BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Model matematika

Model matematika merupakan uraian secara matematika yang seringkali menggunakan suatu fungsi atau persamaan dari suatu fenomena dari kehidupan nyata seperti populasi, permintaan suatu barang, kecepatan suatu benda, atau biaya reduksi emisi. Tujuan model ini adalah untuk memahami suatu fenomena dan mungkin membuat suatu perkiraan di masa mendatang (Stewart, 1998).

Menurut Rangkuti (2004) persediaan dapat dibentuk dalam berbagai model matematika tergantung pada asumsi yang diterapkan dan dengan memperhatikan beberapa faktor seperti:

1. Permintaan (*Demand*)
   Keputusan dalam suatu persediaan dibuat berdasarkan *demand* / permintaan yang terjadi.
2. *Lead time*
   Lead time didefinisikan sebagai waktu antara pemesanan dilakukan dengan saat kedatangan pemesanan.
3. Tingkat *replenishment*
   Tingkat *replenishment* didefinisikan sebagai tingkat atau model penggantian persediaan.
4. *Reorder level*
   Reorder level didefinisikan sebagai tingkat persediaan saat pemesanan harus dilakukan untuk mengganti *stock* yang berkurang.
5. *Safety stock*
   Safety stock didefinisikan sebagai persediaan yang harus ditinggal di gudang penyimpanan untuk mengatasi suatu permintaan yang berfluktuasi.

2.2 Persediaan

Persediaan merupakan suatu aktiva yang meliputi barang-barang milik perusahaan untuk proses produksi, serta barang-barang jadi atau produk yang disediakan dengan maksud untuk memenuhi kebutuhan konsumen dalam suatu periode tertentu (Rangkuti, 2004). Pengendalian persediaan merupakan suatu usaha memonitor dan menentukan tingkat komposisi bahan yang optimal dalam menunjang kelancaran dan efektivitas serta efisiensi dalam kegiatan suatu perusahaan (Ristono, 2009).

2.2 Tujuan Persediaan

Pada dasarnya persediaan akan mempermudah jalannya operasi suatu perusahaan yang dilakukan secara terus-menerus untuk memproduksi barang dan menyalurkan kepada konsumen. Oleh karena itu, perlu dilakukan pengendalian persediaan. Menurut Rangkuti (2004) tujuan pengendalian persediaan adalah :

1. Untuk menghilangkan resiko keterlambatan datangnya suatu barang.
2. Untuk menghilangkan resiko suatu barang yang rusak.
3. Untuk mempertahankan stabilitas operasi perusahan dan meningkatkan laba prusahaan.
4. Untuk mencapai penggunaan mesin yang optimal.
5. Untuk memberikan pelayanan yang sebaik-baiknya kepada pelanggan.

2.4 Jenis Persediaan

Menurut Rangkuti (2004) berdasarkan jenis barang dalam persediaan, persediaan dibagi menjadi:

1. Persediaan barang mentah (*raw material*), yaitu persediaan barang-barang yang digunakan dalam suatu proses produksi.
2. Persediaan komponen rakitan (*purchased parts/component*), yaitu persediaan barang-barang yang terdiri dari komponen-komponen yang diperoleh dari perusahaan lain yang secara langsung dapat dirakit menjadi suatu hasil produksi.
3. Persediaan bahan pembantu atau penolong (*supplies*), yaitu persediaan barang-barang yang diperlukan dalam proses suatu produksi.
4. Persediaan barang dalam proses (*work in process*), yaitu persediaan barang-barang yang terdapat di tiap-tiap bagian dalam proses produksi atau yang telah diolah menjadi suatu bentuk, tetapi perlu diproses lebih lanjut menjadi barang jadi.

5. Persediaan barang jadi (*finished goods*), yaitu persediaan barang-barang yang telah selesai diproses dan siap dijual kepada konsumen.

