

BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Pendeteksian Pencilan dan Pencilan Berpengaruh

Penelitian ini menggunakan data simulasi yang dibangkitkan berdasarkan model *Cobb Douglas* nonlinier dengan ukuran contoh (n) 15, 30, 50 dan pencilan sebanyak 6%, 8%, 10%. Banyaknya pencilan untuk setiap ukuran contoh disajikan pada Tabel 4.1.

Tabel 4.1. Hasil perhitungan banyaknya pencilan

n	Pencilan (%)	Banyaknya pencilan	Pembulatan
15	6	0.9	1
	8	1.2	1
	10	1.5	2
30	6	1.8	2
	8	2.4	2
	10	3	3
50	6	3	3
	8	4	4
	10	5	5

Metode *resampling bootstrap* digunakan untuk membandingkan sifat penduga NLS dan NLTS sehingga dilakukan pengulangan *bootstrap* sebanyak 200 kali pada setiap kombinasi pencilan dan ukuran contoh. Data hasil pengulangan *bootstrap* tersebut dideteksi menggunakan nilai pengaruh dan TRES untuk mengetahui keberadaan pencilan pada peubah prediktor X dan peubah respons Y. Selain itu, dilakukan pendeteksian pencilan berpengaruh menggunakan DFITS dan jarak Cook untuk mengetahui pengamatan (pencilan) yang berpengaruh besar terhadap penduga Y (\hat{Y}) dan koefisien regresi.

Berdasarkan hasil pendeteksian pencilan dan pencilan berpengaruh pada setiap set data *bootstrap* diketahui bahwa pencilan hanya berpengaruh terhadap penduga Y (\hat{Y}) karena memiliki nilai DFITS yang lebih besar dari $2\sqrt{\frac{(p+1)}{n}}$.

4.2 Pendugaan parameter

4.2.1 Metode *Nonlinear Least Square* (NLS)

Metode NLS merupakan metode pendugaan parameter pada regresi biasa sehingga tidak dapat mengurangi pengaruh pencilan pada tanda dan besar nilai penduga parameter jika dibandingkan dengan regresi *robust*. Oleh karena itu, metode ini diterapkan dengan anggapan bahwa tidak terdapat pencilan pada data simulasi *bootstrap*. Pendugaan parameter menggunakan metode ini dilakukan secara iteratif karena solusi persamaan normal tidak dapat diperoleh secara analitik. Proses iterasi dilakukan dengan metode *Gauss Newton*. Rata-rata dari 200 penduga parameter *bootstrap* untuk setiap kombinasi pencilan dan ukuran contoh disajikan pada Tabel 4.2.

Tabel 4.2. Rata-rata penduga parameter *bootstrap* menggunakan metode NLS

n	Pencilan (%)	Rata-Rata Penduga Parameter <i>Bootstrap</i>		
		$\hat{\theta}_1$	$\hat{\theta}_2$	$\hat{\theta}_3$
15	6	1.552455	1.136178	0.419713
	8	1.552455	1.136178	0.419713
	10	1.689567	0.378878	1.164006
30	6	1.548327	1.213273	0.345103
	8	1.548327	1.213273	0.345103
	10	1.71783	0.268113	1.272809
50	6	1.662062	0.58746	0.95901
	8	1.547048	1.169814	0.381695
	10	1.734446	0.157317	1.3766

Berdasarkan penduga parameter pada Tabel 4.2 maka dapat dibentuk model fungsi produksi *Cobb Douglas* nonlinier, misal untuk ukuran contoh 15 dan pencilan 6%:

$$\hat{Y}_i = 1.552455 X_{i1}^{1.136178} X_{i2}^{0.419713} \quad (4.1)$$

di mana Y_i adalah output produksi cat perusahaan ke- i , X_{i1} adalah jam kerja karyawan perusahaan ke- i dan X_{i2} adalah jam kerja mesin perusahaan ke- i . Persamaan (4.1) didasarkan pada data simulasi yang menirukan operasi suatu sistem produksi cat di PT. Mikatasa, yang menghasilkan interpretasi:

