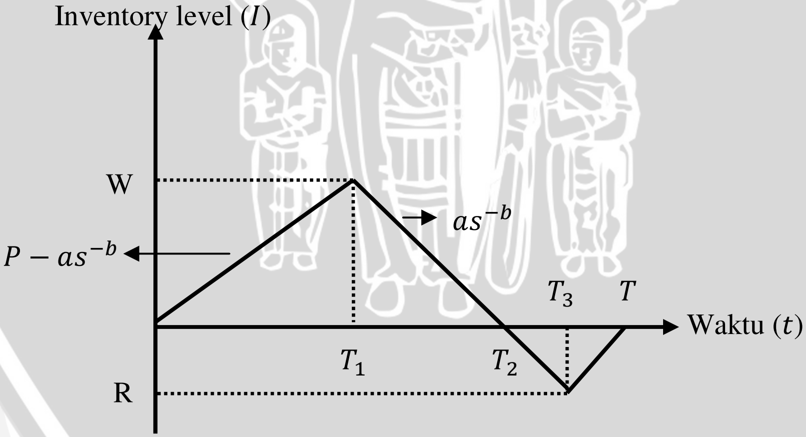
BAB IV
HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Model Matematika *EPQ (Economic Production Quantity)* dengan tingkat *partial Backlogging*

Dalam model-model sebelumnya, diasumsikan bahwa pesanan akan datang tepat pada saat persediaan habis, atau dengan kata lain kehabisan persediaan tidak akan pernah terjadi. Biaya kehabisan atau "*shortage cost*" diabaikan, sehingga biaya total persediaan hanya biaya pemesanan atau *ordering cost* ditambah dengan biaya penyimpanan atau *holding cost* saja. Akan tetapi pada kenyataannya jumlah persediaan akan berkurang dengan meningkatnya suatu permintaan dari waktu ke waktu, dan memungkinkan terjadinya kehabisan persediaan. Keadaan ini dinamakan *backlogging*, yaitu keadaan dimana suatu pesanan tidak dapat dipenuhi seketika dan akan dipenuhi kemudian hari.

Dalam model ini kemungkinan kehabisan persediaan sudah dapat diduga sebelumnya, karena memang sengaja direncanakan untuk memenuhi permintaan dalam jumlah yang banyak. Dengan demikian perlu adanya cadangan simpanan dalam suatu perusahaan untuk memenuhi tingkat permintaan yang besar dan tidak terduga.



Gambar (4.1) Model *EPQ* dengan *Partial Backlogging*

Gambar (4.1) menggambarkan tentang jumlah persediaan model *EPQ* dengan *partial backlogging* selama periode T. Sistem produksi ini diasumsikan permintaan pasar terpenuhi dengan *item* yang diproduksi. Produksi dimulai pada saat $t = 0$ dan naik terus-menerus sampai $t = T_1$. Pada saat T_1 tingkat persediaan mencapai titik tertinggi. Jumlah persediaan berkurang dan mencapai nol karena *deplesi* atau berkurangnya suatu persediaan barang akibat efek gabungan dari permintaan dan kerusakan pada saat $t = T_2$, kemudian terjadi kekurangan dan sebagian *backlogging*. Pada saat $t = T_3$ produksi dimulai lagi dan tingkat *backlogging* akan dihapus pada $t = T$. Siklus berulang setelah waktu T.

Sistem persediaan terhadap waktu digambarkan sebagai berikut:

$$I'(t) + \alpha\beta t^{\beta-1}\, I(t) = P - as^{-b}, \qquad 0 \le t \le T_1 \tag{4.1}$$

$$I'(t) + \alpha\beta t^{\beta-1}\, I(t) = as^{-b}, \qquad 0 \le t \le T_2 \tag{4.2}$$

$$I'(t) = -e^{-\delta t} as^{-b}, \qquad 0 \le t \le T_3 \tag{4.3}$$

$$I'(t) = P - as^{-b}, \qquad 0 \le t \le T \tag{4.4}$$

dimana:

$I(t)$ = Persediaan pada saat t
$I'(t)$ = Laju perubahan persediaan per satuan waktu
P = Laju produksi
s = Harga jual barang per unit
α = Parameter skala dari distribusi Weibull
β = Parameter bentuk dari distribusi Weibull
T = Panjang siklus persediaan barang
T_1 = Waktu pada saat produksi selesai
T_2 = Waktu pada saat persediaan habis
T_3 = Waktu pada saat produksi dimulai lagi
δ = Tingkat *backlogging*

dengan syarat awal $I(0) = 0,\ I(T_1) = W,\ I(T_2) = 0,\ I(T_3) = -R$ dan $I(T) = 0$.

Berdasarkan persamaan (4.1) sampai (4.4), dapat diperoleh solusi sistem persediaan tiap-tiap selang dalam kurun waktu $t = 0$ sampai $t = T$, untuk selang $0 \leq t \leq T_1$:

$$I'(t) + \alpha\beta t^{\beta-1}\, I(t) = P - as^{-b}$$

$$\frac{dI(t)}{dt} + \alpha\beta t^{\beta-1}\, I(t) = P - as^{-b}. \qquad (4.5)$$

Dengan memisalkan $P(t) = \alpha\beta t^{\beta-1}$, diperoleh faktor integral

$$A(t) = e^{\int \alpha\beta t^{\beta-1}\, dt} = e^{\alpha t^{\beta}}$$

Kemudian kedua ruas pada persamaan (4.5) dikalikan dengan faktor integral $e^{\alpha t^{\beta}}$ diperoleh:

$$e^{\alpha t^{\beta}} \frac{dI(t)}{dt} + e^{\alpha t^{\beta}} \alpha\beta t^{\beta-1}\, I(t) = \left(P - as^{-b}\right) e^{\alpha t^{\beta}}$$

$$e^{\alpha t^{\beta}} I'(t) + e^{\alpha t^{\beta}} \alpha\beta t^{\beta-1}\, I(t) = \left(P - as^{-b}\right) e^{\alpha t^{\beta}}$$

$$\frac{d\left(e^{\alpha t^{\beta}} I(t)\right)}{dt} = \left(P - as^{-b}\right) e^{\alpha t^{\beta}}$$

$$\int d\left(e^{\alpha t^{\beta}} I(t)\right) = \int \left(P - as^{-b}\right) e^{\alpha t^{\beta}}\, dt$$

$$e^{\alpha t^{\beta}} I(t) = \int \left(P - as^{-b}\right) e^{\alpha t^{\beta}}\, dt. \qquad (4.6)$$

