BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Analisis Regresi Nonlinier

Analisis regresi merupakan suatu analisis statistika yang digunakan untuk mengetahui hubungan antara peubah respons (Y) dengan satu atau lebih peubah prediktor (X). Kemampuan analisis regresi dalam menjelaskan bentuk hubungan secara kuantitatif menyebabkan analisis regresi sering diterapkan dalam bidang ekonomi. Namun tidak semua hubungan dalam bidang ekonomi linier. Kadang terdapat beberapa hubungan nonlinier sehingga diperlukan analisis regresi nonlinier.

Regresi nonlinier mengandung parameter bersifat nonlinier, di mana turunan persamaan terhadap salah satu parameter adalah fungsi dari parameter lain (masih mengandung parameter itu sendiri). Menurut Draper dan Smith (1992), model umum regresi nonlinier adalah:

$$Y_i = f(X_{ij}, \theta_u) + \varepsilon_i \tag{2.1}$$

di mana :

Y_i = nilai respons ke-i ; i = 1,2,…,n

X_{ij} = nilai prediktor ke-j pengamatan ke-i ; j = 1,2,…,p

θ_u = nilai parameter ke-u ; u = 1,2,…k (k = p + 1)

ε_i = nilai sisaan ke-i ; $\varepsilon_i \sim NIID(0, \sigma^2)$

n = ukuran contoh

k = banyaknya parameter

p = banyaknya peubah prediktor

$f(X_{ij}, \theta_u)$ = fungsi regresi nonlinier

Model regresi nonlinier diklasifikasikan menjadi linier intrinsik dan nonlinier intrinsik. Model linier intrinsik dapat ditransformasi menjadi bentuk linier, sedangkan model nonlinier intrinsik tidak dapat ditransformasi menjadi bentuk linier sehingga diperlukan metode *Nonlinear Least Square* untuk menduga parameter model (Draper dan Smith, 1992). Salah satu model nonlinier intrinsik yang menggunakan metode ini adalah fungsi produksi *Cobb Douglas* nonlinier.

2.2 Fungsi Produksi *Cobb Douglas*

Fungsi produksi menunjukkan hubungan antara input (masukan) dan output (keluaran) dari suatu proses produksi. Secara matematis fungsi produksi dituliskan sebagai

$$Q = f(K, L, M, \dots) \qquad (2.2)$$

Salah satu jenis fungsi produksi adalah fungsi produksi *Cobb Douglas*, yang ditemukan matematikawan Charles W. Cobb dan ekonom Faul H. Douglas sekitar tahun 1928:

$$Q = f(L, M) = \theta_1 L^{\theta_2} M^{\theta_3} \qquad (2.3)$$

di mana Q = output produksi

L = input tenaga kerja

M = input modal

θ_1 = koefisien intersep (indeks efisiensi)

θ_2 = Elastisitas output dari input L

θ_3 = Elastisitas output dari input M

Apabila sisaan dimasukkan dalam persamaan, maka fungsi produksi *Cobb Douglas* dapat memiliki beberapa bentuk, antara lain:

1. $Q_i = \theta_1 L_i^{\theta_2} M_i^{\theta_3} e^{\varepsilon_i}$. Bentuk nonlinier ini dapat ditranformasi ke dalam bentuk linier menjadi $\ln Q_i = \ln \theta_1 + \theta_2 \ln L_i + \theta_3 \ln M_i + \varepsilon_i$, sehingga parameter dapat diduga dengan metode kuadrat terkecil biasa.
2. $Q_i = \theta_1 L_i^{\theta_2} M_i^{\theta_3} + \varepsilon_i$, tidak dapat ditranformasi menjadi bentuk linier sehingga parameter harus diduga dengan metode *nonlinear least square*. Dengan demikian diperoleh fungsi produksi *Cobb Douglas* nonlinier.

