ dan $(0.35, 0)$ grafik solusi akan membentuk orbit periodik dan mendekati titik kesetimbangan, sehingga dapat disimpulkan bahwa titik kesetimbangan $E_3(X^*)$ tidak stabil.



Gambar 3.3 Potret fase untuk kondisi E_0, E_1 dan E_2



Gambar 3.4 Potret fase untuk kondisi E_0, E_1 dan E_2



Gambar 3.5 Potret fase untuk kondisi E_0, E_1 dan E_2

BAB IV KESIMPULAN DAN SARAN

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan tujuan dan pembahasan pada bab sebelumnya, maka kesimpulan yang diperoleh sebagai berikut.

1. Pada model *predator-prey* dengan efek Allee diperoleh masing-masing empat titik kesetimbangan, yakni $E_0(X^*, Y^*)$, $E_1(X_1, 0)$, $E_2(0, Y_2)$ dan $E_3(X^*, Y^*)$.
2. Pada model *predator-prey* dengan efek Allee pada titik kesetimbangan $(0,0)$ stabil karena efek Allee dapat menyebabkan kepunahan.
3. Simulasi numerik untuk model *predator-prey* kontinu dengan efek Allee sesuai dengan hasil analisis.

4.2 Saran

1. Pada pengkajian selanjutnya diharapkan efek Allee tidak hanya pada populasi *prey* melainkan pada populasi *predator* atau pada populasi keduanya.
2. Pada hasil numerik sebaiknya dicantumkan nilai parameter dengan A yang lebih kecil dari syarat maksimum.
3. Pada skripsi ini cara mencari bifurkasinya terlalu rumit sebaiknya menggunakan bifurkasi yang umum.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



DAFTAR PUSTAKA

- Boyce, W.E. dan R.C. DiPrima. 2005. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. Eight Edition, John Wiley & Sons, Inc. United State of America.
- Chauvet, E., J.E., Paultet, J.P. Previte dan Z. Walls. 2002. *A Lotka-Volterra Three-species Food Chain*. *Mathematics Magazine* 75:4. 243-255.
- Chourchamp, F., Cluthon, T., dan Grenfell, B. 1999. *Inverse Density Dependence and the Allee Effects*. *Trends Ecol. Evol.* 14. 405-410.
- Finizio, N. dan G. Ladas. 1982. *Ordinary Differential Equations with Modern Applications*. Second Edition. Wadsworth. USA.
- Jian, Zu dan Masayasu, Mimura. 2010. *The Impact of Allee Effect on a Predator Prey System Holling tipe II Functional Response*. *Applied Mathematics and Computaion* 217.Japan
- Kuznetsov, Y.A. 1998. *Elements of Applied Bifurcations Theory*.Second Edition. Springer Verlag. New York.
- Panfilov, A.2004. *Qualitative Analysis of Differential Equations*. Utrecht University. Utrecht
- Richard, D. 2002. *Advanced Mathematical Methods with Maple*. Cambridge University Press : UK.
- Robinson, R. C. 2004. *An Introduction to Dynamical Systems: Continous and Discrete*. Prentice Hall Education. USA.
- Skalski, G. T. dan J. F. Gilliam. 2001. *Functional responses with predator interference: viable alternatives to the Holling Type II model*, *Ecology*. 82:11. 3083-3092.

Stephens, P.A., and Sutherland, W.J. 1999. *Consequences of the Allee Effects for Behavior, Ecology and Conservation*. *Trends Ecol. Evol.* 14. 401-405.

Verhulst, F. 1996. *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



LAMPIRAN PROGRAM

1. Program

$$E_0 = \{$$

%Memasukkan nilai parameter dan sistem persamaan

```
function dy=allee(t,y)
```

```
A=0.088;
```

```
h=11.25;
```

```
m1=0.5;
```

```
m2=0.2;
```

```
c=2.5;
```

```
dy(1)=y(1)*(y(1)/(A+y(1))-m1-y(1)-  
y(2)/(1+h*y(1)));
```

```
dy(2)=y(2)*(c*y(1)/(1+h*y(1))-m2);
```

%Memasukkan nilai parameter dan sistem persamaan

```
function dy=allee(t,y)
```

```
A=0.088;
```

```
h=11.25;
```

```
m1=0.5;
```

```
m2=0.2;
```

```
c=2.5;
```

```
dy(1)=y(1)*(y(1)/(A+y(1))-m1-y(1)-y(2)/(1+h*y(1)));
```

```
dy(2)=y(2)*(c*y(1)/(1+h*y(1))-m2);
```

%Program Utama

```
[t y]=rks41('allee',0,1000,[0.6,0.7],500);
```

```
figure(1);
```

```
plot(t,y,'Linewidth',2);
```

```
hold on;
```

```
xlabel('Waktu (t)');
```

```
ylabel('Jumlah Individu');
```

```
grid on
```

```
axis square
```

```
legend('N(t)','P(t)');
```

```
figure(2);
```



```

plot(y(:,1),y(:,2), 'LineWidth',2);
hold on
plot(y(1,1),y(1,2), '*g', 'LineWidth',5);
% plot(y(500,1),y(500,2), '*r', 'LineWidth',5);
plot(0,0, 'b*', 'LineWidth',5);
A=0.088;
h=11.25;
m1=0.5;
m2=0.2;
c=2.5;
% N1=1/2*(1-A-m1-sqrt((1-A-m1)^2-4*A*m1))
% N2=1/2*(1-A-m1+sqrt((1-A-m1)^2-4*A*m1))
% NB=m2/(c-m2*h);
% PB=c/(c-m2*h)*(m2/(m2+A*(c-m2*h))-m2/(c-m2*h)-
m1);
% plot(NB,PB, 'r*', 'LineWidth',5);
% plot(N1,0, 'y*', 'LineWidth',5);
% plot(N2,0, 'm*', 'LineWidth',5);
hold off
hold on
xlabel('X(t)');
ylabel('Y(t)');
grid on