Dengan menggunakan Deret Mac Laurin, $e^{\alpha t^{\beta}}$ dapat diganti dengan 1+ $\alpha t^{\beta} + \frac{\left(\alpha t^{\beta}\right)^2}{2!} + \cdots$. Kemudian dari Deret Mac Laurin diambil dua suku pertama, persamaan (4.6) menjadi:

$$e^{\alpha t^{\beta}} I(t) = \int \left(P - as^{-b}\right)\left(1 + \alpha t^{\beta}\right) dt$$

$$e^{\alpha t^{\beta}} I(t) = \left(P - as^{-b}\right) \int \left(1 + \alpha t^{\beta}\right) dt$$

$$e^{\alpha t^{\beta}} I(t) = \left(P - as^{-b}\right) \left(t + \frac{\alpha t^{\beta+1}}{\beta + 1}\right) + c. \qquad (4.7)$$

Dari persamaan (4.7) diperoleh solusi persamaan yaitu:

$$I(t) = \left(P - as^{-b}\right) e^{-\alpha t^{\beta}} \left(t + \frac{\alpha t^{\beta+1}}{\beta+1}\right) + c \qquad (4.8)$$

dengan syarat awal $I(0) = 0$, maka:

$$I(0) = \left(P - as^{-b}\right) e^{-\alpha .0^{\beta}} \left(0 + \frac{\alpha .\, 0^{\beta+1}}{\beta + 1}\right) + c$$

$$I(0) = \left(P - as^{-b}\right).\ 1\ .\ (0) + c$$

$$0 = 0 + c$$
$$c = 0.$$

Jadi solusi persamaan (4.1) :

$$I_1(t) = \left(P - as^{-b}\right) e^{-\alpha t^{\beta}} \left(t + \frac{\alpha t^{\beta+1}}{\beta + 1}\right). \qquad (4.9)$$

Untuk selang $0 \leq t \leq T_2$:

$$I'(t) + \alpha\beta t^{\beta-1}\, I(t) = as^{-b}$$

$$\frac{dI(t)}{dt} + \alpha\beta t^{\beta-1}\, I(t) = as^{-b}. \qquad (4.10)$$

Dengan memisalkan $P(t) = \alpha\beta t^{\beta-1}$, diperoleh faktor integral

$$A(t) = e^{\int \alpha\beta t^{\beta-1}\, dt} = e^{\alpha t^{\beta}}.$$

Kemudian kedua ruas pada persamaan (4.10) dikalikan dengan faktor integral $e^{\alpha t^{\beta}}$ diperoleh:

$$e^{\alpha t^{\beta}} \frac{dI}{dt} + e^{\alpha t^{\beta}} \alpha\beta t^{\beta-1} I(t) = as^{-b} e^{\alpha t^{\beta}}$$

$$e^{\alpha t^{\beta}} I'(t) + e^{\alpha t^{\beta}} \alpha\beta t^{\beta-1} I(t) = as^{-b} e^{\alpha t^{\beta}}$$

$$\frac{d\left(e^{\alpha t^{\beta}} I(t)\right)}{dt} = as^{-b} e^{\alpha t^{\beta}}$$

$$\int d\left(e^{\alpha t^{\beta}} I(t)\right) = \int as^{-b} e^{\alpha t^{\beta}} dt$$

$$e^{\alpha t^{\beta}} I(t) = as^{-b} \int e^{\alpha t^{\beta}} dt. \qquad (4.11)$$

Dengan menggunakan Deret Mac Laurin, $e^{\alpha t^{\beta}}$ dapat diganti dengan 1+ $\alpha t^{\beta} + \frac{(\alpha t^{\beta})^2}{2!} + \cdots$. Kemudian dari Deret Maclaurin diambil dua suku pertama, persamaan (4.11) menjadi:

$$e^{\alpha t^{\beta}} I(t) = \int_{t}^{T_2} as^{-b} \left(1 + \alpha t^{\beta}\right) dt$$

$$e^{\alpha t^{\beta}} I(t) = as^{-b} \int_{t}^{T_2} \left(1 + \alpha t^{\beta}\right) dt$$

$$e^{\alpha t^{\beta}} I(t) = as^{-b} \left(t + \frac{\alpha t^{\beta+1}}{\beta+1} \right) \Bigg|_{t}^{T_2}$$

$$I(t) = as^{-b} e^{\alpha t^{-\beta}} \left(T_2 + \frac{\alpha {T_2}^{\beta+1}}{\beta+1} - t - \frac{\alpha t^{\beta+1}}{\beta+1} \right). \qquad (4.12)$$

Dari persamaan (4.12) diperoleh solusi persamaan untuk selang $0 \leq t \leq T_2$ yaitu:

$$I_2(t) = as^{-b} e^{-\alpha t^{\beta}} \left(T_2 + \frac{\alpha {T_2}^{\beta+1}}{\beta+1} - t - \frac{\alpha t^{\beta+1}}{\beta+1} \right) \qquad (4.13)$$

untuk selang $0 \leq t \leq T_3$:

$$I'(t) = -e^{-\delta t} as^{-b},$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = -e^{-\delta t} as^{-b}$$

$$dI(t) = -e^{-\delta t} as^{-b}\, dt$$

$$\int dI(t) = -\int e^{-\delta t} as^{-b}\, dt$$

$$I(t) = as^{-b} \frac{e^{-\delta t}}{\delta} + c \qquad (4.14)$$

dengan syarat awal $I(T_2) = 0$, maka :

$$I(T_2) = as^{-b} \frac{e^{-\delta T_2}}{\delta} + c$$

$$0 = as^{-b} \frac{e^{-\delta t}}{\delta} + c$$

$$c = -\, as^{-b} \frac{e^{-\delta t}}{\delta}.$$

Jadi solusi persamaan (4.3) adalah:

$$I_3(t) = as^{-b} \left(\frac{e^{-\delta t} - e^{-\delta T_2}}{\delta} \right). \qquad (4.15)$$