2.5 Biaya Persediaan

Bagi perusahaan yang melakukan suatu proses produki, persediaan merupakan faktor yang paling utama karena tanpa persediaan yang cukup produksi akan terhambat. Besar kecilnya suatu persediaan sangat bergantung pada kebijakan perusahaan, dalam hal ini salah satu faktor yang sangat berpengaruh adalah faktor biaya. Oleh karena itu, menurut Ristono (2009) biaya persediaan terbagi menjadi empat macam, yaitu:

1. Biaya pembelian (*purchase cost*)

   Biaya pembelian adalah harga per unit apabila *item* dibeli dari pihak luar, atau biaya produksi per unit apabila di produksi dalam perusahaan.
2. Biaya pemesanan atau biaya persiapan (*order cost/set up cost*)

   Biaya pemesanan adalah biaya yang dikeluarkan sehubungan dengan pemesanan barang ke *supplier*. Biaya pemesanan tidak naik bila kuantitas pesanan sekali pesan bertambah besar. Semakin banyak *item* yang dipesan maka biaya pesan per unit akan turun, dan sebaliknya jika semakin sedikit *item* yang dipesan dalam sekali pesan maka akan semakin besar biaya pesan per unitnya.
3. Biaya simpan (*carrying cost/holding cost/storage cost*)

   Biaya simpan biaya yang dikeluarkan atas invetasi dalam persediaan dan pemeliharaan maupun investasi sarana fisik untuk menyimpan persediaan, atau dapat pula dikatakan bahwa biaya simpan adalah semua biaya yang timbul akibat penyimpanan barang maupun bahan. Semakin banyak rata-rata persediaan, maka biaya simpan juga akan semakin besar dan sebaliknya.
4. Biaya kekurangan persediaan (*stockout cost/shortage cost*)

   Biaya kekurangan persediaan adalah biaya yang ditimbulkan sebagai akibat terjadinya persediaan yang lebih kecil dari jumlah yang diperlukan atau biaya yang timbul apabila persediaan di gudang tidak dapat mencukupi permintaan.

2.6 Model Manajemen Persediaan

Menurut Ristono (2009) ada dua jenis model utama dalam manajemen persediaan,yaitu:

1. Model deterministik
   Model deterministik merupakan model persediaan yang menganggap semua variabelnya telah diketahui dengan pasti.
2. Model probabilistik
   Model probabilistik merupakan model persediaan yang menganggap semua variabel mempunyai nilai yang tidak pasti dan variabelnya merupakan variabel acak.

2.7 Backlogging

Backlogging atau lebih dikenal dengan *backorder* merupakan kebijakan penanganan kekurangan persediaan dimana pelanggan bersedia menunggu sampai pemasok dapat memenuhi permintaannya. Selama menunggu datangnya suatu barang, pelanggan diberi kompensasi yang besarnya bergantung pada jumlah kekurangan barang dan lamanya menunggu (Sukmana dan Lokman, 2004). Sementara itu, menurut Ristono (2009), *backorder* adalah permintaan yang tidak dapat dipenuhi sekarang, tetapi kemudian dipenuhi pada periode yang akan datang. Keadaan *backlogging* terjadi disaat persediaan mencapai titik nol dan permintaan tidak dapat dipenuhi.

2.8 Partial Backlogging

Menurut Ristono (2009) *partial backlogging* merupakan suatu kejadian dimana para pelanggan dianggap tidak sabar dalam menunggu permintaannya dipenuhi oleh perusahaan. Pada saat kondisi barang yang ada terjual habis dan stok perusahaan mencapai nol, sebagian pelanggan menjadi tidak sabar dan pergi ke perusahaan lain, dan sebagian lagi rela menunggu hingga barang yang dipesan terpenuhi.

2.9 Deret pangkat

Deret pangkat adalah suatu deret tak berhingga yang berbentuk:

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i\, x^i = c_0 + c_1 x\; + c_2 x^2 + \cdots + c_n\, x^n + \cdots$$

dan c_i konstan disebut deret pangkat dalam x. Sesuai itu deret tak berhingga dengan bentuk:

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i\,(x-a)^i = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n\,(x-a)^n + \cdots$$

disebut deret pangkat dalam $(x-a)$. Untuk setiap harga x kedua deret pangkat tersebut menjadi deret tak berhingga dari suku-suku konstan (Purcell, 1998).