Fungsi produksi *Cobb Douglas* adalah salah satu fungsi produksi yang digunakan dalam analisis produktivitas. Beberapa alasan praktis penggunaan fungsi produksi *Cobb Douglas* adalah:

a. Bentuk fungsi produksi *Cobb Douglas* bersifat sederhana sehingga mudah diterapkan
b. Fungsi produksi *Cobb Douglas* mampu menggambarkan tingkat pengembalian terhadap skala (*return to scale*), apakah sedang meningkat, tetap atau menurun

c. Koefisien-koefisien fungsi *Cobb Douglas* secara langsung menggambarkan elastisitas produksi untuk setiap penggunaan input
d. Koefisien intersep fungsi *Cobb Douglas* merupakan indeks efisiensi produksi yang menunjukkan penggunaan input sekecil-kecilnya untuk menghasilkan output maksimal tanpa mengabaikan kualitas produksi.

Koefisien elastisitas memberikan gambaran penggunaan input dalam menghasilkan output, yang memiliki ketentuan antara lain:

$$1.\ \theta_2 \begin{cases} < \theta_3, \text{modal lebih berperan dibandingkan tenaga kerja} \\ = \theta_3, \text{tenaga kerja dan modal memiliki peran yang seimbang} \\ > \theta_3, \text{tenaga kerja lebih berperan dibandingkan modal} \end{cases}$$

$$2.\ \theta_2 + \theta_3 \begin{cases} < 1, \text{tingkat pengembalian terhadap skala menurun} \\ = 1, \text{tingkat pengembalian terhadap skala tetap} \\ > 1, \text{tingkat pengembalian terhadap skala meningkat} \end{cases}$$

Dengan demikian model regresi nonlinier dalam penelitian ini didefinisikan sebagai:

$$Y_i = \theta_1 X_{i1}^{\theta_2} X_{i2}^{\theta_3} + \varepsilon_i \qquad (2.4)$$

di mana Y_i = output produksi ke-i

X_{i1} = input tenaga kerja ke-i

X_{i2} = input modal ke-i

(Ramadhani, 2011).

2.3 Metode *Nonlinear Least Square* (NLS)

Metode *Nonlinear Least Square* merupakan metode kuadrat terkecil dalam kasus (intrinsik) nonlinier untuk menduga parameter model dengan cara meminimumkan jumlah kuadrat sisaan.

Draper dan Smith (1992) mendefinisikan jumlah kuadrat sisaan model nonlinier sebagai:

$$JKS = \sum_{i=1}^{n} \left\{ Y_i - \left(\theta_1 X_{i1}^{\theta_2} X_{i2}^{\theta_3} \right) \right\}^2 \qquad (2.5)$$

Turunan jumlah kuadrat sisaan (persamaan (2.5)) secara parsial terhadap θ_u akan menghasilkan $\hat{\theta}$ berdasarkan persamaan normal:

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^{n}\left\{Y_i-\left(\theta_1 X_{i1}^{\theta_2} X_{i2}^{\theta_3}\right)\right\}^2}{\partial \theta_u}=0 \qquad (2.6)$$

Solusi persamaan (2.6) tidak dapat diperoleh secara analitik sehingga diperlukan metode numerik untuk mendapatkan penduga parameter secara iteratif. Salah satu metode numerik untuk regresi nonlinier adalah *Gauss Newton*.

Metode *Gauss Newton* disebut juga metode linierisasi, yang menggunakan deret Taylor untuk mendekati model regresi nonlinier dengan persamaan linier. Kutner dkk (2005) menjelaskan bahwa proses iterasi pada metode ini akan menghasilkan solusi untuk permasalahan regresi nonlinier. Pada semua proses iterasi dibutuhkan suatu penduga awal. Menurut Draper dan Smith (1992), penduga awal yang baik dapat membuat penduga konvergen jauh lebih cepat. Myers (1990) menjelaskan bahwa penduga awal dapat diperoleh dengan cara meregresikan fungsi linier, misal $\ln Y =$ lnθ1+θ2X adalah fungsi linier dari Y=θ1eθ2X. Regresi linier dari ln Y dan X akan menghasilkan penduga awal untuk θ_1 (yaitu antilog dari intersep fungsi linier) dan slope dari model regresi digunakan sebagai penduga awal bagi θ_2.