Untuk selang $0 \leq t \leq T$:

$$I'(t) = \ P - as^{-b} \,,$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \ P - as^{-b}$$

$$dI(t) = \ P - as^{-b}\, dt$$

$$\int dI(t) = \int P - as^{-b}\ dt$$

$$I(t) = \left(P - as^{-b}\right) t + c \tag{4.16}$$

dengan syarat awal $I(T) = 0$, maka :

$$I(T) = \left(P - as^{-b}\right) T + c$$

$$0 = \left(P - as^{-b}\right) T + c$$

$$c = -\left(P - as^{-b}\right) T.$$

Jadi solusi persamaan (4.4) adalah:

$$I_4(t) = \left(P - as^{-b}\right)(t - T) \tag{4.17}$$

Berdasarkan Gambar (4.1) pada saat $t = T_1$, maka $I_1(t) = I_2(t)$. Oleh karena itu dari persamaan (4.9) dan (4.13) diperoleh:

$$\left(P - as^{-b}\right)e^{-\alpha t^{\beta}}\left(t + \frac{\alpha t^{\beta+1}}{\beta+1}\right) = as^{-b}\ e^{-\alpha t^{\beta}}\ \left(T_2 + \frac{\alpha {T_2}^{\beta+1}}{\beta+1} - t - \frac{\alpha t^{\beta+1}}{\beta+1}\right). \tag{4.18}$$

Kemudian masing-masing ruas persamaan (4.18) dibagi dengan $e^{-\alpha t^{\beta}}$, sehingga diperoleh:

$$\left(P - as^{-b}\right)\left(t + \frac{\alpha t^{\beta+1}}{\beta+1}\right) = as^{-b}\left(T_2 + \frac{\alpha {T_2}^{\beta+1}}{\beta+1} - t - \frac{\alpha t^{\beta+1}}{\beta+1}\right)$$

$$Pt - as^{-b}t + P\frac{\alpha t^{\beta+1}}{\beta+1} - as^{-b}\frac{\alpha t^{\beta+1}}{\beta+1} = as^{-b}T_2 + as^{-b}\frac{\alpha {T_2}^{\beta+1}}{\beta+1} - as^{-b}t - as^{-b}\frac{\alpha t^{\beta+1}}{\beta+1}$$

$$Pt + P\frac{\alpha t^{\beta+1}}{\beta+1} = as^{-b}T_2 + as^{-b}\frac{\alpha {T_2}^{\beta+1}}{\beta+1}$$

$$P\left(t+\frac{\alpha t^{\beta+1}}{\beta+1}\right)=as^{-b}\left(T_2+\frac{\alpha {T_2}^{\beta+1}}{\beta+1}\right)$$

$$t+\frac{\alpha t^{\beta+1}}{\beta+1}=\frac{as^{-b}}{P}\left(T_2+\frac{\alpha {T_2}^{\beta+1}}{\beta+1}\right) \qquad (4.19)$$

dengan $0<\alpha<1,\ \beta>0,\ t\geq 0$, maka $\frac{\alpha t^{\beta+1}}{\beta+1}\cong 0$. Dari persamaan (4.19) diperoleh:

$$t\cong\frac{as^{-b}}{P}\left(T_2+\frac{\alpha {T_2}^{\beta+1}}{\beta+1}\right)$$

$$T_1\cong\frac{as^{-b}}{P}\left(T_2+\frac{\alpha {T_2}^{\beta+1}}{\beta+1}\right). \qquad (4.20)$$

Berdasarkan Gambar (4.1) pada saat $t=T_3$, maka $I_3(t)=I_4(t)$. Oleh karena itu dari persamaan (4.15) dan (4.17) diperoleh:

$$as^{-b}\left(\frac{e^{-\delta t}-e^{-\delta T_2}}{\delta}\right)=\left(P-as^{-b}\right)(t-T). \qquad (4.21)$$

Dengan menggunakan Deret Maclaurin dari persamaan (4.21) maka diperoleh:

$$as^{-b}\left[\frac{(1-\delta t+\cdots)-(1-\delta T_2+\cdots)}{\delta}\right]\cong\left(P-as^{-b}\right)(t-T)$$

$$as^{-b}\left[\frac{\delta(T_2-t)}{\delta}\right]\cong\ \left(P-as^{-b}\right)(t-T)$$

$$as^{-b}[T_2-t]\cong\left(P-as^{-b}\right)(t-T)$$

$$as^{-b}\,T_2-as^{-b}\,t\cong Pt-PT-as^{-b}\,t+as^{-b}\,T$$

$$as^{-b}\,T_2-as^{-b}\,T\cong Pt-PT$$

$$as^{-b}(T_2-T)\cong Pt-PT$$

$$PT + as^{-b}(T_2 - T) \cong Pt. \tag{4.22}$$

Masing-masing ruas persamaan (4.22) dibagi dengan P, sehingga diperoleh:

$$t \cong T + \frac{as^{-b}(T_2 - T)}{P}$$

$$T_3 \cong T + \frac{as^{-b}(T_2 - T)}{P} \tag{4.23}$$

Pada model matematika *EPQ* dengan tingkat *partial backlogging* ini mempertimbangkan beberapa biaya persediaan, antara lain yaitu:

1. Biaya penyimpanan (*holding cost*)

Berdasarkan Gambar (4.1) biaya penyimpanan terjadi selama T_1 dan T_2. Biaya penyimpanan tiap unit hasil produksi dilambangkan dengan C_1. Oleh karena itu, nilai sekarang (*present worth*) dari biaya penyimpanan (HC) dengan *r* yang merupakan selisih tingkat diskon (R) dan tingkat inflasi (i) adalah:

$$HC = C_1\left[\int_0^{T_1} I_1\,(t)\,e^{-rt}\,dt + \int_0^{T_2} I_2\,(t)\,e^{-r(T_1+t)}\,dt\right]. \tag{4.24}$$