2.10 Deret Maclaurin

Menurut Purcell (1998) andaikan suatu fungsi dapat dinyatakan dalam deret pangkat dalam x, maka deret tersebut berbentuk deret Maclaurin :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \cdots$$

2.11 Deret Taylor

Menurut Purcell (1998) andaikan suatu fungsi dapat dinyatakan dalam deret pangkat dalam $(x-a)$, maka deret tersebut berbentuk deret Taylor :

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \cdots$$

Contoh :

Ekspansi fungsi $y = \ln x$ dalam deret pangkat dari $(x - a)$ dengan a=2

Jawab :

$f(x) = \ln x$ $\qquad$ $f(2) = \ln 2$

$f'(x) = x^{-1}$ $\qquad$ $f'(2) = \frac{1}{2}$

$f''(x) = -x^{-2}$ $\qquad$ $f''(2) = -\frac{1}{4}$

$f'''(x) = 2x^{-3}$ $\qquad$ $f'''(2) = \frac{1}{4}$

$f''''(x) = -6x^{-4}$ $\qquad$ $f''''(2) = -\frac{3}{8}$

$$\ln x = \ln 2 + \frac{1}{2}(x-2) - \frac{1}{4}\frac{(x-2)^2}{2!} + \frac{1}{4}\frac{(x-2)^3}{3!} - \frac{3}{8}\frac{(x-2)^4}{4!} + \cdots$$

$$\ln x = \ln 2 + \frac{1}{2}(x-2) - \frac{1}{8}(x-2)^2 + \frac{1}{24}(x-2)^3 - \frac{1}{64}(x-2)^4 + \cdots$$

2.12 Persamaan diferensial

Menurut Purcell (1998) persamaan diferensial adalah persamaan yang mengandung satu atau beberapa turunan dari suatu fungsi yang tidak diketahui. Khususnya, suatu persamaan berbentuk

$$F\left(x, y, y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

dalam mana $y^{(k)}$ menyatakan turunan y terhadap x ke k, ini disebut persamaan diferensial biasa orde-n (Purcell,1998).

2.12.1 Persamaan diferensial biasa

Menurut MacCann (1982) berdasarkan peubahnya atau variabel bebasnya, persamaan diferensial dibagi menjadi dua yaitu, persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial. Persamaan diferensial biasa adalah suatu persamaan yang melibatkan fungsi satu peubah dan turunan atau diferensialnya. Contoh dari persamaan diferensial biasa adalah sebagai berikut :

$$(y''')^2 - 3y' = 0$$

Ini merupakan persamaan diferensial biasa dengan orde tiga dan mempunyai derajat dua. Orde merupakan indeks tertinggi dari turunan yang terdapat dalam persamaan. Derajat merupakan pangkat tertinggi dari turunan yang terdapat dalam persamaannya.

2.12.2 Persamaan diferensial linier orde satu

Menurut Purcell (1998) persamaan diferensial orde satu adalah persamaan yang berbentuk

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x)$$

dengan $P(x)$ dan $Q(x)$ fungsi kontinu pada suatu selang yang diberikan. Setiap persamaan diferensial linier orde pertama dalam prinsipnya dapat diselesaikan. Persamaan ini memiliki faktor integral $S(x) = e^{\int P(x)\,dx}$. Kedua ruas dikalikan dengan faktor integral $e^{\int P(x)\,dx}$ menghasilkan

$$e^{\int P(x)\,dx}\frac{dy}{dx} + e^{\int P(x)\,dx}P(x)\,y = Q(x)e^{\int P(x)\,dx}$$

ruas kiri merupakan turunan dari $ye^{\int P(x)\,dx}$, sehingga persamaan di atas menjadi

$$\frac{d}{dx}\left(ye^{\int P(x)\,dx}\right) = Q(x)e^{\int P(x)\,dx}$$

kemudian dari pengintegralan kedua ruas menghasilkan

$$ye^{\int P(x)\,dx} = \int \left(Q(x)e^{\int P(x)\,dx}\right) dx$$

Jadi solusi persamaan diferensial linier orde pertama berbentuk

$$y = e^{-\int P(x)\,dx} \int \left(Q(x)e^{\int P(x)\,dx}\right) dx$$

2.12.3 Sistem persamaan diferensial linier

Menurut MacCann (1982) sistem persamaan diferensial linier merupakan suatu sistem persamaan diferensial yang berbentuk :