```

2. Program $E_0 = (0,0)$, $E_1 = (X_1,0)$ dan $E_2 = (X$

%Perhitungan solusi sistem persamaan dengan Runge Kutta Orde 4

```
function [T,Z]=rks41(allee,a,b,za,M)
```

```
h=(b-a)/M;
```

```
Z=zeros(M+1,length(za));
```

```
T=a:h:b;
```

```
Z(1,:)=za;
```

```
for j=1:M
```

```
    k1=h*feval(allee,T(j),Z(j,:));
```

```
    k2=h*feval(allee,T(j)+h/2,Z(j,:)+k1/2);
```

```
    k3=h*feval(allee,T(j)+h/2,Z(j,:)+k2/2);
```

```
    k4=h*feval(allee,T(j)+h,Z(j,:)+k3);
```

```
Z(j+1,:)=Z(j,:)+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
```

```
end;
```

%Memasukkan nilai parameter dan sistem persamaan

```
function dy=allee(t,y)
```

```

A=0.016;
h=11.25;
m1=0.5;
m2=0.2;
c=2.5;
dy(1)=y(1)*(y(1)/(A+y(1))-m1-y(1)-
y(2)/(1+h*y(1)));
dy(2)=y(2)*(c*y(1)/(1+h*y(1))-m2);
%Program Utama
[t y]=rks41('allee',0,1000,[0.5,0.8],500);

figure(1);
plot(t,y,'Linewidth',2);
holdon;
xlabel('Waktu (t)');
ylabel('Jumlah Individu');
gridon
axissquare
legend('N(t)','P(t)');

figure(2);
plot(y(:,1),y(:,2),'LineWidth',2);
holdon
plot(y(1,1),y(1,2),'*g','LineWidth',5);
plot(y(500,1),y(500,2),'*r','LineWidth',5);
plot(0,0,'*b','LineWidth',5);
A=0.016;
h=11.25;
m1=0.5;
m2=0.2;
c=2.5;
N1=1/2*(1-A-m1-sqrt((1-A-m1)^2-4*A*m1))
N2=1/2*(1-A-m1+sqrt((1-A-m1)^2-4*A*m1))
%NB=m2/(c-m2*h);
%PB=c/(c-m2*h)*(m2/(m2+A*(c-m2*h))-m2/(c-
m2*h)-m1);
%plot(NB,PB,'*r','LineWidth',5);
plot(N1,0,'*y','LineWidth',5);
plot(N2,0,'*m','LineWidth',5);

```

```

holdoff
holdon
xlabel('N(t)');
ylabel('P(t)');
gridon

```

3. Program $E_3 = (X)$

%Perhitungan solusi sistem persamaan dengan Runge Kutta Orde 4

```
function [T,Z]=rks41(allee,a,b,za,M)
```

```
h=(b-a)/M;
```

```
Z=zeros(M+1,length(za));
```

```
T=a:h:b;
```

```
Z(1,:)=za;
```

```
for j=1:M
```

```
    k1=h*feval(allee,T(j),Z(j,:));
```

```
    k2=h*feval(allee,T(j)+h/2,Z(j,:)+k1/2);
```

```
    k3=h*feval(allee,T(j)+h/2,Z(j,:)+k2/2);
```

```
    k4=h*feval(allee,T(j)+h,Z(j,:)+k3);
```

```
Z(j+1,:)=Z(j,:)+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
```

```
end;
```

%Memasukkan nilai parameter dan sistem persamaan

```
function dy=allee(t,y)
```

```
A=0.02;
```

```
h=7.8;
```

```
m1=0.5;
```

```
m2=0.2;
```

```
c=2.5;
```

```
dy(1)=y(1)*(y(1)/(A+y(1))-m1-y(1)-  
y(2)/(1+h*y(1)));
```

```
dy(2)=y(2)*(c*y(1)/(1+h*y(1))-m2);
```

%Program Utama

%Program Utama

```
[t y]=rks41('allee',0,3000,[0.35,0.07],500);
```

```
figure(1);
```

```
plot(t,y,'Linewidth',2);
```

```
hold on;
```

```

xlabel('Waktu (t)');
ylabel('Jumlah Individu');
grid on
axis square
legend('N(t)', 'P(t)');

figure(2);
plot(y(:,1),y(:,2),'LineWidth',2);
hold on
plot(y(1,1),y(1,2),'*g','LineWidth',5);
%plot(y(500,1),y(500,2),'*r','LineWidth',5);
plot(0,0,'*b','LineWidth',5);
A=0.072;
h=7.8;
m1=0.5;
m2=0.2;
c=2.5;
N1=1/2*(1-A-m1-sqrt((1-A-m1)^2-4*A*m1))
N2=1/2*(1-A-m1+sqrt((1-A-m1)^2-4*A*m1))
NB=m2/(c-m2*h);
PB=c/(c-m2*h)*(m2/(m2+A*(c-m2*h))-m2/(c-m2*h)-
m1);
plot(NB,PB,'*r','LineWidth',5);
plot(N1,0,'*y','LineWidth',5);
plot(N2,0,'*m','LineWidth',5);
hold off
hold on
xlabel('N(t)');
ylabel('P(t)');
grid on

```

UNIVERSITAS BRAWIJAYA