Dengan menggunakan hasil $I_1(t)$ pada persamaan (4.9) dan hasil $I_2\,(t)$ pada persamaan (4.13), maka persamaan (4.24) menjadi:

$$\begin{aligned} HC = C_1\Bigg[\int_0^{T_1} &\left(P - as^{-b}\right)e^{-\alpha t^\beta}\left(t + \frac{\alpha t^{\beta+1}}{\beta+1}\right)e^{-rt}\,dt \\ &+ \int_0^{T_2} as^{-b}\,e^{-\alpha t^\beta}\left(T_2 + \frac{\alpha {T_2}^{\beta+1}}{\beta+1} - t\right. \\ &\left.- \frac{\alpha t^{\beta+1}}{\beta+1}\right)e^{-r(T_1+t)}dt\Bigg]. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Karena $0 < \alpha < 1,\ \beta > 0,\ t \geq 0,$ maka $e^{-\alpha t^\beta} \cong 1,$ sehingga persamaan (4.25) menjadi:

$$HC = C_1\left[\int_0^{T_1}(P - as^{-b})\left(t + \frac{\alpha t^{\beta+1}}{\beta+1}\right) e^{-rt}\, dt + \int_0^{T_2} as^{-b}\left(T_2 + \frac{\alpha {T_2}^{\beta+1}}{\beta+1} - t - \frac{\alpha t^{\beta+1}}{\beta+1}\right) e^{-r(T_1+t)}\, dt\right]$$

$$HC = C_1\left[(P - as^{-b})\int_0^{T_1}\left(e^{-rt}.t + e^{-rt}.\frac{\alpha t^{\beta+1}}{\beta+1}\right) dt + as^{-b}\int_0^{T_2}\left(e^{-r(T_1+t)}.T_2 + e^{-r(T_1+t)}.\frac{\alpha {T_2}^{\beta+1}}{\beta+1} - e^{-r(T_1+t)}.t - e^{-r(T_1+t)}.\frac{\alpha t^{\beta+1}}{\beta+1}\right) dt\right]$$

$$HC = C_1\left[(P - as^{-b})\left(\int_0^{T_1} t(1 - rt + \cdots)\, dt + \int_0^{T_1}(1 - rt + \cdots)\frac{\alpha t^{\beta+1}}{\beta+1} dt\right) + as^{-b}\left(\int_0^{T_2}(1 - r(T_1 + t) + \cdots)\, T_2\, dt + \int_0^{T_2}(1 - r(T_1 + t) + \cdots)\, \frac{\alpha {T_2}^{\beta+1}}{\beta+1}\, dt - \int_0^{T_2}(1 - r(T_1 + t) + \cdots)\, t\, dt - \int_0^{T_2}(1 - r(T_1 + t) + \cdots)\frac{\alpha t^{\beta+1}}{\beta+1} dt\right)\right]$$

$$HC = C_1\Bigg[(P - as^{-b})\left(\int_0^{T_1} t - rt^2\,dt + \int_0^{T_1} \frac{\alpha t^{\beta+1}}{\beta+1} - \frac{r\alpha t^{\beta+2}}{\beta+1}\,dt\right)$$

$$+ as^{-b}\left(\int_0^{T_2} T_2 - rT_1T_2 - rT_2 t\,dt + \int_0^{T_2} \frac{\alpha {T_2}^{\beta+1}}{\beta+1}\right.$$

$$- \frac{r\alpha T_1 {T_2}^{\beta+1}}{\beta+1} - \frac{r\alpha {T_2}^{\beta+1} t}{\beta+1}\,dt$$

$$- \int_0^{T_2} t - rT_1 t - rt^2\,dt$$

$$\left. - \int_0^{T_2} \frac{\alpha t^{\beta+1}}{\beta+1} - \frac{r\alpha T_1 t^{\beta+1}}{\beta+1} - \frac{r\alpha t^{\beta+2}}{\beta+1}\,dt\right)\Bigg]$$

$$HC = C_1\Bigg[(P - as^{-b})\left(\frac{1}{2}{T_1}^2 - \frac{1}{3}r{T_1}^3 + \frac{\alpha {T_1}^{\beta+2}}{(\beta+1)(\beta+2)}\right.$$

$$\left. - \frac{r\alpha {T_1}^{\beta+3}}{(\beta+1)(\beta+3)}\right)$$

$$+ as^{-b}\left({T_2}^2 - rT_1{T_2}^2 - \frac{1}{2}r{T_2}^3 + \frac{\alpha {T_2}^{\beta+2}}{(\beta+1)}\right.$$

$$- \frac{r\alpha T_1 {T_2}^{\beta+2}}{(\beta+1)} - \frac{r\alpha {T_2}^{\beta+3}}{2(\beta+1)} - \frac{1}{2}{T_2}^2 + \frac{1}{2}rT_1{T_2}^2$$

$$+ \frac{1}{3}r{T_2}^3 - \frac{\alpha {T_2}^{\beta+2}}{(\beta+1)(\beta+2)} + \frac{r\alpha T_1 {T_2}^{\beta+2}}{(\beta+1)(\beta+2)}$$

$$\left. + \frac{r\alpha {T_2}^{\beta+3}}{(\beta+1)(\beta+3)}\right)\Bigg]. \tag{4.26}$$

Dengan menggunakan hasil T_1 pada persamaan (4.20), maka persamaan (4.26) menjadi:

$$HC = C_1.\left(P - as^{-b}\right)\left(\frac{1}{2}\left(\frac{as^{-b}}{P}\left(T_2 + \frac{\alpha {T_2}^{\beta+1}}{\beta+1}\right)\right)^2 - \frac{1}{3}r\left(\frac{as^{-b}}{P}\left(T_2 + \frac{\alpha {T_2}^{\beta+1}}{\beta+1}\right)\right)^3 + \frac{\alpha\left(\frac{as^{-b}}{P}\left(T_2 + \frac{\alpha {T_2}^{\beta+1}}{\beta+1}\right)\right)^{\beta+2}}{(\beta+1)(\beta+2)} - \frac{r\alpha\left(\frac{as^{-b}}{P}\left(T_2 + \frac{\alpha {T_2}^{\beta+1}}{\beta+1}\right)\right)^{\beta+3}}{(\beta+1)(\beta+3)}\right)$$