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + F(t) \tag{2.1}$$

dimana $A(t) = \left[a_{ij}(t)\right]$ dan $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$ $\quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, n \\ j = 1, 2, \dots, n \end{matrix}$

persamaan (2.1) disebut sistem persamaan diferensial homogen jika $F(t)$ adalah sebuah vektor nol, sebaliknya persamaan (2.1) disebut sistem persamaan diferensial nonhomogen.

2.13 Uji konveksitas

Menurut Anam (2009), uji kekonvekkan ke-dua dari suatu fungsi dengan variabel tunggal yaitu memperhatikan beberapa fungsi dengan variabel tunggal $f(x)$ yang memiliki turunan ke-dua untuk semua nilai x yang mungkin, maka $f(x)$ adalah:

1. Konvek, jika $\frac{d^2f(x)}{dx^2} \geq 0$ untuk semua nilai x yang mungkin.
2. *Strictly convex*, jika $\frac{d^2f(x)}{dx^2} > 0$ untuk semua nilai x yang mungkin.
3. Konkaf, jika $\frac{d^2f(x)}{dx^2} \leq 0$ untuk semua nilai x yang mungkin.

4. *Strictly concave*, jika $\frac{d^2 f(x)}{dx^2} < 0$ untuk semua nilai x yang mungkin.

2.14 Distribusi Weibull

Menurut Hines dan Montgomery (1972), pada distribusi Weibull terdapat fungsi yang mengandung parameter– parameter, diantaranya adalah parameter bentuk dan parameter skala yang keduanya dapat diestimasi. Parameter bentuk adalah parameter yang menentukan bentuk dasar suatu grafik sedangkan parameter skala adalah parameter yang menggambarkan variansi data. Parameter dalam distribusi memungkinkan fleksibilitas untuk memodelkan sistem dengan laju kerusakan meningkat terhadap waktu, berkurang terhadap waktu, atau konstan terhadap waktu. Laju kerusakan distribusi Weibull dua parameter digambarkan sebagai:

$$\theta(t) = \alpha\beta t^{\beta-1}, \qquad \alpha > 0 \qquad \beta > 0 \qquad t \geq 0$$

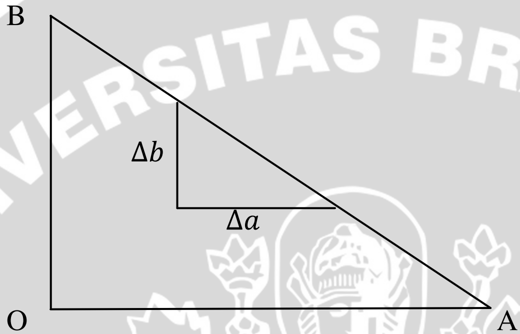
dimana:

$\alpha =$ parameter skala
$\beta =$ parameter bentuk
$t =$ waktu

2.15 Model EPQ (*Economic Production Quantity*)

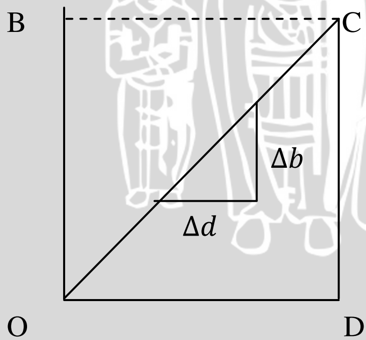
Model *EOQ* (*Economic Order Quantity*) merupakan salah satu model klasik deterministik. Model ini untuk menentukan jumlah pesanan yang ekonomis, yaitu jumlah pesanan yang meminimumkan total biaya persediaan dengan mempertimbangkan biaya pemesanan dan penyimpanan. Model *EPQ* merupakan suatu model yang digunakan untuk menentukan kuantitas produksi optimal dengan meminimumkan total biaya persediaan. Salah satu karakteristik dari model *EOQ* adalah sistem kedatangan persediaan yang serentak, itulah yang membedakan antara model *EOQ* dan *EPQ* (Hadley dan Within, 1963).