- a. Indeks efisiensi produksi cat sebesar 1.552455%, menunjukkan bahwa penggunaan input sebesar 1.552455% akan menghasilkan output maksimal tanpa mengabaikan kualitas cat yang diproduksi.
- b. Elastisitas produksi untuk penggunaan jam kerja karyawan sebesar 1.136178%, menjelaskan bahwa setiap peningkatan jam kerja karyawan sebesar 1% akan meningkatkan produksi cat sebesar 1.136178% dengan asumsi jam kerja mesin bersifat konstan.
- c. Elastisitas produksi untuk penggunaan jam kerja mesin sebesar 0.419713%, berarti bahwa setiap peningkatan jam kerja mesin sebesar 1% akan meningkatkan produksi cat sebesar 0.419713% dengan asumsi jam kerja karyawan bersifat konstan.
- d. Karyawan lebih berperan dibandingkan mesin, karena $\hat{\theta}_2(1.136178) > \hat{\theta}_3(0.419713)$.
- e. Tingkat pengembalian terhadap skala (*return to scale*) meningkat karena $\hat{\theta}_2 + \hat{\theta}_3 > 1$, sehingga jika jumlah semua input yang digunakan dinaikkan sebesar 1% maka produksi cat akan meningkat lebih dari 1%.

4.2.2 Metode *Nonlinear Least Trimmed Square* (NLTS)

Metode NLTS diterapkan pada data yang mengandung pencilan karena menghasilkan penduga yang lebih baik dari penduga kuadrat terkecil biasa ketika asumsi analisis regresi tidak terpenuhi dan terdapat pencilan dalam data. Pendugaan parameter NLTS diselesaikan dengan metode NLS untuk h pengamatan. Nilai h diperoleh dari $h = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{p+1}{2} \right\rfloor$ atau $h = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{p+2}{2} \right\rfloor$. Sebelum menentukan h pengamatan yang digunakan dalam menduga parameter, terlebih dahulu dibuat statistik peringkat ke- i untuk e_i^2 di mana $e_{[1]}^2 \leq e_{[2]}^2 \leq \dots \leq e_{[n]}^2$. Data yang memiliki $e_{[1]}^2 \leq e_{[2]}^2 \leq \dots \leq e_{[h]}^2$ digunakan untuk menduga parameter NLTS. Sedangkan sebanyak $n-h$ pengamatan yang memiliki $e_{[h+1]}^2 \leq e_{[h+2]}^2 \leq \dots \leq e_{[n]}^2$ tidak diikuti dalam pendugaan parameter. Nilai h data simulasi disajikan pada Tabel 4.3.

Tabel 4.3. Nilai h data simulasi

Data	n	p	h
1	15	2	10
2	30	2	17
3	50	2	27

Setelah nilai h diketahui untuk setiap ukuran contoh maka dilakukan pendugaan parameter menggunakan metode NLTS. Rata-rata dari 200 penduga parameter *bootstrap* untuk setiap kombinasi pencilan dan ukuran contoh disajikan pada Tabel 4.4.

Tabel 4.4. Rata-rata penduga parameter *bootstrap* dengan menggunakan metode NLTS

n	Pencilan (%)	Rata-Rata Penduga Parameter <i>Bootstrap</i>		
		$\hat{\theta}_1$	$\hat{\theta}_2$	$\hat{\theta}_3$
15	6	1.49835	1.437648	0.123236
	8	1.49835	1.437648	0.123236
	10	1.480404	1.497187	0.064751
30	6	1.641937	0.630952	0.916532
	8	1.641937	0.630952	0.916532
	10	1.620965	0.71456	0.833951
50	6	1.606888	0.825373	0.724918
	8	1.60311	0.839421	0.706684
	10	1.618583	0.762544	0.786663

Interpretasi penduga parameter pada Tabel 4.4 sama dengan interpretasi Tabel 4.2 karena menggunakan model nonlinier yang sama yaitu model fungsi produksi *Cobb Douglas* nonlinier.