$$+ C_1. as^{-b}\left({T_2}^2 - r\left(\frac{as^{-b}}{P}\left(T_2 + \frac{\alpha {T_2}^{\beta+1}}{\beta+1}\right)\right){T_2}^2 - \frac{1}{2}r{T_2}^3 \right.$$

$$+ \frac{\alpha {T_2}^{\beta+2}}{(\beta+1)} - \frac{r\alpha\left(\frac{as^{-b}}{P}\left(T_2 + \frac{\alpha {T_2}^{\beta+1}}{\beta+1}\right)\right){T_2}^{\beta+2}}{(\beta+1)}$$

$$- \frac{r\alpha {T_2}^{\beta+3}}{2(\beta+1)} - \frac{1}{2}{T_2}^2$$

$$+ \frac{1}{2}r\left(\frac{as^{-b}}{P}\left(T_2 + \frac{\alpha {T_2}^{\beta+1}}{\beta+1}\right)\right){T_2}^2 + \frac{1}{3}r{T_2}^3$$

$$- \frac{\alpha {T_2}^{\beta+2}}{(\beta+1)(\beta+2)}$$

$$+ \frac{r\alpha\left(\frac{as^{-b}}{P}\left(T_2 + \frac{\alpha {T_2}^{\beta+1}}{\beta+1}\right)\right){T_2}^{\beta+2}}{(\beta+1)(\beta+2)}$$

$$\left. + \frac{r\alpha {T_2}^{\beta+3}}{(\beta+1)(\beta+3)} \right) \qquad (4.27)$$

2. Biaya kekurangan persediaan (*shortage cost*)

Berdasarkan Gambar (4.1) biaya kekurangan terjadi selama T_3 dan T_4. Biaya kekurangan persediaan tiap unit hasil produksi dilambangkan dengan C_2. Oleh karena itu, nilai sekarang (*present worth*) dari biaya kekurangan persediaan (SC) dengan *r* yang merupakan selisih tingkat diskon (R) dan tingkat inflasi (i) adalah:

$$SC = C_2\left[\int_0^{T_3} -I_3\,(t)e^{-r(T_1+T_2+t)}dt + \int_0^{T} -I_4(t)e^{-r(T_1+T_2+T_3+t)}dt\right]. \qquad (4.28)$$

Berdasarkan hasil $I_3(t)$ pada persamaan (4.15) dan $I_4(t)$ pada persamaan (4.17), persamaan (4.28) menjadi:

$$SC = C_2[\frac{as^{-b}}{\delta}\int_0^{T_3}\left(e^{-\delta T_2} - e^{-\delta t}\right)e^{-r(T_1+T_2+t)}\,dt$$
$$+\left(P - as^{-b}\right)\int_0^{T}(T-t)\,e^{-r(T_1+T_2+T_3+t)}dt$$

$$SC = C_2\left[\frac{as^{-b}}{\delta}\left(\int_0^{T_3} e^{-\delta T_2 - r(T_1+T_2+t)}\,dt - \int_0^{T_3} e^{-\delta t - r(T_1+T_2+t)}\,dt\right)\right.$$
$$+\left(P - as^{-b}\right)(\int_0^{T} T\,e^{-r(T_1+T_2+T_3+t)}dt$$
$$\left.-\int_0^{T} t\,e^{-r(T_1+T_2+T_3+t)}dt)\right]$$

$$SC = C_2\left[\frac{as^{-b}}{\delta}\left(\frac{1}{-r}e^{-\delta T_2 - r(T_1+T_2+t)}\Big|_0^{T_3}\right.\right.$$
$$\left.+\frac{-1}{-(\delta+r)}e^{-\delta t - r(T_1+T_2+t)}\Big|_0^{T_3}\right)$$
$$+\left(P - as^{-b}\right)\left(\frac{-T}{r}e^{-r(T_1+T_2+T_3+t)}\Big|_0^{T}\right.$$
$$\left.\left.+\frac{t}{r}e^{-r(T_1+T_2+T_3+t)}\Big|_0^{T} + \frac{1}{r^2}e^{-r(T_1+T_2+T_3+t)}\Big|_0^{T}\right)\right]$$

$$SC = C_2\left[\frac{as^{-b}}{\delta}\left(\frac{e^{-\delta T_2 - r(T_1+T_2+T_3)}}{-r} + \frac{e^{-\delta T_2 - r(T_1+T_2)}}{r}\right.\right.$$
$$\left.+\frac{e^{-\delta T_3 - r(T_1+T_2+T_3)}}{\delta + r} - \frac{e^{-r(T_1+T_2)}}{\delta + r}\right)$$
$$+\left(P - as^{-b}\right)\left(-\frac{T}{r}e^{-r(T_1+T_2+T_3+T)}\right.$$
$$+\frac{T}{r}e^{-r(T_1+T_2+T_3)} + \frac{Te^{-r(T_1+T_2+T_3+T)}}{r}$$
$$\left.\left.+\frac{e^{-r(T_1+T_2+T_3+T)}}{r^2} - \frac{e^{-r(T_1+T_2+T_3)}}{r^2}\right)\right]$$

$$SC = C_2\left[\frac{as^{-b}}{\delta}\left(\frac{e^{-\delta T_2-r(T_1+T_2+T_3)}}{-r}+\frac{e^{-\delta T_2-r(T_1+T_2)}}{r}+\frac{e^{-\delta T_3-r(T_1+T_2+T_3)}}{\delta+r}-\frac{e^{-r(T_1+T_2)}}{\delta+r}\right)+\left(P-as^{-b}\right)\left(\frac{e^{-r(T_1+T_2+T_3+T)}}{r^2}-\frac{e^{-r(T_1+T_2+T_3)}}{r^2}+\frac{T}{r}e^{-r(T_1+T_2+T_3)}\right)\right]. \quad (4.29)$$