Pendekatan model regresi nonlinier (persamaan (2.4)) menggunakan metode *Gauss Newton* adalah (Myers, 1990 dan Kutner dkk, 2005):

$$f(X_{ij},\theta_u)=f(X_{ij},\hat{\theta}_{u,0})+\sum_{u=1}^{k}(\hat{\theta}_u-\hat{\theta}_{u,0})\left[\frac{\partial f(X_{ij},\hat{\theta}_{u,0})}{\partial \theta_u}\right]+\varepsilon_i \qquad (2.7)$$

di mana $f(X_{ij},\theta_u) = \theta_1 X_{i1}^{\theta_2} X_{i2}^{\theta_3}$

$f(X_{ij},\hat{\theta}_{u,0}) = \hat{\theta}_{1,0} X_{i1}^{\hat{\theta}_{2,0}} X_{i2}^{\hat{\theta}_{3,0}}$

$\hat{\theta}_{u,0}$ = penduga awal bagi θ_u

$(\hat{\theta}_{u,1}-\hat{\theta}_{u,0}) = \gamma_u$ = parameter model (2.7)

$\left[\frac{\partial f(X_{ij},\hat{\theta}_{u,0})}{\partial \theta_u}\right] = w_{ui}$

sehingga,

$$\theta_1 X_{i1}^{\theta_2} X_{i2}^{\theta_3} = \hat{\theta}_{1,0} X_{i1}^{\hat{\theta}_{2,0}} X_{i2}^{\hat{\theta}_{3,0}} + \sum_{u=1}^{k} \gamma_u w_{ui} + \varepsilon_i \qquad (2.8)$$

Apabila $\theta_1 X_{i1}^{\theta_2} X_{i2}^{\theta_3} - \hat{\theta}_{1,0} X_{i1}^{\hat{\theta}_{2,0}} X_{i2}^{\hat{\theta}_{3,0}} = Y_{i,0}$, maka diperoleh persamaan linier:

$$Y_{i,0} = \sum_{u=1}^{k} \gamma_u w_{ui} + \varepsilon_i \qquad (2.9)$$

Metode Kuadrat Terkecil (MKT) digunakan untuk menduga parameter γ_u, dengan catatan bahwa pendugaan parameter dilakukan tanpa melibatkan unsur intersep.

Penduga parameter model nonlinier $\hat{\theta}_u$ pada metode *Gauss Newton* tidak dapat diperoleh secara langsung, sehingga diperlukan proses iterasi menurut prosedur:

1. Membentuk model

   $$Y_{i,s-1} = \sum_{u=1}^{k} \gamma_{u,s} w_{ui,s-1} + \varepsilon_i \qquad (2.10)$$

   di mana $Y_{i,s-1} = \theta_1 X_{i1}^{\theta_2} X_{i2}^{\theta_3} - \hat{\theta}_{1,s-1} X_{i1}^{\hat{\theta}_{2,s-1}} X_{i2}^{\hat{\theta}_{3,s-1}}$

   $\gamma_{u,s}$ = parameter model (2.10) pada iterasi ke-s

   $$w_{ui,s-1} = \left[\frac{\partial \left(\hat{\theta}_{1,s-1} X_{i1}^{\hat{\theta}_{2,s-1}} X_{i2}^{\hat{\theta}_{3,s-1}}\right)}{\partial \theta_u}\right]$$

   s = 1,2,3,….
2. Lakukan pendugaan parameter model (2.10) menggunakan metode kuadrat terkecil biasa untuk mendapatkan penduga parameter pada iterasi ke-s $\hat{\gamma}_{1,s}, \hat{\gamma}_{2,s}, \dots, \hat{\gamma}_{k,s}$.
3. Hitung penduga parameter model nonlinier pada iterasi ke-s di mana

   $$\hat{\theta}_{u,s} = \hat{\theta}_{u,s-1} + \hat{\gamma}_{u,s} \qquad (2.11)$$
4. Ulangi proses iterasi sampai diperoleh penduga yang konvergen.