4.3 Perbandingan nilai bias, ragam dan MSE penduga parameter *bootstrap* akibat pertambahan banyaknya pencilan dan ukuran contoh

Sifat penduga yang dibandingkan dalam penelitian ini adalah sifat ketidakkbiasan asimtotik dan konsistensi yang dapat dilihat melalui nilai bias dan ragam penduga. Selain itu, untuk melihat kebaikan penduga parameter berdasarkan nilai bias dan ragam secara

bersamaan, maka digunakan *Mean Square Error* (MSE). Semakin kecil nilai bias, ragam dan MSE penduga, maka semakin baik penduga yang dihasilkan. Nilai bias, ragam dan MSE penduga parameter *bootstrap* dapat dilihat pada Tabel 4.5, Tabel 4.6 dan Tabel 4.7.

Tabel 4.5. Nilai bias penduga parameter *bootstrap* menggunakan metode NLS dan NLTS

n	Pencilan (%)	Nilai bias (NLS)			Nilai bias (NLTS)		
		$\hat{\theta}_1$	$\hat{\theta}_2$	$\hat{\theta}_3$	$\hat{\theta}_1$	$\hat{\theta}_2$	$\hat{\theta}_3$
15	6	0.0576	0.3362	0.3303	0.1117	0.6377	0.6268
	8	0.0576	0.3362	0.3303	0.1117	0.6377	0.6268
	10	0.0796	0.4211	0.4140	0.1295	0.6972	0.6853
30	6	0.0617	0.4133	0.4049	0.0319	0.1691	0.1665
	8	0.0617	0.4133	0.4049	0.0319	0.1691	0.1665
	10	0.1078	0.5319	0.5228	0.0109	0.0854	0.0839
50	6	0.0521	0.2125	0.2090	0.0031	0.0254	0.0251
	8	0.0629	0.3698	0.3683	0.0069	0.0394	0.0433
	10	0.1245	0.6427	0.6266	0.0086	0.0375	0.0367

Tabel 4.6. Nilai ragam penduga parameter *bootstrap* menggunakan metode NLS dan NLTS

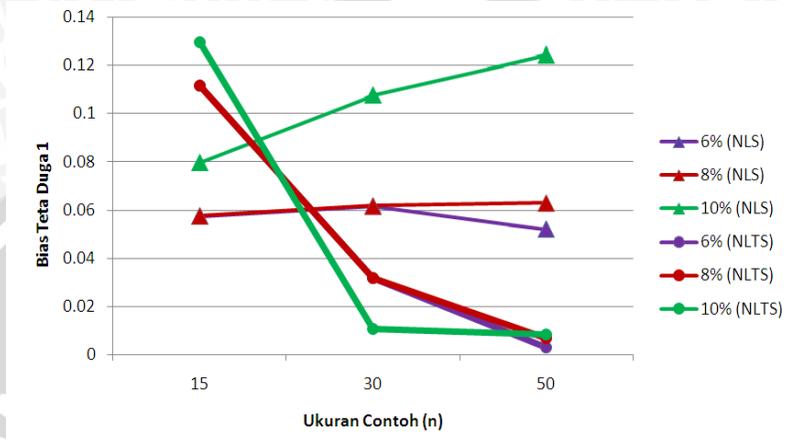
n	Pencilan (%)	Nilai ragam (NLS)			Nilai ragam (NLTS)		
		$\hat{\theta}_1$	$\hat{\theta}_2$	$\hat{\theta}_3$	$\hat{\theta}_1$	$\hat{\theta}_2$	$\hat{\theta}_3$
15	6	0.0135	0.4235	0.4091	0.0036	0.1155	0.1115
	8	0.0135	0.4235	0.4091	0.0036	0.1155	0.1115
	10	0.0039	0.1073	0.1036	0.0146	0.1224	0.1182
30	6	0.0347	1.2113	1.1654	0.0006	0.0170	0.0166
	8	0.0347	1.2113	1.1654	0.0006	0.0170	0.0166
	10	0.0241	0.6556	0.6331	0.0059	0.0203	0.0196
50	6	0.0441	1.2400	1.2000	0.0008	0.0233	0.0225
	8	0.0162	0.5020	0.0497	0.00096	0.0276	0.0259
	10	0.0043	0.1020	0.0112	0.00098	0.0276	0.0266