Dengan menggunakan hasil T_1 pada persamaan (4.20) dan T_3 pada persamaan (4.23), maka:

$$SC = C_2\frac{as^{-b}}{\delta}\left(\frac{e^{-\delta T_2-r\left(\frac{a\,s^{-b}}{P}T_2+\frac{a\,s^{-b}}{P}.\frac{\alpha T_2{}^{\beta+1}}{\beta+1}+T_2+T+\frac{a\,s^{-b}}{P}T_2-\frac{a\,s^{-b}}{P}T\right)}}{-r}+\frac{e^{-\delta T_2-r\left(\frac{a\,s^{-b}}{P}T_2+\frac{a\,s^{-b}}{P}.\frac{\alpha T_2{}^{\beta+1}}{\beta+1}+T_2\right)}}{r}+\frac{e^{-\delta\left(\frac{a\,s^{-b}}{P}T_2-\frac{a\,s^{-b}}{P}T\right)-r\left(\frac{a\,s^{-b}}{P}T_2+\frac{a\,s^{-b}}{P}.\frac{\alpha T_2{}^{\beta+1}}{\beta+1}+T_2+T+\frac{a\,s^{-b}}{P}T_2-\frac{a\,s^{-b}}{P}T\right)}}{\delta+r}-\frac{e^{-r\left(\frac{a\,s^{-b}}{P}T_2+\frac{a\,s^{-b}}{P}.\frac{\alpha T_2{}^{\beta+1}}{\beta+1}+T_2\right)}}{\delta+r}\right)$$

$$+C_2\left(P-as^{-b}\right)\left(\frac{e^{-r\left(\frac{a\,s^{-b}}{P}T_2+\frac{a\,s^{-b}}{P}.\frac{\alpha T_2{}^{\beta+1}}{\beta+1}+T_2+T+\frac{a\,s^{-b}}{P}T_2-\frac{a\,s^{-b}}{P}T+T\right)}}{r^2}\right.$$

$$-\frac{e^{-r\left(\frac{a\,s^{-b}}{P}T_2+\frac{a\,s^{-b}}{P}.\frac{\alpha T_2{}^{\beta+1}}{\beta+1}+T_2+T+\frac{a\,s^{-b}}{P}T_2-\frac{a\,s^{-b}}{P}T\right)}}{r^2}$$

$$\left.+\frac{Te^{-r\left(\frac{a\,s^{-b}}{P}T_2+\frac{a\,s^{-b}}{P}.\frac{\alpha T_2{}^{\beta+1}}{\beta+1}+T_2+T+\frac{a\,s^{-b}}{P}T_2-\frac{a\,s^{-b}}{P}T\right)}}{r}\right). \tag{4.30}$$

3. Biaya kerugian (*lost sale cost*)

Biaya kerugian merupakan biaya yang hilang yang harus ditanggung penjual akibat sebagian pembeli tidak dapat mendapatkan barang tepat waktu dan tidak ingin menunggu barang datang, sehingga pelanggan pergi ke tempat lain.

Berdasarkan Gambar (4.1) biaya kerugian terjadi pada selang $(0, T_3)$. Biaya kerugian tiap unit hasil produksi dilambangkan dengan C_3. Oleh karena itu, nilai sekarang (*present worth*) dari biaya kerugian (LSC) tiap unit dengan *r* yang merupakan selisih tingkat diskon (R) dan tingkat inflasi (i) adalah:

$$LSC = C_3\int_0^{T_3}\left(1-e^{-\delta t}\right)as^{-b}\,e^{-r(T_1+T_2+t)}dt$$

$$LSC = C_{3.}e^{-r(T_1+T_2)}\,as^{-b}\int_0^{T_3}\left(1-e^{-\delta t}\right)e^{-rt}\,dt$$

$$LSC = C_{3.}e^{-r(T_1+T_2)}\,as^{-b}\left(\int_0^{T_3}e^{-rt}\,dt-\int_0^{T_3}e^{-(\delta+r)t}\,dt\right)$$

$$LSC = C_{3.}e^{-r(T_1+T_2)}\,as^{-b}\left(\frac{1}{-r}e^{-rt}\Big|_0^{T_3}-\frac{1}{-(\delta+r)}e^{-(\delta\_+r)t}\Big|_0^{T_3}\right)$$

$$LSC = C_{3.}e^{-r(T_1+T_2)}\,as^{-b}\left(\frac{e^{-rT_3}-1}{-r}+\frac{e^{-(r+\delta)T_3}-1}{\delta+r}\right)$$

$$LSC = C_{3.}e^{-r(T_1+T_2)}\ as^{-b}\left(\frac{1-e^{-rT_3}}{r}+\frac{e^{-(r+\delta)T_3}-1}{r+\delta}\right). \qquad (4.31)$$

Dengan menggunakan hasil T_1 pada persamaan (4.20) dan T_2 pada persamaan (4.23), maka persamaan (4.31) menjadi:

$$LSC = C_{3.}e^{-r\left(\frac{a\,s^{-b}}{P}.\ T_2+\frac{a\,s^{-b}}{P}.\ \frac{\alpha {T_2}^{\beta+1}}{\beta+1}+T_2\right)}$$
$$as^{-b}\left(\frac{1-e^{-r\left(T+\frac{a\,s^{-b}}{P}.T_2-\frac{a\,s^{-b}}{P}.T\right)}}{r}\right)$$
$$+\,as^{-b}\left(\frac{e^{-(r+\delta)\left(T+\frac{a\,s^{-b}}{P}.T_2-\frac{a\,s^{-b}}{P}.T\right)}-1}{r+\delta}\right) \qquad (4.32)$$

4. Biaya persiapan (*set up cost*)

Biaya persiapan (*set up cost*) atau biaya pemesanan (*ordering cost*) merupakan biaya yang muncul akibat dari adanya pemesanan baru.