2.4 Pencilan

Pencilan merupakan pengamatan dengan nilai sisaan yang jauh lebih besar dibandingkan sisaan pengamatan lain atau jauh dari rata-rata sisaan (Draper dan Smith, 1992). Soemartini (2007) mendefinisikan pencilan sebagai suatu data yang tidak mengikuti sebagian besar pola data yang mungkin dapat berpengaruh besar terhadap koefisien regresi.

Pencilan dapat muncul karena kesalahan pemasukan data, kesalahan pengambilan contoh dan terdapat pengamatan ekstrim yang tidak dapat dihindarkan. Soemartini (2007) menjelaskan bahwa keberadaan pencilan dapat menimbulkan pelanggaran terhadap asumsi kenormalan sisaan antara lain:

1. Rata-rata sisaan tidak sama dengan nol ($E(\varepsilon_i) \neq 0$)
2. Ragam menjadi lebih besar ($V(\varepsilon_i) > \sigma^2$)

Jenis pencilan dibedakan menjadi pencilan berpengaruh dan pencilan tidak berpengaruh. Draper dan Smith (1992) menjelaskan bahwa pencilan berpengaruh merupakan pengamatan yang berpengaruh besar terhadap penduga parameter. Kutner dkk (2005) menambahkan bahwa pengaruh besar ini terlihat dari perubahan yang besar pada tanda dan besar nilai penduga parameter apabila pengamatan (pencilan) dibuang. Alasan dilakukan pendeteksian pencilan dikarenakan metode pendugaan parameter biasa kurang peka terhadap keberadaan pencilan sehingga model yang dihasilkan tidak sesuai dengan data.

2.5 Pendeteksian Pencilan

Menurut Bowerman dan O'Connel (1990) dan Myers (1990) terdapat beberapa cara untuk mengetahui keberadaan pencilan, antara lain:

2.5.1 Nilai pengaruh (*Leverage Value*)

Digunakan untuk mengetahui keberadaan pencilan pada peubah prediktor X berlandaskan hipotesis:

H_0 : Prediktor ke-i bukan merupakan pencilan

lawan

H_1 : Prediktor ke-i merupakan pencilan

Nilai pengaruh didefinisikan sebagai:

$$h_{ii} = \underset{1\times k}{\underset{\sim}{X}_i'} \left(\underset{k\times n}{\underset{\sim}{X}'} \underset{n\times k}{\underset{\sim}{X}} \right)^{-1} \underset{k\times 1}{\underset{\sim}{X}_i} \qquad (2.12)$$

di mana $\underset{1\times k}{\underset{\sim}{X}_i'} = \begin{bmatrix} 1 & X_{i1} & X_{i2} & \cdots & X_{ip} \end{bmatrix}$

$$\underset{n\times k}{\underset{\sim}{X}} = \begin{bmatrix} 1\, X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1p} \\ 1\, X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2p} \\ \vdots\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1\, X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{np} \end{bmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^{n} h_{ii} = k \; ; \; 0 \le h_{ii} \le 1$$

Kriteria pengujian yang melandasi keputusan adalah:

$$h_{ii} \begin{cases} \le 2\dfrac{(p+1)}{n}, \text{terima } H_0, X_{ij} \text{ bukan pencilan} \\ > 2\dfrac{(p+1)}{n}, \text{tolak } H_0, X_{ij} \text{ pencilan} \end{cases} \tag{2.13}$$

2.5.2 *Studentized Deleted Residual* (TRES)

Keberadaan pencilan pada peubah respons Y diketahui melalui TRES berlandaskan hipotesis:

H_0 : Respons ke-i bukan merupakan pencilan

lawan

H_1 : Respons ke-i merupakan pencilan

Statistik uji TRES didefinisikan sebagai berikut:

$$\text{TRES}_i = e_i \left[\frac{n-p-2}{\text{JKS}(1-h_{ii})-e_i^2}\right]^{1/2} \sim t_{(n-p-2)} \tag{2.14}$$

di mana e_i = sisaan pengamatan ke-i $(y_i - \hat{y}_i)$

JKS = Jumlah Kuadrat Sisaan

Kriteria pengujian yang melandasi keputusan adalah:

$$|\text{TRES}_i| \begin{cases} \le t_{\alpha/2, n-p-2,} \text{terima } H_0, Y_i \text{ bukan pencilan} \\ > t_{\alpha/2, n-p-2}, \text{tolak } H_0, Y_i \text{ pencilan} \end{cases} \tag{2.15}$$

2.6 Mendeteksi Pencilan Berpengaruh

Pencilan berpengaruh merupakan pengamatan yang berpengaruh besar terhadap penduga parameter regresi. Pengaruh besar ini terlihat dari perubahan yang besar pada tanda dan besar nilai penduga parameter apabila pengamatan (pencilan) dibuang. Pengamatan berpengaruh dapat diketahui dengan menggunakan DFITS dan jarak Cook (Kutner dkk, 2005).

2.6.1 *The Difference in Fit Statistics* (DFITS)

Digunakan untuk mengetahui pengamatan yang berpengaruh besar terhadap penduga Y berlandaskan hipotesis:

H_0 :Pengamatan ke-i tidak berpengaruh besar terhadap penduga Y

lawan

H_1 :Pengamatan ke-i berpengaruh besar terhadap penduga Y

Statistik uji DFITS didefinisikan sebagai berikut:

$$\mathrm{DFITS_i} = \left[\frac{\mathrm{h_{ii}}}{1-\mathrm{h_{ii}}}\right]^{1/2} \mathrm{e_i}\left[\frac{\mathrm{n-p-2}}{\mathrm{JKS(1-h_{ii})-e_i^2}}\right]^{1/2} \qquad (2.16)$$

Kriteria pengujian yang melandasi keputusan adalah

$$|\mathrm{DFITS_i}| \begin{cases} \leq 2\sqrt{\dfrac{\mathrm{p+1}}{\mathrm{n}}}, \text{terima } \mathrm{H_0} \\ > 2\sqrt{\dfrac{\mathrm{p+1}}{\mathrm{n}}}, \text{tolak } \mathrm{H_0} \end{cases} \qquad (2.17)$$

2.6.2 Jarak Cook (*Cook's Distance*)

Pengamatan yang berpengaruh besar terhadap koefisien regresi diketahui melalui Jarak Cook berlandaskan hipotesis:

H_0 : Pengamatan ke-i tidak berpengaruh besar terhadap koefisien regresi

lawan

H_1 : Pengamatan ke-i berpengaruh besar terhadap koefisien regresi

Jarak Cook adalah selisih antara penduga parameter untuk n pengamatan dan penduga parameter tanpa pengamatan ke-i (pencilan):

$$D_i = \frac{\left(\underset{k\times 1}{\hat{\theta}_{\underset{\sim}{u}}} - \underset{k\times 1}{\hat{\theta}_{\underset{\sim}{u}}(i)}\right)'\left(\underset{k\times n}{\underset{\sim}{X}}'\underset{n\times k}{\underset{\sim}{X}}\right)\left(\underset{k\times 1}{\hat{\theta}_{\underset{\sim}{u}}} - \underset{k\times 1}{\hat{\theta}_{\underset{\sim}{u}}(i)}\right)}{(p+1)s^2} \sim F_{(p+1),n-(p+1)}$$

(2.18)

di mana $\underset{k\times 1}{\hat{\theta}_{\underset{\sim}{u}}}$ = penduga parameter sebelum pengamatan (pencilan) ke-i dibuang (n)

$\hat{\underset{\sim}{\theta}}_{u}(i)_{k\times 1}$ = penduga parameter setelah pengamatan (pencilan) ke-i dibuang (n-1)