Tabel 4.7. Nilai MSE penduga parameter *bootstrap* menggunakan metode NLS dan NLTS

n	Pencilan (%)	Nilai MSE (NLS)			Nilai MSE (NLTS)		
		$\hat{\theta}_1$	$\hat{\theta}_2$	$\hat{\theta}_3$	$\hat{\theta}_1$	$\hat{\theta}_2$	$\hat{\theta}_3$
15	6	0.0168	0.5365	0.5182	0.0161	0.5220	0.5043
	8	0.0168	0.5365	0.5182	0.0161	0.5220	0.5043
	10	0.0103	0.2847	0.2749	0.0314	0.6085	0.5878
30	6	0.0385	1.3821	1.3293	0.0016	0.0456	0.0443
	8	0.0385	1.3821	1.3293	0.0016	0.0456	0.0443
	10	0.0357	0.9385	0.9065	0.0059	0.0276	0.0266
50	6	0.0468	1.2885	1.2442	0.0008	0.0239	0.0231
	8	0.0202	0.6391	0.6325	0.0010	0.0292	0.0278
	10	0.0197	0.5149	0.5047	0.0011	0.0289	0.0279

Penyajian dalam bentuk grafik akan mempermudah perbandingan sifat penduga *bootstrap* NLS dan NLTS seiring pertambahan banyaknya pencilan dan ukuran contoh. Secara berturut-turut grafik berwarna ungu, merah dan hijau untuk pencilan sebanyak 6%, 8% dan 10%. Tanda segitiga untuk bias, ragam dan MSE penduga NLS, sedangkan lingkaran untuk NLTS.

4.3.1 Bias penduga parameter *bootstrap*

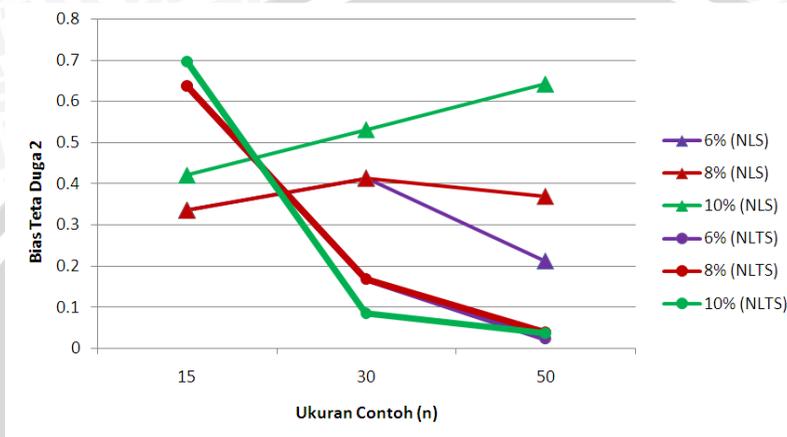


Gambar 4.1. Bias $\hat{\theta}_1$ akibat pertambahan banyaknya pencilan dan ukuran contoh

Perubahan nilai bias $\hat{\theta}_1$ akibat pertambahan banyaknya pencilan dan ukuran contoh tampak pada Gambar 4.1 menghasilkan interpretasi:

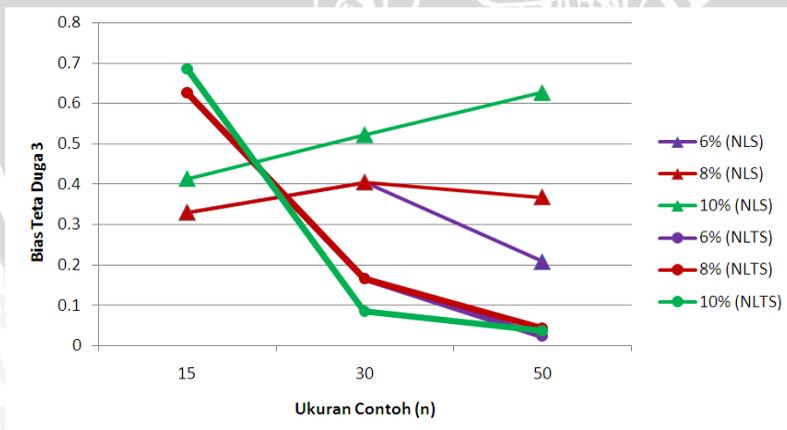
1. Penduga NLTS lebih baik dibandingkan NLS untuk contoh berukuran 30 dan 50 karena memiliki nilai bias lebih kecil.
2. Bias penduga NLS untuk contoh berukuran 15 dan 30 saat pencilan 6% (ungu) dan 8% (merah) berhimpit karena banyaknya pencilan sama. Begitu juga sebaliknya dengan bias penduga NLTS.
3. Pertambahan banyaknya pencilan mempengaruhi sifat penduga NLS, karena semakin banyak pencilan maka semakin besar bias penduga. Secara berturut-turut ditunjukkan oleh grafik hijau (pencilan 10%), merah (pencilan 8%) dan ungu (pencilan 6%) bertanda setigita. Saat ukuran contoh 50, pencilan 8% memiliki nilai bias lebih besar dari pencilan 6% dengan selisih yang kecil.
4. Sifat penduga NLTS tidak dipengaruhi oleh banyaknya pencilan karena penduga ini kekar (*robust*) terhadap pencilan, dapat dilihat melalui grafik ungu, merah dan hijau bertanda lingkaran yang tidak memiliki pola tertentu seiring pertambahan banyaknya pencilan.

5. Sifat penduga NLTS dipengaruhi oleh ukuran contoh karena semakin besar ukuran contoh, maka semakin kecil bias penduga parameter.



Gambar 4.2. Bias $\hat{\theta}_2$ akibat pertambahan banyaknya pencilan dan ukuran contoh

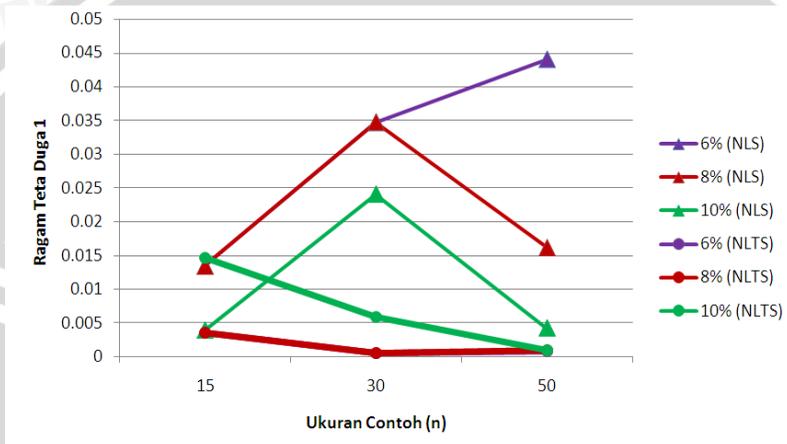
Interpretasi untuk Gambar 4.2 hampir sama dengan Gambar 4.1. Namun selisih nilai bias penduga NLS untuk contoh berukuran 50 saat pencilan 6% dan 8% lebih besar dibandingkan Gambar 4.1.



Gambar 4.3. Bias $\hat{\theta}_3$ akibat pertambahan banyaknya pencilan dan ukuran contoh

Kesimpulan yang diperoleh berdasarkan Gambar 4.3 sama dengan Gambar 4.1, namun selisih nilai bias penduga NLS untuk contoh berukuran 50 saat pencilan 6% dan 8% sama dengan Gambar 4.2.

4.3.2 Ragam penduga parameter *bootstrap*



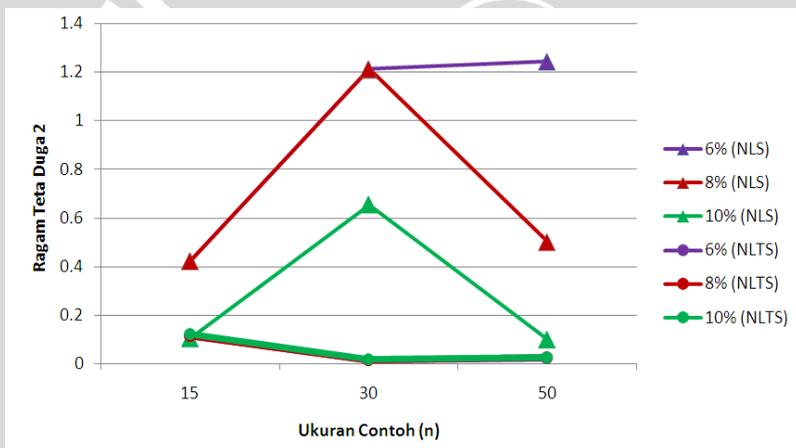
Gambar 4.4. Ragam $\hat{\theta}_1$ akibat pertambahan banyaknya pencilan dan ukuran contoh