Berdasarkan Gambar (4.1) biaya persiapan pada siklus pertama produksi adalah C_4. Pada saat siklus awal dan pada saat poduksi kedua, biaya persiapan tiap unit hasil produksi terjadi pada saat $t = T_1 + T_2 + T_3$, dimana kekurangan mencapai titik maksimum. Oleh karena itu, nilai sekarang (*present worth*) dari biaya persiapan (STC) tiap unit dengan *r* yang merupakan selisih tingkat diskon (R) dan tingkat inflasi (i) adalah:

$$STC = C_4 + C_4\big(1 - r(T_1 + T_2 + T_3)\big). \qquad (4.33)$$

Dengan menggunakan hasil T_1 pada persamaan (4.20) dan T_2 pada persamaan (4.23), maka persamaan (4.33) menjadi:

$$STC = 2C_4 - C_4.r\left(\frac{a\,s^{-b}}{P}T_2+\frac{a\,s^{-b}}{P}.\frac{\alpha {T_2}^{\beta+1}}{\beta+1}\right)-C_4.r.T_2$$
$$-\,C_4.r\left(T+\frac{a\,s^{-b}}{P}.T_2-\frac{a\,s^{-b}}{P}.T\right). \qquad (4.34)$$

5. Pendapatan penjualan (*sale revenue*)

Pendapatan penjualan (*sale revenue*) merupakan biaya yang didapat suatu perusahaan dari penjualan suatu barang produksi. Berdasarkan Gambar (4.1), produksi dalam periode T merupakan suatu permintaan dari penurunan mutu suatu barang produksi. Hal ini terjadi selama periode T_1 dan periode T_2. Selama periode T_4 produksi merupakan suatu permintaan dan *backorder*. Oleh karena itu, nilai sekarang (*present worth*) dari pendapatan penjualan (SR) tiap unit dengan r yang merupakan selisih tingkat diskon (R) dan tingkat inflasi (i) adalah:

$$SR = s\left[\int_0^{T_1} as^{-b}e^{-rt}\,dt + \int_0^{T_2} as^{-b}e^{-r(T_1+t)}\,dt + \int_0^{T} Pe^{-r(T_1+T_2+T_3+t)}\,dt\right]$$

$$SR = as^{-b+1}\int_0^{T_1} e^{-rt}\,dt + as^{-b+1}e^{-rT_1}\int_0^{T_2} e^{-rt}\,dt + \int_0^{T} s\,P\,e^{-r(T_1+T_2+T_3+t)}\,dt$$

$$SR = as^{-b+1}\left.\frac{e^{-rt}}{-r}\right|_0^{T_1} + as^{-b+1}\,e^{-rT_1}\left.\frac{e^{-rt}}{-r}\right|_0^{T_2} + s\,P\,e^{-r(T_1+T_2+T_3)}\left.\frac{e^{-rt}}{-r}\right|_0^{T}$$

$$SR = as^{-b+1}\left(\frac{1-e^{-rT_1}}{r}\right) + as^{-b+1}\,e^{-rT_1}\left(\frac{1-e^{-rT_2}}{r}\right) + s\,P\,e^{-r(T_1+T_2+T_3)}\left(\frac{1-e^{-rT}}{r}\right). \quad (4.35)$$

Dengan menggunakan hasil pada persamaan (4.20) dan (4.23), maka persamaan (4.35) menjadi:

$$SR = \frac{as^{-b+1}}{r} - \frac{as^{-b+1}\, e^{-r\left(\frac{a\,s^{-b}}{P}.\,T_2 + \frac{a\,s^{-b}}{P}.\,\frac{\alpha T_2{}^{\beta+1}}{\beta+1} + T_2\right)}}{r}$$
$$+ \frac{s\,P\,e^{-r\left(\frac{a\,s^{-b}}{P}T_2 + \frac{a\,s^{-b}}{P}.\,\frac{\alpha T_2{}^{\beta+1}}{\beta+1} + T_2 + T + \frac{a\,s^{-b}}{P}T_2 - \frac{a\,s^{-b}}{P}T\right)}}{r}$$
$$- \frac{s\,P\,e^{-r(\frac{a\,s^{-b}}{P}T_2 + \frac{a\,s^{-b}}{P}.\frac{\alpha T_2{}^{\beta+1}}{\beta+1} + T_2 + T + \frac{a\,s^{-b}}{P}T_2 - \frac{a\,s^{-b}}{P}T + T)}}{r} \qquad (4.36)$$

Fungsi tujuan untuk model matematika *EPQ* dengan *partial backlogging* ini adalah untuk memaksimumkan laba bersih tiap satuan waktu (*Net Profit*). Dengan total laba bersih tiap satuan waktu (*NP*) merupakan pengurangan biaya penyimpanan (*holding cost*), biaya kekurangan (*shortage cost)*, biaya persiapan (*set up cost*), dan biaya kehilangan (*lost sale cost*) terhadap pendapatan penjualan (*sale revenue*).

Jadi total laba bersih tiap satuan waktu adalah:

$$NP = (SR - HC - SC - STC - LSC)\sum_{n=0}^{N} e^{-nrt} - C_4$$
$$NP = (SR - HC - SC - STC - LSC)\left(\frac{1-e^{-rNT}}{1-e^{-rT}}\right) - C_4 \qquad (4.37)$$

dimana *SR (sales revenue)* dapat dilihat pada persamaan (4.36)*, HC (holding cost)* pada persamaan (4.27), *SC (shortage cost)* pada persamaan (4.30), *STC (set up cost)* pada persamaan (4.34), *dan LSC (lost sale cost)* pada persamaan (4.32.).

1.2 Penerapan Model Matematika *EPQ (Economic Production Quantity)* dengan tingkat *partial Backlogging* pada UD. Bagus Agriseta Mandiri

Berdasarkan hasil penelitian pada UD. Bagus Agriseta Mandiri, diperoleh data pada bulan April 2012 dengan periode waktu selama 30 hari sebagai berikut:

Tabel 4.1 Hasil penelitian pada UD. Bagus Agriseta Mandiri

Jenis Keripik	C_1 (Rp)/hari	C_2 (Rp)/hari	C_3 (Rp)/hari	C_4 (Rp)/siklus	P (kg)
Apel	100	245	500	220000	450
Nanas	100	245	500	350000	300
Nangka	100	245	500	250000	350

Sumber : data sekunder

dimana
C_1 : Biaya penyimpanan per unit per satuan waktu
C_2 : Biaya kekurangan persediaan per unit per satuan waktu
C_3 : Biaya penjualan yang hilang per unit per satuan waktu
C_4 : Biaya persiapan per siklus produksi
P : Laju produksi