$s^2 \quad = \frac{\text{JKS}}{n-p-1}$

Kriteria pengujian yang melandasi keputusan adalah:

$$D_i \begin{cases} \leq F^{\alpha}_{(p+1),n-(p+1)}, \text{terima } H_0 \\ > F^{\alpha}_{(p+1),n-(p+1)}, \text{tolak } H_0 \end{cases} \quad (2.19)$$

2.7 Regresi Robust

Regresi *robust* digunakan untuk menganalisis data yang mengandung pencilan (Chen, 2002). Menurut Ryan (1997), tujuan penggunaan regresi *robust* antara lain:

1. menampilkan penduga yang sama baik dengan penduga kuadrat terkecil biasa jika asumsi analisis regresi terpenuhi dan data tidak mengandung pencilan
2. menampilkan penduga yang lebih baik dari penduga kuadrat terkecil biasa jika asumsi analisis regresi tidak terpenuhi dan terdapat pencilan dalam data

Dikatakan bahwa regresi *robust* dapat mengurangi pengaruh pencilan jika dibandingkan dengan penduga kuadrat terkecil biasa (Kutner dkk, 2005). Rousseeuw dan Leroy (1997) menjelaskan bahwa analisis regresi *robust* menghasilkan model regresi yang sesuai dengan sebagian besar data. Beberapa metode pendugaan parameter regresi *Robust* antara lain *Least Median Square* (LMS), *Least Trimmed Square* dan penduga S (Chen, 2002).

2.8 *Nonlinear Least Trimmed Square* (NLTS)

Metode pendugaan parameter regresi *robust* model nonlinier terhadap data yang mengandung pencilan adalah *Nonlinear Least Trimmed Squares*. Cizek (2001) menjelaskan bahwa pendugaan parameter NLTS dapat diselesaikan dengan metode *Nonlinear Least Squares* untuk h pengamatan yang terletak dalam interval $\frac{n}{2} \leq h \leq n$. Penduga NLTS didefinisikan sebagai berikut:

$$\hat{\theta}^{(NLTS,h)} = \underset{\theta \in R^k}{\arg\min} \sum_{i=1}^{h} e_{[i]}^2 = \underset{\theta \in R^k}{\arg\min} \sum_{i=1}^{h} \left\{ Y_i - f\left(X_{ij}, \theta_u\right) \right\}^2 \quad (2.20)$$

di mana

arg = argument

min = minimum

R^k = ruang euclidis berdimensi k (k = p+1)

h =konstanta pemotongan (*trimming constant*) $\left(h = \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{p+1}{2}\right] \text{ atau } h = \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{p+2}{2}\right]\right)$

$e_{[i]}^2$ = statistik peringkat ke-i untuk e_i^2 $\left(e_{[1]}^2 \leq e_{[2]}^2 \leq \cdots \leq \right.$ en2

Sejumlah h pengamatan yang memiliki kuadrat sisaan $e_{[1]}^2 \leq e_{[2]}^2 \leq \cdots \leq e_{[h]}^2$ digunakan untuk menduga parameter NLTS, sedangkan (n-h) pengamatan dengan kuadrat sisaan besar $\left(e_{[h+1]}^2 \leq\right.$ eh+22≤...≤en2 tidak akan mempengaruhi penduga parameter model.

2.9 Metode *Bootstrap*

Metode *bootstrap* pertama kali diperkenalkan oleh Bradley Efron pada tahun 1979. Ika (2010) menjelaskan bahwa metode ini memiliki konsep dasar membangkitkan data secara acak dengan pengembalian sekumpulan data awal, sehingga beberapa nilai pengamatan awal akan berulang. Misal data awal $\left(X_{1j}, X_{2j}, \ldots, X_{nj}\right)$ maka data *bootstrap* terdiri atas $\left(X_{1j}^*, X_{2j}^*, \ldots, X_{nj}^*\right)$ di mana $X_{1j}^* = X_{7j}$, $X_{2j}^* = X_{3j}$, $X_{3j}^* = X_{3j}, \ldots$, $X_{4j}^* = X_{22j}$, $X_{nj}^* = X_{7j}$. Peluang setiap pengamatan untuk terambil sebagai contoh *bootstrap* adalah $\frac{1}{n}$. Menurut Efron dan Tibshirani (1993), banyaknya pengulangan *bootstrap* untuk mengukur ketepatan dari penduga parameter $\hat{\theta}$ antara 25 dan 200. *Pairs bootstrap* merupakan salah satu metode *bootstrap* yang melakukan *resampling* pada setiap peubah prediktor dan respons dari data awal.