Interpretasi untuk perubahan nilai ragam $\hat{\theta}_1$ akibat pertambahan banyaknya pencilan dan ukuran contoh pada Gambar 4.4 adalah:

1. Penduga NLTS lebih konsisten dibandingkan NLS karena memiliki nilai ragam lebih kecil. Namun saat pencilan 10% untuk contoh berukuran 15, penduga NLS lebih konsisten dari NLTS.
2. Ragam penduga NLS untuk contoh berukuran 15 dan 30 saat pencilan 6% (ungu) dan 8% (merah) berhimpit karena banyaknya pencilan sama. Begitu juga sebaliknya dengan ragam penduga NLTS. Namun saat contoh berukuran 50, grafik ungu (pencilan 6%) dan merah (8%) juga berhimpit karena memiliki nilai bias yang hampir sama.
3. Sifat penduga NLS dipengaruhi oleh banyaknya pencilan karena semakin banyak pencilan maka ragam penduga semakin kecil.

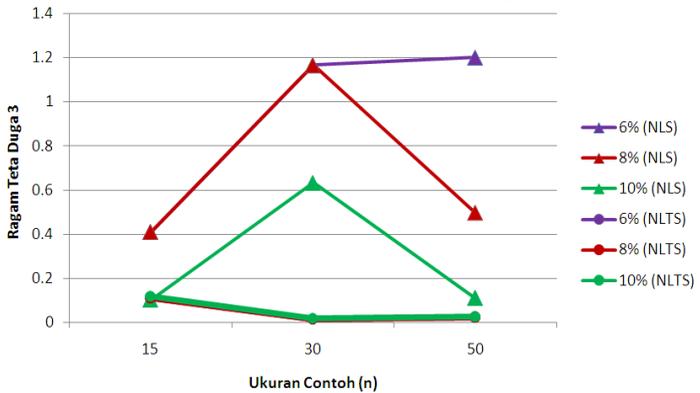
Ditunjukkan oleh grafik ungu (pencilan 6%), merah (pencilan 8%) dan hijau (pencilan 10%) bertanda segitiga. Pencilan 6% dan 8% untuk contoh berukuran 50 memiliki selisih ragam yang besar.

4. Sifat penduga NLTS tidak dipengaruhi oleh pencilan, dapat dilihat melalui grafik ungu dan merah bertanda lingkaran yang berhimpit. Namun saat pencilan 10% (hijau), ragam penduga lebih besar dibandingkan pencilan 6% dan 8% untuk contoh berukuran 15 dan 30
5. Sifat penduga NLTS dipengaruhi oleh ukuran contoh karena semakin besar ukuran contoh maka ragam penduga semakin konsisten (mendekati nol).



Gambar 4.5. Ragam $\hat{\theta}_2$ akibat penambahan banyaknya pencilan dan ukuran contoh