1.2.1 Menguji Sebaran Data

Data hasil produk tidak sempurna UD. Bagus Agriseta Mandiri yang telah diperoleh pada bulan April 2012 diuji sebaran datanya menggunakan *software minitab* dengan mencari nilai *Anderson Darling*. Dari ketiga data keripik tersebut didapatkan nilai *Anderson Darling* yang relatif kecil yang artinya ketiga data tersebut berdistribusi *Weibull (*Hines dan Montgomery, 1972). Adapun data hasil produk yang *perishable* dan hasil pengujian data dapat dilihat pada lampiran 1 dan lampiran 2, sedangkan untuk nilai parameter skala (α) dan parameter bentuk (β) dapat dilihat pada Tabel 4.2:

Tabel 4.2 Hasil perhitungan parameter α dan β

Jenis Keripik	α	β
Apel	0,53	1,218
Nanas	0,36	1,050
Nangka	0,34	1,140

Sumber: data sekunder

1.2.2 Hasil perhitungan Model Matematika *EPQ (Economic Production Quantity)* pada Produk *Perishable* dengan *Partial Backlogging* pada UD. Bagus Agriseta Mandiri

Untuk memperoleh keuntungan yang maksimal (*Net Profit*) terlebih dahulu dicari nilai T_2 atau waktu perkiraan pada saat persediaan habis. Nilai T_2 didapat setelah dilakukan substitusi dari data yang didapat pada Tabel 4.1 dan mengasumsikan data yang lain, yaitu nilai δ sebesar 0,04 dan nilai r sebesar 0,005 pada persamaan (4.37). Setelah itu dilakukan perhitungan dengan menggunakan bantuan *maple* dengan cara menurunkan NP terhadap T_2 sama dengan nol, dikarenakan nilai T_2 yang dicari sangat kompleks untuk diselesaikan secara manual.

$$\frac{\partial NP}{\partial T_2} = 0$$

Tabel 4.3 Hasil perhitungan nilai T_2

Jenis Keripik	T_2 (hari)
Apel	16.0
Nanas	21.5
Nangka	20.7

Sumber: data sekunder

Dari Tabel 4.3 dapat dilihat pada keripik apel waktu perkiraan pada saat persediaan habis (T_2) adalah pada hari ke- 16. Pada jenis keripik nanas dan nangka berturut-turut waktu perkiraan pada saat persediaan habis adalah pada hari ke- 21 untuk keripik nanas dan hari ke- 20 untuk jenis keripik nangka. Adapun data hasil pengujian untuk jenis keripik apel, nanas, dan nangka dapat dilihat pada Lampiran 3 untuk jenis keripik apel, Lampiran 4 untuk jenis keripik nanas, dan Lampiran 5 untuk jenis keripik nangka.

Nilai dari (T_2) untuk masing - masing jenis keripik digunakan untuk perhitungan biaya penyimpanan (*holding cost*), biaya kerugian (*lost sale cost*), biaya kekurangan persediaan (*shortage cost*), biaya persiapan (*set up cost*), dan pendapatan penjualan (*sales revenue*). Hasil perhitungan dapat dilihat padaTabel 4.4 sebagai berikut:

Tabel 4.4 Biaya persediaan model *EPQ* dengan *partial backlogging* pada UD. Bagus Agriseta Mandiri

Biaya	Keripik Apel (Rp)	Keripik Nanas (Rp)	Keripik Nangka (Rp)
SR	37.516.553	24.664.592	28.730.128
HC	220.705	320.979	289.013
LSC	45.625	48.228	47.050
STC	386.860	603.570	432.607
SC	36.262.145	22.874.377	27.070.063

Sumber: data sekunder

dimana:
SR : pendapatan penjualan (*sales revenue*)
HC : biaya penyimpanan (*holding cost*)
LSC : biaya kerugian (*lost sale cost*)
STC : biaya persiapan (*set up cost*)
SC : biaya kekurangan persediaan (*shortage cost*)

Selanjutnya dihitung laba maksimum (*net profit*) dengan bantuan *software maple* dengan rumus :

$$NP = (S.R - S.T.C - H.C - S.C - L.S.C)\left(\frac{1 - e^{-rNT}}{1 - e^{-rT}}\right) - C_4$$

Tabel 4.5 *Net profit* model *EPQ* dengan *partial backlogging* pada UD. Bagus Agriseta Mandiri

Jenis Keripik	*Net profit (NP)* (Rp)
Apel	4.048.284
Nanas	5.453.317
Nangka	6.078.362

Sumber: data sekunder

Dari Tabel 4.5, didapatkan laba maksimum untuk satu kali siklus produksi yang didapat UD. Bagus Agriseta Mandiri dengan menggunakan model *EPQ* dengan *partial backlogging* adalah sebesar Rp. 4.048.284,00 untuk jenis keripik apel, Rp. 5.453.317,00 untuk jenis keripik nanas dan Rp. 6.078.362,00 untuk jenis keripik nangka. Selanjutnya hasil yang diperoleh pada Tabel 4.5 akan dibandingkan dengan hasil laba maksimum yang diperoleh dari UD. Bagus Agriseta Mandiri.

Tabel 4.6 *Net profit* diperoleh dari perusahaan

Jenis Keripik	*Net profit (NP)* (Rp)
Apel	3.125.000
Nanas	4.205.000
Nangka	4.612.500

Sumber: data primer

Jika dibandingkan *net profit* yang didapat perusahaan menggunakan model *EPQ* dengan *partial backlogging* dengan *net profit* yang didapat perusahaan menghasilkan laba yang sedikit lebih besar dari *net profit* yang didapat oleh perusahaan. Untuk jenis keripik apel menghasilkan laba lebih besar Rp. 923.284,00 atau sekitar 29,54 %, sedangkan untuk keripik nanas menghasilkan laba lebih besar Rp. 1.248.317,00 atau sekitar 29,6 %, dan untuk keripik nangka menghasilkan laba lebih besar Rp. 1.465.862,00 atau sekitar 31,8 %. Dengan demikian, perusahaan dapat menggunakan model *EPQ* dengan *partial backlogging* untuk memperkirakan waktu persediaan barang habis dan memaksimumkan laba perusahaan.