Model *EPQ* merupakan suatu model persediaan dimana kedatangan persediaannya bertahap, yaitu mempunyai tingkat kedatangan yang teratur dan tetap atau dengan kata lain adalah *linear* (Siswanto, 1985), atau menurut Ristono (2009) secara mendasar model *EPQ* mengasumsikan penambahan hasil poduksi secara berangsur-angsur untuk mengisi pesediaan. Pada model ini tingkat pemakaian teratur dan tetap sehingga setiap persediaan yang datang akan segera dipergunakan, oleh karena itu tingkat kedatangan persediaan harus lebih besar dari tingkat pemakaiannya.



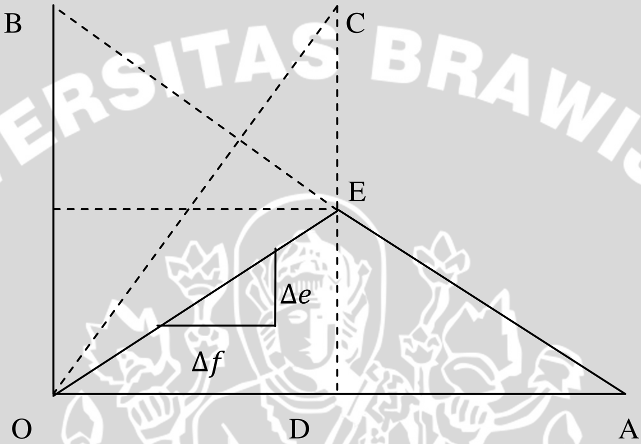
Gambar (2.1) Tingkat pemakaian suatu produk

Gambar (2.1) merupakan suatu kurva yang menggambarkan tingkat pemakaian suatu produk. Pada gambar (2.1), OB merupakan tingkat persediaan yang dibutuhkan selama periode waktu OA, sehinggga tingkat pemakaiannya adalah sebesar $\Delta b/\Delta a$.



Gambar (2.2) Tingkat produksi suatu produk

Gambar (2.2) merupakan suatu kurva yang menggambarkan tingkat produksi suatu produk. Pada Gambar (2.2), untuk memenuhi tingkat persediaan sebesar OB tersebut, persediaan datang atau diproduksi selama periode waktu OD, dengan tingkat produksi sebesar $\Delta b/\Delta d$.



Gambar (2.3) Tingkat pemakaian dan tingkat produksi yang membentuk model EPQ

Gambar (2.3) merupakan suatu kurva hasil penggabungan kurva pada Gambar (2.1) dan kurva pada Gambar (2.2). Pada Gambar (2.2), diketahui tingkat produksinya adalah sebesar $\Delta b/\Delta d$ dan pada Gambar (2.1), tingkat pemakaiannya adalah sebesar $\Delta b/\Delta a$, dari hasil penggabungan dua kurva tersebut, maka diperoleh tingkat pertambahan persediaannya adalah $\Delta b/\Delta d - \Delta b/\Delta a$, pada Gambar (2.3) di atas ditunjukkan oleh $\Delta e/\Delta f$. Dari hasil tersebut diperoleh segitiga OAE yang merupakan gambaran dari satu siklus persediaan untuk model *Economic Production Quantity,* dimana produksi dimulai di titik O dan berakhir di titik D, kemudian tingkat persediaan berkurang dan mencapai titik nol di A, dan terus berulang-ulang pada selang waktu yang ditentukan (Siswanto, 1985).