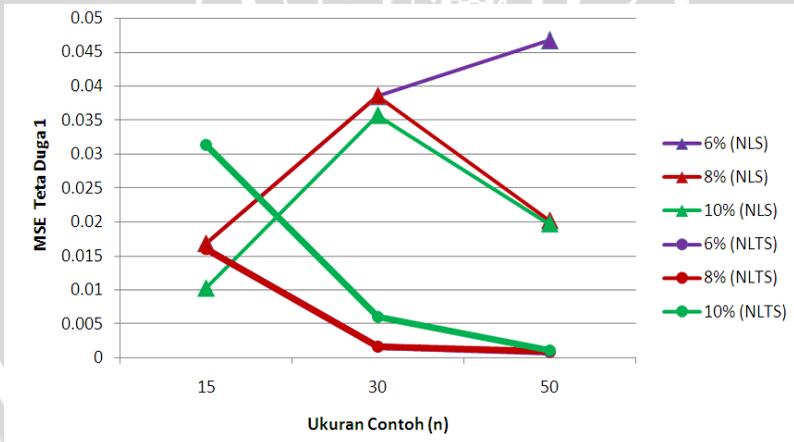
Perubahan nilai ragam $\hat{\theta}_2$ penduga NLS memberikan kesimpulan yang sama dengan ragam $\hat{\theta}_1$. Sedangkan penduga NLTS menghasilkan grafik ungu (pencilan 6%), merah (pencilan 8%) dan hijau (pencilan 10%) yang berhimpit pada berbagai ukuran contoh, menunjukkan bahwa sifat penduga NLTS tidak dipengaruhi oleh banyaknya pencilan. Sedangkan ukuran contoh mempengaruhi sifat penduga NLTS karena semakin besar ukuran contoh, maka ragam semakin konsisten (mendekati nol).



Gambar 4.6. Ragam $\hat{\theta}_3$ akibat pertambahan banyaknya pensil dan ukuran contoh

Kesimpulan untuk Gambar 4.6 dan Gambar 4.5 sama yaitu semakin banyak pensil maka semakin kecil ragam penduga NLS. Sedangkan semakin besar ukuran contoh maka semakin kecil ragam penduga NLTS.

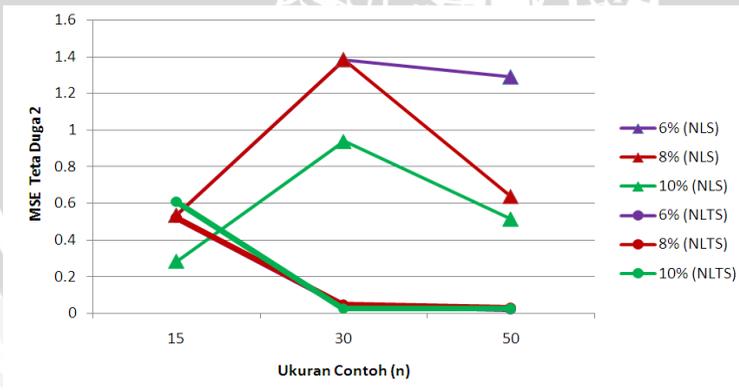
4.3.3 MSE penduga parameter *bootstrap*



Gambar 4.7. MSE $\hat{\theta}_1$ akibat pertambahan banyaknya pensil dan ukuran contoh

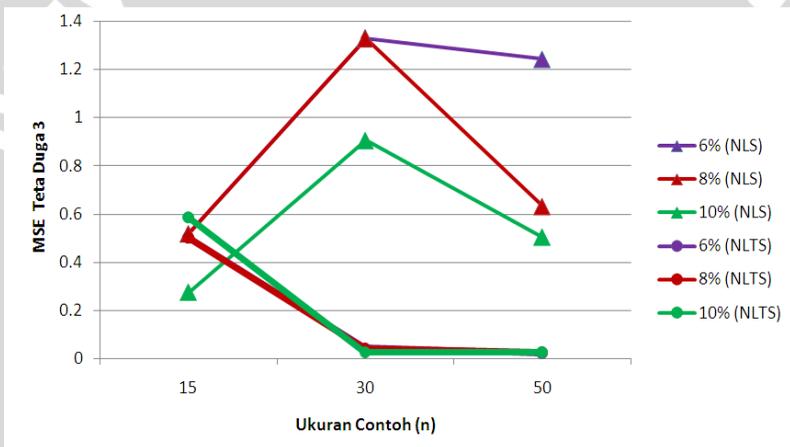
Perubahan nilai MSE $\hat{\theta}_1$ akibat pertambahan banyaknya pencilan dan ukuran contoh tampak pada Gambar 4.7 menghasilkan interpretasi:

1. Penduga NLTS memiliki nilai MSE lebih kecil dari NLS untuk ukuran contoh 30 dan 50.
2. Grafik ungu (pencilan 6%) dan merah (pencilan 8%) penduga NLS saat contoh berukuran 15 dan 30 berhimpit karena banyaknya pencilan sama. Begitu juga sebaliknya dengan penduga NLTS. Namun saat contoh berukuran 50, penduga NLTS juga menghasilkan grafik ungu dan merah yang berhimpit karena memiliki nilai MSE hampir sama.
3. Banyaknya pencilan mempengaruhi sifat penduga NLS karena semakin banyak pencilan maka semakin kecil nilai MSE, dapat dilihat melalui grafik ungu, merah dan hijau bertanda segitiga. Sedangkan pertambahan banyaknya pencilan tidak mempengaruhi sifat penduga NLTS karena penduga ini termasuk penduga yang *robust* (kekar) terhadap pencilan. Kekakuan penduga ini dapat dilihat melalui grafik ungu dan merah yang berhimpit seiring pertambahan ukuran contoh. Namun nilai MSE pencilan 10% lebih besar dibandingkan pencilan 6% dan 8% untuk contoh berukuran 15 dan 30.
4. Sifat penduga NLTS dipengaruhi oleh ukuran contoh karena menghasilkan grafik ungu, merah dan hijau yang semakin kecil seiring pertambahan ukuran contoh.



Gambar 4.8. MSE $\hat{\theta}_2$ akibat pertambahan banyaknya pencilan dan ukuran contoh

Nilai MSE $\hat{\theta}_2$ penduga NLS menghasilkan kesimpulan yang sama dengan MSE $\hat{\theta}_1$. Sedangkan penduga NLTS memberikan kesimpulan yang sedikit berbeda yaitu grafik merah lebih rendah dari hijau saat contoh berukuran 15 dan lebih tinggi saat ukuran contoh 30. Namun pada contoh berukuran 50 grafik ungu, merah dan hijau berhimpit. Hal ini menunjukkan bahwa pencilan tidak mempengaruhi sifat penduga NLTS karena penduga ini adalah penduga yang *robust* (kekar) terhadap pencilan. Pertambahan ukuran contoh mempengaruhi sifat penduga NLTS karena semakin besar ukuran contoh maka semakin kecil MSE penduga (mendekati nol).



Gambar 4.9. MSE $\hat{\theta}_3$ akibat pertambahan banyaknya pencilan dan ukuran contoh

Kesimpulan untuk MSE penduga NLS dan NLTS berdasarkan Gambar 4.9 sama dengan Gambar 4.8 yaitu semakin banyak pencilan, maka semakin kecil MSE penduga NLS. Sedangkan semakin besar ukuran contoh, maka semakin kecil MSE penduga NLTS.

Berdasarkan nilai bias, ragam dan MSE yang dihasilkan penduga NLS dan NLTS, dapat disimpulkan bahwa penduga NLTS lebih baik dari NLS untuk contoh berukuran 30 dan 50. Pertambahan banyaknya pencilan tidak mempengaruhi sifat penduga NLTS karena metode pendugaan parameter ini merupakan salah satu alat pada regresi *robust*. Menurut Kutner, dkk (2005), regresi *robust* dapat mengurangi pengaruh pencilan pada tanda dan besar nilai penduga parameter jika dibandingkan dengan penduga kuadrat terkecil biasa. Hal ini dikarenakan model regresi yang dihasilkan sesuai dengan sebagian besar data. Sedangkan pertambahan ukuran contoh mempengaruhi sifat penduga NLTS. Hal ini sesuai dengan definisi pada Keith, dkk (1992) yaitu semakin besar ukuran contoh maka semakin kecil bias, ragam dan MSE penduga.

Penduga NLS merupakan penduga kuadrat terkecil biasa sehingga dipengaruhi oleh keberadaan pencilan. Menurut Ryan (1997), penduga kuadrat terkecil biasa tidak lebih baik dari penduga *robust* jika asumsi analisis regresi tidak terpenuhi dan terdapat pencilan dalam data. Semakin banyak pencilan maka semakin besar bias penduga, sedangkan ragam dan MSE penduga semakin kecil.