2.10 Sifat Penduga *Non Linear Least Trimmed Square* (NLTS) Menggunakan Metode *Bootstrap*

Sifat penduga metode NLTS termasuk kategori sifat contoh besar atau asimtotik. Sesuai dengan definisi pada Keith, dkk (1992), sifat contoh besar atau asimtotik antara lain:

2.10.1 Ketidakbiasan asimtotik

Penduga parameter $\hat{\theta}$ dikatakan tak bias secara asimtotik jika

$$\text{Bias} = \lim_{n\to\infty} E(\hat{\theta}_n) - \theta = 0 \qquad (2.21)$$

Semakin kecil nilai bias yang dihasilkan, maka semakin baik penduga karena nilai penduga mendekati nilai parameter. Bias penduga *bootstrap* (*resampling*) adalah:

$$\text{Bias} = \left|\hat{\theta}^*_{(.)} - \theta\right| \qquad (2.22)$$

di mana

$$\hat{\theta}^*_{(.)} = \frac{\sum_{b=1}^{B} \hat{\theta}^*(b)}{B}$$

B = banyaknya pengulangan *bootstrap* ; b = 1,2,…,B

2.10.2 Konsistensi

Penduga dikatakan bersifat konsisten jika:

$$\lim_{n\to\infty} \text{Var}(\hat{\theta}_n) = \lim_{n\to\infty} E\left\{\left[\hat{\theta}_n - \lim_{n\to\infty} E(\hat{\theta}_n)\right]^2\right\} = 0 \qquad (2.23)$$

Kekonsistenan suatu penduga dapat diuji apabila penduga tersebut telah memenuhi sifat ketidakbiasan asimtotik. Penduga dikatakan konsisten jika ragam $\hat{\theta}_n$ mendekati nol ketika ukuran contoh semakin membesar. Konsistensi penduga *bootstrap* (*resampling*) adalah:

$$\frac{1}{B}\sum_{b=1}^{B}\left\{\left[\hat{\theta}^*(b) - \hat{\theta}^*_{(.)}\right]^2\right\} \qquad (2.24)$$

2.11 *Mean Square Error* (MSE)

Penduga parameter dikatakan baik apabila memiliki nilai bias dan ragam yang kecil. Oleh karena itu, untuk melihat kebaikan penduga parameter berdasarkan nilai bias dan ragam secara bersamaan maka diperlukan MSE. MSE merupakan nilai harapan dari kuadrat selisih penduga dengan parameter:

$$MSE(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta} - \theta)^2$$
$$= E(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}) + E(\hat{\theta}) - \theta)^2$$
$$= E(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2 + E(E(\hat{\theta}) - \theta)^2$$
$$- 2E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))(E(\hat{\theta}) - \theta)] \qquad (2.25)$$

karena

$$E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))(E(\hat{\theta}) - \theta)]$$
$$= E[\hat{\theta}.E(\hat{\theta}) - (E(\hat{\theta}))^2 - \hat{\theta}.\theta + \theta.E(\hat{\theta})]$$
$$= (E(\hat{\theta}))^2 - (E(\hat{\theta}))^2 - \theta.E(\hat{\theta}) + \theta.E(\hat{\theta})$$
$$= 0 \qquad (2.26)$$

Sehingga,

$$\text{MSE}(\hat{\theta}) = \text{Var}(\hat{\theta}) + (\text{Bias}(\hat{\theta}))^2 \qquad (2.27)$$

Semakin kecil nilai MSE yang dihasilkan maka semakin baik penduga parameter (Mendenhall, dkk., 1990).